PROBLEMES FAMOSOS DE PROBABILITAT

Tercer premi **6a Edició del Premi Poincaré (2009)**

Problemes famosos de probabilitat

Autor: Miquel Ferrer Gómez
Centre: IES Joan Brossa (Barcelona)
Tutora: Sra. Eulàlia Roselló

Barcelona, gener 2009

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ 3

PART TEÒRICA 5

1. Probabilitat: Definició i breu història 5

2. Probabilitat: Conceptes 8

- **2.1** Llenguatge dels experiments aleatoris 8
- **2.2** Operacions amb successos 10
- **2.3** El comportament de l'atzar 12
- **2.4** Assignació de probabilitat a un succés 13
- **2.5** Per a què serveix conèixer la probabilitat d'un succés? 14
- **2.6** Successos elementals equiprobables. Regla de Laplace 15
- **2.7** Definició axiomàtica de la probabilitat 18
- **2.8** Propietats de la probabilitat 19
- **2.9** Experiments aleatoris compostos 19
- **2.10** Càlcul directe de probabilitats a partir de diagrames en arbre 23
- **2.11** Probabilitat condicionada. Teorema de Bayes 24

PART PRÀCTICA 28

1. El problema dels punts. Diferents solucions 28

- **1.1** Solució proposada per Luca Pacioli 28
- **1.2** Solució proposada per Niccolò Tartaglia 29
- **1.3** Solució proposada per Blaise Pascal i Pierre Fermat 30

2. El problema del cavaller De Méré. Resolució 31

3. L'agulla de Buffon. Resolució i pràctica 33

4. El problema de Monty Hall 38

4.1 Resolució i pràctica 39

4.2 El problema amb 100 portes. Pràctica 42

5. El problema dels aniversaris. Resolució i pràctica 45

6. La probabilitat en el pòquer. Pràctica 49

CONCLUSIONS 57

BIBLIOGRAFIA 60

ANNEXOS 62

Annex 1 62

1. Combinatòria. Estratègies per comptar 62

2. Variacions 63

2.1 Variacions sense repetició 63

2.2 Variacions amb repetició 64

3. Permutacions 65

3.1 Permutacions sense repetició 65

3.2 Permutacions amb repetició 66

4. Combinacions 67

5. Esquema-Resum 68

INTRODUCCIÓ

Aquest treball de recerca estava proposat per la Universitat de Barcelona i va ser inclòs en la llista de treballs del departament de matemàtiques. De seguida vaig pensar que podia ser interessant, ja que durant els meus anys de secundària, veia com els temes de probabilitat i estadística quedaven relegats a un segon pla en els programes de matemàtiques per manca de temps. Personalment, considero que és una pena. El càlcul de probabilitats m'ha interessat des de fa anys perquè permet aproximar-se a una manera racional de predir el futur (sempre amb les seves limitacions) i el treball m'oferia la possibilitat d'iniciar-me en el càlcul de probabilitats.

Quan pensem en la paraula probabilitat és sovint inevitable pensar en la probabilitat com a eina per calcular estratègies guanyadores en els jocs d'atzar. De fet, el càlcul del guany esperat en aquests jocs va ser l'inici de l'estudi de la probabilitat, com veurem més endavant. Va ser la societat francesa del segle XVII la que va veure néixer el càlcul de probabilitats. Si bé és cert que el primer problema que es va plantejar va ser l'anomenat Problema dels Punts, el que és considerat l'inici del càlcul de probabilitats és la correspondencia entre Blaise Pascal i Pierre Fermat. Aquest conjunt de cartes responien els dubtes que el cavaller De Méré va plantejar a Blaise Pascal (Problema del cavaller De Méré).

Malgrat els seus orígens, les aplicacions de la probabilitat són nombroses avui en dia: des d'estadística (economia i finances, psicologia i ciències socials en general), passant per les ciències actuarials (assegurances de vida, fons de pensions), o la física i químiques modernes, fins a nombroses enginyeries (estudi de mínims quadrats, problemes d'aglomeració) o la medicina. D'aquesta manera convido al lector a desmitificar l'ús de la probabilitat restringit als jocs d'atzar.

L'objectiu del meu treball és fer una petita guia per a la gent que tingui una base matemàtica i desitgi endinsar-se en el món del càlcul de probabilitats. D'aquesta manera, el treball està dividit en una introducció (que esteu llegint), una part teòrica, una part pràctica, l'apartat de conclusions, bibliografia i annexos.

La part teòrica es basa en els llibres de secundària de matemàtiques. He llegit i treballat els continguts de probabilitat dels llibres de segon, tercer i quart d'ESO, a més del de primer de Batxillerat, tot fent una doble tasca: aprendre i resumir per al lector. D'aquesta manera, la part teòrica pretén englobar els coneixements inicials de probabilitat farcits amb tota mena d'exemples.

La part pràctica és un conjunt de sis problemes: els tres primers, més històrics, i tres més, més moderns:

Els tres més històrics comencen amb el problema dels daus, que va ser el primer desafiament, tot i que la solució (considerada fins al moment) correcta no va arribar fins al cap de molts anys. L'objectiu d'aquest problema és repartir de manera correcta un premi de vint-i-quatre ducats. Potser més important per al desenvolupament d'una teoria de probabilitats va ser el problema del cavaller De Méré, jugador professional, que va escriure a Blaise Pascal per explicar-li els seus dubtes sobre un joc de daus, fet que va provocar l'inici d'una fructífera correspondència entre Pascal i Fermat. Seguidament ve l'Agulla de Buffon, que és sens dubte el més complicat dels sis, proposat pel naturalista francès George Luis-Leclerc. Proposa aproximar el valor de π a partir de llançar successives vegades una agulla sobre un paper segmentat.

Els tres problemes més moderns estan encapçalats per el problema de Monty Hall (o problema de les Tres Portes), un exemple en què les matemàtiques ens recorden que sovint la intuïció falla. Tracta de fer una tria racional per tal de tenir major probabilitat de guanyar el premi desitjat. Després ve el problema dels aniversaris, que consisteix a calcular la probabilitat que en un grup d'n persones almenys hi hagi una coincidència en la data d'aniversari. Per acabar, un problema de probabilitat en el pòquer, que consisteix a calcular la probabilitat inicial de rebre cada tipus de mà en una combinació de cinc

Les conclusions agrupen les valoracions i reflexions sobre el treball de recerca. Un punt important en aquest treball és que l'objectiu no és respondre cap pregunta concreta, sinó assolir uns coneixements que després serveixin per resoldre problemes.

Per últim, hi ha un annex de combinatòria, necessari per a fer alguns problemes de la part pràctica. L'annex també està extret dels llibres d'ESO. A més conté exemples, ja que les definicions poden ser, a vegades, poc diferenciades.

PART TEÒRICA

1. Probabilitat: Definició i breu història

Definició

Concepte que permet d'expressar quantitativament el caràcter aleatori d'un esdeveniment o fenomen que hom creu que pot succeir. El **càlcul de probabilitats**, branca de la matemàtica que presenta un gran nombre d'aplicacions científiques i tècniques, té per objectiu el càlcul directe del caràcter aleatori de qualsevol esdeveniment mitjançant tècniques de combinatòria.

Breu història de la probabilitat

A la societat francesa de 1650 el joc era un entreteniment molt corrent i, pel que sembla no gaire subjecte a restriccions legals. Els jocs eren nombrosos i cada cop més complicats, i s'hi jugaven grans quantitats de diners.
Un jugador apassionat, Antoine Gombaud –cavaller de Méré-, consultà, a París l'any 1654, al matemàtic i filòsof Blaise Pascal[I] una aparent contradicció en un popular joc de daus.

El joc consistia a tirar 24 vegades un parell de daus, i el problema plantejat, a decidir si era igualment avantatjós apostar a favor o en contra de l'aparició almenys d'un doble sis en les 24 tirades. Una regla del joc, aparentment ben establerta, va conduir a

[I] **Blaise Pascal**
Clarmont d'Alvèrnia, 19 de juny de 1623 - París, 19 d'agost de 1662

Matemàtic, físic, filòsof i escriptor francès.
Construí una màquina de calcular que fou objecte d'admiració dels seus contemporanis. Fou pioner en l'estudi del càlcul de probabilitats, del qual fou, juntament amb Fermat, un dels fundadors. Dins el camp de la física, inspirà o bé féu directament nombrosos experiments relatius a la pressió atmosfèrica.

Méré a creure que apostar per un doble sis era avantatjós, però els seus càlculs indicaven el contrari.

Aquest i d'altres problemes plantejats per de Méré, van donar lloc a una correspondència entre Pascal i alguns dels seus amics matemàtics, sobretot amb Pierre Fermat de Tolosa[II]. Aquesta correspondència es pot dir que constitueix l'origen de la teoria moderna de la probabilitat.

El científic holandès Christiaan Huygens[III], mestre de Leibnitz, assabentat de l'esmentada correspondència, va publicar, el 1657 el primer llibre de probabilitats titulat *De Ratiociniis in ludo Aleae* (El raonament dels fets aleatoris en el joc), que era un recull de problemes relacionats amb els jocs.

En aquesta primera etapa no es pot parlar encara d'una teoria de la probabilitat, però era ja admesa, més o menys tàcitament, la famosa *definició clàssica de probabilitat*:

[II] **Pierre Fermat de Tolosa**

Beaumont-de-Lomagne, Gascunya, 17 d'agost de 1601 - Castres, 12 de gener de 1665

Advocat occità, sobresortí pels seus treballs matemàtics.
Introduí per primera vegada l'infinit en el càlcul, descobrí les propietats de diversos nombres i és considerat el creador de la moderna teoria dels nombres. Amb Descartes, aplicà l'àlgebra a la geometria i, amb Pascal, fundà la teoria de les probabilitats. Aplicà el concepte de les variables infinitesimals als problemes de quadratura, de càlcul de màxims i mínims i a la construcció de tangents.

[III] **Christiaan Huygens**

L'Haia, 14 d'abril de 1629 - l'Haia, 10 de juliol de 1695

Físic neerlandès. El 1673 publicà la seva obra cabdal, *Horologium oscillatorium,* síntesi dels seus coneixements de mecànica, que fructificaren en l'invent del rellotge de pèndol. Amb el seu germà Constantijn, construí telescopis (gràcies als quals pogué explicar l'anell de Saturn i descobrir Tità, satèl·lit de Saturn) i microscopis (amb els quals investigà sobre petits organismes vius).Publicà la teoria sobre la natura ondulatòria de la llum (*Traité de la lumière*, 1690). Féu importants aclariments sobre la força centrífuga (*De vi centrifuga*) i sobre el xoc dels cossos elàstics (*De motu corporum ex percussione*). Juntament amb Pascal i Fermat, fou un dels capdavanters del càlcul de probabilitats (*De ratiociniis in ludo aleae*).

> "La probabilitat que es realitzi un determinat esdeveniment o simplement la probabilitat d'aquest esdeveniment és igual al quocient del nombre de casos favorables a la realització d'aquest esdeveniment pel nombre total de casos possibles sempre que aquests casos siguin mutualment simètrics."

El Càlcul de Probabilitats arribà aviat a ser molt popular i es desenvolupà ràpidament durant el segle XVIII. Els científics que més hi van contribuir van ser Bernouilli (1654-1705) i De Moivre (1667-1754). El primer va escriure un llibre titulat *Ars conjectandi* (L'art de la conjectura), publicat el 1713, alguns anys després de la seva mort. En aquesta obra hi ha, entre d'altres, una proposició –coneguda actualment com el teorema de Bernouilli- que es pot considerar històricament com el primer resultat d'importància general d'aquesta teoria. De Moivre va ser un hugonot francès que es refugià a Anglaterra a causa de la seva religió. A la seva obra *The doctrine of chances* (La doctrina de les probabilitats), subtitulada *Mètode per a calcular les probabilitats dels esdeveniments,* hi ha el primer enunciat d'un teorema general, conegut com la regla de multiplicació de la teoria de probabilitats.

Malgrat tot, a les obres de Bernouilli i De Moivre el càlcul de probabilitats es reduïa a una anàlisi matemàtica dels jocs d'atzar.

No va ser fins el 1812 que Pierre Simon de Laplace[IV] introduí una gran quantitat d'idees noves i tècniques matemàtiques en el seu llibre *Théorie analytique des probabilités* (Teoria analítica de les probabilitats) i va mostrar que aquesta teoria podia

---

[IV] **Pierre Simon de Laplace**

Beaumont-en-Auge, Normandia, 23 de març de 1749 - París, 5 de març de 1827

Astrònom, matemàtic i físic francès, marquès de Laplace. Entre els seus treballs d'astronomia destaca una teoria sobre l'origen del sistema solar, basada en la teoria de Kant i coneguda com a *hipòtesi de Kant-Laplace*. També investigà la trajectòria dels planetes i l'estabilitat del sistema solar. Reuní en un tractat titulat *Mécanique céleste* (1798-1825) tots els treballs de Newton, Halley, Clairaut, D'Alembert i Euler sobre les conseqüències del principi de gravitació universal. En el camp de les matemàtiques publicà, el 1812, un important tractat sobre el càlcul de probabilitats, *Théorie analytique des probabilités*. En física, deduí la fórmula de les transformacions adiabàtiques d'un gas, desenvolupà una teoria general de la capil·laritat i formulà dues lleis de l'electromagnetisme.

ésser aplicada a gran quantitat de problemes científics i pràctics. El llibre definia la probabilitat de la següent manera:

> "Si un fenomen pot produir un nombre de resultats diferents i igualment probables, la probabilitat d'un esdeveniment associat al fenomen és definida com el quocient del nombre de resultats favorables a l'esdeveniment pel nombre total de resultats possibles".

L'obra de Laplace va tenir una gran influència en el desenvolupament d'aquesta teoria. Actualment la teoria de probabilitats és una branca molt important de les matemàtiques pures amb un camp d'aplicació que abraça pràcticament totes les branques de la ciència (genètica, demografia, psicologia, economia, física, astronomia,...).

2. Probabilitat: Conceptes

2.1 Llenguatge dels experiments aleatoris

Els experiments aleatoris es caracteritzen per:

- Tots els possibles resultats són coneguts abans de fer l'experiment.
- No es pot predir quin serà el resultat de l'experiment.
- Podem repetir l'experiment en les mateixes condicions les vegades que volguem.

Espai mostral (Ω): Conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori.

Ex. Quan llancem un dau cúbic:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Succés elemental: Cadascun dels elements que formen l'espai mostral, és a dir, cadascun dels resultats que es poden obtenir en fer l'experiment. Els successos elementals són excloents entre ells.

Ex. Quan llancem un dau:

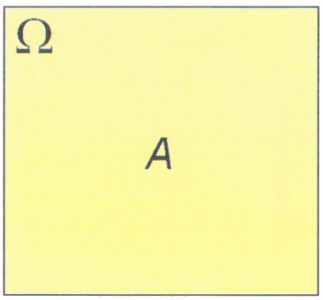
Obtenir un 1, obtenir un 2, obtenir un 3, obtenir un 4, obtenir un 5 i obtenir un 6. {1}, {2}, {3}, {4}, {5} i {6}.

