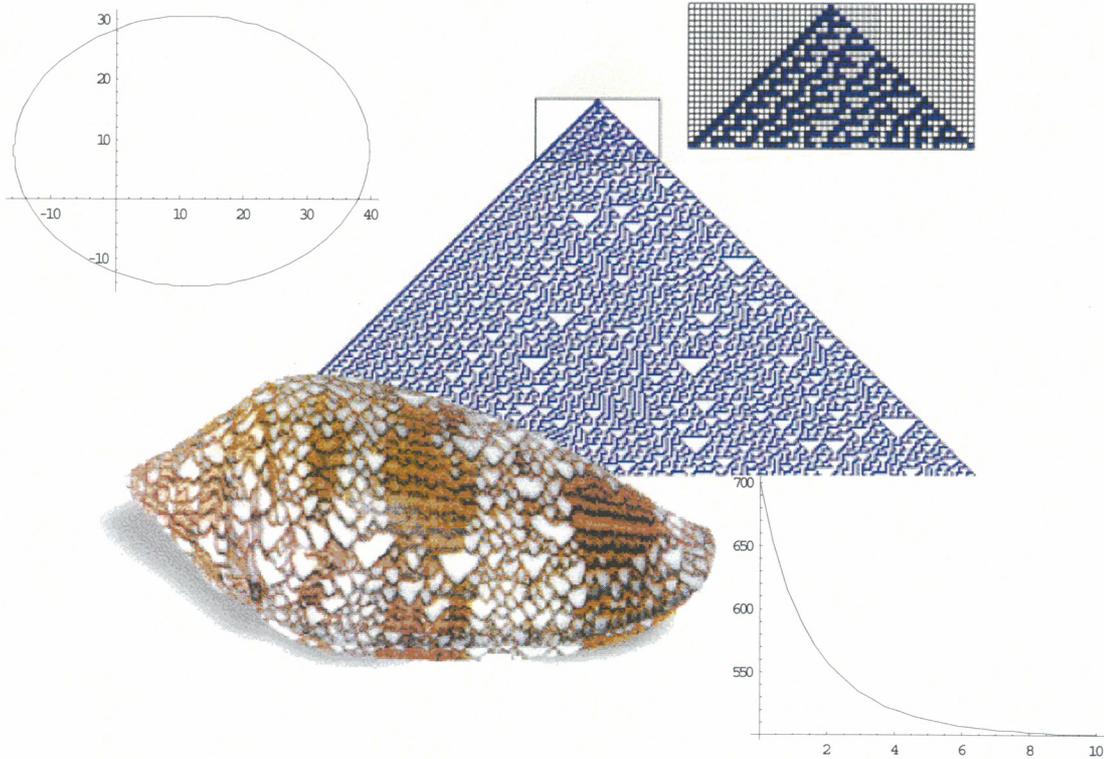


# MODELANDO EL UNIVERSO

Análisis comparativo de dos métodos de estudio de poblaciones



María Ibáñez

Ainhoa Manterola

Treball semifinidista en el  
I Premi Poincaré

14 de maig de 2004

   
Facultat de Matemàtiques i Estadística

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	3
OBJETIVOS.....	5
INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN.....	8
<b>Definición de modelo</b> .....	8
<b>Tipos de modelos</b> .....	9
MODELACIÓN CON ECUACIONES DIFERENCIALES.....	13
<b>Introducción a las ecuaciones diferenciales de primer orden</b> .....	13
<b>Modelo de una población de peces en una pecera</b> .....	15
<i>Explicación teórica</i> .....	15
<i>Experimentación</i> .....	18
<i>Conclusión</i> .....	22
<b>Modelo depredador-presa</b> .....	22
<i>Introducción a la ecología</i> .....	22
<i>Modelación de un sistema de depredador-presa</i> .....	23
<i>Aproximación gráfica: linearización</i> .....	28
<i>Explicación del gráfico genérico del modelo</i> .....	30
<i>Análisis completo de cada cuadrante del gráfico</i> .....	33
<i>Estudio del punto de equilibrio entre las dos especies y análisis de los factores que alteran dicho equilibrio</i> .....	37
<i>Estudio de un sistema concreto y experimentación con la modificación de sus constantes</i> .....	38
<i>Conclusión</i> .....	55
<i>Explicación del modelo depredador-presa en espiral</i> .....	55

