

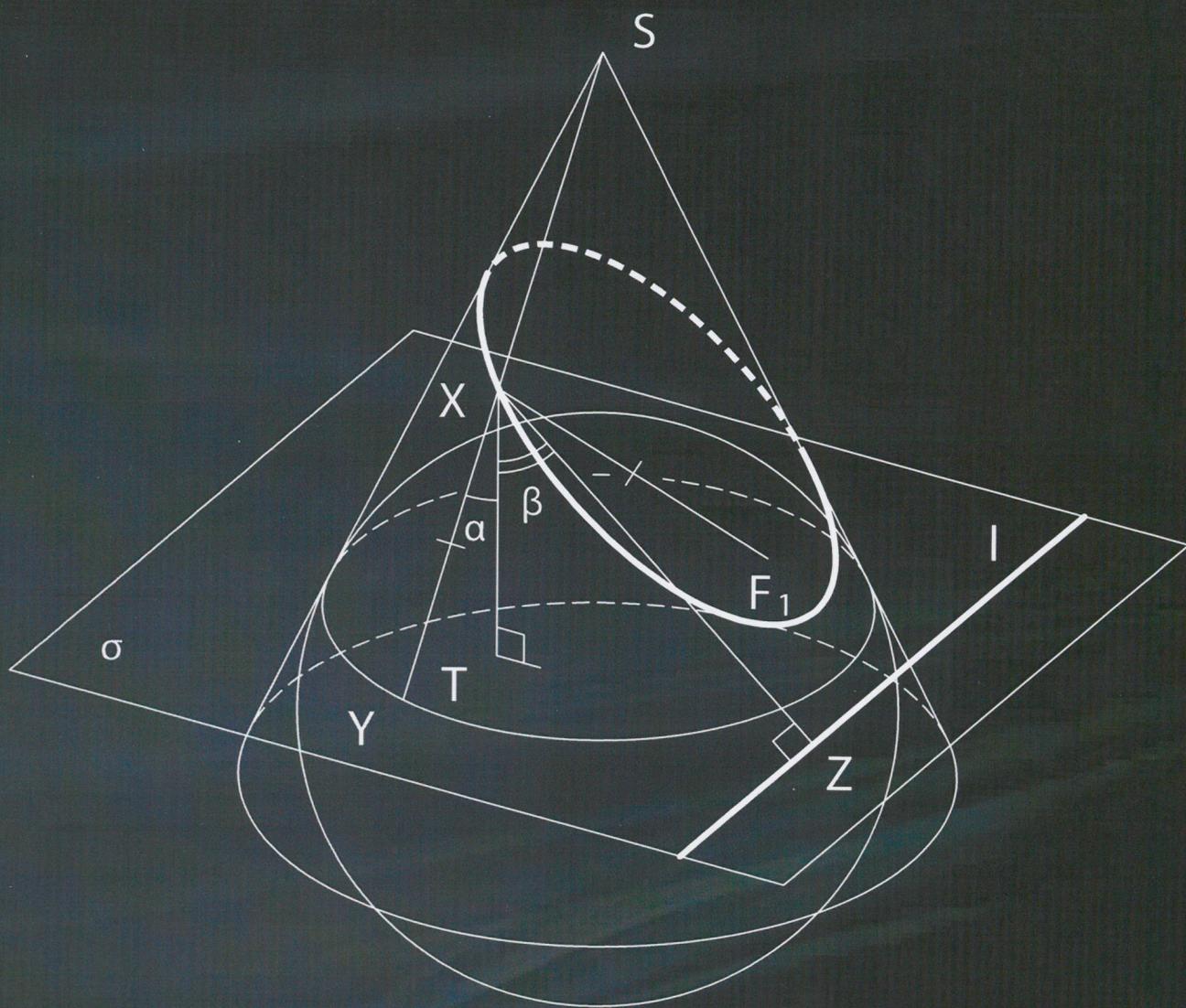
Primer premi

6a Edició del Premi Poincaré (2009)

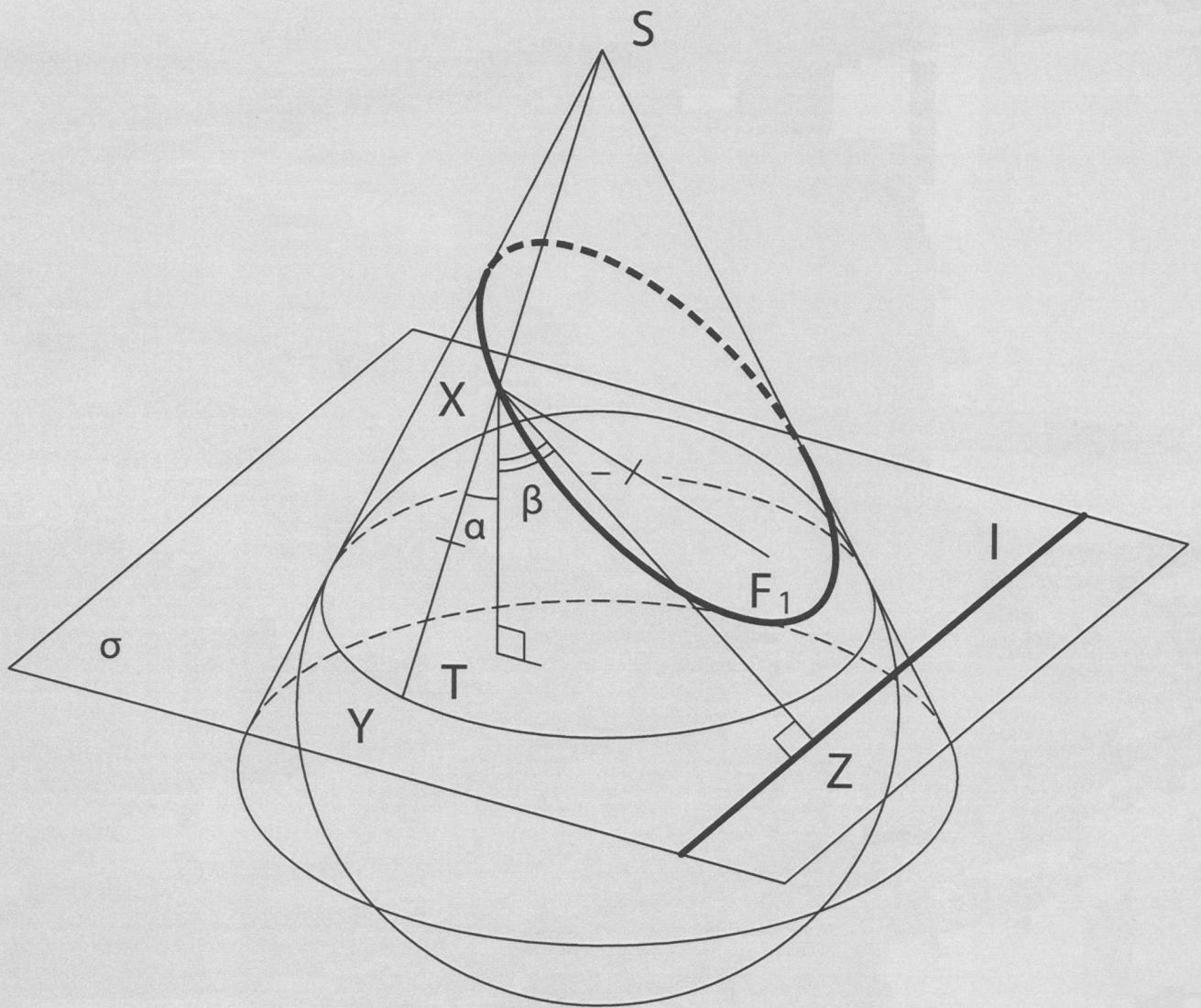
Còniques

Autor: Juan José Madrigal Martínez
Centre: IES Màrius Torres (Lleida)
Tutor: Sr. Jaume Molins

CÓNICAS



CÓNICAS



I

Ubi materia, ibi geometria

JOHANNES KEPLER

Prefacio

Las secciones cónicas se encuentran entre los elementos más fascinantes de la geometría. Sus múltiples propiedades las hacen importantísimas en áreas como la óptica, la arquitectura y la astronomía. Sin embargo su uso muchas veces se restringe a su utilidad y su estudio se realiza desde un punto de vista puramente analítico.

La excusa que ha hecho surgir a la luz este breve estudio de las cónicas ha sido la realización de un trabajo preuniversitario obligatorio en los centros de Bachillerato de Cataluña, el *Treball de Recerca*. No obstante, mi afición por las matemáticas, y en particular por las cuestiones geométricas, viene de mucho tiempo atrás. También tenía en mente otros posibles temas para este trabajo, como por ejemplo el estudio de poliedros regulares en el espacio cuatridimensional.

He elegido las cónicas por su gran belleza y simplicidad. Resulta impresionante la tremenda cantidad de propiedades que poseen -de las cuales en este estudio sólo recojo una pequeña selección de mi especial agrado- y que pueden demostrarse utilizando únicamente los métodos de la geometría clásica elemental. Es para resaltar esta *elegancia genuina* de las cónicas que me he esforzado fuertemente por mantener al margen de mis razonamientos y exposiciones los formalismos algebraicos con los que se suelen introducir las cónicas en el bachillerato y los primeros cursos de las carreras científico-técnicas.

El primer capítulo del libro es una introducción al concepto de las secciones cónicas. Son presentadas de una manera poco convencional pero que, desde mi punto de vista, es la más natural posible. Esta introducción permite después, mediante el conocido método de las esferas de Dandelin, redefinir las secciones cónicas en el plano mediante construcciones geométricas extremadamente simples.

Prosiguiendo, en el segundo capítulo demostramos una serie de propiedades comunes a todas las secciones cónicas: algunas son muy conocidas (por ejemplo, la propiedad óptica y los teoremas clásicos de Pascal y Brianchon), pero también se incluyen otras que nos serán muy importantes para el tercer capítulo. Para que el lector pueda seguir las demostraciones de algunos resultados se han incluido ciertas nociones básicas de geometría proyectiva y correspondencia polar.

El tercer capítulo es una recopilación de resultados concernientes a las cónicas cargada de un toque muy personal. Son -a mi criterio- los mejores hallazgos realizados sobre secciones cónicas y los que siempre han despertado en los matemáticos y despertarán en el lector una curiosidad sobre la magnífica variedad de propiedades que las cónicas encierran debajo de una apariencia tan simple.

Por último, el capítulo que cierra el libro es una especie de *divertimento* un tanto aparte de la línea seguida en el resto del libro. Tomando una brillante idea de Richard Feynman, estudiare-

mos el papel de las secciones cónicas en los movimientos astronómicos desde un punto de vista completamente original. Además de mostrar la profunda conexión entre la geometría y la naturaleza, algo que siempre me ha planteado profundos interrogantes, quiero con esta sección poner un broche final a este pequeño libro, en el que ciertamente faltan muchas cosas por poner, pero aparecen muchas otras que no se ponen habitualmente.

Los contenidos del libro están basados de forma mayoritaria en conocidos teoremas y resultados de geometría clásica. Muchas de las demostraciones de propiedades y teoremas que ofrecemos, por ejemplo, pueden encontrarse en las obras de referencia que proponemos en la bibliografía, e incluso algunas de ellas han sido extraídas prácticamente de forma íntegra de estos otros libros. No obstante, quisiera remarcar que algunas demostraciones, bien porque no suelen aparecer en las obras especializadas o porque he intentado dar una segunda demostración apoyada únicamente en resultados básicos de geometría clásica, han sido ideadas por el autor. Entre ellas se cuentan la demostración del teorema de los radios conjugados, donde se ha prescindido de argumentos basados en geometría proyectiva. También se ha utilizado un enfoque completamente original en la obtención del radio de curvatura de una sección cónica, a partir de propiedades básicas de estas. Por último, en el cuarto capítulo se han interpretado y generalizado los casos de la hipérbola y la parábola como movimientos astronómicos para dar completitud a la exposición realizada por Feynman. En todo momento se ha evitado la alusión a la geometría cartesiana, y hemos descrito siempre las secciones cónicas a partir de propiedades geométricas definitorias sin asignarles una ecuación algebraica que las describa.

Quisiera aprovechar aquí para agradecer cuantas contribuciones han hecho posible este trabajo, aunque soy consciente de que siempre quedará alguien *en el tintero*. Agradezco la ayuda que me ha brindado toda mi familia, en especial mi hermano José Daniel, cuya dedicación ha sido imprescindible para el uso del programa L^AT_EX y para la perfección formal del trabajo, sobre todo en el cuarto capítulo. Expreso también un especial agradecimiento a Jaume Molins, profesor de Matemáticas en el Instituto de Educación Secundaria “Màrius Torres” y supervisor de este *Treball de Recerca*, que ha estado ayudándome en todo momento en la realización del trabajo. Muchos otros me han ayudado, tanto en la formación previa como en la realización del propio trabajo; quisiera hacer mención especial de mi amigo Arnau Messegué. A todos ellos, muchas gracias.

Tomelloso, abril de 2009.

Índice general

1. Las secciones cónicas	1
1.1. La elipse	1
1.2. La hipérbola	3
1.3. La parábola	4
1.4. La excentricidad de una cónica	5
2. Algunas propiedades elementales de las cónicas	7
2.1. Propiedades elementales de geometría clásica	7
2.1.1. La propiedad óptica	7
2.1.2. La propiedad isogonal	9
2.1.3. La propiedad de los radios conjugados	11
2.2. Propiedades elementales de geometría proyectiva	14
2.2.1. Introducción a la geometría proyectiva	14
2.2.2. Teorema de Pascal	16
2.2.3. Teorema de Brianchon	17
2.2.4. Correspondencia polar	20
3. Propiedades relacionadas con las cónicas	29
3.1. La elipse	29
3.1.1. Lugar geométrico de van Schooten	29
3.2. La parábola	30
3.2.1. Una parábola a partir de cuatro tangentes	30

3.2.2. Una parábola a partir de tres puntos y la dirección del eje	32
3.2.3. Superficie de una parábola	33
3.2.4. La parábola como envolvente de rectas	35
3.3. La hipérbola	36
3.3.1. Una hipérbola a partir de cuatro puntos.	36
3.3.2. Dos rectas giratorias.	37
3.4. La curvatura de las secciones cónicas.	38
4. El movimiento de los planetas alrededor del Sol	41
4.1. Introducción	41
4.2. La brillante idea de Feynman	43
4.3. Las cónicas y los movimientos astronómicos	48

Capítulo 1

Las secciones cónicas

“La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas”

ALBERT EINSTEIN

Definimos las secciones cónicas como las secciones producidas al atravesar un cono doble por un plano. Dependiendo de la inclinación del plano con respecto al eje de simetría y la generatriz distinguiremos tres tipos de secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola. En este primer capítulo veremos una a una las características definitorias de las cónicas. En primer lugar extraeremos las propiedades básicas de cada cónica a partir de su definición como sección de un cono.

Un cono doble se origina de la siguiente manera: tomemos una recta en el espacio, a la que llamaremos eje de simetría del cono doble. Entonces formamos una superficie de revolución con el conjunto de rectas que pasan por un punto determinado del eje y que forman con él un ángulo fijo. Cada plano que contiene al eje de simetría contiene dos rectas de la superficie de revolución, que forman igual ángulo con el eje de simetría, a las que llamaremos generatrices.

Existen múltiples maneras de introducir las secciones cónicas. Aquí seguiremos el método ideado por el matemático belga Germinal Dandelin¹ (1794-1847), que es considerado el más natural para demostrar las propiedades intrínsecas de las secciones cónicas, y que consiste en inscribir esferas tangentes interiormente a la superficie cónica y al plano de corte.

1.1. La elipse

Consideremos un plano que no sea paralelo a ninguna generatriz. Dicho plano atravesará el cono produciendo una única sección continua. Examinemos detenidamente tal caso usando las esferas de Dandelin.

Llamemos π al plano secante al cono, \mathfrak{S}_1 e \mathfrak{S}_2 a las esferas de Dandelin y F_1 y F_2 a los puntos de tangencia con π respectivamente. Sea X un punto cualquiera de la sección cónica definida

¹DANDELIN, G.P. *Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la Focale Parabolique*, Nouv. Mém. Ac. Sc. de Belgique, 2, pg.172 (1822)

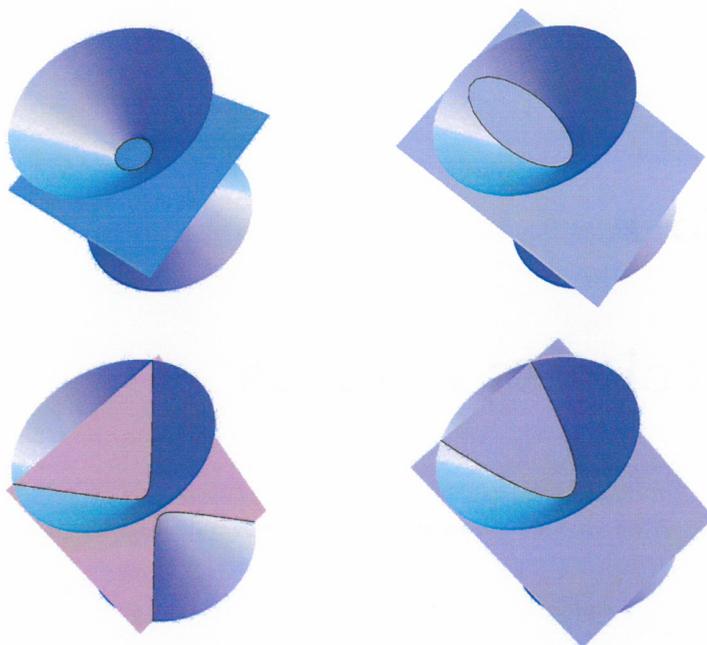


FIGURA 1.1: Las cuatro cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

por π y S el vértice del cono. La generatriz SX interseca \mathfrak{S}_1 y \mathfrak{S}_2 en Y_1 e Y_2 . Puesto que las tangentes a una esfera desde un punto exterior a ésta tienen igual longitud tenemos que $XF_1 = XY_1$ y que $XF_2 = XY_2$, de donde $XF_1 + XF_2 = Y_1Y_2$. Ahora bien, Y_1Y_2 es un segmento de generatriz entre dos planos perpendiculares al eje y su longitud no depende de la elección de X . De aquí determinamos que $XF_1 + XF_2$ es constante. Esta sección cónica se denomina elipse y la podemos definir en el plano de la siguiente manera:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Tomando el caso particular en el que el plano es perpendicular al eje del cono la sección degenera en una circunferencia, al ser una elipse cuyos focos se han superpuesto.

Teorema 1.1.1 *Toda elipse es una proyección paralela de una circunferencia.*

Entendemos por proyección paralela aquella que convierte rectas paralelas en rectas paralelas. Se podría entender como *estirar y contraer* el plano.

Demostración. Supongamos que en vez de hacer una sección a un cono la hacemos a un cilindro. La sección producida es una proyección paralela de la circunferencia, pero si utilizamos las esferas de Dandelin podemos ver que también es una elipse. Por tanto cualquier elipse se puede originar como sección de un cilindro y, por tanto, como proyección de una circunferencia.

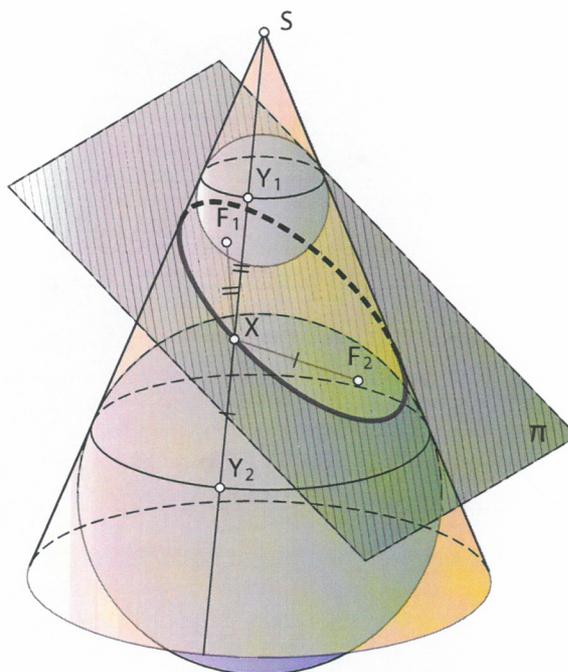


FIGURA 1.2: Demostración de la propiedad definitoria de la elipse mediante las esferas de Dandelin.