Succés: Qualsevol subconjunt de l'espai mostral és un succés, o el que és el mateix, la unió de qualsevol nombre de successos elementals

Ex. Quan llancem un dau cúbic:

A = {Obtenir un nombre parell} = {2, 4, 6}

Espai de successos: Qualsevol conjunt de successos.



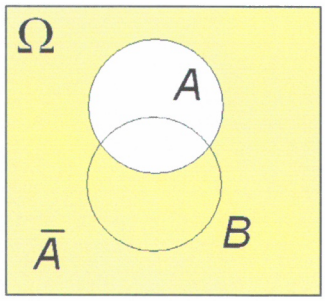
Succés segur: Resultat segur. Sovint es representa per Ω.

Ex. Quan llancem un dau cúbic, podem dir que sortirà un número de l'1 al 6.

Succés impossible ($\varnothing$): Resultat impossible.

Ex. Quan llancem el dau, no podem dir que sortirà un 7.

Succés contrari o complementari: Dos successos s'anomenen contraris si no tenen cap succés elemental en comú, i entre tots dos contenen tots els elements de l'espai mostral Ω. Per tant, en fer l'experiment, sempre ocorre un succés o l'altre, però no ocorren mai simultàniament.



El succés contrari d'un succés S es representa per $\overline{S}$.

Ex. Quan llancem el dau:

S: ‹‹Obtenir un nombre parell›› S = {2, 4, 6} i

$\overline{S}$: ‹‹Obtenir un nombre senar›› $\overline{S}$ = {1, 3, 5}

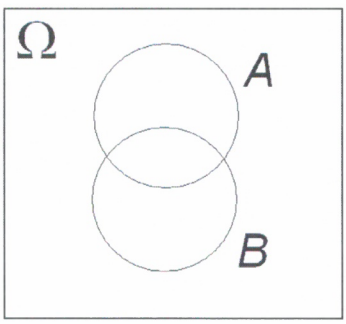
La mesura del grau d'incertesa es realitza fent correspondre un nombre a cada succés. Aquest nombre s'anomena probabilitat del succés, i representa les raons que fan esperar que un succés esdevingui, i per tant indica fins a quin punt es pot esperar que es produeixi.

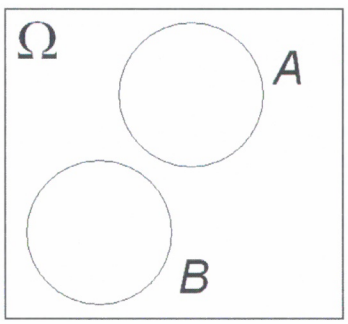
D'aquesta manera, un succés segur tindrà una probabilitat d'1, i un succés impossible, 0.

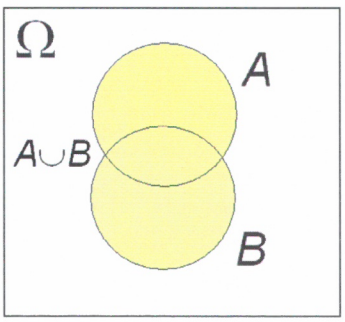
2.2 Operacions amb successos

Succés compatible i incompatible: Són els successos que es verifiquen quan es verifica que:

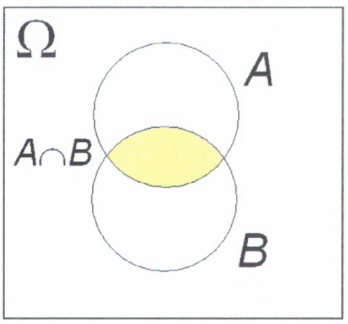
- $A \cap B \neq \varnothing$, es diu que A i B són compatibles.
- $A \cap B = \varnothing$, es diu que A i B són incompatibles.



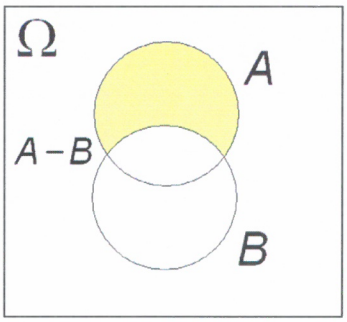




Succés unió: És el succés que es verifica quan es verifica A o es verifica B. S'expressa per $A \cup B$.



Succés intersecció: És el succés que es verifica quan es verifica A i es verifica B. S'expressa per $A \cap B$.



Succés diferència: És el succés que es verifica quan es verifica A i no es verifica B. Es representa per $A - B$.

Si prenem per exemple el llançament d'un dau cúbic i agafem tres successos: A = {Que el resultat sigui menor que quatre}, B = {Que el resultat sigui major que 3} i C = {Que el resultat sigui parell}, o el que és el mateix: A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6} i C = {2, 4, 6}, els diferents tipus de successos serien:

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$A \cap C = \{2\}$

$A \cap B = \varnothing$

$A \cap C \neq \varnothing$

$A - C = \{1, 3\}$

La representació gràfica de conjunts i l'estudi de les relacions i operacions entre conjunts és duta a terme amb el diagrama de Venn[V].

[V] **diagrama de Venn**

Diagrama emprat amb fins didàctics per a representar gràficament conjunts i estudiar les relacions i operacions entre conjunts. Aquests diagrames foren introduïts pel matemàtic i lògic anglès John Venn (1834-1923). Els conjunts són representats mitjançant cercles o corbes tancades qualssevol. Cal no confondre un diagrama de Venn amb la regió del pla limitada pel diagrama. És conegut també com a *diagrama d'Euler-Venn.*

2.3 El comportament de l'atzar

Freqüència absoluta: És el nombre de vegades que es produeix un succés en un experiment.

Freqüència relativa: És el nombre de vegades que es repeteix un succés en un experiment dividit entre el nombre de simulacions de l'experiment.

Ex. En l'experiment de llançar 100 vegades un dau cúbic, anotem en la taula de la pàgina següent els resultats obtinguts.

Número	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
1	17	0.17
2	14	0.14
3	19	0.19
4	16	0.16
5	18	0.18
6	16	0.16
	N = 100	

Si ens fixem en l'exemple del 3, la freqüència absoluta és 19, perquè el succés ha esdevingut 19 vegades. D'altra banda, la seva freqüència relativa és de 0.19, ja que sobre 100 llançaments, 19 han resultat ser un 3.

Llei empírica de l'atzar o llei dels grans nombres: La freqüència relativa d'un determinat succés d'una experiència aleatòria tendeix a mantenir-se al voltant d'un valor constant a mesura que el nombre de repeticions de l'experiència es va fent més i més gran. Aquest valor constant s'anomena probabilitat del succés.

2.4 Assignació de probabilitat a un succés

Cal seguir el procediment experimental que acabem d'analitzar en l'apartat anterior per assignar la probabilitat d'un succés? No sempre. Hi ha experiments en els quals la regularitat de l'instrument que s'utilitza permet assignar la probabilitat sense necessitat de recórrer a l'experimentació.

Ex 1.

Sense anar més lluny, el cas del dau n'és un exemple. Si i només si el dau és perfecte, els 6 successos elementals són equiprobables, i per tant podem afirmar que la probabilitat d'obtenir cadascun d'aquests successos és 1:6.

Ex 2.

Succeeix el mateix en el cas del llançament d'una moneda regular. Ambdós successos ("Obtenir cara" i "Obtenir creu") són equiprobables, per la qual cosa la probabilitat d'obtenir cara és 1:2, la mateixa que la d'obtenir creu.

Independentment dels dos últims exemples, n'hi ha d'altres en què les condicions de regularitat no es compleixen. Llavors, l'assignació de probabilitat només es pot fer empíricament, és a dir, repetint l'experiment reiteradament. Els valors de probabilitat obtinguts són només estimatius, i tant més propers al valor real com més vegades es repeteixi l'experiència.

Ex 3.

Si considerem l'experiment aleatori de llançar un tir lliure en un partit de bàsquet, seria incorrecte afirmar que, com a tir lliure només es pot encertar o fallar, i que per tant la probabilitat de que ocorri cada un d'aquests successos és 1:2. L'experiència demostra que no són sempre equiprobables.

Si ens fixem en un jugador A i observem quina ha estat l'estadística de tirs lliures en la seva carrera professional, podem fer una estimació del valor de la probabilitat que aquest jugador encerti quan llanci un tir lliure.

Així, si el jugador A ha transformat 36 dels 48 llançaments lliures, ha tingut un percentatge d'encert del 75%, ja que:

$$\frac{36}{48} \cdot 100 = 75$$

Un altre jugador B que hagi transformat 315 dels 420 llançaments intentats, també té un percentatge d'encerts del 75%, ja que:

$$\frac{315}{420} \cdot 100 = 75$$

Si bé el percentatge d'encerts és el mateix, el jugador B ha llançat molts més tirs lliures que el jugador A. Aquesta circumstància és important, ja que ha estat capaç de mantenir la mateixa regularitat que el jugador A en un nombre de d'intents força més gran.

Que el percentatge d'encerts d'aquests dos jugadors sigui del 75% vol dir que, de mitjana, s'esperaria que encistellessin 75 llançaments de cada 100. La probabilitat, per tant, és la mateixa per tots dos jugadors i és de 0,75:

$$\frac{75}{100} = 0,75$$

Cal destacar que la probabilitat obtinguda per al jugador B és més representativa que la que correspon al jugador A. És així perquè com més dades es tenen del resultat d'un determinat succés, més fiabilitat té l'estimació de probabilitat que se'n pugui obtenir.

2.5 Per a què serveix conèixer la probabilitat d'un succés?

Saber la probabilitat d'un succés té molta importància, tant des d'un punt de vista social com des d'un punt de vista científic.

Per exemple, les autoritats sanitàries d'un país saben que el virus de la grip d'aquest any és del tipus A. A més a més, les dades que s'han recopilat en els últims anys permeten afirmar que aquest virus afecta de mitjana 13 de cada 100 persones.

Aquesta informació permet estimar que la probabilitat que una persona pateixi la grip és de $\frac{13}{100}$.

Així, d'un poble de 3000 habitants, quants es pot esperar que tinguin la grip?

$$\frac{13}{100} \cdot 3000 = 390$$

Amb aquestes previsions, els responsables del centre d'atenció primària de la població podran prendre mesures per evitar que l'afluència massiva de malalts no col·lapsi els serveis mèdics.

2.6 Successos elementals equiprobables. Regla de Laplace

Per analitzar els successos que estan relacionats amb experiments aleatoris en què tots els successos elementals són equiprobables, Laplace va escriure una regla que permet assignar la mateixa probabilitat a cada succés elemental.

A tall d'exemple, l'experiment aleatori de llançar un dau tetraèdric perfecte, i observar el número que hi ha a la cara del dau que està en contacte amb la taula, està format per 4 successos elementals:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

Com que el dau es considera perfecte, la probabilitat de cada succés elemental és 1/4.

$$p\{1\} = p\{2\} = p\{3\} = p\{4\} = \frac{1}{4}$$

El succés *A*: "Obtenir un nombre més petit que 4" relacionat amb aquest experiment està format per 3 successos elementals: $A = \{1, 2, 3\}$. La probabilitat dels succés *A* és:

$$p(A) = p\{1\} + p\{2\} + p\{3\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Si observem, podem veure que el denominador de la fracció que expressa *p(A)* és el nombre total de successos elementals de l'experiment, i el numerador, el nombre de successos elementals del succés *A*. Dit d'una altra manera: el denominador és el

nombre de resultats possibles de l'experiment, i el numerador, el nombre de resultats favorables a la realització del succés *A*.

En general, en un experiment aleatori format per n successos elementals equiprobables, la probabilitat de cadascun d'aquests successos és $\frac{1}{n}$.

Si un succés A relatiu a aquest experiment està constituït per *m* successos experimentals, de manera que $0 \leq m \leq n$, es compleix que:

$$p(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ vegades}} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

És a dir:

$$p(A) = \frac{\textit{nombre de successos elementals d'A}}{\textit{nombre total de successos elementals}}$$

Aquesta expressió, coneguda com ***regla de Laplace*** per calcular probabilitats, se sol escriure utilitzant una altra terminologia equivalent:

$$p(A) = \frac{\textit{nombre de casos favorables a A}}{\textit{nombre de casos possibles}}$$

La **regla de Laplace** es defineix com el quocient dels casos favorables a la realització del succés *A* dividit entre els casos possibles.

Ex. 1.

En agafar una fitxa d'un joc de dòmino:

a) Quina és la probabilitat que contingui només un cinc?

b) Quina és la probabilitat que la suma dels punts sigui més gran que 10?

Resolució

a) Un joc de dòmino està format per 28 fitxes, de les quals n'hi ha 6 que contenen un sol cinc: 5-0, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4 i 5-6.

Si representem per A el succés "la fitxa que s'agafa conté només un cinc" la regla de Laplace ens permet escriure:

$$p(A) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Perquè dels 28 casos possibles, només n'hi ha 6 que són favorables a la realització del succés A.

b) Només 2 de les 28 fitxes del dòmino compleixen la condició que la suma dels punts és més gran que 10: 6-5 i 6-6.

En conseqüència, si representem per B aquest succés, es verifica:

$$p(B) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

Ex. 2.

S'extreu a l'atzar una carta d'una baralla que en conté 48. Calcula la probabilitat de cadascun d'aquests successos.

a) *A*: "Obtenir una copa".
b) *B*: "Obtenir una espasa que sigui figura".
c) *C*: "Obtenir un rei que no sigui el de bastons".
d) *D*: "Obtenir una espasa o un bastó".

Resolució

Els jocs de 48 cartes estan formats per quatre colls diferents: oros, copes, espases i bastons. Cada coll està format per 12 cartes, numerades de l'1 al 12. Si una carta du el número 1 s'anomena as i les cartes en què figuren els números 10, 11 i 12, es coneixen amb el nom de figures, i s'anomenen, respectivament, sota, cavall i rei.

D'acord amb això, el nombre de casos possibles és el mateix per a cada succés: 48. N'hi haurà prou amb comptar-ne el nombre de casos favorables i aplicar la regla de Laplace.

a) Com que hi ha 12 copes, $p(A)=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$.

b) La baralla conté 3 cartes d'espases que són figura. Per tant, $p(B)=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$.

c) Descomptant el de bastons, queden 3 reis més a la baralla. Aleshores $p(C)=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$.

d) Atès que a la baralla hi ha 24 cartes que són espases o bastons, $p(D)=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$.

2.7 Definició axiomàtica de la probabilitat

El tractament actual de la probabilitat és purament axiomàtic, és a dir, les probabilitats dels successos poden ser arbitràries, de manera que han de satisfer els tres axiomes de la probabilitat definits pel matemàtic rus Kolmogorov[VI]. La definició de la probabilitat és vàlida per a qualsevol experiment, siguin o no equiprobables els successos elementals.

Sigui Ω l'espai mostral associat a un experiment aleatori i S l'espai de successos, a cada succés de S li fem correspondre un nombre real comprès entre 0 i 1, ambdós inclosos de manera que:

[VI] **Andrej Nikolajevič Kolmogorov**

Tambov, 25 d'abril de 1903 - Moscou, 20 d'octubre de 1987

Matemàtic rus. Professor a la universitat de Moscou, féu importants recerques sobre la teoria de les funcions reals, sobre la teoria de la mesura i sobre lògica intuïcionista. Proposà l'axiomàtica de la teoria matemàtica moderna de la probabilitat, coneguda amb el nom d'*axiomàtica de Kolmogorov.*

Al succés $A \in S$ li correspon el valor $p(A)$, que s'anomena **probabilitat** d'A, i verifica:

a_1) $0 \leq p(A) \leq 1, \ \forall A \in S$

a_2) $p(\Omega) = 1$

a_3) Si A i B són dos successos incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

2.8 Propietats de la probabilitat

1. Si A i B són dos successos tals que $A \subset B$ aleshores $p(A) \leq p(B)$.

2. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

3. Si A i B són dos successos compatibles, $A \cap B \neq \varnothing$, aleshores:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4. Suposant que l'espai mostral Ω és finit amb n elements i que els successos elementals $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ són equiprobables, és a dir, $p(A_1) = p(A_2) = \cdots = p(A_n)$, es verifica la regla de Laplace.

2.9 Experiments aleatoris compostos

Hi ha experiments aleatoris que es poden considerar compostos d'altres experiments simples. Per exemple, l'experiment aleatori d'extreure dues cartes d'una baralla es pot considerar un experiment compost de dos experiments simples: extreure una carta d'una baralla, i després, extreure'n una altra.

De la mateixa manera, llançar tres monedes enlaire es pot considerar un experiment compost dels experiments simples: llançar una moneda, després una altra, i finalment una altra.

Ex. 1.

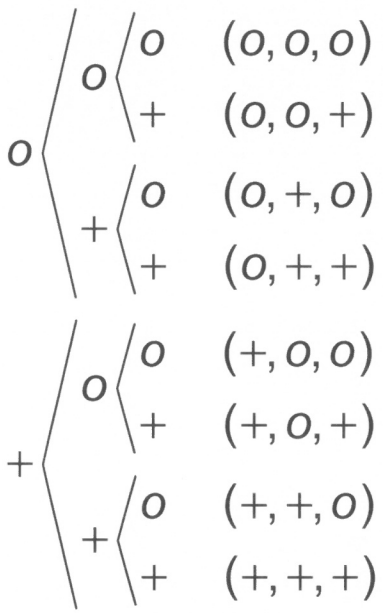
Es llancen enlaire tres monedes i se n'observa la cara superior. Es calcula la probabilitat dels successos següents:

a)*A*: "Obtenir exactament 3 cares".

b)*B*: "Obtenir exactament 2 creus".

c)*C*: "Obtenir almenys 1 cara".

Resolució



En el llançament de tres monedes es poden obtenir un total de $VR_{2,3} = 2^3 = 8$ resultats diferents. Es poden observar en el diagrama en arbre de la figura, en què s'ha representat per *o* el succés "Obtenir cara", i per + el succés "Obtenir creu".

L'espai mostral de l'experiment és: *E* = {(o, o, o), (o, o, +), (o, +, o), (+, o, o), (+, o, +), (+, +, o), (+, +, +)}.

a) El succés A es correspon amb 1 dels 8 resultats possibles: *A* = {(o, o, o)}. Com que els 8 successos de l'espai mostral són equiprobables, la probabilitat que ocorri cadascun és $\frac{1}{8}$. Per tant, $p(A) = \frac{1}{8}$.

En realitat, no s'ha fet més que aplicar la regla de Laplace: dels 8 casos possibles, només n'hi ha 1 de favorable.

b) S'observa a l'arbre que B = {(o, +, +), (+, o, +), (+, +, o)}. Aleshores, $p(B) = \frac{3}{8}$.

c)Tenint en compte que obtenir almenys una cara significa obtenir una cara, dues o tres cares, el succés *C* conté tots els elements de *E* excepte l'element (+, +, +). En conseqüència $p(C) = \frac{7}{8}$.

El càlcul de *p(C)* també es pot realitzar fent un altre raonament. El succés *C* és el succés contrari de $\overline{C}$: "No obtenir cap cara" o, el que és el mateix, $\overline{C}$: "Obtenir 3 creus". Com que $p(C) + p(\overline{C}) = 1$ i $p(\overline{C}) = \frac{1}{8}$, $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Ex. 2.

Es llancen dos daus cúbics. S'observen els nombres de les cares superiors i se'n determina la suma. Quin resultat té més possibilitats de sortir? Calcula'n la probabilitat.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Resolució

L'espai mostral d'aquest experiment és $\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$. És a dir, està format per 36 parelles i cada una d'elles és un succés elemental:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,6)\}$$

Suma	Nombre de vegades que es pot obtenir
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

En la primera taula s'ha fet la suma dels membres de cada parella, el resultat de la qual només pot ser: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12.

Si es construeix la segona taula, es pot esbrinar molt fàcilment quin és el valor de la suma que té més possibilitats de sortir. S'observa que la suma 7 és la que apareix més cops, concretament, en 6 dels 36 resultats que es poden donar. Per tant, 7 és el valor de la suma que té més possibilitats de sortir.

Si representem *A*: "Obtenir una suma de 7", es compleix que $p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Ex. 3.

Una urna conté 6 boles vermelles i 4 boles negres. Si s'extreuen a l'atzar dues boles d'aquesta urna, calcula la probabilitat dels successos:

a) *S*: "Les dues boles són vermelles".

b) *T*: "Les dues boles són negres".

Resolució

Per calcular el nombre de casos possibles i de casos favorables, ens basarem en les estratègies de comptar de l'annex I.

Es considera que cadascuna de les 10 boles de l'urna té la mateixa possibilitat de ser extreta, i tenint en compte que no importa l'ordre en què apareixin les dues boles en realitzar una extracció, podem fer els càlculs següents:

♦ De quantes maneres diferents es poden extreure 2 boles d'un conjunt de 10?

$$C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

♦ I 2 boles d'un conjunt de 6?

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

♦ I 2 boles d'un conjunt de 4?

$$C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

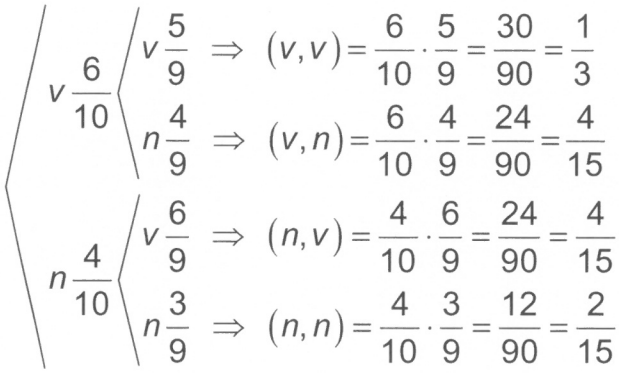
a) Dels 45 casos possibles, 15 són favorables a la realització del succés *S*. Per tant:

$$p(S) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

b) Dels 45 casos possibles, 6 són favorables a la realització del succés *T*. Aleshores:

$$p(T) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

2.10 Càlcul directe de probabilitats a partir de diagrames en arbre



Quins són els elements que componen l'espai mostral de l'últim exemple de l'apartat anterior? Es poden observar en el diagrama en arbre corresponent, en què es representa per *v* "Obtenir bola vermella" i per *n* "Obtenir bola negra". Per tant, *E = {(v, v), (v, n),(n, v),(n, n)}*.

Els successos no són equiprobables, ja que a l'urna no hi ha el mateix nombre de boles vermelles que de boles negres. Ja s'ha calculat que la probabilitat d'obtenir dues boles vermelles és $p(S)=\frac{1}{3}$, i la d'obtenir dues boles negres $p(T)=\frac{2}{15}$.

Ara veurem una altra estratègia que permet determinar de manera molt senzilla la probabilitat de cadascun dels successos d'Ω.

Quina és la probabilitat que les dues boles siguin vermelles?

Primer extraiem una bola i tot seguit, n'extraiem una altra, sense tornar la primera a l'urna. La probabilitat que la primera bola sigui vermella és $\frac{6}{10}$, i la probabilitat que la segona també sigui vermella és $\frac{5}{9}$. Això és així perquè si la primera bola és vermella, només queden 9 boles a l'urna, 5 de les quals són vermelles. Si es repetís l'experiment moltes vegades caldria esperar que les dues boles fossin vermelles en els $\frac{5}{9}$ dels $\frac{6}{10}$ casos. Això vol dir que:

$$p(S)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

Es pot comprovar que aquest és el resultat que s'ha obtingut anteriorment.

Aplicant el mateix raonament, es pot determinar la probabilitat de cadascun dels altres tres successos d'aquest experiment. Així:

$$p(M)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$$

$$p(N)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

$$p(T)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

On es representa per M = {la primera vermella i la segona negra} i N = {la primera negra i la segona vermella}.

Tot plegat es pot observar fent un altre diagrama en arbre, en què hem assignat a cada una de les branques que el componen la probabilitat del succés que representen. Seguint les diferents branques i multiplicant-ne les probabilitats es pot calcular la probabilitat que ocorrin alhora els dos successos que s'hi consideren (treure successivament les dues boles). Es compleix que:

$$p(S)+p(M)+p(N)+p(T)=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=1$$

És lògic que sigui així, ja que el que acabem de determinar és $p(\Omega)$, és a dir, la probabilitat del succés segur.

2.11 Probabilitat condicionada. Teorema de Bayes

Considerant que A i B són dos successos de l'espai de successos S d'un experiment aleatori, tal que $p(A)\neq 0$. S'anomena **probabilitat condicionada a *A***, i se simbolitza per $p(A/B)$ el quocient:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

Es llegeix "probabilitat del succés B sabent que ha aparegut A"

Es tracta d'incorporar la informació que es té sobre el fet que hagi succeït el succés A, i volem saber la probabilitat del succés B.

Una conseqüència immediata de la igualtat de la probabilitat condicionada és:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B / A)$$

De la mateixa manera, també es pot afirmar que:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A / B)$$

Algunes vegades la realització d'un succés no afecta la probabilitat d'un altre succés posterior. Si és així, es parla de successos independents.

Si A i B són dos successos, direm que el succés B és **independent** del succés A si es verifica que $p(B / A) = p(B)$.

La relació d'independència entre successos és simètrica, és a dir, si B és independent de A, A també és independent de B.

Es dedueix fàcilment que si A i B són dos successos independents es verifica que:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Aquesta última igualtat és la que s'utilitza habitualment per comprovar si dos successos són o no independents.

En el cas que $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$ els successos seran **dependents** i es calcula utilitzant $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B / A)$ o $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A / B)$.

Teorema de Bayes

Thomas Bayes[VII] va formular un teorema capaç de calcular, un cop donades les probabilitats a priori, les prioritats a posteriori.

[VII] **Thomas Bayes**
Leather Lane?, 1702 - Tunbridge Wells, Kent, 17 d'abril de 1761

Matemàtic i pastor presbiterià anglès. El 1763 fou publicada pòstumament la seva memòria *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances* ('Assaig sobre la resolució d'un problema en la doctrina de probabilitats'), obra d'una gran importància estadística i

A l'espai de successos S, associat a un experiment aleatori, considerem els successos A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_k incompatibles dos a dos, és a dir, $A_i \cap A_j = \varnothing$, per a $i \neq j$, de manera que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$. Per a qualsevol succés $B \in S$ es compleix:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B / A_1) + p(A_2) \cdot p(B / A_2) + \cdots + p(A_k) \cdot p(B / A_k)$$

Aquesta igualtat es coneix amb el nom de fórmula de la probabilitat total. Ens permet calcular la probabilitat d'un succés B com la suma de les probabilitats dels successos A_i multiplicades per les probabilitats de B condicionades a A_i

Si B és un succés tal que $p(B) \neq 0$, per la probabilitat condicionada tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} p(A_i \cap B) = p(A_i) \cdot p(B / A_i) \\ p(A_i \cap B) = p(B \cap A_i) = p(B) \cdot p(A_i / B) \end{array}\right\} \rightarrow p(A_1) \cdot p(B / A_i) = p(B) \cdot p(A_i / B)$$

D'on obtenim:

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B / A_i)}{p(B)}$$

Substituint $p(B)$ per la fórmula de la probabilitat total:

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B / A_i)}{p(A_1) \cdot p(B / A_1) + p(A_2) \cdot p(B / A_2) + \cdots + p(A_k) \cdot p(B / A_k)}$$

Aquesta última expressió es coneix amb el nom de **fórmula de Bayes**.

És important destacar que el producte que apareix al numerador de l'expressió és un dels sumands del denominador.

Aquesta fórmula ens permet calcular les probabilitats $p(A_i / B)$ un cop ha succeït el succés B, a partir de les probabilitats $p(A_i)$. Les probabilitats $p(A_i / B)$ reben el nom de *probabilitats a posteriori*, mentre que les probabilitats $p(A_i)$ són *probabilitats a priori*.

---

epistemològica, on introduí el concepte d'inferència inductiva en intentar de determinar la probabilitat de les causes a partir de la dels efectes observats. La seva aportació a la teoria de la probabilitat ha estat redescoberta pel corrent del subjectivisme probabilista. També escriví *An introduction to the Doctrine of Fluxions* (1736).

Vegem-ho en l'exemple següent.

Ex. 1.

Es reuneixen tres amigues, l'Anna, la Berta i la Carme, per resoldre una sèrie de problemes. L'Anna, que és la més ràpida, resol el 50% dels problemes, la Berta resol el 30% i la Carme, el 20% restant. L'Anna s'equivoca en un 3% dels problemes que resol, mentre que la Berta i la Carme s'equivoquen en un 4% i un 5%, respectivament. Escollim un problema a l'atzar i resulta que està mal resolt. Quina probabilitat hi ha que l'hagi resolt la Berta?