Este teorema demuestra que una figura cuya ecuación sea de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una elipse con semiejes mayor y menor a y b .

1.2. La hipérbola

Consideremos ahora un plano que sea paralelo a dos generatrices del cono. Dicho plano atravesará el cono produciendo dos secciones continuas e ilimitadas. Si usamos las esferas de Dandelin y obramos análogamente al caso de la elipse observaremos un resultado parecido, si bien ahora es la diferencia de longitudes la que permanece constante. Esta sección cónica se denomina hipérbola y la podemos definir en el plano de la siguiente manera:

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Las hipérbolas presentan dos asíntotas, es decir, tienden a ser tangentes en el infinito a dos rectas que se cortan en el punto medio de los focos.

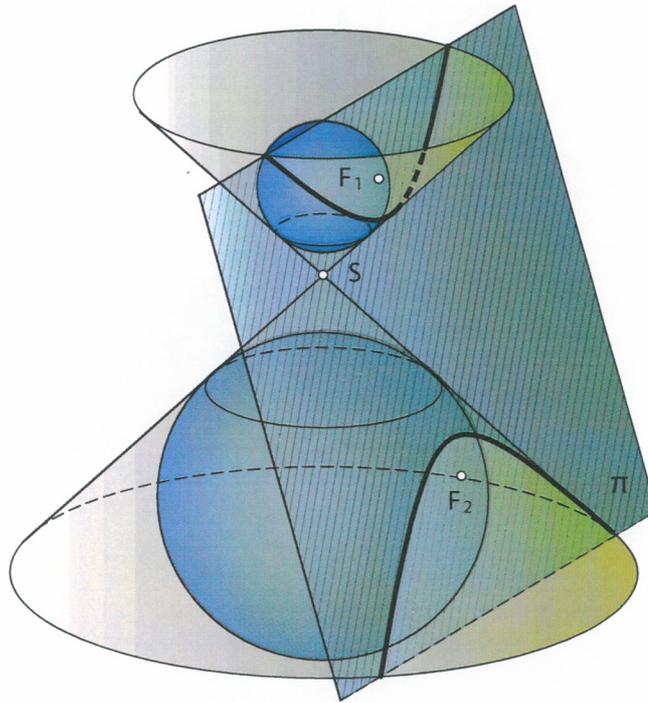


FIGURA 1.3: Demostración de la propiedad definitoria de la hipérbola mediante las esferas de Dandelin.

1.3. La parábola

Fijémonos ahora en un caso particular: un plano paralelo a exactamente una generatriz. Dicho plano atravesará el cono produciendo una única sección continua e ilimitada. Volvemos a usar el método de Dandelin, aunque esta vez sólo podemos inscribir una esfera.

Sea π el plano secante al cono, \mathfrak{S} la esfera tangente al plano en F y σ el plano que contiene la circunferencia en que \mathfrak{S} es tangente al cono. Sea l la intersección de π y σ . Sea X un punto arbitrario de la sección producida por π y el cono y S el vértice del cono. La generatriz SX interseca \mathfrak{S} en Y . Sea además Z la proyección de X en l . Entonces $XF = XY$, puesto que son tangentes a una esfera. Por otra parte Y y Z pertenecen a σ ; el ángulo entre XY y σ es igual al ángulo entre un plano perpendicular al eje y una generatriz, y el ángulo entre XZ y σ es igual al ángulo entre los planos π y σ . Por la elección de π , estos dos ángulos son iguales y por tanto $XZ = XY$. Entonces $XF = XZ$ para cualquier X . Esta sección cónica se denomina parábola y la podemos definir en el plano de la siguiente manera:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz.

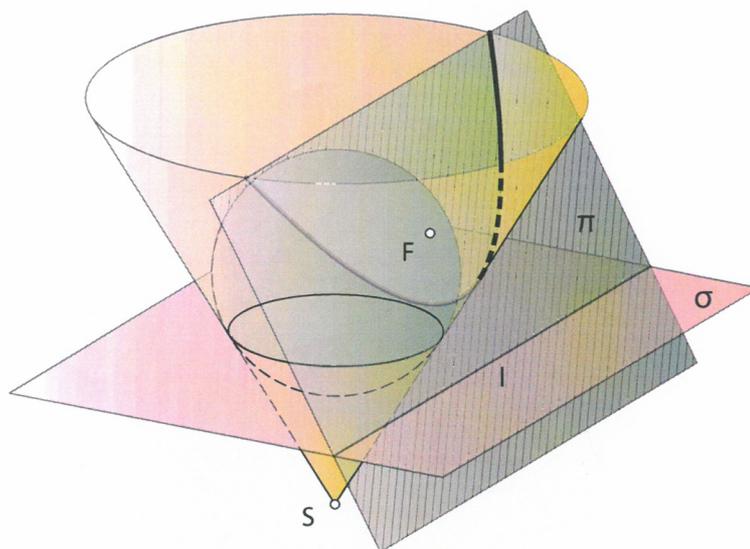


FIGURA 1.4: Demostración de la propiedad definitoria de la parábola mediante las esferas de Dandelin.

1.4. La excentricidad de una cónica

Trabajemos ahora con una cónica cualquiera y tomemos uno de los focos, F . Utilizando la nomenclatura anterior, llamemos π al plano secante al cono, \mathfrak{S} a la esfera tangente a F , y σ al plano en el que \mathfrak{S} es tangente al cono. Sea l la intersección entre π y σ , y sea X un punto arbitrario de nuestra cónica. Sea Y la intersección de SX con σ y Z la proyección de X en l .

Sea T la proyección de X en σ . Sea α el ángulo entre el eje y una generatriz. Entonces $\frac{XT}{XY} = \cos \alpha$.

Ahora llamemos β al ángulo entre π y el eje del cono. Entonces $\frac{XT}{XZ} = \cos \beta$. Por tanto, $\frac{XY}{XZ} = \frac{XY \cdot XT}{XT \cdot XZ} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, que es constante independientemente de la elección de X . Ahora bien, puesto que $XF = XY$, la razón entre XF y XZ es constante. Podemos redefinir cónica de la siguiente manera:

Una cónica es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la razón entre su distancia a un punto llamado foco y a una recta llamada directriz es constante. Dicha razón se denomina excentricidad ε de la cónica.

Si $\varepsilon = 0$, la cónica es una circunferencia y la directriz se aleja hacia el infinito. Si $0 < \varepsilon < 1$, la cónica corresponde a una elipse. Si $\varepsilon = 1$, la cónica es una parábola. Por último, si $\varepsilon > 1$, la cónica es una hipérbola. Tanto las elipses como las hipérbolas tienen dos focos y dos directrices.

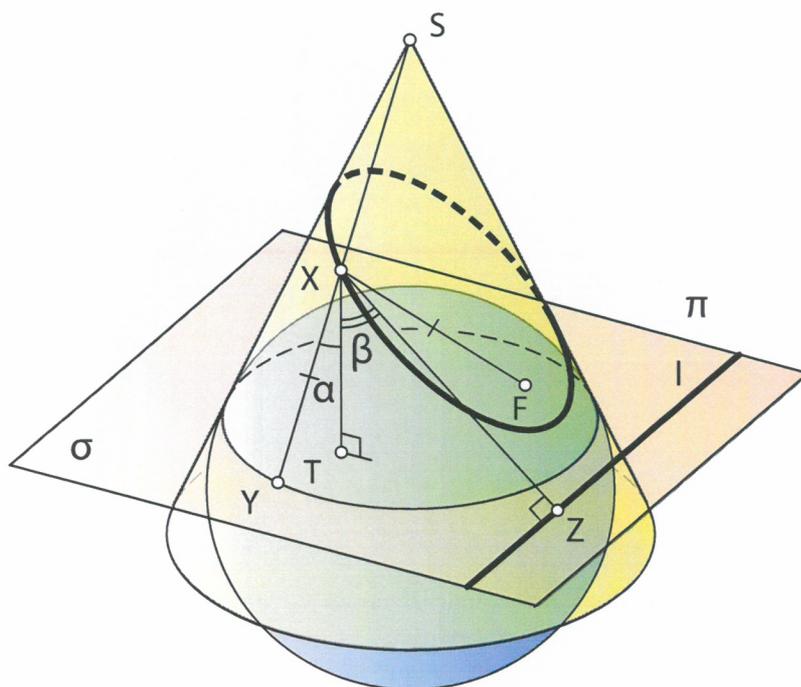


FIGURA 1.5: Excentricidad de una cónica.

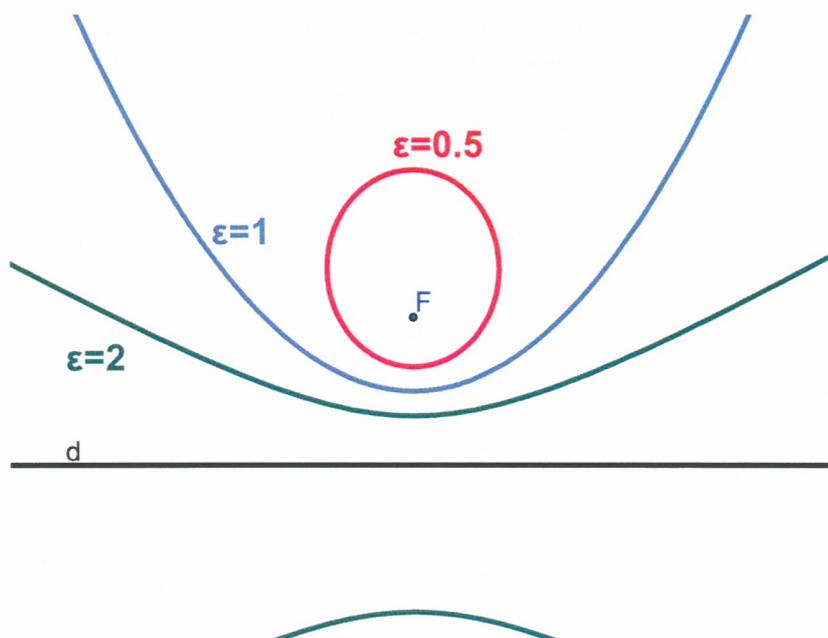


FIGURA 1.6: Cónicas según su excentricidad.

Capítulo 2

Algunas propiedades elementales de las cónicas

“Todo lo has creado con medida, número y peso”

Sabiduría 11, 21

En este capítulo veremos algunas de las propiedades geométricas de las cónicas aplicando la geometría clásica, y terminaremos introduciendo la geometría proyectiva para demostrar algunos teoremas concernientes a las cónicas en general, como el teorema de Pascal o el de Brianchon.

2.1. Propiedades elementales de geometría clásica

2.1.1. La propiedad óptica

Todas las secciones cónicas presentan propiedades ópticas que las hacen muy importantes en muchísimos ámbitos de nuestra vida.

Cuando un rayo de luz incide sobre una superficie se refleja formando un ángulo igual con la dirección normal. Si colocáramos puntos de luz sobre los focos de cada cónica veríamos resultados muy significativos. En la elipse todos los rayos de luz convergerían en el otro foco tras ser reflejados. En la hipérbola los rayos de luz producirían un efecto inverso: tras ser reflejados en uno de los dos brazos de la hipérbola emergen del otro foco, es decir, siguen la trayectoria de los rayos de luz que saldrían si el punto de luz estuviera en el otro foco. En la parábola ocurre algo parecido: los rayos de luz son siempre perpendiculares a la directriz. Demostremos una a una estas propiedades.

Tenemos una elipse con sus dos focos y dibujamos una circunferencia que tenga el centro F_2 y cuyo radio sea la suma de distancias de los focos a un punto de la elipse. Tomemos ahora un punto arbitrario de ésta, P . Prolongamos la semirrecta F_2P , que corta la circunferencia en G . Sea t la mediatriz del segmento F_1G .

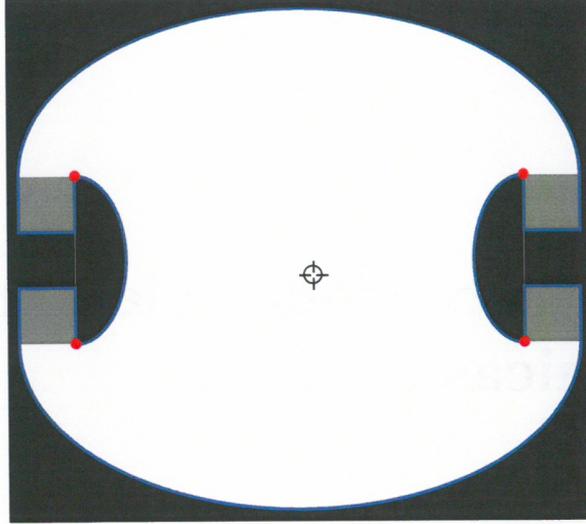


FIGURA 2.1: En los años 50, Ernst Straus puso el siguiente problema: ¿Puede un único punto de luz iluminar una habitación entera cuyas paredes son espejos, sin importar la forma de la habitación? En 1958, el joven Roger Penrose demostró usando propiedades básicas de las cónicas la existencia de una *habitación iniluminable*, que aparece en la figura.

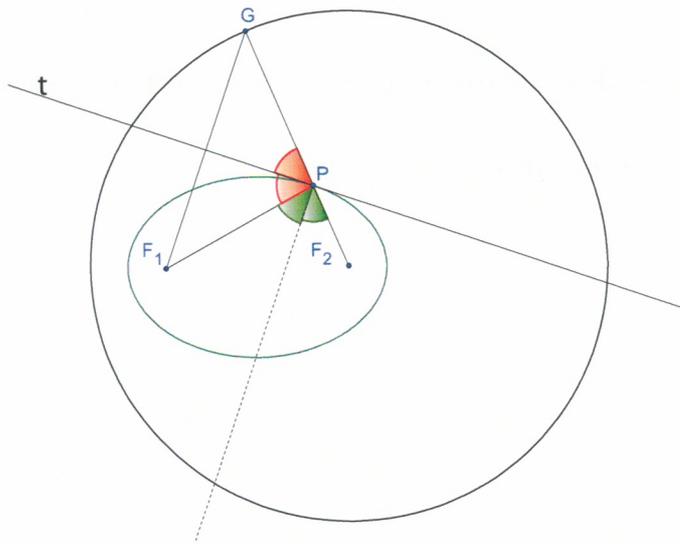


FIGURA 2.2: Demostración gráfica de la propiedad óptica para la elipse.

Cualquier punto de t equidista de G y F_1 . Sea Q el punto en el que t cruza F_2G . $F_1Q + QF_2 = GQ + QF_2 = GF_2$, luego Q corresponde con P . Pero además t es tangente a la elipse en P , puesto que para otro punto de t , Q' , $F_1Q' + Q'F_2 = GQ' + Q'F_2 > GF_2$ y éste no puede pertenecer a la elipse. Ahora bien, si t es tangente a la elipse en P , la tangente en P forma dos ángulos iguales al unir P con los focos.

Tenemos ahora una hipérbola con sus dos focos y dibujamos una circunferencia que tenga el centro F_2 y cuyo radio sea la diferencia de distancias de los focos a un punto de la hipérbola. Tomemos ahora un punto arbitrario de la hipérbola, P . Tomamos la recta F_2P , que corta la circunferencia en G . Sea t la mediatriz del segmento F_1G .

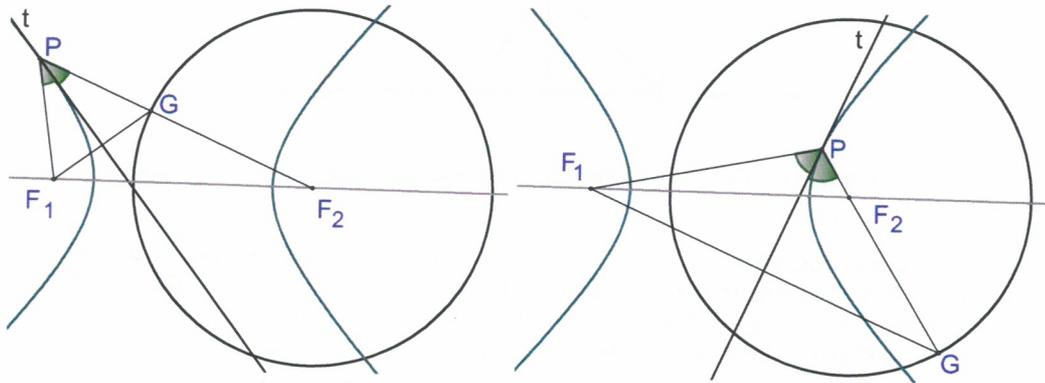


FIGURA 2.3: Demostración gráfica de la propiedad óptica para la hipérbola.

Cualquier punto de t equidista de G y F_1 . Sea Q el punto en el que t cruza F_2G . $F_2Q - QF_1 = F_2Q - QG = GF_2$, luego Q corresponde con P . Pero además t es tangente a la hipérbola en P , puesto que para otro punto de t , Q' , $F_2Q' - Q'F_1 < F_2G + GQ' - Q'F_1 = GF_2$ y éste no puede pertenecer a la hipérbola. Ahora bien, si t es tangente a la hipérbola en P , la tangente en P es la bisectriz de F_1PF_2 .

Para el caso de la parábola consideremos su foco y su directriz. Sea P un punto arbitrario de la parábola y G su proyección sobre la directriz. Evidentemente la mediatriz de FG , t , contiene a P , pero además es tangente a la parábola en este punto. Supongamos que t cruza la parábola en otro punto, Q , cuya proyección en la directriz es G' . Por estar en la parábola, $FQ = QG'$, pero por estar en t $FQ = QG$, lo cual es una contradicción si G' y G no coinciden. Por tanto t , que es la tangente a la parábola en P es la bisectriz del ángulo FPG .

2.1.2. La propiedad isogonal

Otra propiedad interesante de las cónicas es la isogonalidad. Consideraremos dos casos.

En el primer caso consideraremos un punto exterior a la cónica y sus dos tangentes a ésta. Entonces los segmentos que unen el punto exterior con los focos forman ángulos iguales con las tangentes. Examinemos el caso de la elipse.

¹En el caso de la hipérbola la recta F_2P corta la circunferencia en dos puntos, puesto que cada recta que pasa por F_2 corta la hipérbola dos veces. La elección de G está supeditada a la condición de que $PF_1 = PG$.

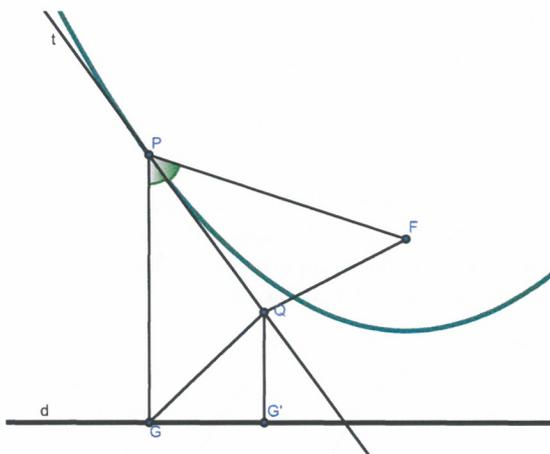


FIGURA 2.4: Demostración gráfica de la propiedad óptica para la parábola.

Tenemos una elipse con focos F_1 y F_2 , y un punto exterior R , cuyas tangentes a la elipse la intersectan en P y Q . Llamamos F'_1 al reflejo de F_1 en RP , y F'_2 al reflejo de F_2 en RQ . Por la propiedad óptica, los puntos F'_1 , P y F_2 están alineados, así como también F'_2 , Q y F_1 . Por tanto los triángulos F'_1F_2R y $F_1F'_2R$ son iguales, ya que $F_1F'_2 = F'_1F_2$ por tratarse de una elipse. De aquí obtenemos que $\widehat{F'_1RF_1} = \widehat{F_2RF'_2}$ y que $\widehat{PRF_1} = \widehat{F_2RQ}$, lo cual concluye la demostración.