Resolució

Definim els successos:

A: "Que el problema l'hagi resolt l'Anna" $\rightarrow p(A) = 0,5$

B: "Que el problema l'hagi resolt la Berta" $\rightarrow p(B) = 0,3$

C: "Que el problema l'hagi resolt la Carme" $\rightarrow p(C) = 0,2$

M: "Que el problema estigui mal resolt"

$\bar{M}$: "Que el problema no estigui mal resolt"

Per les dades del problema sabem que: $p(M/A) = 0,03$, $p(M/B) = 0,04$ i $p(C) = 0,05$.
Construïm el diagrama en arbre corresponent:

$$\begin{cases} p(A)=0,5 \begin{cases} M/A \rightarrow p(A\cap M)=p(A)\cdot p(M/A)=0,5\cdot 0,03=0,015 \\ \bar{M}/A \rightarrow p(A\cap \bar{M})=p(A)\cdot p(\bar{M}/A)=0,5\cdot 0,97=0,485 \end{cases} \\ p(B)=0,3 \begin{cases} M/B \rightarrow p(B\cap M)=p(B)\cdot p(M/B)=0,3\cdot 0,04=0,012 \\ \bar{M}/B \rightarrow p(B\cap \bar{M})=p(B)\cdot p(\bar{M}/B)=0,3\cdot 0,96=0,288 \end{cases} \\ p(C)=0,2 \begin{cases} M/C \rightarrow p(C\cap M)=p(C)\cdot p(M/C)=0,2\cdot 0,05=0,01 \\ \bar{M}/C \rightarrow p(C\cap \bar{M})=p(C)\cdot p(\bar{M}/C)=0,2\cdot 0,95=0,19 \end{cases} \end{cases}$$

Aplicant la fórmula de Bayes, obtenim:

$$p(B/M)=\frac{p(B)\,p(M/B)}{p(A)\,p(M/A)+p(B)\,p(M/B)+p(C)\,p(M/C)}=$$

$$=\frac{0,012}{0,015+0,012+0,01}=\frac{0,012}{0,037}=0,3243$$

És a dir, que hi ha una probabilitat del 32,4% de que l'hagi resolt la Berta.

PART PRÀCTICA

1. El problema dels punts. Diferents solucions

El problema dels punts és un dels problemes de probabilitat més antics. La primera solució va ser donada al segle XIV.

La situació és la següent: Dos jugadors juguen a un joc en què per cada partida guanyada s'obté 1 punt. El primer que arriba a 6 punts s'emporta el premi (24 ducats). El joc s'interromp per causes desconegudes en un moment en què el jugador A té 5 punts i el jugador B, 3. Davant la impossibilitat de continuar i acabar la partida, el problema tracta de repartir el premi de manera justa.

Aquest problema ha tingut diverses solucions, concretament tres, però ens centrarem en la més acceptada, que utilitza la probabilitat, la proposada per Pascal i Fermat.:

1.1 Solució proposada per Luca Pacioli

Luca Pacioli[VIII] proposa repartir el premi 5 a 3.

Argument:

Proposa repartir el premi de manera proporcional als punts que ha guanyat cada jugador.

[VIII] **Luca Pacioli**

Borgo San Sepolcro, Toscana, 1445 - Roma, 1510

Matemàtic italià, conegut també com *Luca di Borgo*. Fou professor a diverses ciutats italianes. La seva obra principal, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (1494), és el primer tractat general d'aritmètica i àlgebra imprès. A més de presentar els elements de l'àlgebra i dedicar alguns capítols a qüestions de matemàtiques pràctiques (canvi de moneda, mesures i unitats de mesura, etc), tracta de l'aritmètica comercial (hom considera que aquest és el primer text en què s'expliquen les regles de la *compatibilitat per partida doble*). Publicà també *Divina proportione* (1496-97), amb dibuixos de Leonardo da Vinci, amb el qual l'uní una gran amistat, i traduí al llatí els *Elements* d'Euclides (1509).

$$\frac{24\ ducats}{8\ punts} = 3\ ducats / punt$$

$$Jugador\ A : 5\ punts \cdot 3\ ducats = 15\ ducats$$

$$Jugador\ B : 3\ punts \cdot 3\ ducats = 9\ ducats$$

Pel jugador A, que ha guanyat 5 punts, 15 ducats. Pel jugador B, que ha guanyat 3 punts, 9 ducats.

1.2 Solució proposada per Niccolò Tartaglia

Niccolò Tartaglia[IX] proposa repartir el premi 2 a 1.

Argument:

Proposa repartir el premi de manera proporcional als punts d'avantatge que té el jugador A sobre el jugador B.

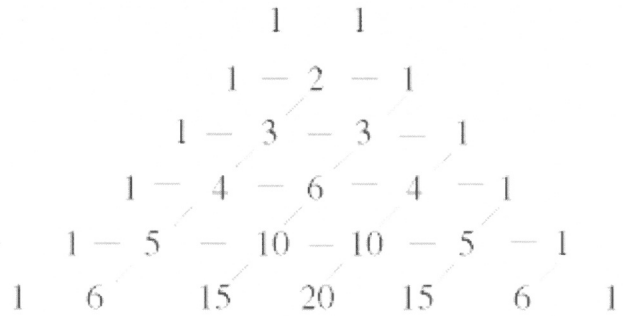
[IX] **Niccolò Tartaglia**

Brescia, 1500 - Venècia, 13 de desembre de 1557

Nom amb el qual és conegut el matemàtic italià Niccolò Fontana. Estudià l'equació de tercer grau i en trobà la resolució; posteriorment Cardano es basà en la fórmula de Tartaglia per a elaborar-ne una teoria completa. Féu també diverses investigacions sobre geometria, física, balística, fortificacions, etc. Cal destacar-ne les obres *Quesiti ed invenzioni diverse* (1546) i *General trattato de numeri e misure* (1556-60), en 3 volums, obra pòstuma.

Triangle de Tartaglia

Disposició triangular de nombres enters que en línia horitzontal dóna ordenadament els coeficients de la potència *n*-èsima del binomi (*a*+*b*). Establertes les dues primeres línies, les successives són obtingudes col·locant la unitat com a primer i últim element, i com a elements intermedis els nombres resultants de la suma dels dos elements contigus de la fila anterior:



El triangle de Tartaglia és anomenat també *triangle de Pascal.*

Proporció = *2 : 1*

Jugador A : 16 ducats

Jugador B : 8 ducats

1.3 Solució proposada per Blaise Pascal i Pierre Fermat

Blaise Pascal i Pierre Fermat proposen repartir el premi 7 a 1.

Argument:

♦ ***Pascal:*** El jugador A s'emportaria el premi si guanyés la partida següent (1/2), o si perdés la següent i guanyés l'altra (1/4) o si perdés les dues següents i guanyés l'altra (1/8).

$$\text{Probabilitat que guanyi A: } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\text{Probabilitat que guanyi B: } 1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

♦ ***Fermat:*** Com que el joc es pot allargar com a màxim tres partides més, es consideren tots els resultats de jugar les tres partides i es compten els casos favorables a cada jugador.

A	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*B*
A	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*B*
A	*A*	*A*	*B*	*A*	*B*	*B*	*B*

D'acord amb la taula, el jugador A compta amb 7 de les 8 possibilitats mentre que B, 1 de les 8.

Per tant, la distribució dels ducats seria la següent:

Jugador A : 21 ducats

Jugador B : 3 ducats

2. El Problema del cavaller De Méré. Resolució

Antoine Gombaud, més conegut com el cavaller de Méré, era un jugador professional que va ser el precursor del descobriment de les teories de la probabilitat. Degut a la seva experiència, el cavaller de Méré havia experimentat que era profitós apostar a favor d'obtenir almenys un 6 en llançar 4 vegades un dau, mentre que apostar per almenys un doble 6 en llançar 24 vegades dos daus no ho era. Aparentment, contradiu l'aritmètica, ja que 6 (resultats possibles en llançar un dau) és a 4 (vegades que es llança un dau) com 36 (resultats possibles en llaçar dos daus) és a 24 (vegades que es llancen dos daus). La seva curiositat el va dur a cartejar-se amb Blaise Pascal, demanant-li el perquè d'aquesta contradicció. Aquest fet es coneix amb el nom del **Problema del cavaller de Méré**.

El que el cavaller de Méré havia notat i volia comprovar:

$$p(\text{Almenys un 6 en llançar 4 vegades un dau}) > \frac{1}{2}$$

mentre que

$$p(\text{Almenys un doble 6 en llançar 24 vegades dos daus}) < \frac{1}{2}$$

Resolució

Tal i com es pot analitzar, el problema està format per successos equiprobables i per tant, es pot resoldre utilitzant la regla de Laplace.

Per començar, cal calcular la probabilitat del succés A = "Almenys un 6 en llançar 4 vegades un dau". En llançar 4 vegades un dau, es poden obtenir 1296 resultats diferents, ja que es poden obtenir 6 resultats possibles per cada un dels 4 llançaments, és a dir: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ resultats possibles.

D'aquests 1296 resultats, cal saber quants contenen almenys un 6, però per saber-ho, és més fàcil buscar el succés contrari, és a dir, quants resultats no contenen cap 6, per després restar-ho als 1296 resultats possibles. Per tant, calculem quants resultats

hi ha que tinguin tan sols números de l'1 al 5: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ resultats que no contenen cap 6.

D'aquesta manera, es coneix que hi ha $1296 - 625 = 671$ resultats que continguin almenys un 6. Per tant, la probabilitat de que es compleixi el succés A és de:

$$p(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ possibles} = \frac{671}{1296} = 0,5177$$

La probabilitat és de 0,52 (a favor de que es compleixi el succés) contra 0,48 (en contra de que es compleixi).

Seguint amb el problema, cal calcular la probabilitat del succés B = "Almenys un doble 6 en llançar 24 vegades dos daus". El nombre de resultats possibles en llançar dos daus és de $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ resultats possibles, per tant, el nombre de resultats possibles en 24 llançaments és de

$$36 \cdot 36 \cdot \underbrace{\cdots}_{24\ vegades} = 36^{24} = 2,245225771 \cdot 10^{37}\ \text{resultats.}$$

Ara cal desxifrar la probabilitat del succés . Calculem quants resultats hi ha que tinguin tot tipus de parelles exceptuant el doble 6:

$$35 \cdot 35 \cdot \underbrace{\cdots}_{24\ vegades} = 35^{24} = 1,141913124^{37}\ \text{resultats.}$$

Procedirem calculant la probabilitat del succés contrari, i la restarem a 1:

$$p(\bar{B}) = \frac{successos\ favorables}{successos\ possibles} = \frac{1,141913124^{37}}{2,245225771 \cdot 10^{37}} = 0,5085$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - 0,5085 = 0,4915$$

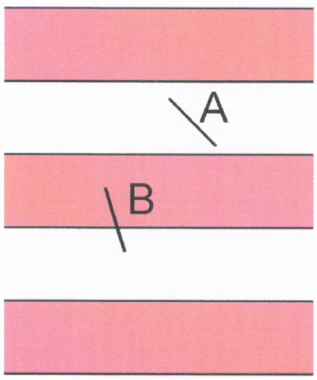
Per tant, l'aposta de "almenys un doble 6 en llançar 24 vegades dos daus" no és favorable. Totes dues probabilitats són extremadament subtils com per ser notades experimentalment, tanmateix, el cavaller de Méré, jugador professional, ho va notar.

3. L'agulla de Buffon. Resolució i pràctica

El Problema de l'Agulla de Buffon s'anomena així perquè va ser plantejat pel naturalista francès Georges-Louis Leclerc (comte de Buffon[X]) el 1733 i resolt per ell mateix el 1777.

Una generalització d'aquest problema és el problema de l'Agulla de Buffon-Laplace, on l'agulla, en comptes de llançar-se sobre un paper ratllat es llança sobre una quadrícula. S'anomena Buffon-Laplace perquè la resolució inicial del comte de Buffon de 1777 tenia un error que va ser corregit per Laplace el 1812.

És un problema que permet aproximar el valor de π amb intents successius. Tracta de llançar una agulla sobre un paper en què s'han traçat rectes paral·leles distanciades entre elles de manera uniforme. Repetint l'experiment nombroses vegades, demostrarem que la probabilitat que l'agulla creui alguna de les línies és $\frac{2}{\pi}$.



Tot seguit cal delimitar què vol dir *creuar la línia*:

En el gràfic, s'observa que l'agulla *A* no creua mentre que l'agulla B sí que ho fa.

[X] **comte de Buffon**
[Georges-Louis Leclerc]
Montbard, Borgonya, 1707 - París, 16 d'abril de 1788

Nom amb què és conegut el naturalista francès *Georges-Louis Leclerc,* fill d'una família benestant. Fou admès com a membre de l'Académie des Sciences el 1739 i aquell mateix any fou nomenat intendent del Jardin du Roi, de París. La seva tasca queda recollida en les seves nombroses i ben escrites obres ("*l'estil és l'home*"), la majoria de les quals aparegueren com a parts d'una obra monumental (44 volums) i, en part, pòstuma *Histoire Naturelle* (1749-1804). Deixà una col·lecció de discursos pronunciats a l'Académie des Sciences i traduccions al francès d'algunes obres de Newton i Stephen Hales.

Resolució

Si n és el nombre total d'agulles llançades i h, el nombre d'agulles que creuen alguna línia. El que volem demostrar és

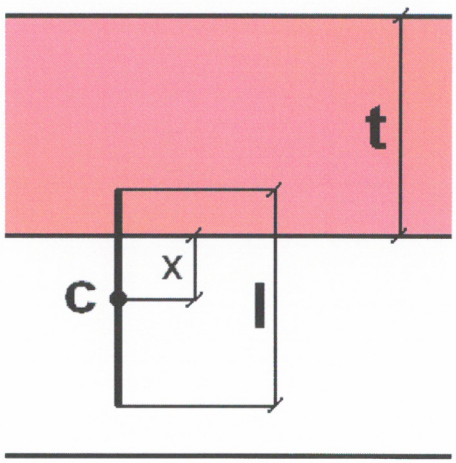
$$p(\text{alguna agulla creui}) = \frac{h}{n} \approx \frac{2}{\pi}$$

d'on $\pi \approx \frac{2 \cdot \text{Nombre d'intents}}{\text{Nombre de vegades que l'agulla creua la línia}} = \frac{2n}{h}$ en el cas en què la longitud de l'agulla és igual a la distància entre línies.

O si l'agulla és més curta que la distància entre les línies tindrem:

$$\pi \approx \frac{2 \cdot \text{Nombre d'intents} \cdot \text{longitud de l'agulla}}{\text{Nombre de vegades que l'agulla creua la línia} \cdot \text{distància entre línies}} = \frac{2nl}{ht}$$

Ara bé, si l'agulla és més llarga que la distància entre les línies, la consecució del resultat és força més complicada i s'aparta dels objectius d'aquest treball.

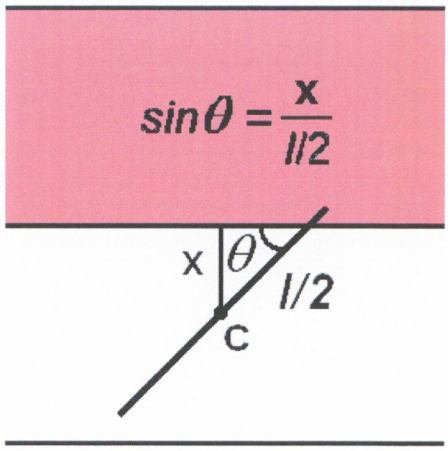


Per tant, la qüestió és saber la probabilitat que una agulla de longitud l llançada aleatòriament sobre un paper segmentat per línies paral·leles a una distància t creui alguna de les línies divisòries. En el dibuix queda representat un cas particular en què l'agulla és perpendicular a la línia.

La distància entre el centre de l'agulla i la línia més pròxima és $x \in [0, t/2]$ i l'angle que forma l'agulla amb les línies és $\theta \in [0, \pi/2]$ per al casos en què $t \geq l$.

Convenim en què totes les distàncies del centre de l'agulla a una línia divisòria són equiprobables. De la mateixa manera, ho és qualsevol angle format per l'agulla i la línia.

Si relacionem els dos conceptes arribem a la conclusió que la condició per què una agulla creui una línia és $x \leq \frac{l}{2} sin\theta$.



La probabilitat d'aquest succés ve donada pel resultat de la integral següent en el rectangle que té per àrea $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{\pi t}{4}$. És a dir, buscarem el quocient entre la integral (casos favorables) i l'àrea total del rectangle (casos possibles).

$$\frac{4}{t\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{(\frac{l}{2})sin\theta} dx\, d\theta = \frac{4}{t\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x]_0^{(\frac{l}{2})sin\theta}\, d\theta = \frac{4}{t\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{4}{t\pi} [-cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{t\pi} \left[-cos\frac{\pi}{2} + cos\, 0 \right] = \frac{4}{t\pi} \cdot \frac{l}{2} = \frac{2l}{t\pi}$$

Per tant, si es llancen *n* agulles de les quals *h* creuen alguna línia:

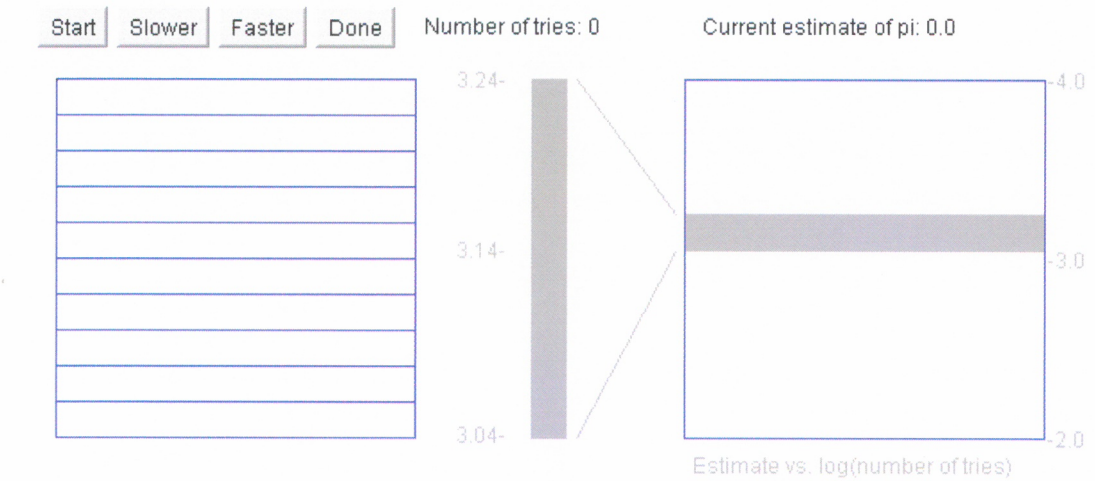
$$\frac{h}{n} = \frac{2l}{t\pi}$$

d'on, si aïllem π

$$\pi = \frac{2nl}{ht}$$

Pràctica

L'Agulla de Buffon també té una pràctica disponible.



És un simulador de llançaments aleatoris d'agulles. A la part superior hi ha els botons "Start", "Slower" i "Faster" (referents a la velocitat de la simulació) i "Done" (per finalitzar). Al marge inferior esquerre es pot veure el paper segmentat. A la dreta, el valor de π aproximat. Els valors més pròxims a π estan representats de forma augmentada a la part central.

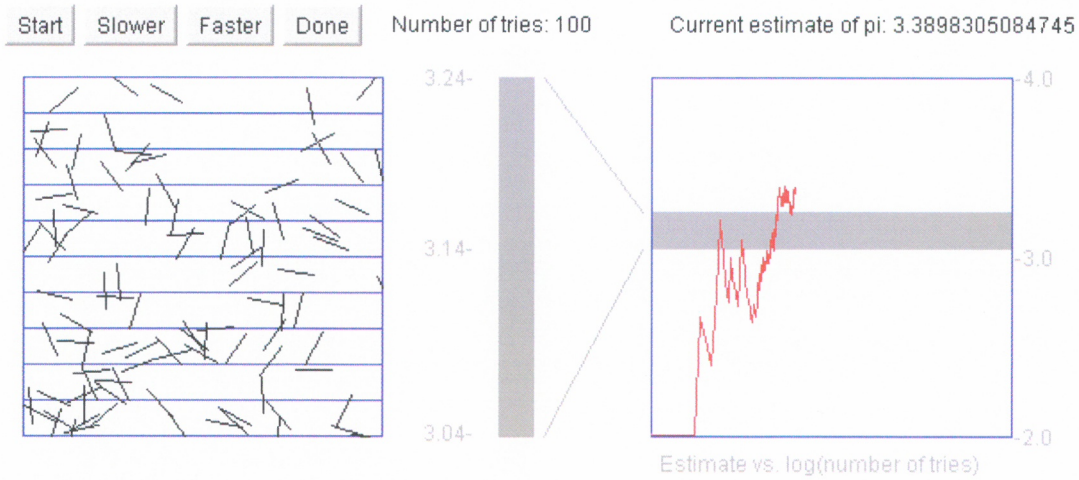
Per començar la pràctica tan sols cal:

1. Apretar el botó "Start".
2. Apretar el botó "Done" quan es vulgui acabar.

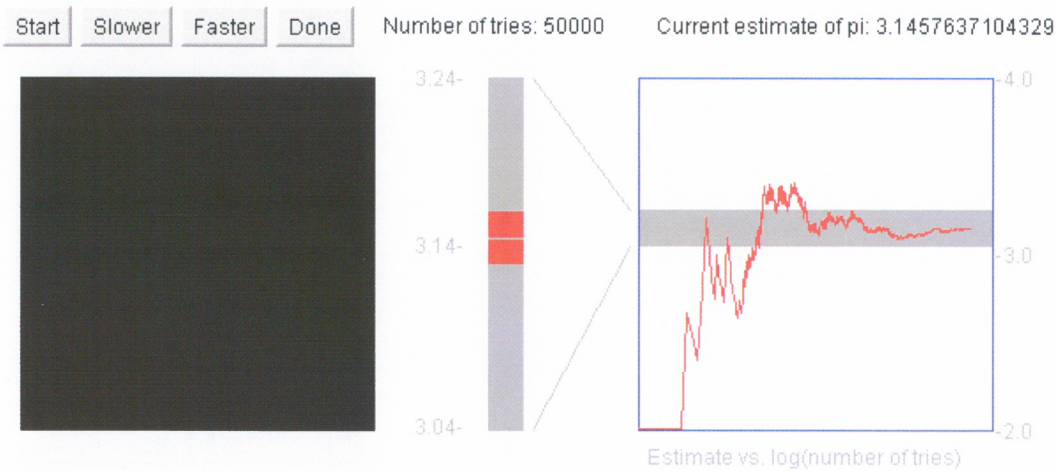
En la pràctica hem simulat 50.000 llançaments i l'aproximació al valor de π no ha quedat gaire lluny del valor real de π :

$$\text{Valor aproximat de la simulació} = 3{,}141576...$$

$$\text{Valor real de } \pi = 3{,}1415927...$$



S'ha afegit una imatge de la pràctica en l'intent número 100 ja que la imatge en l'intent 50.000 queda completament negra.



Web de la pràctica:

http://library.thinkquest.org/C0110195/history/buffon_sp.html

4. El Problema de Monty Hall

El **Problema de Monty Hall** es un problema matemàtic de probabilitat que està inspirat pel concurs televisiu nord-americà *Let's Make a Deal* (Fem un tracte). El nom del problema és degut al nom del presentador del concurs: *Monty Hall*.

El problema es va fer famós quan Craig F. Whitaker va escriure una pregunta a la columna que Marilyn vos Savant[XI] tenia a la revista *Parade Magazine,* una revista dominical, el 1990. La qüestió era la següent:

> *"Suposi que es troba en un concurs i se li ofereix escollir entre tres portes: Darrere d'una d'elles hi ha un cotxe mentre que darrere de les altres dues, cabres. Tria una porta, per exemple, la núm. 1, i el presentador, que sap què hi ha darrere de cada porta, n'obre una altra, per exemple la núm. 3, i en surt una cabra. Llavors pregunta: "Prefereixes canviar d'elecció? Si vols, pots escollir la núm. 2". És millor canviar d'elecció o és indiferent?"*

La Marilyn va respondre que era millor canviar d'elecció, fet que provocà l'estupefacció de nombroses persones, que li van enviar moltes cartes en referència a la seva particular opinió. El 92% de les cartes li deien que s'equivocava. Davant l'interès que havia despertat la consulta i el rebombori que s'havia produït, la Marilyn va decidir demostrar el perquè de la seva resposta.

[XI] **Marilyn Vos Savant**
Sant Louis, Missouri, 11 d'agost de 1946

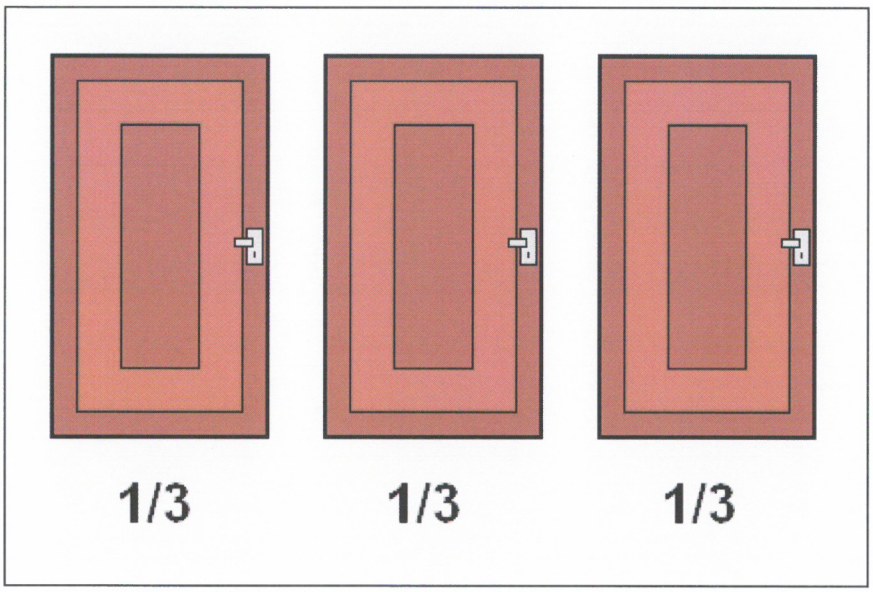
Columnista, escritora, conferenciant i dramaturga estadounidense que saltà a la fama per ser catalogada al Llibre Guiness dels Rècords com la persona amb el Coeficient Intelectual més elevat del món. Forma part de diverses societats d'alt CI. Des de 1986 escriu *Ask Marilyn* (Pregunta a Marilyn), una columna dominical a la revista *Parade* on respon preguntes dels lectors sobre diferents temes.

4.1 Resolució i pràctica

Resolució:

Abans que el presentador obri cap porta

D'entrada, cal entendre que es té la mateixa probabilitat per escollir cada premi:



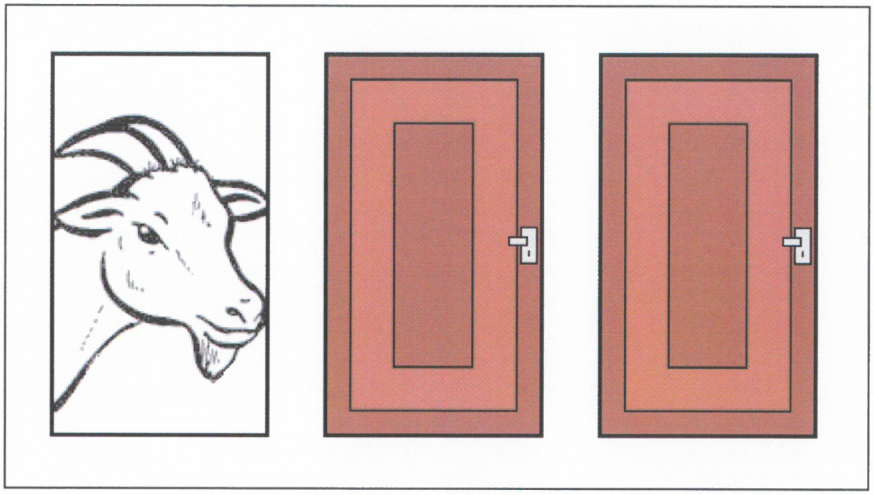
Darrere de cada porta hi ha un premi. Podem observar la probabilitat de triar cada premi a l'inici: **la probabilitat de triar una cabra és el doble de gran que la probabilitat de triar un cotxe**. Ja que hi ha el doble de cabres que de cotxes.

$$p(\text{Triar una cabra}) = \frac{2\,\text{cabres}}{3\,\text{possibles eleccions}} = 0,66$$

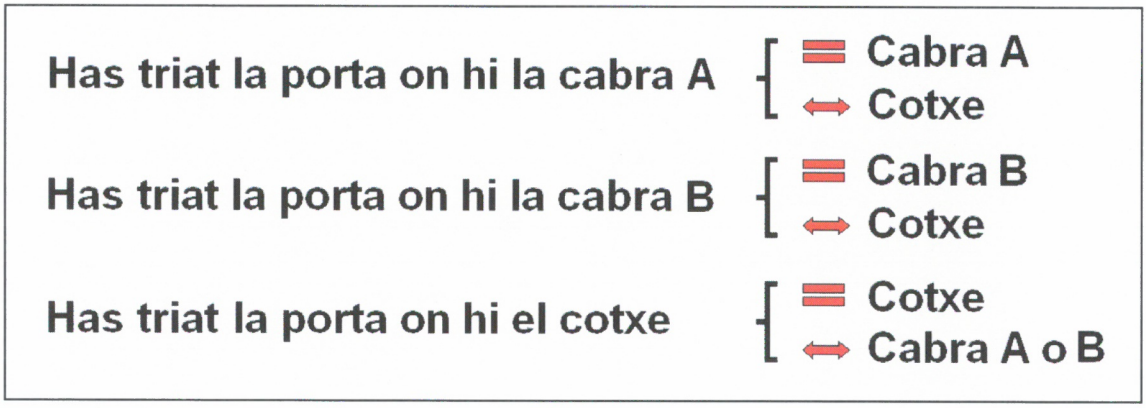
$$p(\text{Triar un cot xe}) = \frac{1\,\text{cot xe}}{3\,\text{possibles eleccions}} = 0,33$$

Després que el presentador obri una porta i mostri una cabra

Ara la situació ha canviat: el presentador ha obert una porta i n'ha sortit una cabra. Queden dues portes per obrir, en una hi ha el cotxe i en l'altra, la cabra restant.