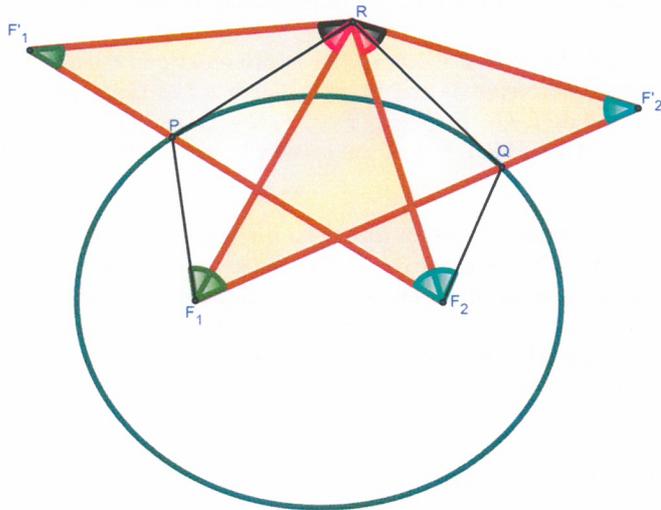


FIGURA 2.5: Demostración gráfica de la propiedad isogonal para la elipse.

El segundo caso es un resultado derivado del anterior. Puesto que los dos triángulos son iguales, $\widehat{RF_1P} = \widehat{RF'_1F_2} = \widehat{RF_1F'_2} = \widehat{RF_1Q}$, lo cual sirve para cualquier foco.

Para el caso de la hipérbola se obra análogamente, según la ilustración. Quedaría por demostrar

el caso en que las dos tangentes parten de brazos distintos, ejercicio que se deja para el lector.

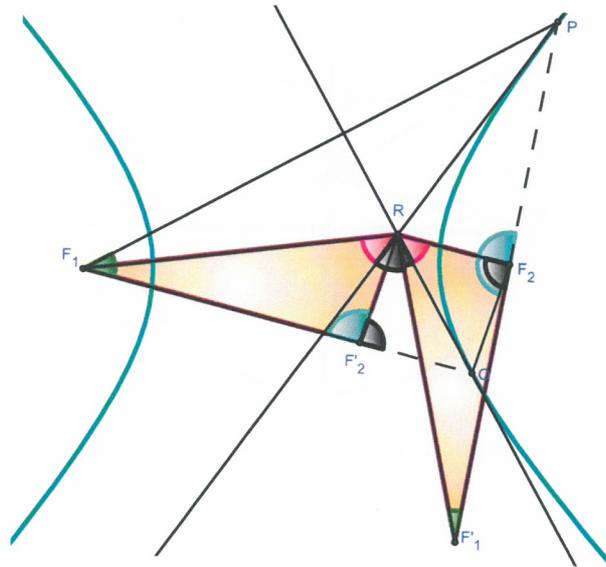


FIGURA 2.6: Demostración gráfica de la propiedad isogonal para la hipérbola.

En la parábola, por tratarse del caso degenerado entre la elipse y la hipérbola, la demostración es más compleja. Uno de los focos tiende al infinito, por lo que en vez de unir un punto con dicho foco, se traza la perpendicular a la directriz.

Tenemos una parábola con foco F y directriz d , y un punto exterior R , cuyas tangentes a la parábola la intersectan en P y Q . Sean P' y Q' las proyecciones de P y Q sobre d , y l la recta perpendicular a d que pasa por R . Por la definición de parábola las tangentes a la parábola por P y Q son las mediatrices de FP' y FQ' , que intersectan en R . Por tanto R es el circuncentro del triángulo $FP'Q'$. Por tratarse de un ángulo inscrito $\widehat{FQ'P'} = \frac{1}{2}\widehat{FRP'} = \widehat{FRP}$, pero además el ángulo que forman l y el segmento RQ es igual a $\widehat{FQ'P'}$, puesto que están formados por rectas perpendiculares. Así pues $\widehat{lRQ} = \widehat{FRP}$, con lo que terminamos la demostración. Como consecuencia, $\widehat{PFR} = \widehat{RFQ}$, como en los casos anteriores.

2.1.3. La propiedad de los radios conjugados

Por último nos centraremos en la propiedad de los radios conjugados.

Tenemos una cónica por la que hacemos atravesar una infinidad de rectas paralelas entre sí. En cada recta marcamos el punto medio de los dos puntos en que la recta corta la cónica. Pues bien, todos estos puntos caen sobre una recta, que llamaremos radio conjugado. Como caso particular en la parábola todos los radios conjugados son una recta perpendicular a la directriz desde el punto en que una de las rectas es tangente a la parábola.

La demostración se podría servir de geometría proyectiva, pero nosotros lo veremos utilizando geometría clásica.

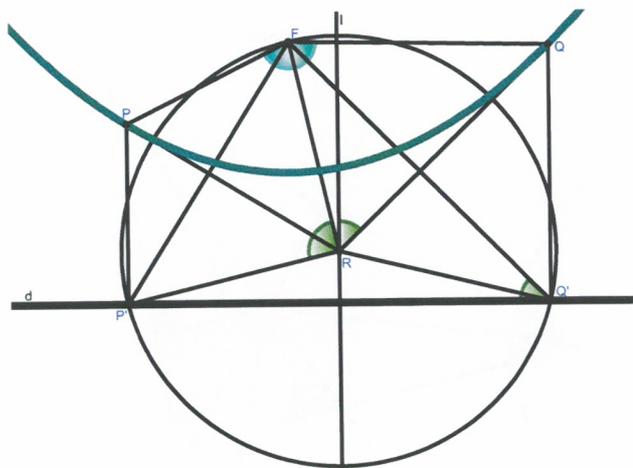


FIGURA 2.7: Demostración gráfica de la propiedad isogonal para la parábola.

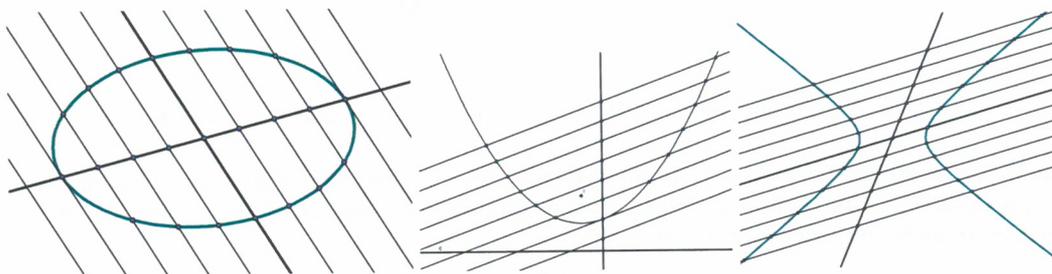


FIGURA 2.8: Radios conjugados.

Tenemos una cónica y cuatro tangentes, dos paralelas a la línea que une los puntos de tangencia de las otras dos. Por la propiedad isogonal se dan los ángulos de la figura.

Además teniendo en cuenta que MF_1OF_2 es un paralelogramo y que la bisectriz de $\widehat{F_1OF_2}$ es perpendicular a DC , al igual que la bisectriz de $\widehat{F_1MF_2}$ es perpendicular a AB , tenemos que $\widehat{BMF_1} = \widehat{F_1OC} = \varepsilon$ y que $\widehat{AMF_1} = \widehat{F_1OD} = 180 - \varepsilon$. Por tanto el triángulo BMF_1 es semejante a F_1OC y el triángulo AMF_1 es semejante a F_1OD (basta considerar que $2\delta + 2\gamma = 360 - 2\varepsilon$). De aquí sacamos que $AM \times DO = BM \times CO$.

Por el teorema del seno $\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{AF_1}{\sin \varepsilon}$; $\frac{AP}{\sin \alpha} = \frac{AF_1}{\sin \varphi}$, por lo que $\frac{AM}{AP} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon}$. Análogamente $\frac{DO}{DP} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon}$, es decir, $\frac{AM}{AP} = \frac{DO}{DP}$ y $\frac{BM}{BN} = \frac{CO}{CN}$. Y dado que AB , NP y DC son paralelas obtenemos finalmente que $\frac{AP}{BN} = \frac{DP}{CN}$ y que $\frac{AM}{DO} = \frac{BM}{CO}$.

Combinando las dos igualdades anteriores nos queda que $AM = BM$, $DO = CO$, luego MO pasa por la intersección de las tangentes en P y en N y por el punto medio de NP . Como consecuencia el punto medio de las intersecciones de cualquier recta paralela a NP con la cónica caerá sobre

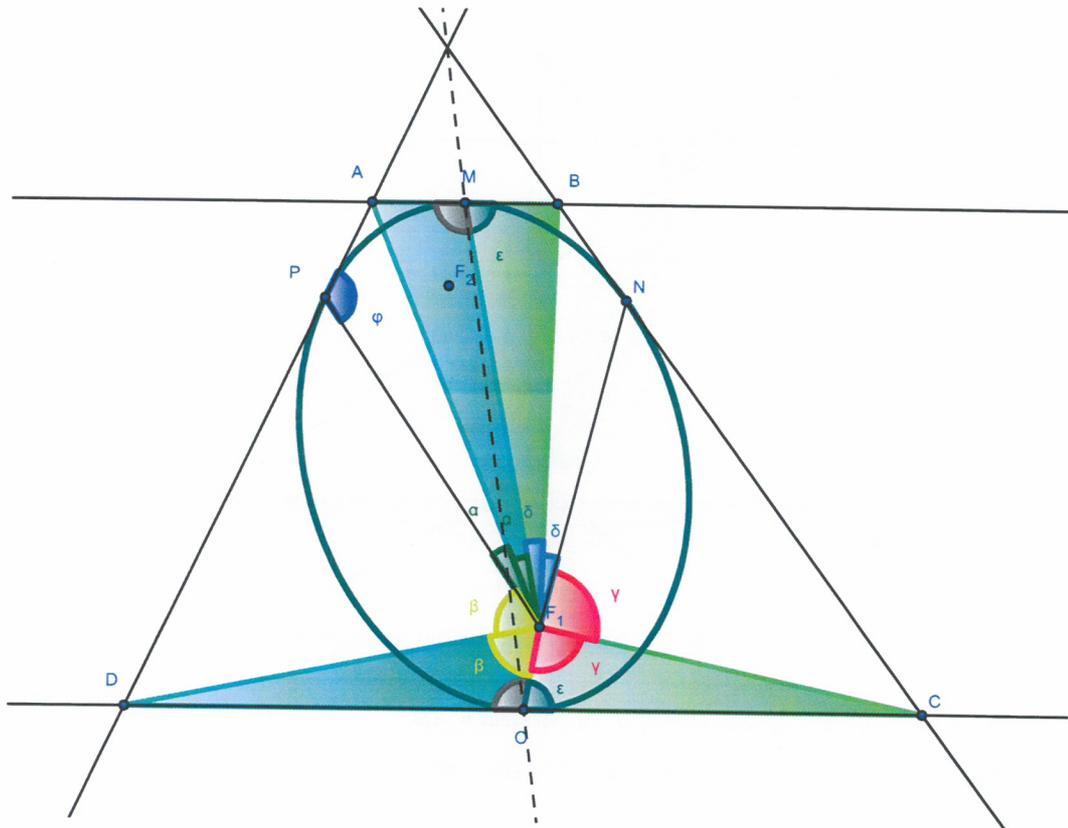


FIGURA 2.9: Demostración de la propiedad de los radios conjugados para la elipse.

MO .

Para la hipérbola se obra análogamente según la figura².

En cuanto a la parábola cabe destacar que la demostración anterior no es válida por ser el caso degenerado. Sin embargo la demostración ahora es mucho más sencilla.

Sean A y B dos puntos sobre una parábola don foco F y directriz d . Sean H y K las proyecciones de A y B sobre d respectivamente. Por último sea S la intersección de las tangentes a la parábola en A y B . Puesto que dichas tangentes son mediatrices de FH y FK , S es el circuncentro del triángulo FHK y la mediatriz de HK pasa por S y también por el punto medio del segmento AB . El triángulo ABS se denomina triángulo de Arquímedes de base AB .

Ahora llamaremos O el punto en que la recta que une S con el punto medio de A y B corta la parábola. Trazamos la tangente a la parábola en O , que corta SA en A' y SB en B' . Ahora bien, en este caso $AA'O$ y $BB'O$ también son triángulos de Arquímedes, y aplicando el resultado anterior comprobamos que las rectas que unen A' con el punto medio de AO y B' con el punto medio de BO son paralelas a SO . De aquí obtenemos que A' es el punto medio de AS y que B'

²Se ha de observar que para la hipérbola algunos de los ángulos considerados iguales son en cambio complementarios (β y γ), lo cual no altera la demostración de la propiedad.

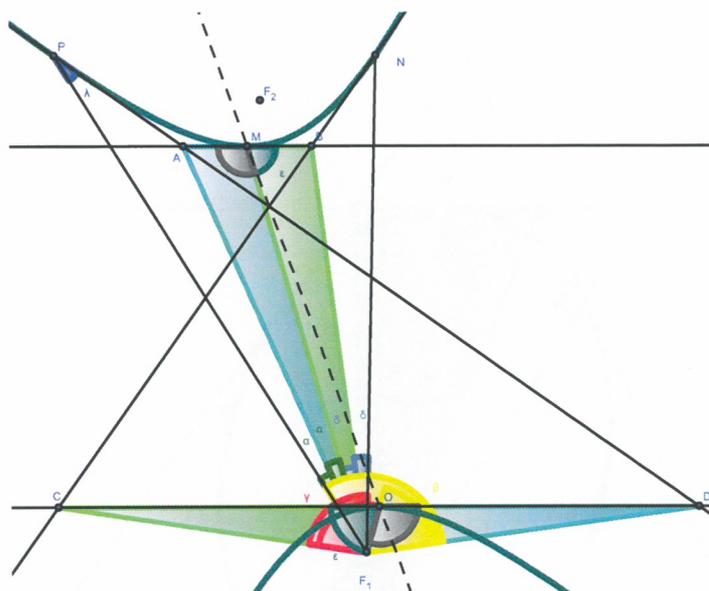


FIGURA 2.10: Demostración de la propiedad de los radios conjugados para la hipérbola.

es el punto medio de BS , por lo que $A'B'$ es paralela a AB .

Estas demostraciones completan el Teorema de Arquímedes:

Teorema 2.1.1 (Arquímedes) *La mediana de la base de un triángulo de Arquímedes es perpendicular a la directriz, la recta paralela a la base que pasa por los puntos medios de los lados es una tangente a la parábola, y su punto de intersección con la mediana del triángulo pertenece a la parábola.*

Ahora queda demostrado que los puntos medios de las intersecciones de la cónica con rectas paralelas yacen sobre una misma recta. Si repetimos el proceso con rectas paralelas a la resultante, los puntos medios yacen sobre una recta que es paralela a las anteriores. Estas dos rectas se cortan en el punto medio de los focos y se denominan radios conjugados.

2.2. Propiedades elementales de geometría proyectiva

2.2.1. Introducción a la geometría proyectiva

Una transformación en el plano se considera proyectiva si transforma rectas en rectas. Con tal transformación las líneas paralelas no han de permanecer necesariamente así. Es por esto que se considera que dos rectas paralelas intersectan en un punto, llamado punto en el infinito. El conjunto de puntos en el infinito (uno para cada pendiente) se denomina línea en el infinito.

La transformación proyectiva del plano preserva las siguientes propiedades:

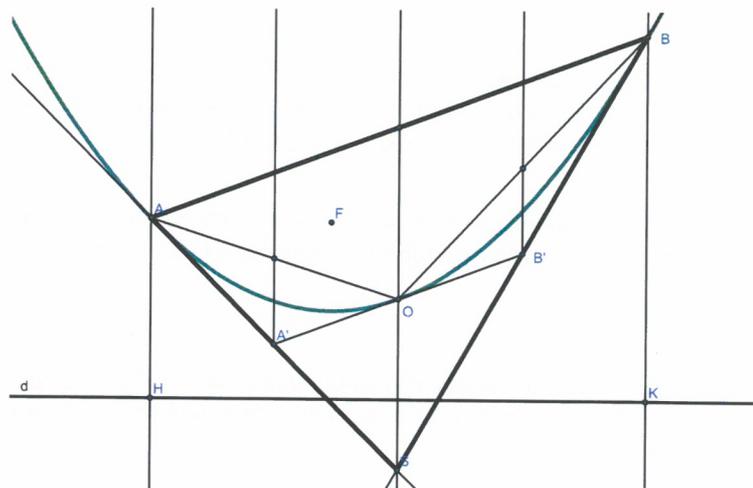


FIGURA 2.11: Demostración gráfica de la propiedad de los radios conjugados para la parábola.

- ▷ Colinealidad (definición de transformación proyectiva).
- ▷ Concurrencia de tres rectas.
- ▷ Tangencias entre rectas y curvas.

Ahora tenemos una cónica. Podemos obtener esta cónica intersecando un plano con un cono doble. Consideremos un plano que sea perpendicular al eje del cono doble; vamos a enviar cada punto del plano que contiene la cónica al plano perpendicular al eje proyectando a través del vértice del cono. Ahora la cónica se ha convertido en una circunferencia porque ha sido proyectada por las generatrices.

Pero si queremos proyectar una recta desde el plano de la cónica la imagen volverá a ser otra recta, que es la intersección del plano perpendicular al eje con el plano que contiene la recta del plano de la cónica y el vértice del cono. Es decir, proyectar por el vértice del cono realiza una transformación proyectiva. Esto nos conduce a un importante resultado:

Una cónica cualquiera se puede transformar en una circunferencia mediante una transformación proyectiva.

De igual manera una circunferencia se puede transformar en cualquier cónica por una transformación proyectiva.

Tanto la circunferencia como la elipse no tocan la línea en el infinito, mientras que la parábola es tangente en un punto (el correspondiente a la dirección del eje de la parábola) y la hipérbola la interseca en dos puntos (los correspondientes a las direcciones de las asíntotas).

La pregunta ahora es: ¿Qué se puede conseguir mediante una transformación proyectiva?

Teorema 2.2.1 *Dada una circunferencia y una recta que no la interseca existe una transformación proyectiva que transforma la circunferencia en una circunferencia y la recta en la línea en el infinito.*

Demostración.

Transformamos la recta en la línea en el infinito. Puesto que dicha recta no la interseca la circunferencia se transformará en una circunferencia o una elipse. En el segundo caso podemos transformar la elipse en una circunferencia mediante una proyección paralela.

Teorema 2.2.2 *Dada una circunferencia y un punto dentro existe una transformación proyectiva que transforma la circunferencia en una circunferencia y el punto en el centro de la circunferencia.*

Demostración.

Más tarde se definirá el concepto de correspondencia polar, que asociará la recta que no interseca la circunferencia con el punto interior y la línea en el infinito con el centro de la circunferencia, según el resultado anterior.

2.2.2. Teorema de Pascal

Teorema 2.2.3 (Pascal) *Los tres puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica son colineales.*

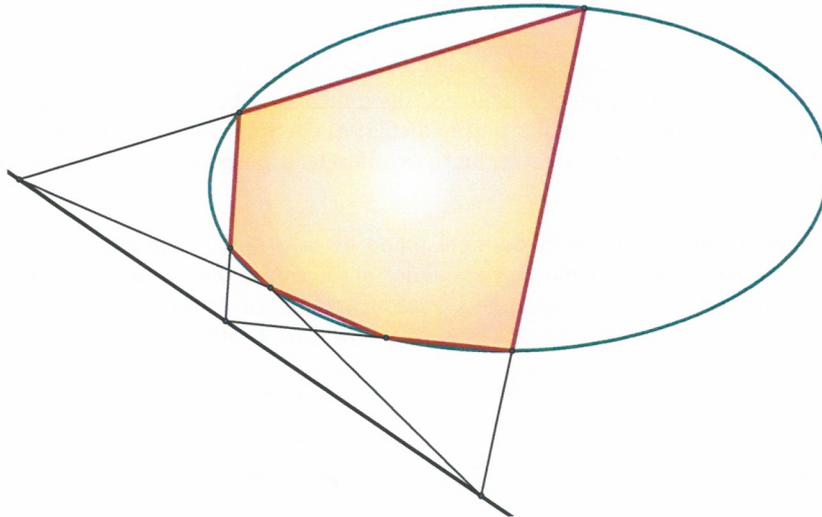


FIGURA 2.12: Teorema de Pascal

Demostración.

Sea $ABCDEF$ el hexágono inscrito en la cónica. Mediante una transformación proyectiva cambiamos la cónica por una circunferencia. Después, usando otra transformación proyectiva, movemos los puntos de intersección de AB y DE y de BC y EF a la línea en el infinito. Entonces $AB \parallel DE$ y $BC \parallel EF$. Además $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, y por tanto los arcos AC y DF son iguales. Ahora bien, esto implica que $CD \parallel FA$, con lo que los tres puntos son colineales en la línea en el infinito.

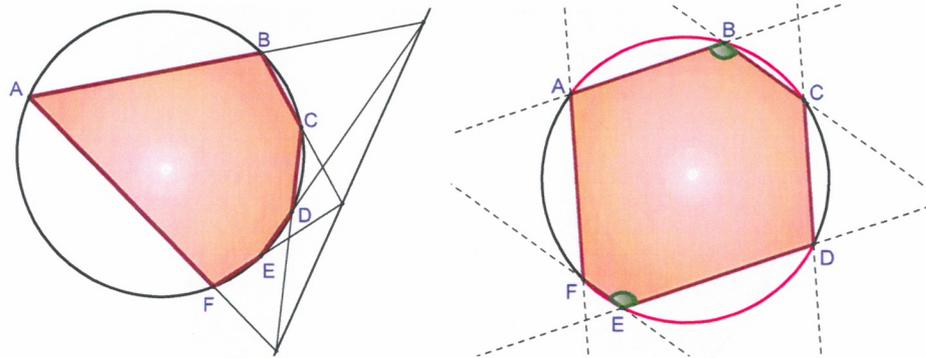


FIGURA 2.13: Demostración del teorema de Pascal

Supongamos los casos degenerados en los que dos vértices se juntan. El lado que une estos dos vértices degenera en la tangente a la cónica en este punto y podemos hallar los siguientes resultados:

Corolario 2.2.1 *En un pentágono inscrito en una sección cónica los puntos de intersección de dos pares de lados no adyacentes y el punto de intersección del quinto lado con la tangente que pasa por el vértice opuesto son colineales.*

Corolario 2.2.2 *En un cuadrilátero inscrito en una sección cónica los puntos de intersección lados opuestos y de tangentes de vértices opuestos son colineales.*

Corolario 2.2.3 *En un triángulo inscrito en una sección cónica los puntos de intersección de los lados con la tangente del vértice opuesto son colineales.*

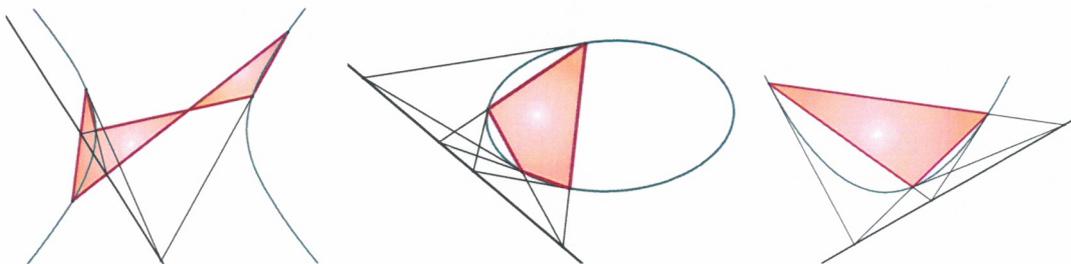


FIGURA 2.14: Casos degenerados del teorema de Pascal.

2.2.3. Teorema de Brianchon

Teorema 2.2.4 (Brianchon) *Las tres rectas que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito en una cónica son concurrentes.*

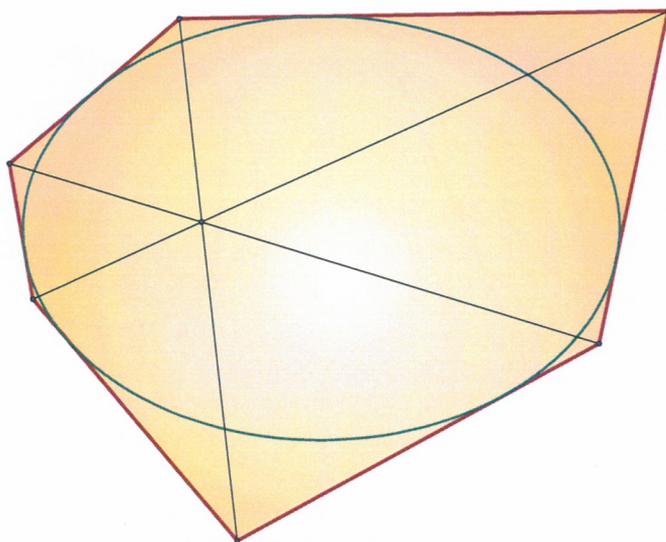


FIGURA 2.15: Teorema de Brianchon

Demostración.

Sea $ABCDEF$ el hexágono circunscrito en la cónica. Mediante una transformación proyectiva cambiamos la cónica por una circunferencia. Después, usando otra transformación proyectiva, movemos el punto de intersección de AD y BE al centro del círculo, O . Sean A' , B' , C' , D' , E' y F' los puntos de tangencia de los segmentos AB , BC , CD , DE , EF y FA respectivamente. Es fácil ver por la condición anterior que $\widehat{E'OC'} = \widehat{F'OB'}$, $\widehat{E'OF} = \widehat{FOF'}$ y que $\widehat{B'OC} = \widehat{C'OC'}$. Entonces $\widehat{FOC} = \widehat{FOF'} + \widehat{F'OB'} + \widehat{B'OC} = \widehat{E'OF} + \widehat{E'OC'} + \widehat{C'OC'} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. Por tanto la tercera diagonal CF también pasa por el centro del círculo y las tres diagonales son concurrentes.

Supongamos los casos degenerados en los que dos lados se hacen uno al aproximarse los puntos de tangencia. La intersección de los lados del hexágono y los puntos de tangencia tienden a unirse y podemos hallar los siguientes resultados:

Corolario 2.2.4 *En un pentágono circunscrito a una sección cónica las rectas que unen dos pares de vértices no adyacentes y el quinto vértice con el punto de tangencia del lado opuesto son concurrentes.*

Corolario 2.2.5 *En un cuadrilátero circunscrito a una sección cónica las rectas que unen vértices opuestos y puntos de tangencia de lados opuestos son concurrentes.*

Corolario 2.2.6 *En un triángulo circunscrito a una sección cónica las rectas que unen un vértice con el punto de tangencia del lado opuesto son concurrentes.*

La geometría proyectiva nos permitirá demostrar teoremas muy interesantes, como por ejemplo el siguiente:

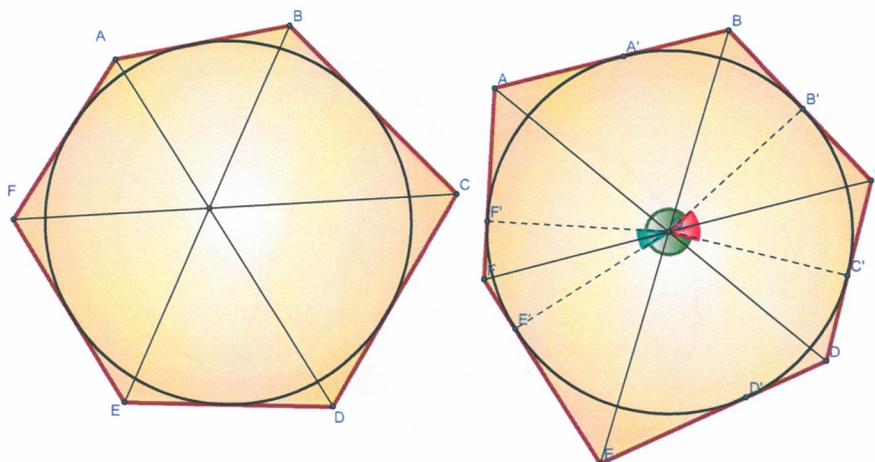


FIGURA 2.16: Demostración del teorema de Brianchon

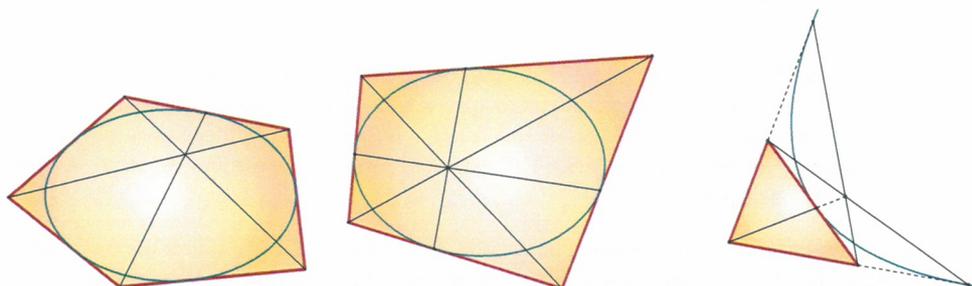


FIGURA 2.17: Casos degenerados del teorema de Brianchon.

Teorema 2.2.5 *La única cónica que pasa por los tres vértices de un triángulo y por su ortocentro es una hipérbola equilátera.*

Se entiende por hipérbola equilátera aquella cuyas asíntotas son perpendiculares.

Demostración.

Demostraremos prioritariamente que el ortocentro de un triángulo inscrito en una hipérbola equilátera pertenece a dicha hipérbola.

Sean A , B y C los tres vértices de un triángulo y H su ortocentro. Sean ahora X e Y los dos puntos en el infinito que determinan las direcciones de las asíntotas, es decir, las intersecciones de la línea en el infinito con la hipérbola. Sean Ax y Bx las rectas que pasan por A y B y que son paralelas a la dirección de X (y que de hecho pasan por X), y análogamente con Cy y Hy . La intersección entre las rectas Ax y Hy será U y la intersección entre las rectas Bx y Cy será V . Por último sea B' el pie de la altura BH .

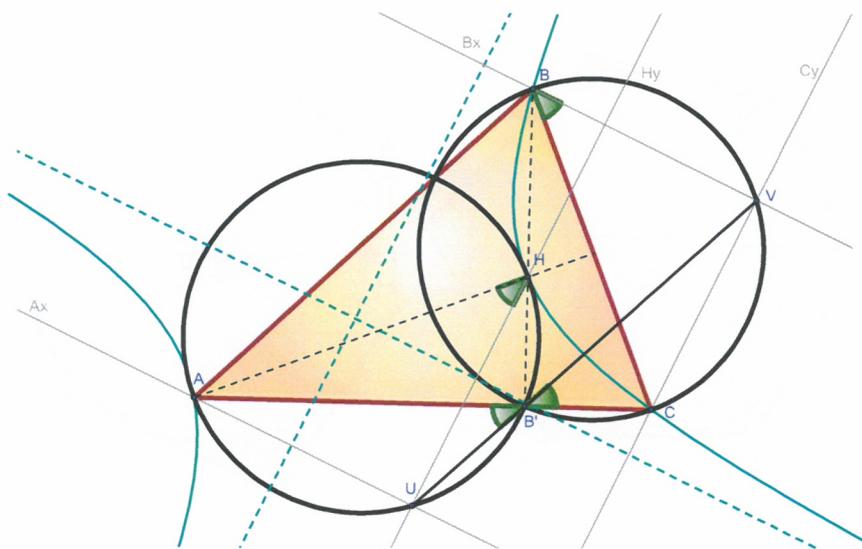


FIGURA 2.18: Cónica que pasa por los vértices de un triángulo y por su ortocentro.

Los cuadriláteros $BB'CV$ y $AUB'H$ son cíclicos con diámetros BC y AH . Por tanto $\widehat{AB'U} = \widehat{AHU}$ y $\widehat{VB'C} = \widehat{VBC}$, pero también es cierto que $\widehat{AHU} = \widehat{VBC}$ como ángulos formados por semirrectas perpendiculares. De aquí obtenemos que U , B' y V están alineados, y por el converso del teorema de Pascal³ el hexágono $AXBHYC$ está inscrito en una cónica, es decir, la hipérbola equilátera $ABCXY$ pasa por H .

Pensemos ahora en las cónicas que pueden pasar por A , B , C y H . Puesto que no es un cuadrilátero convexo la única cónica que puede pasar es una hipérbola. Si X es una de las intersecciones de la línea en el infinito con la hipérbola e Y es el punto en el infinito correspondiente con la dirección perpendicular Y ha de pertenecer a la hipérbola y por tanto se trata de una hipérbola equilátera.

2.2.4. Correspondencia polar

La geometría proyectiva es muy útil en construcciones que combinan rectas y puntos. Es por eso que está estrechamente relacionada con la correspondencia polar.

Para definir correspondencia polar introduciremos el concepto de inversión:

El inverso de un punto A respecto de una circunferencia con centro O y radio r es el punto A' que pertenece a la semirrecta OA y tal que $OA' = \frac{r^2}{OA}$. El inverso de O se define como un punto en la línea en el infinito, y el inverso de un punto sobre la circunferencia es el mismo punto. La inversión respecto a una circunferencia es la transformación en el plano que envía cada punto a su inverso con respecto a dicha circunferencia.

Los inversos tienen propiedades muy notables que nos serán muy útiles para la correspondencia

³El converso del teorema de Pascal argumenta que si las intersecciones de las prolongaciones de lados opuestos de un hexágono son colineales, dicho hexágono es inscriptible en una cónica.

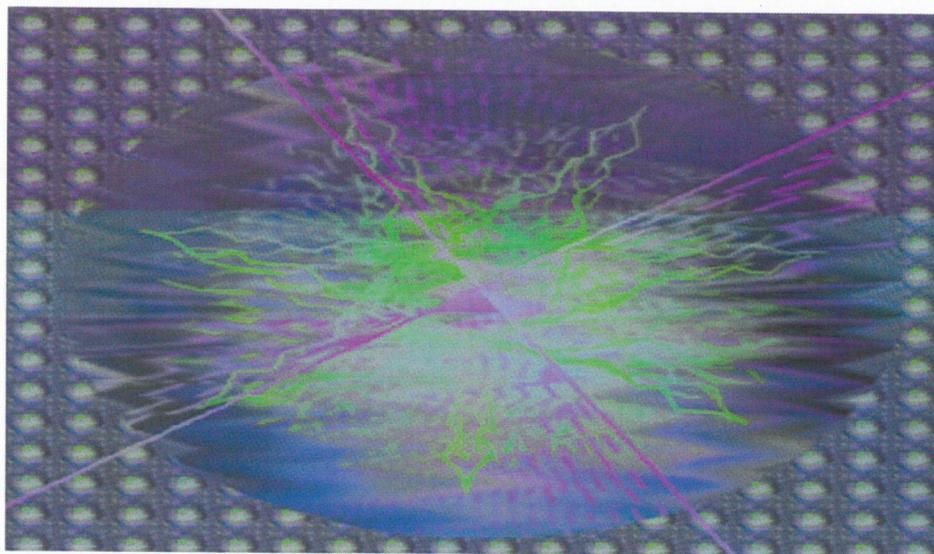


FIGURA 2.19: Si proyectamos paralelamente dos rectas perpendiculares que pasan por el centro de una circunferencia se transforman en radios conjugados de la elipse (Captura de pantalla del Reproductor de Windows Media.)

polar, como por ejemplo la siguiente:

Teorema 2.2.6 Sean A' y B' los inversos de A y B respecto de una circunferencia de centro O . Entonces los triángulos OAB' y $OA'B$ son semejantes pero invertidos.

Demostración.

Un criterio de semejanza entre dos triángulos es compartir un ángulo y tener la misma razón de proporción en los lados contiguos al ángulo.

Obviamente $\widehat{A'OB} = \widehat{AOB'}$, pero además $\frac{OA}{OB} = \frac{r^2 OA}{r^2 OB} = \frac{OB'}{OA'}$, cumpliéndose así el criterio de semejanza. Ahora bien, los triángulos son semejantes pero invertidos porque la razón de proporción la hemos tomado en orden inverso.

La inversión es muy importante porque transforma circunferencias en circunferencias, con excepción del caso degenerado, en el que una circunferencia que pasa por el centro de la circunferencia de inversión se transforma en una recta.

Demostración.

Demostraremos que para cuatro puntos concíclicos A, B, C y D sus inversos A', B', C' y D' respecto a una circunferencia con centro O también son concíclicos⁴.

Por la condición de conciclicidad $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$. Aplicando el teorema anterior $\widehat{A'C'B'} = \widehat{OC'B'} - \widehat{OC'A'} = \widehat{OBC} - \widehat{OAC}$. De manera análoga $\widehat{A'D'B'} = \widehat{OD'A'} - \widehat{OD'B'} = \widehat{OAD} - \widehat{OBD}$. Si

⁴Esta demostración se debe a Dušan Djukić (ver referencia [?])

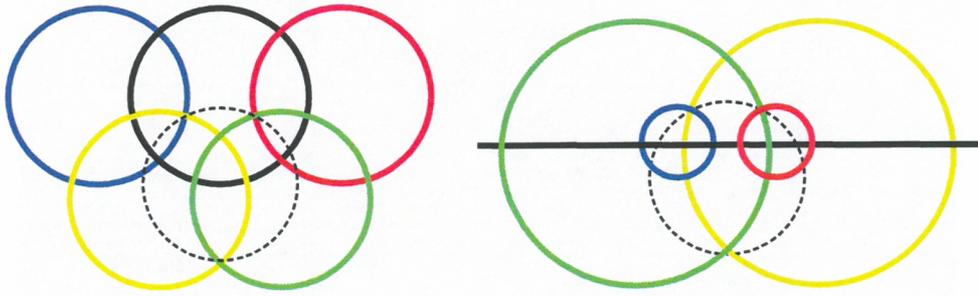


FIGURA 2.20: La inversión transforma círculos en círculos.

restamos $\widehat{A'C'B'} - \widehat{A'D'B'} = (\widehat{OBC} - \widehat{OAC}) - (\widehat{OAD} - \widehat{OBD}) = (\widehat{OBC} + \widehat{OBD}) - (\widehat{OAD} + \widehat{OAC}) = \widehat{CBD} - \widehat{CAD} = 0$, con lo que A', B', C' y D' son concíclicos.

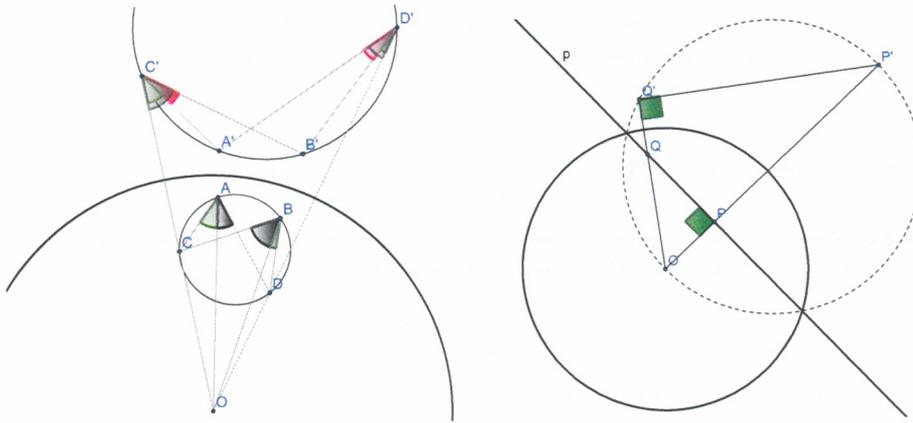


FIGURA 2.21: La inversión preserva la conciclicidad.