El següent esquema mostra el resum del problema en aquesta situació: hi ha les mateixes possibilitats d'haver triat la cabra *A*, com la cabra *B*, com el cotxe. Després que el presentador hagi ensenyat una de les dues cabres, el concursant pot, o bé mantenir (=) o bé canviar (↔).



En l'esquema podem veure que:

♦ Canviar ens dóna una probabilitat del 0,66 de guanyar el cotxe i un 0,33 de guanyar una cabra.

♦ Per contra, no canviar ens dóna una probabilitat del 0,33 de guanyar el cotxe i un 0,66 de guanyar una cabra.

En conseqüència arribem a la conclusió que canviar d'elecció quan el presentador ho pregunti després d'obrir una porta i mostrar una de les dues cabres, ens donarà més possibilitats d'aconseguir el cotxe. És l'estratègia guanyadora. En obrir la porta, el presentador **acumula les probabilitats de les dues cabres en una porta**.

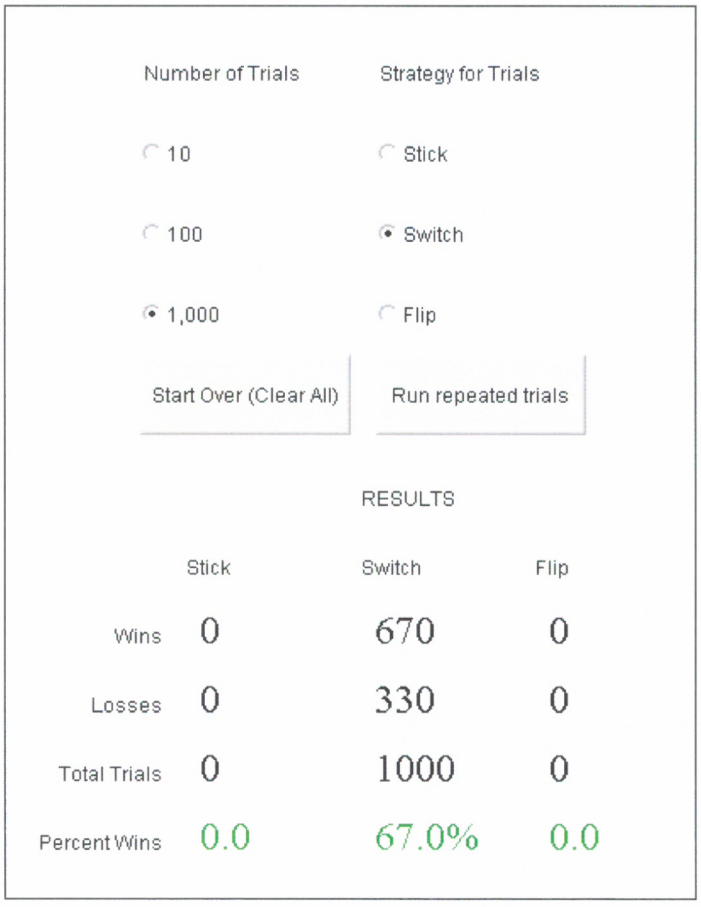
Pràctica

Tot seguit, farem la pràctica en una aplicació:

El resultat no és significatiu si només fem una pràctica. És necessari, doncs, fer diversos exemples.

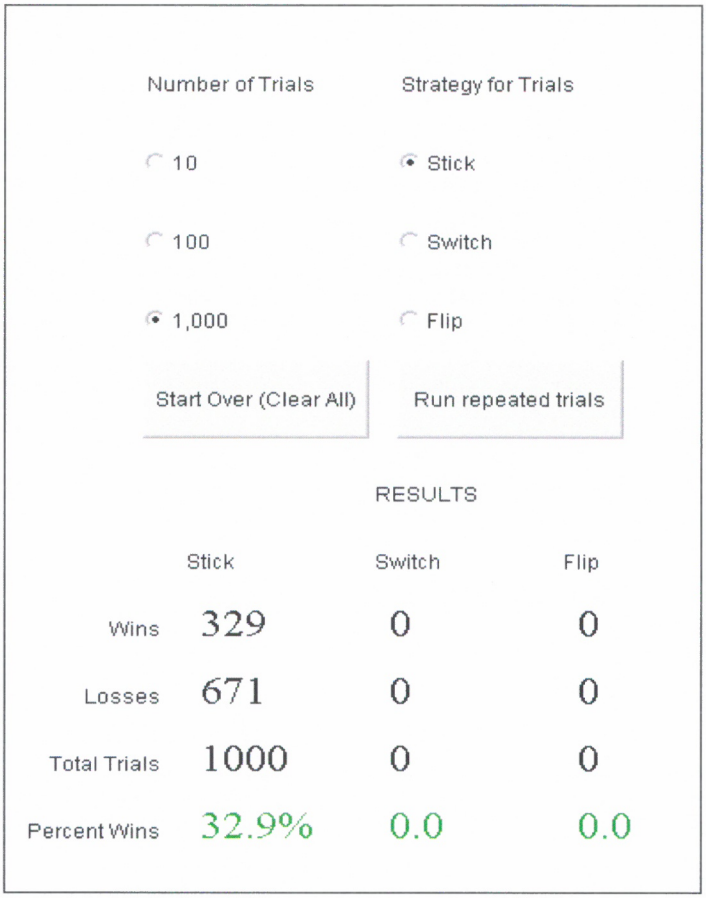
Per a dur a terme la simulació diverses vegades cal:

1. Triar el nombre de simulacions ("Number of Trials") i l'estratègia ("Strategy of Trials")
2. Clicar a "Run repeated trials".



♦ **Canviant (Switch):**
En aquest cas (recordem que és la bona estratègia), de les 1000 simulacions que s'han dut a terme, en 670 s'ha guanyat el cotxe, i en 330 s'ha guanyat una cabra.

Percentatge d'eleccions guanyadores: 67%



♦ **Mantenint (Stick):**
Aquesta no és la bona estratègia i es nota: de les 1000 simulacions tan sols 329 han estat eleccions guanyadores. En canvi, 671 han resultat ser una mala elecció.

Percentatge d'eleccions gua-nyadores: 32,9%

Web de la pràctica:

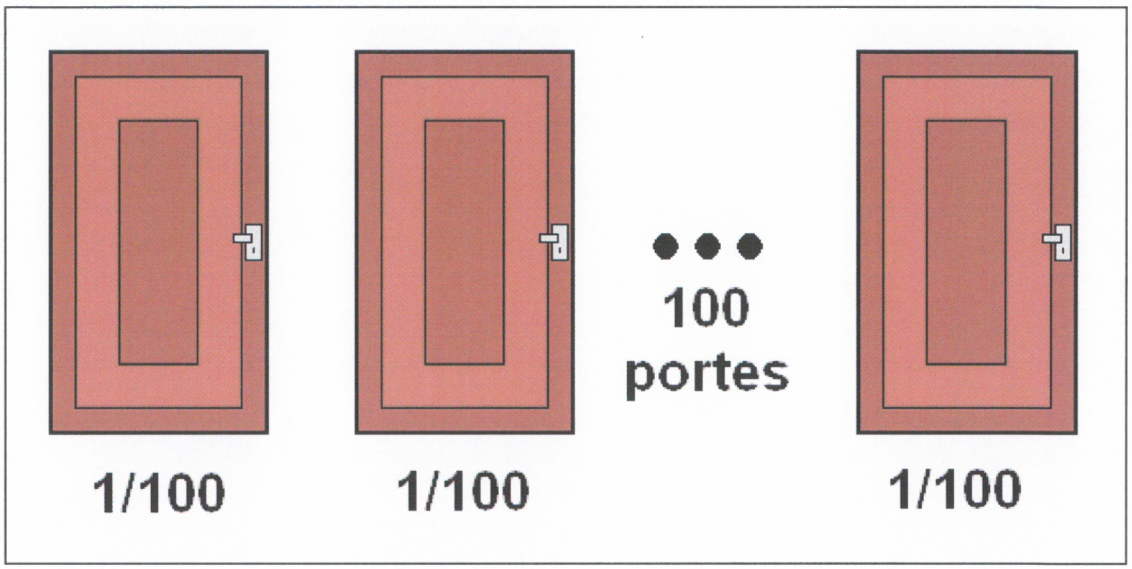
http://www.mste.uiuc.edu/reese/monty/MontyGame5.html

4.2 El problema amb 100 portes. Pràctica

Entendre el problema i el perquè de l'estratègia guanyadora és més fàcil si es planteja amb les següents condicions:

1. Aquesta vegada, no hi ha 3 portes. N'hi ha 100.
2. D'aquestes 100, 99 tenen darrere una cabra i tan sols 1, un cotxe.
3. Per començar, el concursant triarà una de les 100 portes.
4. Seguidament, el presentador anirà obrint portes, d'on aniran sortint cabres fins a arribar a una situació semblant a la del problema inicial: queden dues portes per obrir, la que ha triat el concursant i una altra.

És en aquest moment en què reformulem la pregunta. Mantenir o canviar.
La probabilitat de que el concursant hagi triat el cotxe a l'inici és:

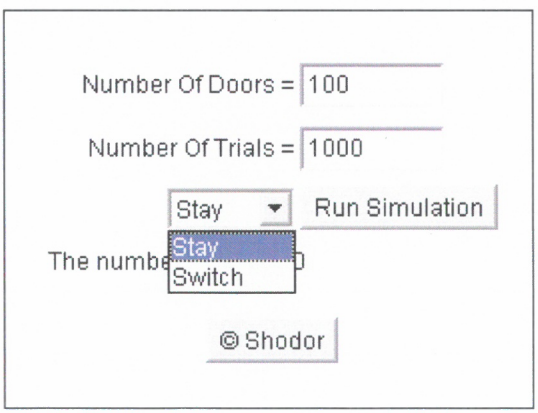


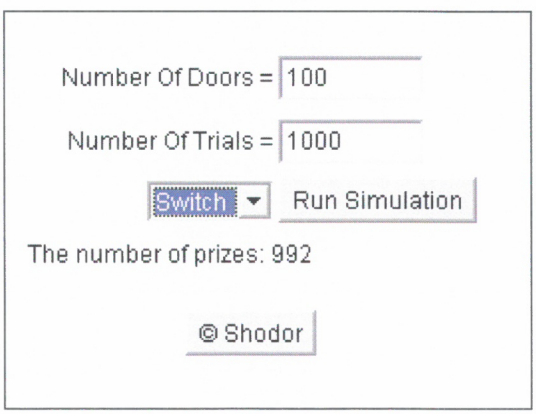
$$p(\text{Triar el cot xe a l'inici}) = \frac{1\,\text{cot xe}}{100\,\text{portes}} = 0{,}01$$

$$p(\text{Triar una cabra a l'inici}) = \frac{99\,\text{cabres}}{100\,\text{portes}} = 0{,}99$$

Per tant, si no canviem la probabilitat d'aconseguir el cotxe és igual a la probabilitat inicial d'escollir el cotxe, és a dir, 0,01. Per contra, si canviem, la probabilitat és de 0,99.

Pràctica





Hem fet 1000 simulacions del problema amb 100 portes. En la pràctica que hem dut a terme, es pot observar que l'estratègia de canviar sempre ens donarà un 0,992 de probabilitat de guanyar el premi desitjat.

Web de la pràctica:

http://www.shodor.org/interactivate/activities/GeneralizedMontyHall/?version=1.6.0_02&browser=Mozilla&vendor=Sun_Microsystems_Inc

5. El problema dels aniversaris. Resolució i pràctica

L'objectiu d'aquest problema és determinar la probabilitat que hi ha en grup de *n* persones de que almenys dues coincideixin en la data de naixement (s'entén dia i mes), tenint en compte que l'any té 365 dies.

Resolució

Calcularem la probabilitat de la coincidència per grups de 10, 20, 50, 60 i 100 persones. Procedirem calculant la probabilitat del succés contrari i la restarem a 1. D'aquesta manera la probabilitat de cap coincidència per a grups d'*n* persones és:

$$p(\text{cap coincidència}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{\overbrace{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365-n+1)}^{n \text{ factors}}}{\underbrace{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365}_{n \text{ factors}}} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

$$p(\text{a lg una coincidència}) = 1 - p(\text{cap coincidència})$$

La fórmula per a saber la probabilitat de cap coincidència en grups d'*n* persones és un quocient: el factorial de 365 (dies) dividit entre el factorial de 365 menys el nombre *n* de persones multiplicat per 365 elevat al nombre de persones.

- **Grup de 10 persones:**

$$p(\text{cap coincidència}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 356}{365^{10}} = 0,88305$$

$$p(\text{a lg una coincidència}) = 1 - 0,88305 = 0,11695$$

- **Grup de 20 persones:**

$$p(\text{cap coincidència}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 346}{365^{20}} = 0,58856$$

$$p(\text{a lg una coincidència}) = 1 - 0,58856 = 0,41144$$

♦ **Grup de 50 persones:**

$$p(\text{cap coincidència}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 316}{365^{50}} = 0,02962$$

$$p(\text{alguna coincidència}) = 1 - 0,02962 = 0,97038$$

♦ **Grup de 60 persones:**

$$p(\text{cap coincidència}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 306}{365^{60}} = 0,00587$$

$$p(\text{alguna coincidència}) = 1 - 0,00587 = 0,99413$$

♦ **Grup de 100 persones:**

$$p(\text{cap coincidència}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 266}{365^{100}} = 3,07248 \cdot 10^{-7}$$

$$p(\text{alguna coincidència}) = 1 - 3,07248 \cdot 10^{-7} \approx 1$$

Així arribem a la conclusió que per a grups en què *n* és igual o més gran que 50, la probabilitat d'almenys una coincidència és pràcticament 1.

Pràctica

Tot seguit, farem la pràctica en una aplicació:

A la imatge es pot veure l'aplicació, que és un generador d'aniversaris aleatoris. Consta dels dotze mesos de l'any amb els dies corresponents: gener té 31 caselles, febrer en té 28, etc.

Els passos que cal seguir per fer la pràctica són:

1. Triar el nombre d'aniversaris que es volen generar.
2. Apretar el botó Start.

En la pràctica hem decidit generar 50 aniversaris, sabem que tenim una probabilitat de 0,97 de que hi hagi almenys una coincidència:

I efectivament, l'aplicació ha donat una coincidència en el dia 28 de juny. En la caixa d'estadístiques es pot observar el nombre d'aniversaris generats (50) i el nombre de coincidències (1).

Web de la pràctica:

http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html

6. La probabilitat en el pòquer. Pràctica

El pòquer és un joc de cartes d'envit (invitació a apostar) l'origen del qual és encara un debat no resolt. El més probable és que sigui una fusió de diversos jocs tot i que la seva expansió s'atribueix a l'exèrcit dels EE.UU.