Para demostrar el caso degenerado veremos que una recta que no pasa por O se transforma en una circunferencia que contiene O .

Sea p una recta que no pasa por O , P la proyección de O en p y Q un punto arbitrario de p . Sean P' y Q' los inversos de P y Q respecto a la circunferencia centrada en O . Entonces $\widehat{OQ'P'} = \widehat{OPQ} = 90^\circ$, por lo que Q' se desliza por la circunferencia de diámetro OP' .

Veamos ahora qué es la correspondencia polar:

La recta polar de un punto A respecto de una circunferencia con centro O y radio r es la recta a que pasa por el inverso de A y que es perpendicular a la recta OA . Se dice entonces que A es el polo de la recta a con respecto a la circunferencia. La recta polar de O se define como la línea en el infinito, y la recta polar de un punto sobre la circunferencia es la tangente a la circunferencia en dicho punto.

Estas son las propiedades más importantes de la correspondencia polar:

Teorema 2.2.7 *Si un punto B pertenece a la recta polar a del punto A su recta polar b pasa por A .*

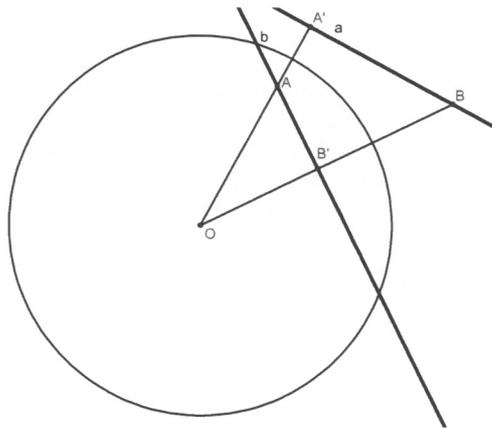


FIGURA 2.22: Si un punto B pertenece a la recta polar a del punto A su recta polar b pasa por A .

Demostración.

Sean A' y B' los inversos de A y B con respecto a nuestra circunferencia. El triángulo $OA'B$ es semejante al triángulo $OB'A$, y por lo tanto $\widehat{AB'O} = 90^\circ$, es decir, A pertenece a b .

Esto implica el siguiente

Corolario 2.2.7 *El polo de una recta es la intersección de las rectas polares de sus puntos, e igualmente la recta polar de un punto es el conjunto de polos de las rectas que pasan por dicho punto.*

El siguiente teorema será importantísimo para el uso de la correspondencia polar en la geometría proyectiva.

Teorema 2.2.8 *La recta polar de un punto exterior a la circunferencia de inversión se puede definir como la recta que cruza los puntos en que las tangentes desde el punto exterior a la circunferencia la tocan.*

Demostración.

Es consecuencia del corolario anterior y del hecho de que la recta polar de un punto perteneciente a la circunferencia de inversión es la tangente a la circunferencia en dicho punto.

Esto implica el siguiente resultado, elemental en geometría proyectiva:

A pesar de que la definición de correspondencia polar viene dada por cuestiones métricas las transformaciones proyectivas no la alteran. Es decir, si tenemos una circunferencia que asocia un punto y una recta por correspondencia polar y le aplicamos una transformación proyectiva que la mantiene como circunferencia el punto y la recta siguen siendo polo y recta polar respectivamente.

Pronto veremos que también se puede aplicar a cónicas. Pero antes veamos una consecuencia del teorema anterior:

Corolario 2.2.8 *La recta polar de un punto se puede definir como la recta que une los puntos de intersección de las tangentes a la circunferencia desde los dos puntos en que cada recta que pasa por el punto en cuestión intersecta la circunferencia. De igual manera el polo de una recta es la intersección de las rectas que unen los dos puntos en que las tangentes a la circunferencia desde cada uno de los puntos de la recta la intersectan.*

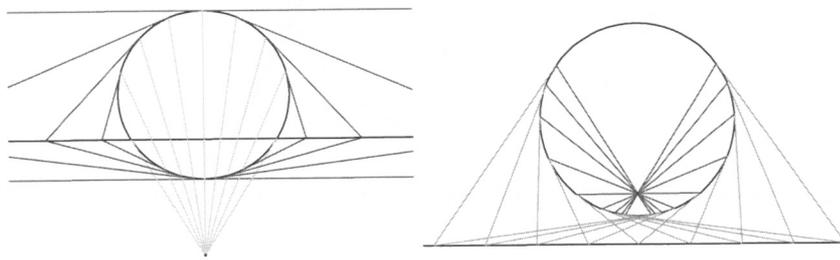


FIGURA 2.23: Correspondencia polar y tangentes.

Miremos ahora cómo podemos aplicar la correspondencia polar a las cónicas.

Tenemos una circunferencia a la que le aplicamos una transformación proyectiva para que se transforme en una cónica. Podemos hacer una *pseudocorrespondencia* entre puntos y rectas, que es la resultante de transformar proyectivamente elementos del plano de la circunferencia (puntos y rectas) asociados por la correspondencia polar. Tras la proyección las propiedades métricas (definitorias) desaparecen, pero no las propiedades referidas en los teoremas antes demostrados. Por tanto la *pseudocorrespondencia* se puede redefinir utilizando sólo la cónica, por lo que es única para cada cónica, y por eso a partir de ahora también la llamaremos correspondencia polar, que la podemos definir de la siguiente manera:

La recta polar de un punto respecto a una cónica se define como la recta que une los puntos de intersección de las tangentes a la cónica desde los dos puntos en que cada recta que pasa por el punto en cuestión intersecta la cónica. De igual manera el polo de una recta es la intersección de las rectas que unen los dos puntos en que las tangentes a la cónica desde cada uno de los puntos de la recta la intersectan.

Con todos estos resultados que hemos ido obteniendo podemos demostrar uno de los teoremas más significativos de la correspondencia polar en las cónicas:

Teorema 2.2.9 *La recta polar del foco de una cónica coincide con la directriz asociada a dicho foco.*

Demostración.

Para demostrar este teorema introduciremos la circunferencia de Apolonio, definido por el siguiente

Lema 2.2.1 *El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante es una circunferencia, conocida como circunferencia de Apolonio.*

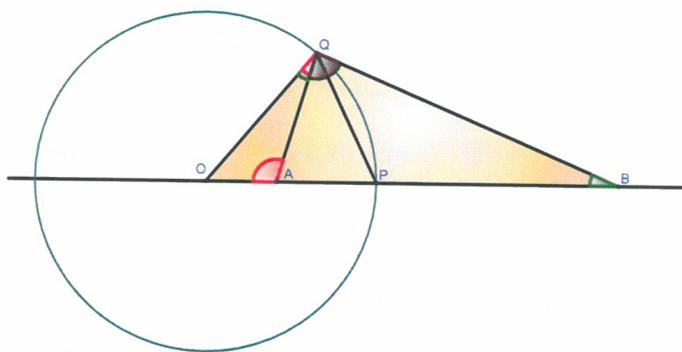


FIGURA 2.24: Círculo de Apolonio.

Demostración.

Sean A y B los dos puntos fijos y sea P el punto del segmento AB tal que $\frac{PA}{PB}$ sea la razón buscada. Tomemos un punto Q tal que PQ sea la bisectriz de \widehat{AQB} . Por el teorema de la bisectriz⁵ $\frac{QA}{PA} = \frac{QB}{PB}$ y $\frac{QA}{QB} = \frac{PA}{PB}$, de donde obtenemos que Q pertenece a tal lugar geométrico.

Sea \mathfrak{S} la circunferencia que tiene el centro O en la recta AB y que pasa por P y Q . El triángulo POQ es isósceles y por tanto $\widehat{OQA} = \widehat{OQP} - \widehat{AQP} = \widehat{QPO} - \widehat{BQP} = \widehat{QBO}$, por lo que los triángulos OPA y OPB son semejantes y A y B son inversos respecto de \mathfrak{S} . Ahora bien, la circunferencia que pasa por P y que hace que A y B sean inversos es única y por tanto el lugar geométrico buscado es una circunferencia.

Vayamos ahora a por el teorema en cuestión.

Sea F uno de los focos de la cónica y l su recta polar, y sean X e Y dos puntos arbitrarios en dicha cónica. Sea S la intersección de XY y l , y sea Z la intersección de las tangentes a la cónica en X e Y . Entonces FZ es la recta polar de S con respecto a la cónica, debido a las propiedades de la correspondencia polar. Gracias al segundo resultado de la isogonalidad $\widehat{YFZ} = \widehat{ZFX}$. Por el mismo resultado pero de una manera no tan evidente $FZ \perp FS$, puesto que los cortes de FZ con la cónica son los puntos en los que las tangentes a la cónica lanzados desde S la cortan. Sea

⁵El teorema de la bisectriz argumenta que en un triángulo la bisectriz corta el lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados contiguos. Tal teorema se puede demostrar aplicando el teorema del seno a los dos triángulos resultantes o por geometría clásica alargando uno de los lados contiguos y dibujando la paralela a la bisectriz desde el vértice opuesto. Ver la construcción utilizada en la sección "La curvatura de una sección cónica" del capítulo 3.

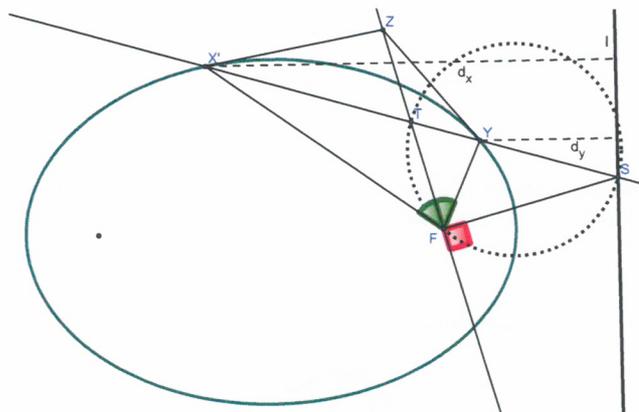


FIGURA 2.25: La recta polar del foco de una cónica coincide con la directriz asociada a dicho foco.

T la intersección de FZ con XY . Entonces la circunferencia circunscrita al triángulo TFS es un círculo de Apolonio de los puntos X e Y , cuyo diámetro es TS , y por tanto $\frac{FX}{FY} = \frac{SX}{SY}$, con lo que $\frac{FX}{SX} = \frac{FY}{SY}$. Sean d_x y d_y las distancias de los puntos X e Y a l respectivamente. Puesto que X , Y y S pertenecen a la misma recta $\frac{SX}{d_x} = \frac{SY}{d_y}$. De ahí que $\frac{FX}{d_x} = \frac{FY}{d_y}$. Ahora bien, puesto que X e Y son dos puntos arbitrarios podemos aplicar este resultado a todos los puntos de la cónica, quedando así demostrado que l coincide con la directriz asociada a F .

Ciertamente esta resulta una demostración bastante *ortopédica* para un hecho tan simple. Existe una demostración mucho más intuitiva pero que requiere nociones de correspondencia polar en el espacio. Sí, de hecho en cualquier espacio dimensional se puede establecer una correspondencia polar. Una correspondencia polar con respecto a una esfera asocia puntos con planos y rectas con rectas. Aquí enumeraremos las propiedades más importantes de la correspondencia polar en el espacio, sin demostraciones, pues son análogas a las del plano:

- ▷ El inverso de un punto A respecto de una esfera con centro O y radio r es el punto A' que pertenece a la semirrecta OA y tal que $OA' = \frac{r^2}{OA}$. El inverso de O se define como un punto en el plano en el infinito, y el inverso de un punto sobre la esfera es el mismo punto. La inversión respecto a una esfera es la transformación en el espacio que envía cada punto a su inverso con respecto a dicha esfera.
- ▷ El plano polar de un punto A respecto de una esfera con centro O y radio r es el plano a que pasa por el inverso de A y que es perpendicular a la recta OA . Se dice entonces que A es el polo del plano a con respecto a la esfera. El plano polar de O se define como el plano en el infinito, y el plano polar de un punto sobre la esfera es la tangente a la esfera en dicho punto.
- ▷ La recta que une dos puntos y la recta producida por la intersección de los planos polares de dichos puntos están asociadas polarmente.
- ▷ Si un punto B pertenece al plano polar a del punto A su plano polar b contiene A .

- ▷ El polo de un plano es la intersección de los planos polares de sus puntos, e igualmente el plano polar de un punto es el conjunto de polos de los planos que contienen dicho polo. Análogamente, el polo de un plano es la intersección de las rectas polares de las rectas contenidas en dicho plano, e igualmente el plano polar de un punto es el conjunto de rectas polares de las rectas que contienen dicho polo.
- ▷ El plano polar de un punto exterior a la esfera de inversión se puede definir como el plano que contiene la circunferencia en que las tangentes desde el punto exterior a la esfera la tocan.
- ▷ El plano polar de un punto se puede definir como el plano que contiene los puntos de intersección de los planos tangentes a la esfera desde la circunferencia en que cada plano que contiene el punto en cuestión intersecta la esfera. De igual manera el polo de un plano es la intersección de los planos que contienen la circunferencia en que las rectas tangentes a la esfera desde cada uno de los puntos del plano la intersectan.

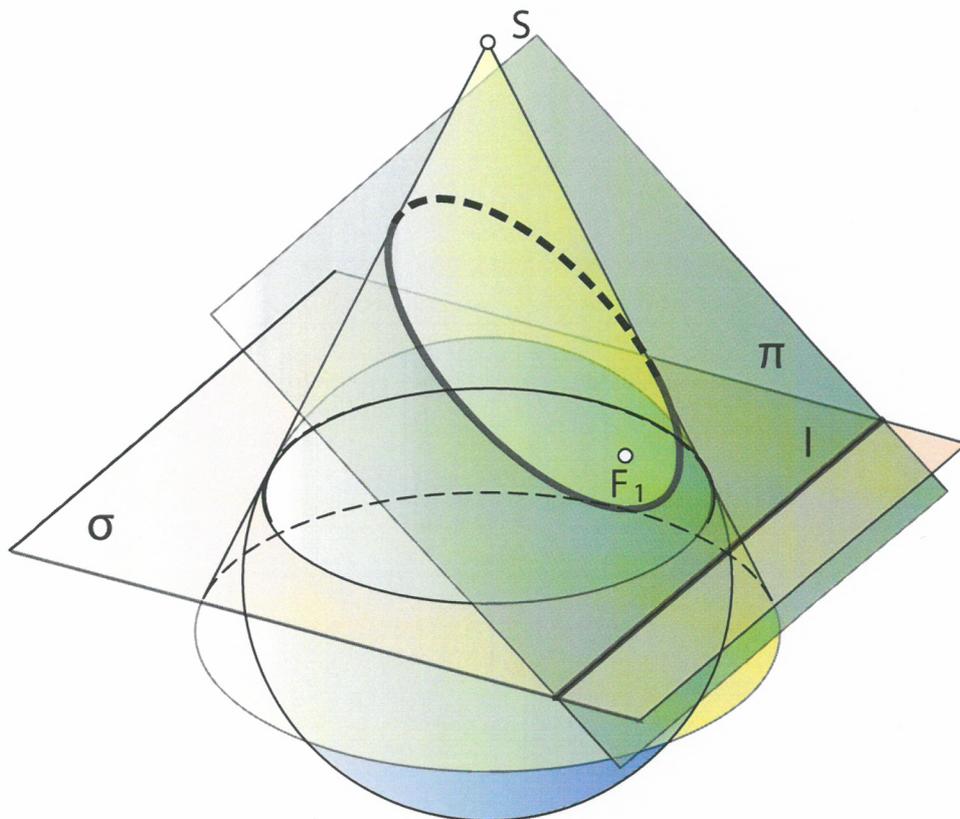


FIGURA 2.26: Correspondencia polar en tres dimensiones.

Ahora podemos demostrar el teorema.

Fijémonos en la construcción realizada para definir la excentricidad de la cónica. Siguiendo la misma nomenclatura utilizaremos correspondencia polar en el espacio con respecto a la esfera de

Dandelin inscrita y tangente en el foco F en cuestión, Ω . El plano polar de F sería π , puesto que pertenece a Ω y la correspondencia polar lo asocia con el plano tangente. El plano polar de S sería en cambio σ , puesto que contiene la circunferencia en que las rectas lanzadas desde S son tangentes a Ω . Dicha circunferencia será \mathfrak{S} . De tal manera que SF es polar con l , la intersección de σ y π . Sea P la intersección de SF y σ . Está claro que en σ P es el polo de l respecto de \mathfrak{S} . Y si ahora proyectamos desde S el plano σ en el plano π P se transformará en F y \mathfrak{S} se transformará en la cónica producida por el plano π . Como las transformaciones proyectivas preservan la correspondencia polar la directriz de la cónica es la recta polar del foco asociado en dicha cónica.

Capítulo 3

Propiedades relacionadas con las cónicas

“Las leyes de la matemática no son meramente invenciones o creaciones humanas. Simplemente son: existen independientemente del intelecto humano. Lo más que puede hacer un hombre de inteligencia aguda es descubrir que esas leyes están allí y llegar a conocerlas.”

MAURITIUS ESCHER

En este capítulo veremos algunas propiedades relacionadas con las cónicas que las hacen especialmente atractivas en geometría. Lo haremos fijándonos en cada una de las cónicas. Y como final trataremos de construir el radio de curvatura de una sección cónica.

3.1. La elipse

3.1.1. Lugar geométrico de van Schooten

Dos vértices de un triángulo rígido se deslizan sobre dos rectas del plano. ¿Cuál es el lugar geométrico del tercer vértice?

Para resolver este problema pensemos en un caso degenerado del anterior:

Tenemos una recta con tres puntos fijos, dos de los cuales se deslizan por dos rectas ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del tercer punto?

Pongamos las dos rectas ortogonales como un eje de coordenadas. Sean a y b las distancias del tercer punto, C , a A y B , A estando en las ordenadas y B en las abcisas. Sea ahora α el ángulo que forma la recta con el eje de abcisas. Entonces las coordenadas del tercer punto son $x = a \cos \alpha$ e $y = b \sin \alpha$, con lo que se cumple que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y que el lugar geométrico es una elipse con semiejes a y b .

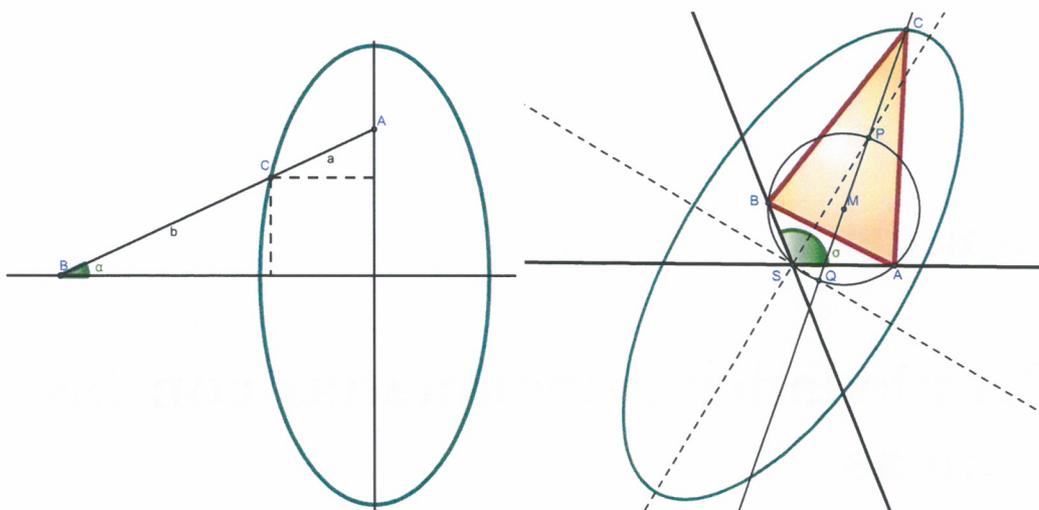


FIGURA 3.1: Lugar geométrico de van Schooten.

Vayamos ahora a por el problema de van Schooten¹.

Sean A y B los vértices del triángulo que están sobre las rectas, que se cruzan en S y que forman un ángulo σ , y C el vértice libre. Sea \mathfrak{S} la circunferencia circunscrita al triángulo ABS . Trazamos la recta que une C con el centro de \mathfrak{S} , M , y llamamos P y Q a los puntos de intersección de dicha recta con \mathfrak{S} . Puesto que la longitud de AB y el ángulo σ son constantes, el radio de \mathfrak{S} también es constante² y podemos considerar los puntos M , P y Q como fijos en el triángulo deslizante. Ahora bien, entonces los ángulos \widehat{ASP} y \widehat{ASQ} son constantes y los puntos P y Q se deslizan siempre por dos rectas que pasan por S , que además son ortogonales puesto que P y Q están colocados diametralmente sobre \mathfrak{S} . Ahora este problema queda reducido al anterior y el lugar geométrico buscado es una elipse.

3.2. La parábola

3.2.1. Una parábola a partir de cuatro tangentes

Para dibujar una parábola a partir de cuatro tangentes utilizaremos unos resultados previos.

Teorema 3.2.1 (Teorema de los triángulos semejantes) *Dos tangentes SA y SB a una parábola, junto con los segmentos que unen el foco con los puntos de contacto A y B y con la intersección de las tangentes S forman dos triángulos similares FSA y FSB , de modo que*

¹VAN SCHOOTEN, F. *Exercitationes Mathematicae* (1657)

²El teorema del seno argumenta que el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo es igual a la razón entre un lado y dos veces el seno del ángulo opuesto. Tanto si el ángulo es σ como $180^\circ - \sigma$ el lado y el seno son constantes y por tanto el radio.

el ángulo de un triángulo situado en la zona de tangencia es igual al ángulo del otro triángulo situado en el punto de intersección.

Demostración.

Sean H y K las proyecciones de A y B sobre la directriz de la parábola, que son los reflejos del foco en las dos tangentes. Como \widehat{FAS} y \widehat{HAS} son ángulos simétricos y \widehat{FHK} y \widehat{HAS} son iguales por estar delimitados por semirrectas ortogonales, podemos observar que

$$\widehat{FAS} = \widehat{FHK}$$

y que también

$$\widehat{FBS} = \widehat{FKH}.$$

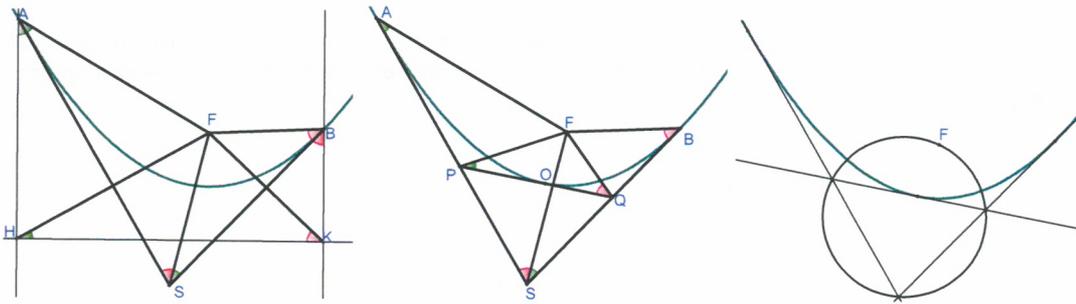


FIGURA 3.2: Teorema de los triángulos semejantes y teorema de Lambert.

Ahora bien, S es el circuncentro del triángulo FHK . Por tanto, $\widehat{FHK} = \frac{1}{2}\widehat{FSK}$ y $\widehat{FKH} = \frac{1}{2}\widehat{FSH}$, puesto que son ángulos inscritos. De igual manera $\widehat{FSA} = \frac{1}{2}\widehat{FSH}$ y $\widehat{FSB} = \frac{1}{2}\widehat{FSK}$. De aquí obtenemos que

$$\widehat{FAS} = \widehat{FSB}$$

y que

$$\widehat{FBS} = \widehat{FSA},$$

quedando así la demostración terminada.

Si dibujáramos una tercera tangente que cortara SA y SB en P y Q y que tocara la tangente en O podríamos ver por el teorema anterior que

$$\widehat{FAS} = \widehat{FSB}$$

y que

$$\widehat{FAP} = \widehat{FPO}$$

y consecuentemente

$$\widehat{FSQ} = \widehat{FPQ}$$

por lo que el cuadrilátero $FPSQ$ es cíclico. Este resultado se denomina

Teorema 3.2.2 (Lambert) *La circunferencia circunscrita del triángulo formado por tres tangentes a una parábola pasa por el foco.*

Ahora nuestro problema se resuelve fácilmente: hallamos el foco como intersección de las circunferencias circunscritas de los triángulos formados por cada grupo de tres tangentes. Después la directriz se halla fácilmente al reflejar el foco en cada una de las tangentes.

3.2.2. Una parábola a partir de tres puntos y la dirección del eje

Para resolver este problema nos ayudaremos de un conocido teorema:

Teorema 3.2.3 *En una parábola la mediatriz de una cuerda y la paralela a la directriz que pasa por el punto medio de la cuerda delimitan en el eje una distancia equivalente a la distancia entre el foco y la directriz.*

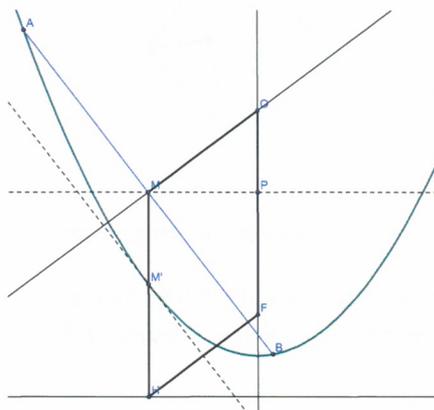


FIGURA 3.3: Demostración del teorema

Demostración.

Sean A y B los extremos de la cuerda y M su punto medio. Sea H la proyección de M sobre la directriz, y sea M' el punto en el que el segmento HM intersecta la parábola. Sea O la intersección de la mediatriz de AB con el eje de la parábola. Por la propiedad de los radios conjugados, la tangente a la parábola en M' es paralela a AB . Ahora bien, dicha tangente es la mediatriz de HF , siendo F el foco de la parábola, y por tanto el segmento HF es paralelo a la mediatriz de AB . De aquí sacamos que el cuadrilátero $HMOF$ es un paralelogramo y que la distancia OP es igual a la distancia entre el foco y la directriz, siendo P la intersección de la paralela a la directriz que pasa por M con el eje de la parábola.

De este teorema deriva el siguiente

Corolario 3.2.1 *Si los puntos medios de dos cuerdas de una parábola yacen sobre una recta paralela a la directriz, las mediatrices de dichas cuerdas intersectan en el eje.*

Ahora ya podemos dirigirnos al problema principal.

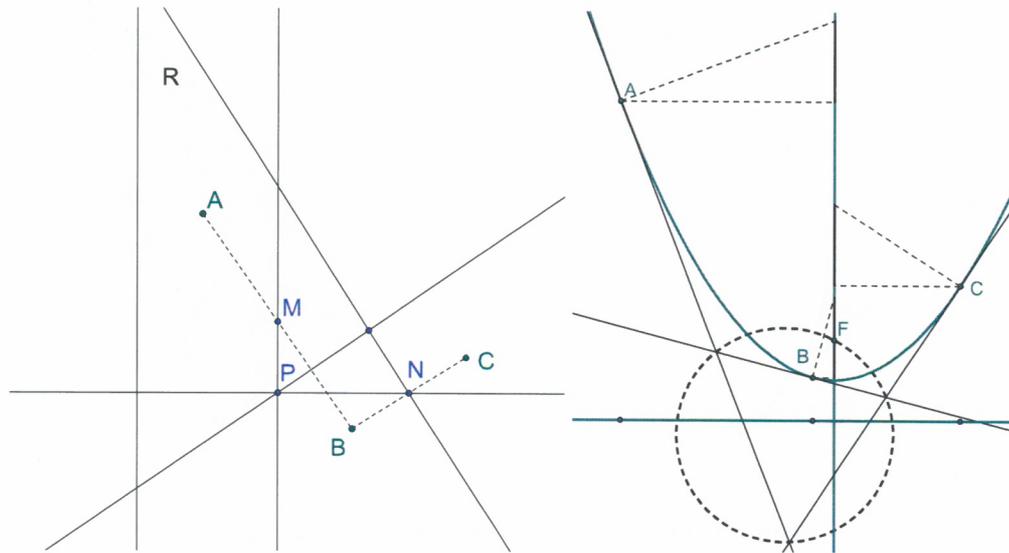


FIGURA 3.4: Construcción de una parábola a partir de 3 puntos y la dirección del eje.

Sean A , B y C los tres puntos de la parábola y \mathfrak{R} la dirección del eje de la parábola. Dibujemos una paralela al eje desde M , el punto medio de AB , y por el punto medio de BC , N , una perpendicular al eje. Sea P el punto de intersección de las dos rectas. Según la propiedad de los radios conjugados P es el punto medio de la cuerda $A'B'$ que es paralela a AB y que pasa por P . Dibujemos ahora la mediatriz de BC y la de $A'B'$ (que es la perpendicular a AB que pasa por P). Según el teorema demostrado anteriormente el punto de intersección de las dos mediatrices es un punto del eje de la parábola y por tanto ya tenemos el eje de la parábola. Además también tenemos la distancia desde el foco a la directriz, que es la distancia desde la intersección de las mediatrices al segmento NP . De manera análoga podemos hallar las normales a la parábola en los puntos A , B y C , y por tanto sus correspondientes tangentes. Aplicando el teorema de Lambert el foco de la parábola es la intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo circunscrito a la parábola en A , B y C con el eje de la parábola. Por último podemos hallar la directriz como la recta que contiene los tres puntos producidos al reflejar el foco en las tres tangentes.

3.2.3. Superficie de una parábola

Tomemos una parábola y un segmento que une dos puntos de la parábola. ¿Qué superficie de parábola ha delimitado este segmento?

Fijémonos en el triángulo de Arquímedes asociado a dicho segmento. Seguiremos con la misma nomenclatura que en la demostración del teorema de Arquímedes. Sea Δ la superficie del triángulo ABS , y δ la superficie que queremos buscar. Puesto que el triángulo ABO está inscrito en la parábola podemos hacer aproximaciones de δ .

$$\Delta_{ABO} = \frac{1}{2}\Delta$$

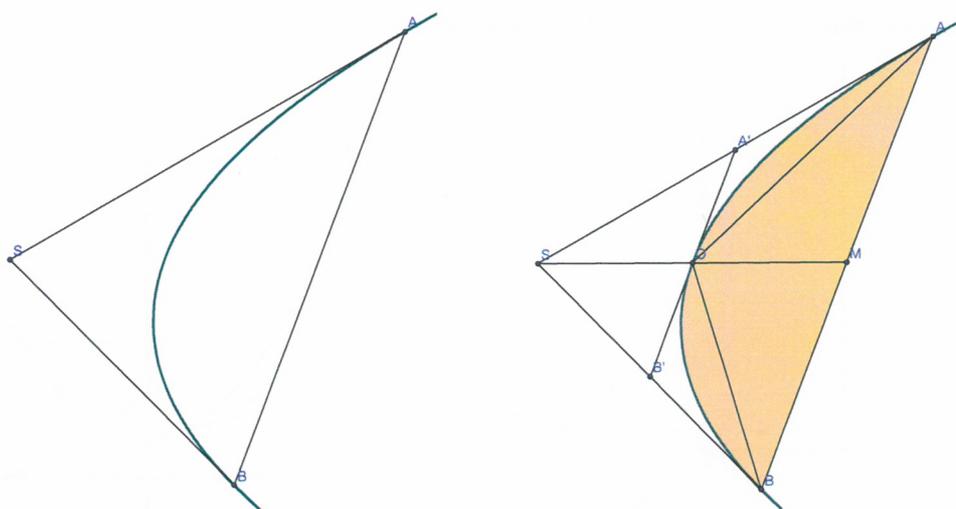


FIGURA 3.5: Superficie de una sección de parábola.

$$\Delta A'B'S = \frac{1}{4}\Delta$$

$$\Delta AA'O = \Delta BB'O = \frac{1}{8}\Delta$$

$$\delta = \frac{1}{2}\Delta + \delta AA'O + \delta BB'O$$

Puesto que $AA'O$ y $BB'O$ son triángulos de Arquímedes, podemos seguir con la aproximación. De aquí comprobamos que la razón entre las superficies de una sección de parábola y su triángulo de Arquímedes asociado son constantes. Sea $r = \frac{\delta}{\Delta}$ para cualquier triángulo de Arquímedes. Entonces:

$$\delta = \frac{1}{2}\Delta + r\left(\frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{8}\Delta\right) = \frac{1}{2}\Delta + r\frac{1}{4}\Delta$$

$$r = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r$$

$$\frac{3}{4}r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

De aquí obtenemos que

El área de una sección de parábola es dos tercios el área del triángulo de Arquímedes asociado.

3.2.4. La parábola como envolvente de rectas

Tenemos dos segmentos con un extremo común. Dividimos los dos segmentos en n partes iguales y los numeramos con orden inverso: uno de 0 a n y otro de n a 0. A continuación unimos todos los pares de puntos que tienen igual número. Demostraremos que dichos segmentos envuelven una parábola.

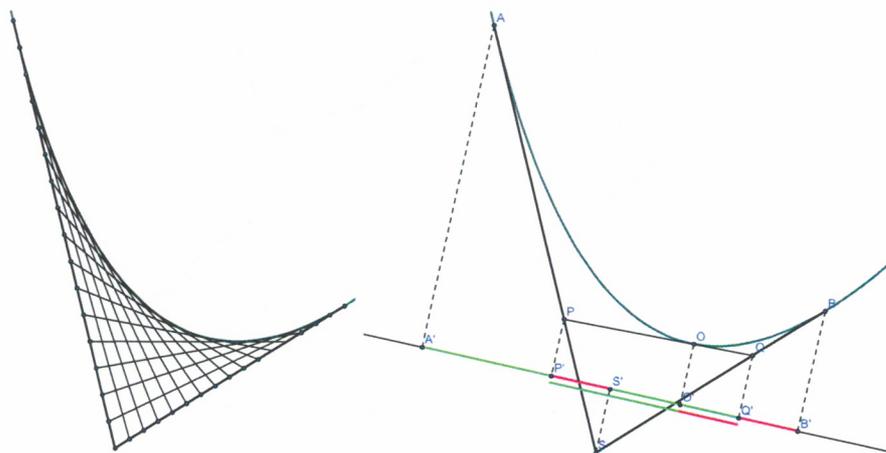


FIGURA 3.6: Envolvente de la parábola y teorema de Apolonio.

La demostración se basa en el teorema de Apolonio:

Teorema 3.2.4 (Apolonio) *Dos tangentes a una parábola están divididas en segmentos proporcionales por una tercera tangente dividida a su vez en la misma proporción por el punto de tangencia.*

Demostración.

Sean A y B los puntos de tangencia de las dos rectas en la parábola, que se cortan en S . Sea O el punto de tangencia de la recta con la cónica que corta AS y BS en P y Q . El teorema de Apolonio nos diría que $\frac{AP}{PS} = \frac{SQ}{QB} = \frac{PO}{OQ}$.

Sean A' , B' , S' , O' , P' y Q' las proyecciones de A , B , S , O , P y Q sobre la directriz. Por la propiedad de los radios conjugados la proyección sobre la directriz del punto de intersección de dos tangentes es el punto medio de las proyecciones de los dos puntos de tangencia sobre la directriz. Por tanto $A'P' = P'O'$, $O'Q' = Q'B'$ y $A'S' = S'B'$. Combinando las igualdades anteriores obtenemos que $A'P' = P'O' = S'Q'$ y que $P'S' = O'Q' = Q'B'$. Siguiendo el teorema de Tales concluimos que $\frac{AP}{PS} = \frac{SQ}{QB} = \frac{PO}{OQ}$, quedando el teorema demostrado.

Ahora que ya hemos demostrado el teorema de Apolonio se hace evidente que la construcción anterior genera rectas que son tangentes a una parábola.

3.3. La hipérbola

3.3.1. Una hipérbola a partir de cuatro puntos.

Dibujar la hipérbola equilátera que pasa por cuatro puntos dados.

Para resolver este problema necesitamos algunos resultados previos.



FIGURA 3.7: Radios conjugados de una hipérbola.

Lema 3.3.1 *Una recta que corta una hipérbola en dos puntos corta a igual distancia las asíntotas.*

Demostración.

Retomemos la propiedad de los radios conjugados en la hipérbola. Los puntos medios de los puntos de intersección de rectas paralelas con la hipérbola yacen sobre una recta que pasa por el punto medio de los focos, es decir, la intersección de las asíntotas. Cuando la recta se aleja al infinito los puntos de corte con la hipérbola se aproximan a los puntos de corte con las asíntotas. En el infinito los puntos medios son iguales. Ahora bien, por el teorema de Tales si intersecamos dos rectas secantes con una infinidad de rectas paralelas los puntos medios de los cortes de cada recta forman otra recta que pasa por las intersección de las rectas originales. Queda así demostrado que las dos rectas son, en realidad, la misma, y el teorema se hace evidente.

Vayamos ahora a por otro teorema:

Teorema 3.3.1 *El círculo de Feuerbach³ de un triángulo inscrito en una hipérbola equilátera pasa por el centro de la hipérbola.*

Demostración.

Sean A , B y C tres puntos de una parábola equilátera de asíntotas I y II que se cortan en Z . Sean A' , B' y C' los puntos medios de BC , AC y AB respectivamente. Sean A_1 y A_2 los cortes de la prolongación de BC con I y II , y análogamente con B_1 y B_2 . Como consecuencia del teorema

³El círculo de Feuerbach de un triángulo, también llamado de los 9 puntos, es aquel que pasa por los puntos medios de cada lado, y que también pasa por los pies de las alturas y por los puntos medios entre los vértices y el ortocentro.

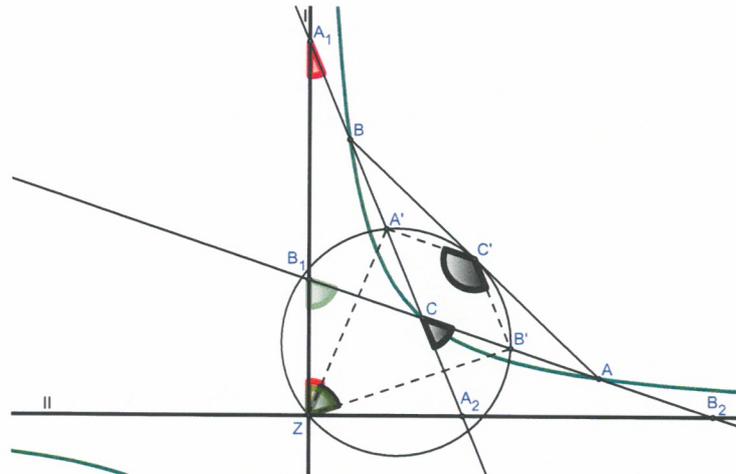


FIGURA 3.8: El círculo de Feuerbach de un triángulo inscrito en una hipérbola equilátera pasa por el centro de la hipérbola

anterior, A' es el punto medio de A_1A_2 y B' es el punto medio de B_1B_2 . Esto comporta que $\widehat{A'ZA_1} = \widehat{A'A_1Z}$ y que $\widehat{B'ZB_1} = \widehat{B'B_1Z}$. Si restamos lado a lado las igualdades anteriores nos queda que $\widehat{A'ZB} = \widehat{A_2CB_2} = 180^\circ - \widehat{A'C'B'}$, lo cual equivale a decir que el cuadrilátero $A'B'C'Z$ es cíclico, con lo que se termina la demostración.

Supongamos que ahora tenemos los cuatro puntos. Por cada trío de puntos dibujamos el triángulo de Feuerbach asociado y marcamos la intersección de todos, que es el centro de la hipérbola. Ahora dibujamos una circunferencia centrada en A' que pase por Z . La intersección de la recta BC con el círculo nos da los puntos A_1 y A_2 y por tanto nos da las dos asíntotas. Ahora podemos encontrar cualquier punto de la hipérbola utilizando el teorema anterior de los segmentos iguales.