L'objectiu del jugador de pòquer és obtenir una mà (conjunt de 5 cartes) més bona que la resta de jugadors. No obstant això, és també molt important saber apostar en conseqüència. Aquesta particularitat queda palesa en la següent frase:

"Aconseguir la mà és sort, què fas amb ella, habilitat."

El pòquer té múltiples variants, però ens fixarem en la més senzilla, que consisteix a rebre cinc cartes i apostar.

Parlant estrictament, la baralla utilitzada per a jugar al pòquer és la baralla anglesa, que és una variant de la francesa. No obstant això, si es juga amb la baralla anglesa, que conté jòquers, la vessant probabilística perd interès. Per tant, la pràctica següent es basarà en el joc practicat amb la baralla francesa, que té 52 cartes dividides en 4 colls (sense jòquers).

Per fer el problema és recomanable visitar l'Annex I.

Començarem calculant el nombre de casos possibles (les diferents mans que pot rebre un jugador):

$$C_{52,5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \cdots \cdot 48}{5!} = 2.598.960 \text{ mans}$$

Ja que 52 són les cartes de la baralla francesa i 5, el nombre de cartes en una mà.

Ara cal calcular els casos favorables per a cada tipus de mà i la probabilitat de cada una d'elles per la llei de Laplace.

♦ **Escala Reial o Flor Imperial:** És la combinació de cinc cartes en què hi ha A, K, Q, J i 10 del mateix coll.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}=4$$

És a dir, de les 4 cartes que poden començar una escala reial (els 10 de cada coll), n'agafem 1, i seleccionem les 4 cartes restants (A, K, Q i J del mateix coll). El nombre de combinacions totals és 4.

$$p(\text{escala reial})=\frac{4}{2.598.960}=0,000002$$

♦ **Escala de color:** És la combinació de cinc cartes en què les cinc cartes tenen els números seguits i a més, comparteixen el coll.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}-4=10\cdot 4-4=40-4=36$$

És a dir, de les 10 cartes que poden començar una escala en triem 1, dels 4 colls que hi ha n'escollim 1, i després agafem 5 cartes. Finalment, restem les 4 escales reials. En total, 36 combinacions.

$$p(\text{escala de color})=\frac{36}{2.598.960}=0,000014$$

♦ **Pòquer:** És la combinació de cinc cartes en què hi ha quatre cartes amb el mateix número.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{4}{1}=\frac{13\cdot 12}{2}\cdot 2\cdot 4=624$$

És a dir, dels 13 números diferents que hi ha en un coll, n'escollim 2 (9 i 3), 1 dels quals formarà el pòquer (9) i l'altre és la carta complementària (3) o a l'inrevés. Per formar el pòquer necessitem les 4 cartes de les 4 que hi ha en un número i per la complementària, 1 de 4. Multiplicant, obtenim 624 combinacions favorables.

$$p(\text{pòquer})=\frac{624}{2.598.960}=0,00024$$

♦ **Full:** És la combinació de cinc cartes en què hi ha una parella i un trio.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}=\frac{13\cdot 12}{2}\cdot 2\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}=3744$$

És a dir, dels 13 números diferents n'agafem dos. D'aquests 2, en triem 1 per agafar 3 de les 4 cartes i de l'altre, agafem 2 de les 4 cartes. 3744 combinacions en total.

$$p(\text{full})=\frac{3.744}{2.598.960}=0,00144$$

♦ **Color:** És la combinació de cinc cartes en què les cinc cartes comparteixen el mateix coll.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{13}{5}\cdot\binom{4}{1}-40=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{5\cdot4\cdot3\cdot2}\cdot4-40=5148-40=5108$$

És a dir, dels 13 números diferents de cada coll, en necessitarem 5 (en aquest cas, 2, 7, J, A i 4), els quals han de ser del mateix coll (1 de 4). A més, cal restar tots els tipus d'escala de color i reial. En total, 5108 combinacions.

$$p(color)=\frac{5.108}{2.598.960}=0,00197$$

♦ **Escala:** És la combinació de cinc cartes en què les cinc cartes que tenen els números seguits.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}-40=10\cdot4^5-40=10240-40=10200$$

És a dir, de les 10 cartes que comencen una escala en triem 1 (el 3) i escollim les 4 cartes següents (les que compleixin la condició). Després, restem les escales de color. Un cop feta la resta, hi ha 10200 combinacions favorables.

$$p(escala)=\frac{10.200}{2.598.960}=0,00393$$

♦ **Trio:** És la combinació de cinc cartes en què hi ha tres cartes que comparteixen el mateix número.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}=\frac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2}\cdot3\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2}\cdot4\cdot4=54912$$

És a dir, dels 13 números diferents en triem 3 (8, 2 i 10). D'aquests 3, 1 (8) formarà el trio. Necessitem 3 de les 4 cartes possibles (hi ha quatre 8). Dels altres dos (2 i 10), 1 de 4 en cada cas. En total, 54912 combinacions.

$$p(trio)=\frac{54.912}{2.598.960}=0,02113$$

♦ **Doble Parella:** És la combinació de cinc cartes en què hi ha dues parelles.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}=\frac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2}\cdot3\cdot\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{4\cdot3}{2}\cdot4=123552$$

És a dir, dels 13 números diferents en triem 3 (Q, 5 i 2). D'aquests 3, n'hi ha 1 (2) que no fa la doble parella. Formem una parella de les quatre Q i una altra parella dels quatre 5. Completem la mà amb 1 altra carta de número diferent (2). En total, 123552.

$$p(doble\ parella)=\frac{123.552}{2.598.960}=0,04754$$

♦ **Parella:** És la combinació de cinc cartes en què hi ha dues cartes que comparteixen el mateix número.

El nombre de casos favorables és:

$$\binom{13}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{4\cdot3\cdot2}\cdot4\cdot\frac{4\cdot3}{2}\cdot4^3=1098240$$

És a dir, dels 13 números diferents en triem 4 (K, 7, 2 i J). D'aquests 4 números, tots poden fer qualsevol funció (parella o carta complementària, en aquest cas). Així, d'1 (K) d'aquests 4 agafem 2 de les 4 cartes que el formen. Completem la mà amb 4 números diferents. Hi ha 1098240 mans favorables.

$$p(\text{parella})=\frac{1.098.240}{2.598.960}=0,42257$$

♦ **Carta més alta:** És la combinació de cinc cartes en què no hi ha cap relació entre cap de les cartes i per tant, el nivell de la mà ve determinat per la carta més alta.

El nombre de casos favorables el trobarem buscant la suma complementària de la suma de tots els altres casos:

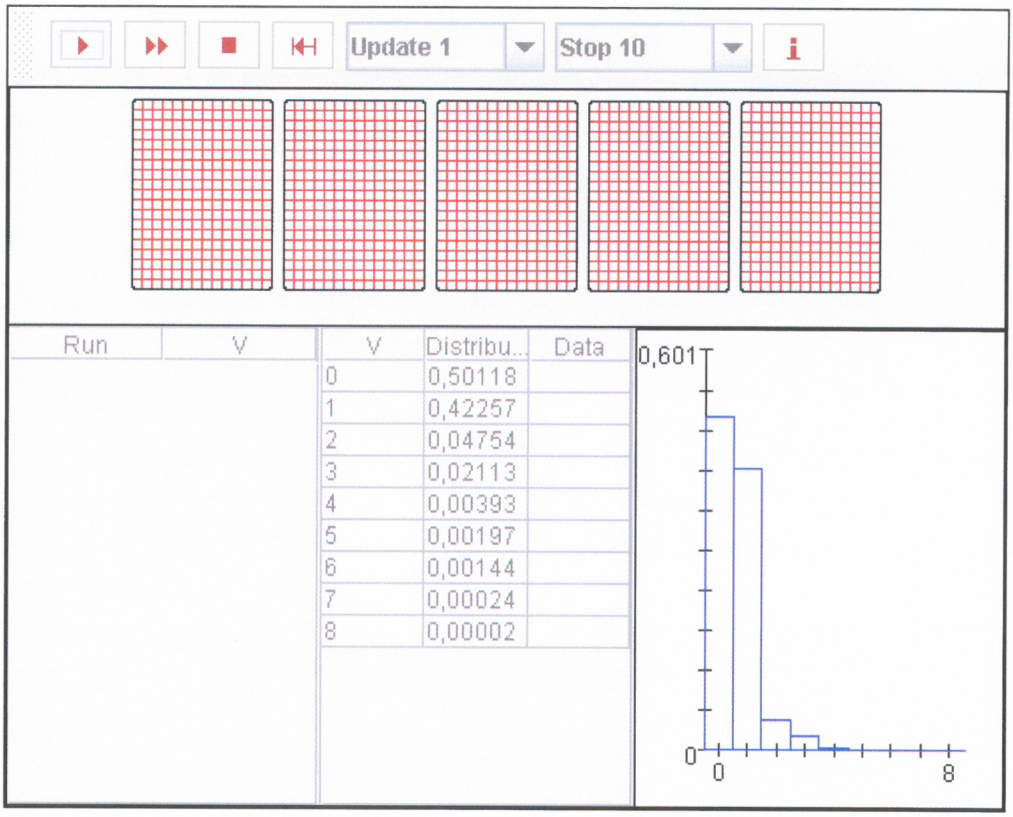
$$4+36+624+3744+5108+10200+54912+123552+1098240=1296420$$

$$\text{Casos favorables}=2598960-1296420=1302540$$

$$p(\text{carta més alta})=\frac{1.302.540}{2.598.960}=0,50118$$

Pràctica

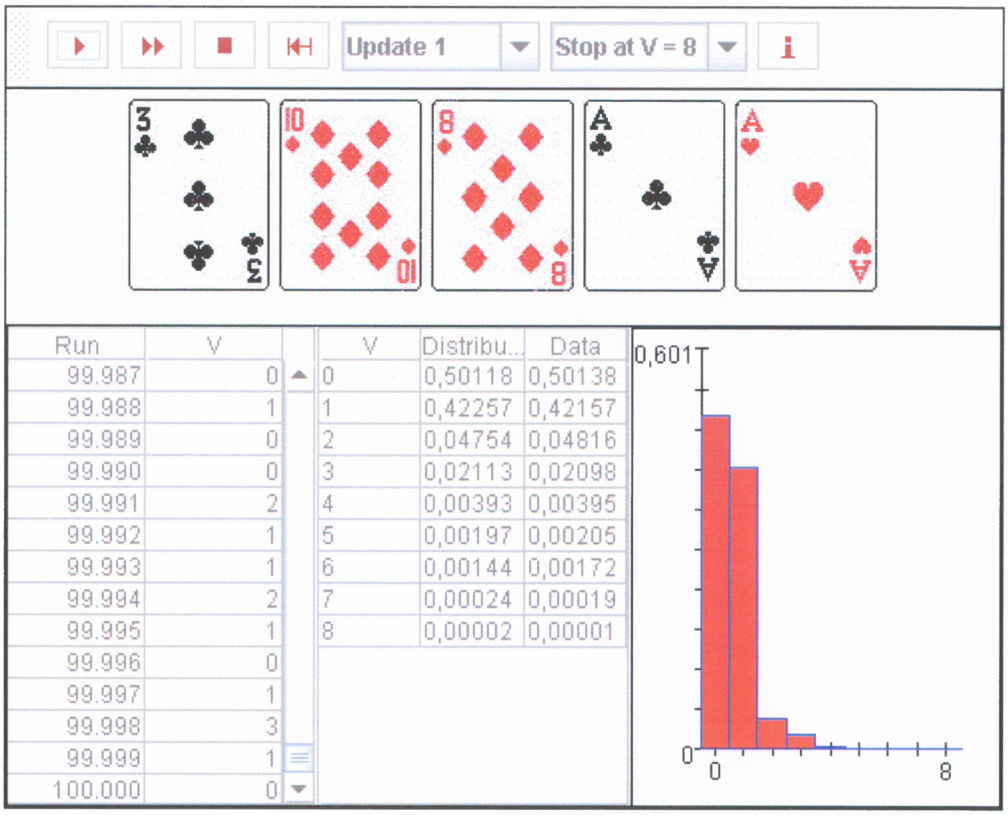
Per corroborar els càlculs s'ha buscat un applet que simuli diverses mans.



En el simulador es pot observar de dalt a baix els diferents botons per simular el repartiment, les cinc cartes (de boca terrosa), la columna de resultats (buida) i la columna de la probabilitat esperada/veritable amb el gràfic corresponent.

0	Carta més alta
1	Parella
2	Doble parella
3	Trio
4	Escala
5	Color
6	Full
7	Pòquer
8	Escala de color o Escala reial (No es distingeixen)

S'han simulat 100.000 mans i el resultat és el següent.



Es pot observar que els resultats són pràcticament iguals als esperats.

Web de la pràctica:

http://www.math.uah.edu/stat/applets/PokerExperiment.xhtml

CONCLUSIONS

Tal com he explicat en la introducció, aquest treball no respon cap pregunta o hipòtesi inicial i per tant, les conclusions a les que he arribat són diferents de les d'un treball de recerca tradicional. L'objectiu del treball és més aviat ser una guia per aprendre a calcular probabilitats. Els coneixements d'aquesta guia s'apliquen als sis problemes en què he treballat.

La conclusió principal que he tret d'aquest treball de recerca és l'ampliació del meu coneixement matemàtic així com els recursos que s'utilitzen per enfrontar-se a qualsevol desafiament matemàtic.

Les dificultats que em vaig trobar al principi del treball són, a grans trets, tres.

La primera i òbvia dificultat és el fet que no sabia quasi res de probabilitat. Per aprendre les bases de la probabilitat he hagut de treballar els diferents apartats dels llibres d'ESO i de Baxillerat, simultàniament, feia exercicis per consolidar els coneixements. Aquests exercicis es troben entre els exemples de la part teòrica.

Una altra dificultat va ser buscar un processador matemàtic per ser capaç d'escriure les fórmules. Si bé al principi em costava molt escriure una fòrmula, al final puc dir que domino força bé el MathType.

Finalment, l'última dificultat inicial va ser l'estreta relació que tenen la resolució de problemes de probabilitat amb la combinatòria. Aquesta relació juntament amb la manca de coneixement de les estratègies per comptar justifiquen l'aparició d'un annex de combinatòria.

Pel que es refereix a les conclusions de la part pràctica del treball, he de dir que la resolució dels problemes ha sigut més complicada del que esperava en un principi. Un cop treballada la part teòrica, ha estat complicat aplicar els coneixements adquirits per resoldre els problemes:

El problema dels punts és un problema ideal per començar a entrar en l'apartat pràctic. És potser el més senzill de tots pel que fa a la vessant matemàtica: per arribar la solució acceptada (proposada per Pascal i Fermat) cal dibuixar el diagrama en arbre i sumar les probabilitats que fan guanyador a cada jugador.