3.3.2. Dos rectas giratorias.

Dos puntos A y B son los ejes de dos rectas a y b que giran con igual velocidad angular pero sentidos opuestos. ¿Cuál es el lugar geométrico de la intersección de las dos rectas?

La solución de este problema viene dada por el siguiente

Teorema 3.3.2 Sean A y B dos puntos de una hipérbola equilátera cuyo punto medio sea la intersección de las asíntotas. Para dos puntos arbitrarios de la hipérbola los ángulos que describen conjuntamente con A y B son iguales.

Es decir, si los puntos arbitrarios son X e Y , $\widehat{XAY} = \widehat{XBY}$.

Demostración.

Dibujemos el círculo de Feuerbach asociado al triángulo AXY , que pasa por el punto medio de AX , X' , por el punto medio de AY , Y' , por el punto medio de XY , M y por O , la intersección

de las asíntotas, debido al resultado demostrado en la sección anterior. Si desde A realizamos una homotecia de coeficiente 2 el círculo de Feuerbach se transforma en la circunferencia circunscrita del triángulo BXY , puesto que X' , Y' y O se convierten en X , Y y B respectivamente. Así pues $\widehat{XAY} = \widehat{X'MY'} = \widehat{X'OY'} = \widehat{XBY}$, con lo que queda el teorema demostrado.

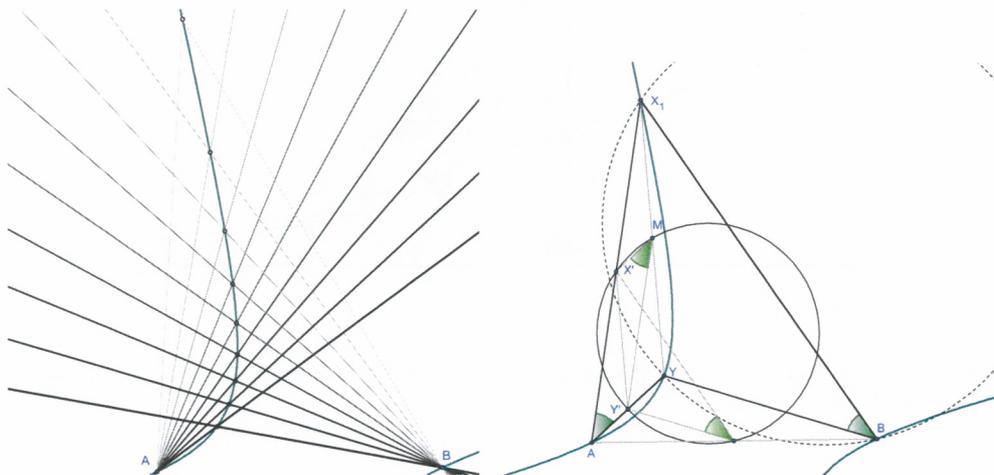


FIGURA 3.9: Rectas giratorias.

Supongamos que ahora tenemos los dos puntos A y B y las dos rectas a y b , que en una determinada posición intersectan en X . Dibujamos ahora una hipérbola equilátera que pase por A , B y X y cuyo centro sea el punto medio de A y B . Ahora, cada vez que las rectas giren intersectarán en un punto de la hipérbola. Por tanto el lugar geométrico buscado es una hipérbola equilátera cuyo centro es el punto medio de A y B .

3.4. La curvatura de las secciones cónicas.

En esta última sección del capítulo encontraremos la manera de hallar la circunferencia que se adapta mejor a una cónica en cualquiera de sus puntos.

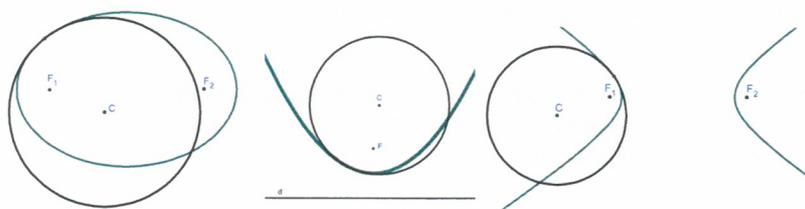


FIGURA 3.10: Curvatura de una sección cónica.

Tenemos una sección cónica con focos F_1 y F_2 , y queremos hallar el centro C de curvatura en el punto P . Ahora trabajaremos con una elipse, pero para la parábola y la hipérbola el razonamiento

es análogo.

En una circunferencia la normal (perpendicular a la tangente) en cualquier punto pasa por el centro, mientras que en una elipse la normal es la bisectriz del ángulo formado con los focos (por la propiedad óptica). Por supuesto, C cae sobre la bisectriz de $\widehat{F_1PF_2}$, pero para movimientos muy pequeños, x , la bisectriz sigue estando muy cerca de C . Supongamos que para este pequeño movimiento a lo largo de la elipse PF_1 barre un ángulo α , PF_2 un ángulo β y PC un ángulo γ . La bisectriz de un ángulo cambia de inclinación la mitad de lo que lo hacen las dos componentes, y es por ello que deducimos que para x muy pequeños $\frac{\alpha + \beta}{2} \approx \gamma$. Sea PF_1 a , PF_2 b y PC R .

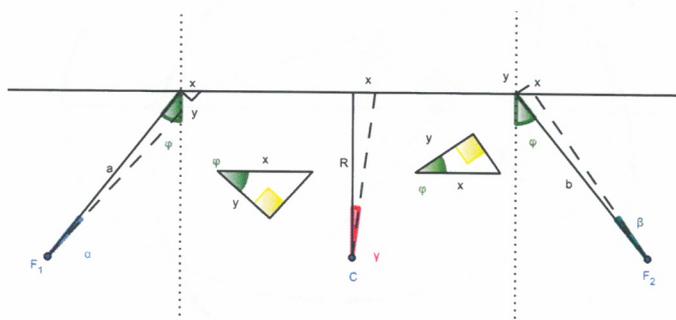


FIGURA 3.11: Ángulos barridos en pequeños desplazamientos.

Midiendo los ángulos en radianes $\alpha \approx \frac{y}{a} \approx \frac{x \cos \varphi}{a}$, y de igual manera $\beta \approx \frac{x \cos \varphi}{b}$. Asimismo $\gamma \approx \frac{x}{R}$. Dado que $\frac{\alpha + \beta}{2} \approx \gamma$ tenemos que $R \approx \frac{x \cos \varphi}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{2ab}{(a + b) \cos \varphi}$. Ya sabemos el radio.

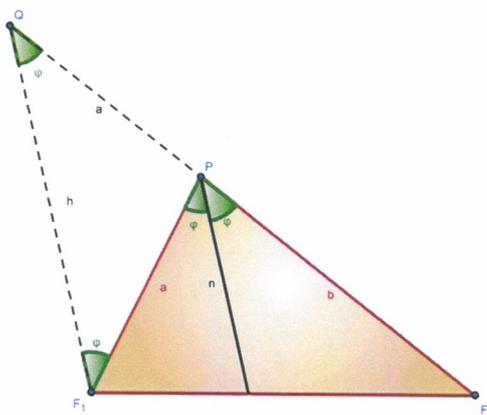


FIGURA 3.12: Construcción del teorema de la bisectriz.

Llamemos n al segmento de la bisectriz desde P hasta la intersección con el eje F_1F_2 . Desde

Capítulo 4

Las cónicas y el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

"Los problemas valiosos son aquellos que realmente puedes resolver o ayudar a resolver, aquellos a los que realmente puedes contribuir en alguna cosa"

RICHARD FEYNMAN, en una carta a Koichi Mano (3 de febrero de 1960)

4.1. Introducción

Las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol¹ fueron descubiertas, tras años y años investigando la órbita de Marte, por Johannes Kepler (1571-1630). En su tratado *Astronomía Nova*, Kepler enuncia sus dos primeras leyes:

PRIMERA LEY. *Cada planeta se mueve describiendo una órbita elíptica y el Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.*

SEGUNDA LEY. *El radio vector, o línea imaginaria que une el centro del Sol con el centro de planeta, describe áreas iguales en tiempos iguales.*

Diez años más tarde, en 1619, una tercera ley del movimiento planetario fue enunciada por Kepler en *Harmonices Mundi*:

TERCERA LEY. *Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de su distancia media respecto a él.*

Estos son los principios que rigen la mecánica celeste. Pero, ¿por qué la naturaleza se empeña en que los planetas puedan únicamente describir estas elegantes construcciones geométricas? El problema del movimiento de los astros no sólo tiene profundas implicaciones científicas y filosóficas, sino también una gran importancia histórica. A continuación exponemos una cita de la referencia [?] que recoge el problema tal y como lo trataremos en este capítulo:

¹Después aparecerían las débiles correcciones de la Relatividad General, pero no vienen ahora al caso.



FIGURA 4.1: De izquierda a derecha: Johannes Kepler, Isaac Newton y Richard Feynman.

“En agosto de 1684, Edmund Halley (cuyo apellido daría nombre al cometa) fue a Cambridge para hablar de mecánica celeste con el célebre pero un tanto excéntrico matemático Isaac Newton. La idea más extendida en los círculos científicos era que los movimientos de los planetas podían deberse a una fuerza procedente del Sol, que menguaba en razón inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre el Sol y los planetas, pero nadie había sabido exponerlo satisfactoriamente hasta entonces. Newton le confesó que él sí había conseguido demostrar que una fuerza de aquellas características originaba órbitas elípticas, exactamente lo mismo que Johannes Kepler había deducido setenta años antes observando el cielo. Halley instó a Newton a que le enseñara la demostración. Parece ser que Newton se hizo de rogar, aduciendo que no sabía dónde la había puesto, pero prometió a Halley que la reconstruiría y se la enviaría. Meses más tarde, en noviembre de 1684, Newton envió a Halley un texto de nueve páginas en el que exponía que una ley gravitatoria cuadrática inversa y unos cuantos principios básicos de dinámica explicarían no sólo las órbitas elípticas sino también otras leyes keplerianas de los movimientos planetarios, y más cosas aún.

Halley advirtió que tenía en las manos nada menos que la clave del conocimiento del universo tal como se concebía entonces, y apremió a Newton para que le permitiera preparar su publicación. Pero Newton, que no estaba del todo satisfecho con su trabajo y quería revisarlo, prefirió esperar. La espera se prolongó casi tres años, durante los cuales Newton, según parece, no hizo otra cosa que trabajar en el problema. Lo que surgió finalmente, en 1687, fueron los Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, la obra maestra de Newton y el libro que marca el nacimiento de la ciencia moderna.

Casi trescientos años después, el físico Richard Feynman, al parecer sólo para entretenerse, quiso demostrar por su cuenta la ley kepleriana de las elipses sin recurrir a matemáticas más avanzadas que la geometría plana elemental. [...] ¿Por qué se empeñó en demostrar la ley kepleriana de las elipses usando sólo la geometría plana? Es más fácil demostrarla utilizando las poderosas técnicas de matemáticas más avanzadas². Es evidente que a Feynman le intrigaba el hecho de que Isaac Newton, quien había ideado alguna de las mencionadas técnicas, expusiera en los Principia su propia demostración de la ley de Kepler empleando sólo geometría plana. Feynman quiso seguir la demostración de Newton, pero no pudo pasar de determinado punto, ya que Newton echaba mano de unas misteriosas propiedades de las secciones cónicas (un tema de candente actualidad en el siglo XVII) que Feynman desconocía. De modo

²Para un tratamiento clásico del problema de cuerpos en campos de fuerzas centrales, ver por ejemplo GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J., *Classical Mechanics* (3ª Ed.) Addison Wesley, San Francisco (2000)

que, como él mismo dice en la conferencia, ideó su propia demostración.

Ahora bien, este problema no es sólo un interesante rompecabezas intelectual. La demostración newtoniana de la ley de las elipses es la frontera que separa el mundo antiguo del moderno, la culminación de la revolución científica. Es una de las mayores hazañas de la mente humana, comparable a las sinfonías de Beethoven, las obras de Shakespeare o la Capilla Sixtina de Miguel Ángel. Además de tener una gran importancia en la historia de la física, es una prueba concluyente del asombroso hecho que viene confundiendo e intrigando a todos los grandes pensadores desde la época de Newton: que la naturaleza obedece a leyes matemáticas."

Y ahora, a por la demostración de Feynman.

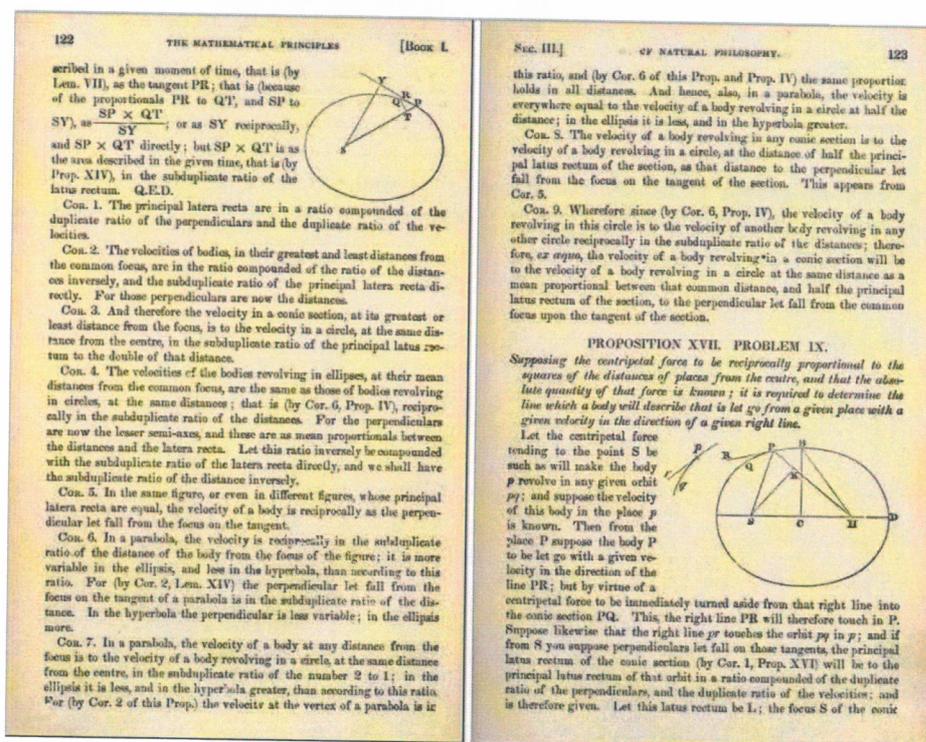


FIGURA 4.2: Páginas extraídas de los *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Newton (reproducidas de la referencia [?]).

4.2. La brillante idea de Feynman

Richard Feynman se vio obligado a idear su propia demostración de la ley de las elipses, siguiendo un camino paralelo al de Newton. Y fue entonces cuando desarrolló la magnífica idea que expondremos en este capítulo.

Newton se basó en la Segunda Ley de Kepler: en tiempos iguales se barren áreas iguales. Y a

partir de aquí siguió investigando hasta que consiguió una demostración de la ley de las elipses, recogida en los *Principia*. Feynman sigue otro camino en su demostración: *En ángulos barridos iguales tienen lugar incrementos de velocidad iguales*. Pero para llegar hasta este resultado antes tendremos que trabajar un poco.

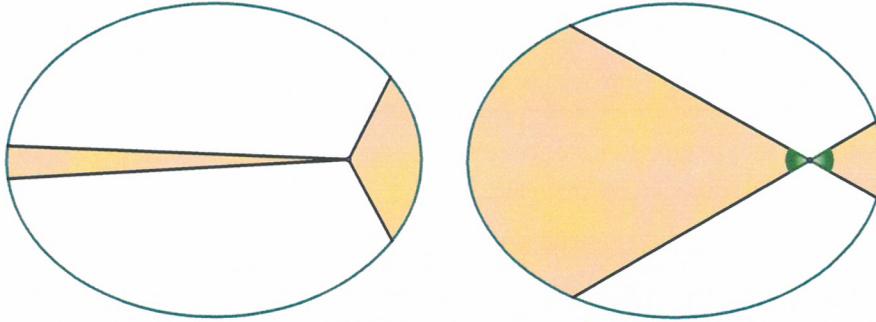


FIGURA 4.3: Comparación de las ideas de Newton y Feynman. A la izquierda, la idea de Newton: *en tiempos iguales se barren áreas iguales*. A la derecha, la idea de Feynman: *Ángulos iguales provocan incrementos de velocidad iguales*.

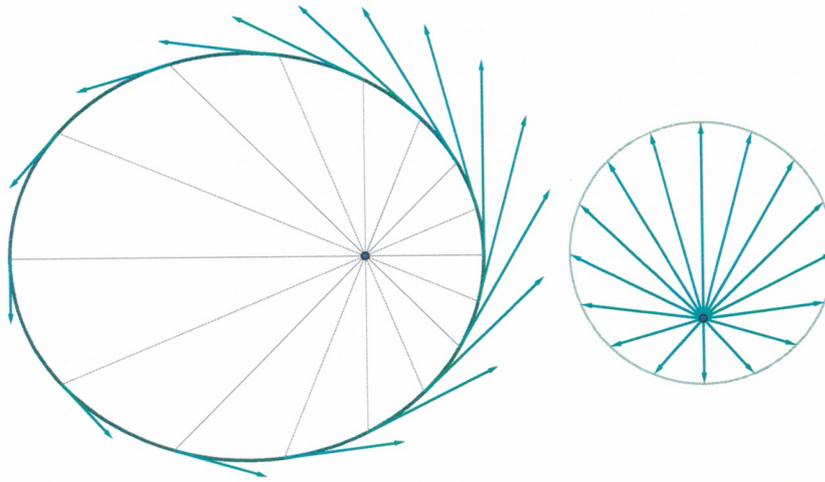


FIGURA 4.4: Diagrama de velocidades de un movimiento planetario. A la izquierda, la trayectoria dividida en ángulos iguales, según la idea de Feynman. A la derecha, el diagrama de velocidades asociado, tras superponer el origen de todos los vectores velocidad.

Dibujemos la órbita que recorrería un planeta alrededor del Sol. Este planeta, a medida que recorre su trayectoria, varía su vector velocidad, \vec{v} , tanto en módulo como en dirección. Podríamos tomar todos los vectores velocidad del planeta cuando da una vuelta al Sol, con el origen en un punto común. La trayectoria que seguiría el extremo del vector velocidad se llama diagrama de velocidades. Si tomamos dos puntos de la trayectoria el vector velocidad puede haber cambiado. En este caso se dice que ha habido un *incremento de velocidad*, $\Delta\vec{v}$, que se define como el vector

diferencia entre los dos vectores anteriores. En el diagrama de velocidades, el vector incremento de velocidad es el vector comprendido entre los dos puntos extremos de los dos vectores en cuestión.

Desde el Sol vamos a dividir la trayectoria del planeta en ángulos iguales. Para cada intervalo el planeta ha sufrido un incremento de velocidad. Pero ¿cómo es este incremento? En primer lugar podríamos decir que este incremento, que es un vector, está orientado en la dirección que va hacia el Sol, es decir, es paralelo a la recta que une el planeta con el Sol. Esto es así por la sencilla razón de que el incremento de velocidad viene dado por la aceleración, que es producida por la fuerza que ejerce el Sol sobre el planeta, que evidentemente está dirigida hacia el Sol. Pero no es lo único. En este intervalo el planeta ha empleado un tiempo, Δt , y ha estado a una distancia media del Sol \bar{r} . Además el Sol ha ejercido sobre este planeta una fuerza media \vec{F} , que ha provocado en el planeta una aceleración media \vec{a} (de ahora en adelante prescindiremos de las barras e interpretaremos que cualquier magnitud que se da en el intervalo es *media*). Sean m y M las masas del planeta y del Sol respectivamente.