El problema del cavaller De Méré combina els apartats de teoria de successos i l'annex de combinatòria: cal utilitzar les estratègies per comptar de l'annex i calcular els successos complementaris per obtenir les probabilitats en llançar els daus per respondre a la consulta que Antoine Gombaud va fer a Blaise Pascal.

Especialment difícil és el cas del problema de l'Agulla de Buffon, el més complet segons el meu punt de vista, que requereix haver treballat no solament amb els conceptes del càlcul de probabilitats sinó també amb els principis d'integració.

El problema de Monty Hall és el més mediàtic de tots. Em va caldre dividir el problema en dues situacions (abans que el presentador obri la porta i després) per poder analitzar el problema de manera comprensible. És veritat que quasi no té càlculs de probabilitats, però la complexitat de la solució obliga a buscar una alternativa més intuïtiva: enfocar el problema amb cent portes.

En el problema dels aniversaris és necessari calcular les probabilitats per a cap coincidència per saber la probabilitat que hi hagi almenys una coincidència. He arribat a escriure una fórmula per calcular qualsevol grup per nombrós que sigui.

Finalment, el càlcul de les probabilitats en el pòquer justifica perfectament l'addició d'un annex de combinatòria. El pas que més problemes m'ha suposat d'aquest problema és el càlcul dels casos favorables per a cada tipus de mà.

Alguns problemes han estat més complicats. M'han fet falta diverses hores per resoldre'ls. Sovint, cal fer dos passos enrere per adonar-se que per passar a l'altra banda de la tanca, el millor no és saltar-la, no, sinó obrir la porta. Tan sols la persistència i la perseverància ajuden a obrir-la. En alguns casos m'ha calgut ajuda externa per desencallar el problema, que ha vingut de la mà de la meva tutora i de la professora Olga Julià. Els estic molt agraït.

Un cop el problema està resolt, queda saber si un lector hipotètic pot entendre el perquè de la solució llegint l'apartat del treball corresponent. Aquests lectors han sigut la meva família, en especial els meus pares, a qui també agraeixo la seva tasca.

Una de les conclusions que personalment considero més important que deriva d'aquest treball és la introducció d'alguns problemes en la versió catalana de l'Enciclopèdia Lliure Wikipedia. D'aquesta manera poso la meva feina a disposició de qui vulgui consultar-la. Aquest no era un dels objectius inicials del treball, però mentre

el feia m'he adonat que si altra gent és capaç de fer-ho en altres versions (d'altres llengües), res no m'impedia crear o bé completar els problemes d'aquest projecte. Gràcies a aquesta petita reflexió vaig arribar a la conclusió que podia fer la meva contribuició en l'enciclopèdia lliure: he creat els apartats de "El problema dels punts", "El problema del cavaller De Méré" i "El problema dels aniversaris", i he completat les entrades "El problema de Monty Hall" i "Pòquer".

A nivell personal, el fet de treballar en un projecte durant cinc mesos m'ha suposat un repte pel que respecta a la constància i a l'aprofundiment en els temes plantejats així com la delimitació dels aspectes que el treball engloba: és a dir, des d'una breu història de la probabilitat fins al teorema de Thomas Bayes, i en l'àmbit pràctic, la tria i resolució dels sis problemes famosos.

Per acabar, m'he plantejat com podria haver continuat aquest treball. Penso que seria interessant aprendre els nivells de programació necessaris per poder dissenyar les aplicacions que he fet servir per simular els problemes resolts a la part pràctica.

I finalment, només em queda afegir que m'ha agradat molt el treball i animar a altres alumnes a fer treballs matemàtics, que si bé poden espantar en un principi, asseguro que valen la pena.

BIBLIOGRAFIA

Llibres consultats

- AA.VV. *Estadística i atzar*. Grup Zero. Barcelona: 1978.
- AA.VV. *Matemàtiques 2 · ESO. Sèrie Astrolabi*. McGraw Hill. Espanya: 2003.
- AA.VV. *Matemàtiques 3 · ESO. Sèrie Astrolabi*. McGraw Hill. Espanya: 2002.
- AA.VV. *Matemàtiques 4 · ESO. Sèrie Astrolabi*. McGraw Hill. Espanya: 2003.
- AA.VV. *Matemàtiques 1 · Batxillerat*. McGraw Hill. Xina: 2006.
- GONICK, L. & SMITH, W. *The Cartoon Guide to Statistics*. HarperCollins. New York: 1993.
- HADDON, M. *The curious incident of the dog in the night-time*. Vintage Books. London: 2004.
- HAIGH, J. *Matemáticas Y Juegos De Azar. Jugar Con La Probabilidad*. Editorial Tusquets. Madrid: 2003.
- CHEN, B. & ANKENMAN, J. *The mathematics of poker*. Conjelco. EE. UU: 2006.

Altres

- Enciclopèdia Encarta. Biblioteca de consulta 2003

Webgrafia

- http://library.thinkquest.org
- http://www-stat.stanford.edu
- http://www.catedu.es
- http://www.ciencianet.com
- http://www.encilopedia.cat
- http://www.google.es
- http://www.kalipedia.com
- http://www.math.uah.edu
- http://www.mste.uiuc.edu
- http://www.shodor.org
- http://www.ub.edu
- http://www.wikipedia.org

ANNEXOS

Annex I

1. Combinatòria. Estratègies per comptar

Estratègies i procediments per no haver de comptar d'un en un.

Estratègies per comptar

Començarem amb exemples molt senzills:

► Si es tira un dau blanc i un de negre, quants resultats diferents es poden obtenir?

En cada tirada sortirà un resultat a cadascun dels daus. Hi ha 6 resultats possibles del dau blanc i, per a cadascun d'aquests resultats possibles, hi ha 6 resultats possibles del dau negre. En total es poden obtenir:

$6 \cdot 6 = 36$ resultats.

► En el menú d'un restaurant ofereixen 3 primers plats, 4 segons plats i 2 postres diferents per poder triar. Quants dinars diferents poden ser servits en aquest restaurant?

Cadascun dels 3 primers plats pot anar acompanyat d'un dels 4 segons. Així doncs, tindríem ja $3 \cdot 4 = 12$ possibilitats diferents. A cadascuna d'aquestes 12 possibilitats, cal afegir-hi un dels 2 postres per acabar el dinar. Per tant, $12 \cdot 2 = 24$ és el nombre total de dinars que es poden servir. És a dir:

$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ dinars.

S'observa que en tots aquest casos senzills la multiplicació és l'operació que ens ha resolt els problemes. La multiplicació és l'operació que permet comptar les possibilitats o els diferents casos que es poden presentar en la majoria dels problemes de comptar.

2. Variacions

2.1 Variacions sense repetició

Anomenem **variacions sense repetició d'*m* elements triats d'*n* en *n***, o variacions d'ordre *n*, les diferents mostres d'*n* elements diferents que es poden obtenir; de manera que dues d'aquestes mostres qualssevol tinguin algun element diferent o, si tenen els mateixos elements, estiguin col·locats en ordre diferent.

El nombre de variacions sense repetició d'*m* elements triats d'*n* en *n* es representa per: $V_{m,n}$.

Ex. 1.

► Quants nombres de tres xifres diferents podem escriure si només emprem els dígits 1, 3, 5 i 7?

Evidentment, els números 135 i 513 són diferents, malgrat que estiguin formats pels mateixos dígits.

La xifra de les centenes pot ser qualsevol dels quatre dígits. Per a cada nombre, segons la xifra de les centenes, podem col·locar tres dígits diferents per a la xifra de les desenes.. Finalment, per a cadascun d'aquests nombres, podem posar una de les dues xifres que queden a les unitats.

Es poden formar: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números diferents.

Es pot observar que en l'exemple que hem detallat es tracta de triar mostres de xifres d'entre un conjunt donat de manera que una mostra es diferenciï de l'altra per l'ordre o per un element.

En l'exemple triat, $m = 4$ i $n = 3$. Si el que ens interessa és escriure totes les mostres possibles, podem construir el diagrama en arbre corresponent.

Per contra, si només ens cal saber quantes mostres es poden fer, n'hi ha prou amb esbrinar com obtenir aquest nombre.

El nombre de nombres diferents de 3 xifres és: $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

I en general, com es calcula el nombre de $V_{m,n}$? D'entrada, cal que m i n siguin nombres naturals i es compleixi que $m > n$.

Tenim m elements. Si en triem un, tenim m tries possibles: $V_{m,1} = m$. Per a cadascuna de les m tries, en podem escollir $m - 1$ per fer tries de dos elements: $V_{m,2} = m(m-1)$. Per a cadascuna de les $m(m - 1)$ possibilitats podem fer $(m - 2)$ de tries de tres elements: $V_{m,3} = m(m-1)(m-2)$.

Si cal fer n tries, la regularitat de les fórmules anteriors ens mostra que:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))$$

Els diferents nombres de variacions, sempre s'obtenen com a n productes de factors consecutius començant per m.

2.2 Variacions amb repetició

Anomenem **variacions amb repetició d'*m* elements triats d'*n* en *n***, les diferents mostres d'n elements que es poden obtenir; de manera que dues d'aquestes mostres qualssevol tinguin algun element diferent o, si tenen els mateixos elements, estiguin col·locats en ordre diferent.

El nombre de variacions amb repetició d'n elements triats d'n en n s'expressa per $VR_{m,n}$. Calcular-ho és senzill:

$$VR_{m,n} = m \cdot m \cdots_{(n)} m = m^n$$

On m i n són nombres naturals, i n, en aquest cas, pot ser més gran que m: $n \geq m$.

Ex. 1.

► Reprenem l'exemple dels nombres de tres xifres, però ara posem per cas que podem repetir xifres. Quants nombres podem escriure?

La xifra de les centenes pot ser qualsevol de les quatre. Per a cadascuna d'aquestes, podem considerar quatre dígits diferents per a la xifra de les desenes. Finalment, per a cadascun d'aquests nombres, podem escriure una de les quatre xifres a les unitats. En total tindrem:

$VR_{4,3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ nombres de tres xifres.

3. Permutacions

Ara veurem de quantes maneres diferents es pot ordenar un conjunt d'elements. Cal diferenciar si hi poden haver elements repetits en cada ordenació o no. Aquestes ordenacions s'anomenen *permutacions*.

3.1 Permutacions sense repetició:

Anomenem **permutacions d'*m* elements, o d'ordre *m***, a les diferents mostres que es poden formar amb tots els elements sense repetir-los, de manera que dues mostres qualsevol es diferencien per l'ordre en què es troben col·locats els elements.

Si analitzem la situació, ens trobem davant de variacions en què en cada tria entren tots els elements.

El nombre de permutacions d'm elements es representa per P_m i coincideix amb $V_{m,m}$, nombre de variacions d'm elements agafats d'm en m. Aquest nombre s'obté multiplicant m factors decreixents a partir d'm:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1 = m!$$

L'expressió $m!$ es llegeix "factorial d'm" o "m factorial" i representa el producte dels m factors consecutius des de m fins a 1. D'aquesta manera, per exemple:

$$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

Ex. 1.

► Quants nombres de 4 xifres diferents es poden formar amb els dígits 2, 4, 6 i 8?

És senzill ja que es tracta de variacions de quatre elements agafats de quatre en quatre, és a dir, permutacions de quatre elements: $P_4 = V_{4,4} = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

3.2 Permutacions amb repetició

En general, el càlcul del nombre d'ordenacions d'm elements en què n'hi ha a d'una mena, b d'una altra i c d'una altra, de manera que $a + b + c = m$, s'expressa:

$$P_m^{a,b,c} = \frac{m!}{a!b!c!}$$

Algun dels valors *a, b,* o *c* pot ser 1, i com que 1! = 1. no cal escriure'l en el producte del denominador. Així, en l'exemple, tenim $P_7^3 = \frac{7!}{3!}$. També podem considerar, per exemple, $P_{14}^{3,4,2,5} = \frac{14!}{3!4!2!5!}$ que indica les permutacions de 14 elements en què n'hi ha 3 d'una mena, 4 d'una altra, 2 d'una altra i 5 d'una altra.

Ex. 1.

► De quantes maneres diferents podem ordenar les lletres de la paraula *CLASSES*?

Com que hi ha 7 elements, sembla que hi hauria P_7 maneres diferents d'ordenar aquestes lletres. Però, si pensem una mica, ens adonem que si intercanviem la primera *S* que surt amb la segona o la tercera, obtenim la mateixa *permutació*.

Diferenciem les esses amb un subíndex: $CLAS_1S_2ES_3$. Què és el que passa? Quan permutem entre elles S_1, S_2 i S_3. Tenim al mateixa paraula *CLASSES*. De quantes maneres podem permutar les tres esses? Evidentment són $P_3 = 3! = 6$. En definitiva, per determinar de quantes maneres diferents es poden ordenar les lletres de la paraula *CLASSES* cal fer:

$$\frac{P_7}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

4. Combinacions

Anomenem **combinacions d'*m* elements triats d'*n* en *n***, o d'ordre *n*, les diferents mostres d'*n* elements que es poden fer, de manera que una mostra es diferencia d'una altra si té algun element diferent.

El nombre de combinacions d'*m* elements triats d'*n* en *n* es representa per $C_{m,n}$, amb *m* i *n* nombres naturals i $m \geq n$. Aquest nombre es calcula així:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

En el cas de les combinacions, allò important són els elements que figuren en la mostra i no com estan ordenats.

Pel que fa a les variacions, el canvi d'ordre dels elements de la mostra dóna una variació diferent. En les combinacions, canviar l'ordre dels elements d'una mostra condueix a la mateixa combinació.

Ex. 1.

► En un equip de bàsquet hi ha set jugadors, que els simbolitzarem per la inicials dels seus noms: R, G, M, S, P, W i O. Volem saber quants equips de cinc jugadors

diferents es poden fer sense tenir en compte la posició que ocupen dins la pista (el rol dins l'equip). Si volguéssim tenir-la en compte, el nombre d'equips seria $V_{7,5}$,

El nombre d'equips s'inclou en el nombre $V_{7,5}$, però acabem de veure que un equip no canvia en permutar les 5 lletres que representen els seus jugadors.

Per trobar el nombre total d'equips dividim:

$$\frac{V_{7,5}}{P_5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

Aquests 21 equips s'anomenen *combinacions de 7 elements agafats de 5 en 5.*

5. Esquema-Resum

Per analitzar els possibles enunciats:

Es trien tots els elements ➡ Es poden repetir $\begin{cases} \text{Sí} \Rightarrow P_m^{a,b,c} = \dfrac{m!}{a!b!c!} \\ \text{No} \Rightarrow P_m \end{cases}$

No es trien tots:

Són diferents si es canvia l'ordre $\begin{cases} \text{Sí} \Rightarrow \text{Es poden repetir} \begin{cases} \text{Sí} \Rightarrow VR_{m,n} \\ \text{No} \Rightarrow V_{m,n} \end{cases} \\ \text{No} \Rightarrow C_{m,n} \end{cases}$