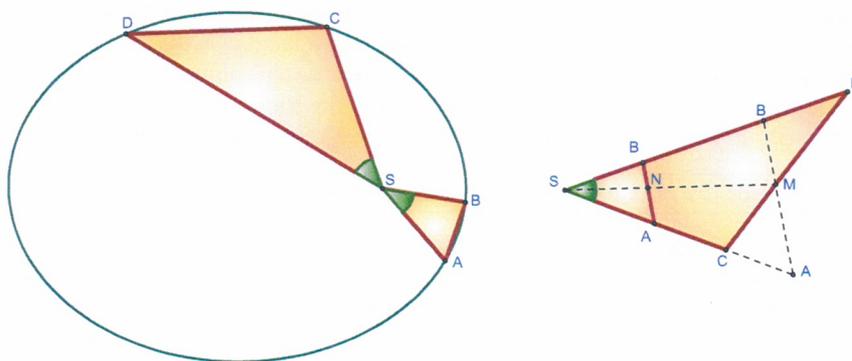


FIGURA 4.5: El área barrida es proporcional al cuadrado de la distancia media al Sol.

Tomemos ahora las magnitudes en módulo. El incremento de velocidad se produce cuando un cuerpo sufre una aceleración durante un periodo de tiempo, $\Delta v = a\Delta t$. Esta aceleración viene producida por la fuerza, según la Segunda Ley de Newton, $F = ma$; en el caso de la gravedad esta fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, $F \propto r^{-2}$. Según la Segunda Ley de Kepler el tiempo es proporcional al área barrida por el radio vector, pero además el área barrida es proporcional al cuadrado de la distancia media (para ángulos iguales). Esto no es tan evidente pero es igualmente cierto³. Supongamos que tenemos dos áreas barridas por el mismo ángulo. Tomamos los triángulos que resultan de unir el Sol con los extremos de las áreas barridas, que se llamarán SAB y SCD , y los superponemos por el ángulo común. Claramente, podemos hacer una paralela a AB que pase por CD y que forme un triángulo semejante a SAB que tenga el mismo área que SCD , que será $SA'B'$. Sea M la intersección de $A'B'$ con CD , y sea N la intersección de AB con SM . De aquí tenemos que $\frac{\Delta SAB}{SN^2} = \frac{\Delta SA'B'}{SM^2} = \frac{\Delta SCD}{SM^2}$, puesto que el área aumenta proporcional al cuadrado del factor de aumento. Ahora bien, si reducimos el ángulo central hasta el infinito podremos ver que los triángulos se adaptan cada vez mejor a la forma del área barrida y que las distancias SM y SN se convierten en las distancias desde el

³En la demostración que sigue, el lector posiblemente encontrará que la idea subyacente es el teorema medio del cálculo integral. Del mismo modo que Feynman, hemos evitado hacer cualquier uso explícito del cálculo infinitesimal.

Sol al planeta. Es por tanto que si dividimos el área barrida infinitesimalmente conseguimos el resultado anterior: el área barrida es proporcional a la distancia media, y por tanto $\Delta t \propto r^2$. Combinando las igualdades y proporcionalidades anteriores obtenemos que:

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{F\Delta t}{m} \propto r^{-2}r^2 = 1 \quad (4.1)$$

$$\Delta v \propto 1 \quad (4.2)$$

Lo cual significa que *el módulo del incremento de velocidad en ángulos iguales es igual*.

Además, según lo comentado anteriormente el vector incremento de velocidad es paralelo a la recta que une el planeta con el Sol; por tanto cada vez que cambiamos de intervalo añadimos un vector incremento de velocidad cuyo módulo es fijo y cuya dirección varía el mismo ángulo con el que dividimos la trayectoria del planeta, que también es constante. Obviamente, tras añadir todos los vectores incremento de velocidad el diagrama de velocidades se convierte en un polígono regular de tantos lados como divisiones tenga la trayectoria del planeta. No es difícil ver ahora que cuando dividimos la trayectoria hasta el infinito el diagrama de velocidades se convierte en una circunferencia. Este es el primer paso para la demostración de Feynman:

El diagrama de velocidades de cualquier movimiento planetario es una circunferencia.

Bien, este resultado es muy bueno pero no es suficiente para determinar la trayectoria que dibuja el planeta. En primer lugar no sabemos dónde está el punto que actúa como origen común de todos los vectores. Es decir, cada punto se asocia con una trayectoria planetaria distinta, y viceversa. Ahora bien, aún cuando supiéramos dónde está el punto origen no sería suficiente, porque no podemos determinar a qué ritmo avanza el incremento de velocidad. Pero no es difícil ver que, según el resultado anterior, el ángulo descrito por el planeta durante su trayectoria es equivalente al descrito en el diagrama de velocidades con el centro de la circunferencia. Por tanto ahora sí que está totalmente determinada la trayectoria del planeta puesto que en cada punto del plano el planeta tiene un vector velocidad fijo.

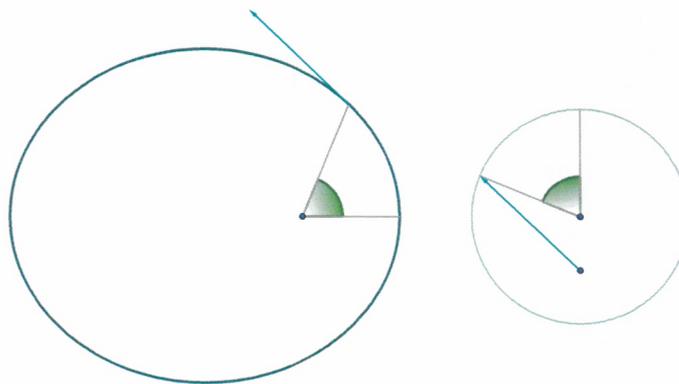


FIGURA 4.6: El ángulo barrido equivale al ángulo formado con el centro de la circunferencia del diagrama de velocidades.

Tenemos un diagrama de velocidades con un punto fijo como origen de los vectores y nuestra tarea ahora es encontrar esta trayectoria. Dicha trayectoria ha de cumplir que para cualquier punto la tangente sea paralela al vector velocidad asociado según el diagrama de velocidades. Por supuesto, esta trayectoria estará a escala, puesto que el vector velocidad tiene unidades diferentes a las usadas en cuestiones métricas, pero no importa. Y bien, el truco reside en girar la trayectoria 90° . Ahora la tangente ha de ser perpendicular al vector velocidad asociado. Aquí mostraremos una trayectoria válida, que por lo dicho anteriormente es única.

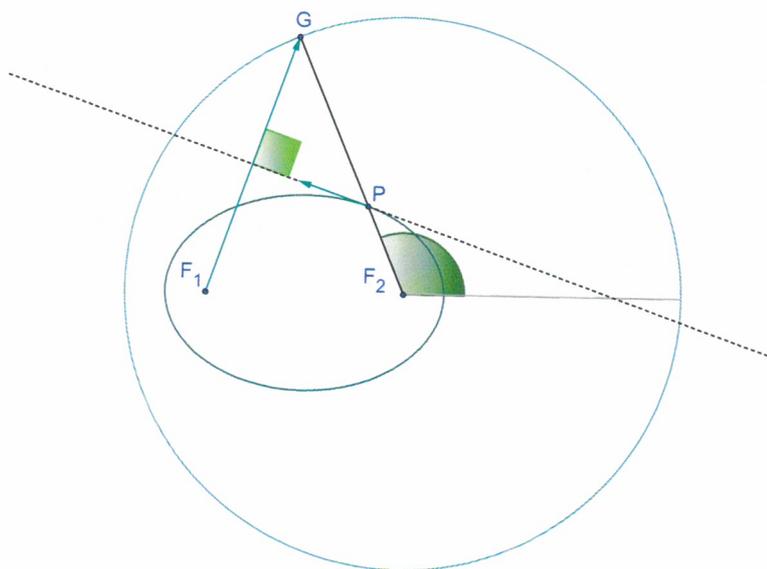


FIGURA 4.7: Las trayectorias planetarias describen elipses.

Retornemos al principio del Capítulo 2 de libro: la propiedad óptica. Veamos la construcción con la que se demuestra que en una elipse los ángulos descritos por la tangente y la unión del punto de tangencia con los dos focos son iguales. En este plano superpondremos dos gráficos: la trayectoria y el diagrama de velocidades. La elipse se asociará a la trayectoria descrita por el planeta, F_2 será el Sol y al mismo tiempo será el centro de la circunferencia del diagrama de velocidades, cuyo radio es la suma de distancias de un punto de la elipse a los dos focos. F_1 , en cambio, será el punto origen de los vectores velocidad en el diagrama de velocidades. Sea P el punto en ese punto es perpendicular a F_1G , siendo G la intersección de F_2P con la circunferencia. Esto es así porque al girar la trayectoria 90° el ángulo formado con el Sol y el formado con el centro de la circunferencia coinciden. Y efectivamente, la tangente a la elipse en P es perpendicular a F_1G , porque de hecho es la mediatriz de F_1G . De aquí determinamos que la trayectoria buscada es una escala de la elipse cuyos focos son el centro de la circunferencia y el punto origen de los vectores, y cuya suma constante de distancias a los dos focos es igual al radio de la circunferencia del diagrama de velocidades.

Aquí reside la genialidad de la idea de Feynman.

4.3. Las cónicas y los movimientos astronómicos

Bien, acabamos de comprobar que los movimientos planetarios obedecen a órbitas elípticas. Pero los planetas no son los únicos cuerpos que giran alrededor del Sol. Y de hecho hay más casos de trayectorias, puesto que hemos dado por supuesto que el punto origen de vectores está *dentro* de la circunferencia. Y ¿qué pasa si el origen está *fuera* de la circunferencia o está *sobre* la circunferencia?

Sencillamente las trayectorias se convierten en hipérbolas y parábolas, respectivamente.

El caso de la hipérbola es análogo al de la elipse. Tomemos la construcción con la que demostramos la propiedad óptica de la hipérbola. Como antes, F_2 será el Sol y al mismo tiempo el centro de la circunferencia del diagrama de velocidades, mientras que F_1 será el punto origen de los vectores, esta vez fuera de la circunferencia. Pero la trayectoria no será la hipérbola entera, sino sólo el brazo más cercano a F_2 . Esto es así porque la trayectoria de un planeta ha de ser continua. De nuevo P es un punto determinado de la trayectoria del planeta, y se ha de cumplir que la tangente en ese punto sea perpendicular a F_1G , lo cual es cierto puesto que es la mediatriz de F_1G . En este caso, el diagrama de velocidades es sólo un arco de la circunferencia, el mayor entre los puntos de corte de la circunferencia con las tangentes lanzadas desde el punto origen de los vectores.

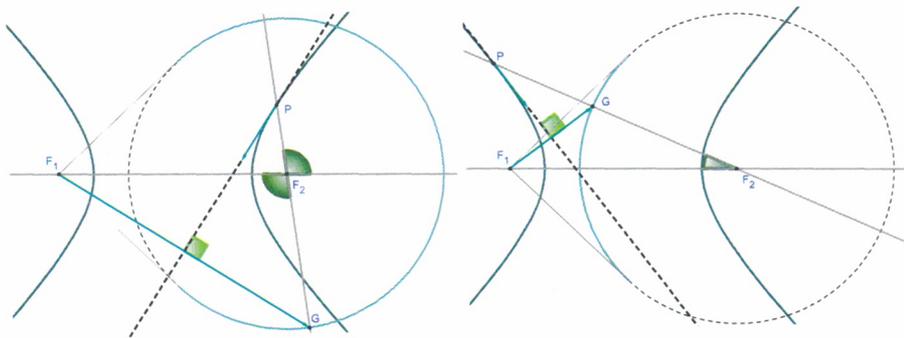


FIGURA 4.8: Órbitas hiperbólicas en campos centrales. A la izquierda, la trayectoria de un cometa que sufre la fuerza atractiva del Sol. La figura de la derecha, por su parte, puede representar la dispersión de una partícula alfa por un núcleo atómico.

Y ¿qué pasa con el otro brazo de la hipérbola? Está asociado con el arco menor de la circunferencia. Pero este caso es muy curioso porque el vector velocidad disminuye al acercarse la trayectoria al foco, que por cierto se vuelve antes de dar una vuelta a F_2 . Lo cierto es que esta trayectoria no se podría dar en los movimientos astronómicos, pero sí en un fenómeno muy corriente que hasta ahora no hemos mencionado. Además de la dada por la ley de Gravitación Universal de Newton, existe otra fuerza que disminuye con el cuadrado de la distancia, y que en este caso puede ser atractiva o repulsiva: la fuerza electrostática de Coulomb. Por ejemplo, si realizamos un experimento de *dispersión Rutherford* de partículas α , éstas describirán un brazo de una hipérbola con foco en el núcleo repulsor⁴. La demostración es equivalente al caso astronómico.

⁴El nuevo caso expuesto encuentra multitud de expresiones distintas en la naturaleza. Por ejemplo, en un modelo semiclásico del átomo, las órbitas de los electrones alrededor del núcleo son elipses cuya excentricidad y semeje mayor vienen determinados por el momento angular y la energía de los electrones.

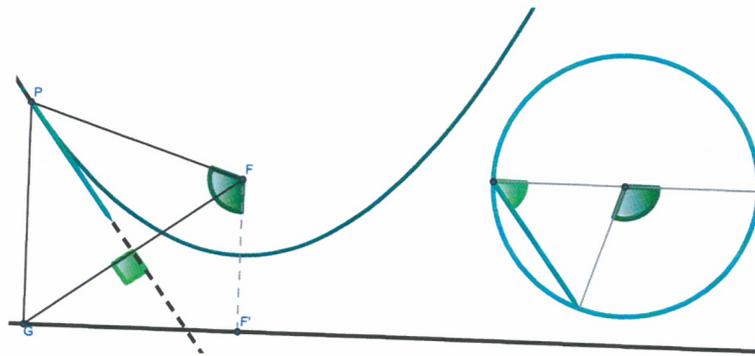


FIGURA 4.9: El caso extremo: la trayectoria parabólica.

El caso extremo se encuentra cuando el punto origen de vectores está sobre la circunferencia, donde la trayectoria se convierte en una parábola. En realidad, este caso no ocurre nunca, sino que según la cercanía a la circunferencia se dice que la trayectoria es más o menos parabólica, aunque en realidad sea un brazo de hipérbola o una elipse. La demostración también será distinta a las anteriores. Tenemos el diagrama de velocidades con el punto origen sobre la circunferencia. Puesto que se trata de un ángulo inscrito el ángulo del vector velocidad gira la mitad de rápido que el ángulo descrito con el centro de la circunferencia, que por otra parte juega el papel de Sol y de foco de la parábola. Es decir, necesitamos una trayectoria que cumpla que en cada punto la tangente sea perpendicular a la bisectriz del ángulo formado con el Sol (puesto que hemos girado la parábola 90°). Y esta trayectoria es la parábola. Fijémonos en la construcción con la que probamos la propiedad óptica de la parábola. La mediatriz de FG es t , que es la bisectriz de FPG . Por tanto FG es la bisectriz del ángulo $PF'F'$, siendo F' la proyección de F sobre la directriz. En consecuencia, t es perpendicular a la bisectriz del ángulo $PF'F'$ (el ángulo barrido con respecto al Sol), porque de hecho es la mediatriz de FG , con lo que queda el resultado demostrado.

Lo más incomprensible [del universo] es que podemos comprenderlo"

ALBERT EINSTEIN

Índice de figuras

1.1. Las cuatro cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.	2
1.2. La elipse y las esferas de Dandelin.	3
1.3. La hipérbola y las esferas de Dandelin.	4
1.4. La parábola y las esferas de Dandelin.	5
1.5. Excentricidad de una cónica.	6
1.6. Cónicas según su excentricidad.	6
2.1. La habitación iniluminable de Penrose.	8
2.2. Demostración gráfica de la propiedad óptica para la elipse.	8
2.3. Demostración gráfica de la propiedad óptica para la hipérbola.	9
2.4. Demostración gráfica de la propiedad óptica para la parábola.	10
2.5. Demostración gráfica de la propiedad isogonal para la elipse.	10
2.6. Demostración gráfica de la propiedad isogonal para la hipérbola.	11
2.7. Demostración gráfica de la propiedad isogonal para la parábola.	12
2.8. Radios conjugados.	12
2.9. Demostración de la propiedad de los radios conjugados para la elipse.	13
2.10. Demostración de la propiedad de los radios conjugados para la hipérbola.	14
2.11. Demostración gráfica de la propiedad de los radios conjugados para la parábola.	15
2.12. Teorema de Pascal	16
2.13. Demostración del teorema de Pascal	17
2.14. Casos degenerados del teorema de Pascal.	17

2.15. Teorema de Brianchon	18
2.16. Demostración del teorema de Brianchon	19
2.17. Casos degenerados del teorema de Brianchon.	19
2.18. Cónica que pasa por los vértices de un triángulo y por su ortocentro.	20
2.19. Radios conjugados en el Reproductor de Windows Media.	21
2.20. La inversión transforma círculos en círculos.	22
2.21. La inversión preserva la conciclicidad.	22
2.22. Rectas polares.	23
2.23. Correspondencia polar y tangentes.	24
2.24. Círculo de Apolonio.	25
2.25. Focos y directrices en correspondencia polar.	26
2.26. Correspondencia polar en tres dimensiones.	27
3.1. Lugar geométrico de van Schooten.	30
3.2. Teorema de los triángulos semejantes y teorema de Lambert.	31
3.3. Demostración del teorema	32
3.4. Construcción de una parábola a partir de 3 puntos y la dirección del eje.	33
3.5. Superficie de una sección de parábola.	34
3.6. Envoltente de la parábola y teorema de Apolonio.	35
3.7. Radios conjugados de una hipérbola.	36
3.8. Círculo de Feuerbach en la hipérbola equilátera.	37
3.9. Rectas giratorias.	38
3.10. Curvatura de una sección cónica.	38
3.11. Ángulos barridos en pequeños desplazamientos.	39
3.12. Construcción del teorema de la bisectriz.	39
3.13. Construcción del radio de curvatura.	40
4.1. Kepler, Newton y Feynman	42
4.2. Páginas extraídas de los <i>Philosophiae Naturalis Principia Mathematica</i>	43
4.3. Comparación de las ideas de Newton y Feynman.	44

4.4. Diagrama de velocidades de un movimiento planetario	44
4.5. El área barrida es proporcional al cuadrado de la distancia media al Sol.	45
4.6. Ángulos barridos.	46
4.7. Las trayectorias planetarias describen elipses.	47
4.8. Órbitas hiperbólicas en campos centrales.	48
4.9. El caso extremo: la trayectoria parabólica.	49

Bibliografía

- [1] AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A. A. *Geometry of Conics*. Mathematical World, **26**, American Mathematical Society, Boston (2007).
Un magnífico libro para introducirse desde cero en el mundo de las cónicas, con un nivel avanzado. Los capítulos 1 y 2 de este libro se inspiran profundamente, en el estilo y los contenidos, en este texto. Las figuras 1.2, 1.3, 1.4 y 1.6 han sido reproducidas con permiso de este libro.
- [2] DÖRRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover, New York (1987).
Una colección interesantísima con 100 de los mejores problemas de matemática elemental resueltos por algunos de los más grandes genios matemáticos de todos los tiempos. Recoge casi todas las propiedades discutidas en el capítulo 3 de este libro y muchas otras.
- [3] GOODSTEIN, D. L.; GOODSTEIN, J. R. *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Tusquets Editores, Barcelona (1999).
David y Judith Goodstein recogen en este libro la genialidad de Richard Feynman, con un estilo muy ágil. Durante mucho tiempo perdida entre los archivos del Caltech, esta conferencia sobre los movimientos astronómicos debidos a la fuerza gravitatoria se cuenta entre las mejores de Feynman. El cuarto capítulo del libro está basado por completo en esta referencia.
- [4] DJUKIĆ, D. *The IMO Compendium: Olimpiad Training Material. Inversion*.(2007).
Interesante colección de recursos teóricos y ejercicios resueltos para preparar la Olimpiada Matemática internacional (IMO). Enlace web en <http://www.imomath.com>
- [5] NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Edición en lengua inglesa de Daniel Adee. New York,(1846).