MODELACIÓN CON AUTÓMATAS CELULARES.....	59
<b>Introducción histórica</b> .....	59
<i>Los primeros pasos</i> .....	59
<i>El experimento clave</i> .....	60
<i>La racionalización del juego</i> .....	61
<b>Explicación teorica sobre autómatas celulares</b> .....	61
<i>Primer factor: las normas</i> .....	62
<i>Segundo factor: las condiciones iniciales</i> .....	69
<b>Experimentación con modelos ecológicos</b> .....	76
<i>Modelo de una población en un espacio limitado</i> .....	77
<i>Modelo de una población en movimiento</i> .....	87
<i>Modelo predador-presa</i> .....	91
CONCLUSIÓN .....	96
<b>Comparación de los métodos de estudio de la evolución de las poblaciones</b> ..	96
<i>Sistemas discretos versus continuos</i> .....	96
<i>Información cuantitativa y cualitativa: distribución en el espacio</i> .....	98
<i>Intervención del tiempo</i> .....	100
<i>Factores externos</i> .....	101
<b>Reflexiones</b> .....	102
BIBLIOGRAFÍA.....	105
ANEXO.....	106

## INTRODUCCIÓN

“La ciencia parte de la realidad para volver a ella.” (J. Wagensberg).

A lo largo de la historia el conocimiento del mundo ha sido uno de los objetivos primordiales para el hombre, no solamente por la curiosidad que siente hacia el mundo que le rodea, sino también por la necesidad de comprender y ejercer un control relativo sobre su entorno. Actualmente, a través de la ciencia realizamos un intento de racionalizar la naturaleza con el fin de justificarla y enmarcarla en los límites de la lógica, si es que existen. Así pues, extrapolamos la naturaleza a nuestra medida, haciendo una abstracción de la realidad para finalmente alcanzar el conocimiento de su esencia.

“La ida sigue a la hipótesis: todo lo real es pensable, la vuelta persigue la tesis: todo lo pensado es real.” (J. Wagensberg).

Nuestro trabajo parte de la realidad experimental en busca de su comprensión e incluso de su superación, porque no sólo modelaremos poblaciones, sino que pretenderemos predecir su evolución demográfica, tomando como punto de partida la hipótesis de que todo sistema puede ser reducido a un modelo. Sin embargo, no hay un único camino que guíe nuestro trabajo, dado que enfocaremos el estudio de poblaciones desde dos perspectivas distintas: las ecuaciones diferenciales y los autómatas celulares. La primera opción está condicionada por el peso de la tradición, ya que se trata del método más clásico y convencional. En cambio, la segunda opción, por su carácter innovador, abre una nueva vía de investigación con muchas preguntas todavía esperando ser respuestas. Sea cual sea la dirección que emprendamos, constataremos que llegamos a unas tesis complementarias de la realidad.

“Se empieza por percibir lo real. Luego se piensa una representación. Y por fin la gran cuestión: ¿hasta dónde es real tal representación?” (J. Wagensberg).

Una de las bases que sustentan el método científico es la observación, pero, ¿cómo asegurar que ésta nos conducirá a una verdad absoluta? El mero estudio implica en sí mismo una manipulación de la realidad, ya sea experimental como teórica. Por esta razón, siempre trabajamos con representaciones de la realidad en las que creamos unas

condiciones determinadas que facilitan su estudio a la vez que reflejan su complejidad y reproducen su evolución.

No obstante, el método científico parte de la hipótesis de que el mundo puede ser comprendido por la razón humana y, por lo tanto, imaginado por ésta. Hasta qué punto nuestra representación del mundo es válida ha sido un lugar común en la reflexión científica que deberemos afrontar como parte de nuestro trabajo de investigación.

## OBJETIVOS

A raíz de unos artículos que la Sra. Silberstein había leído en varias publicaciones científicas, nos propuso estudiar la evolución de las poblaciones siguiendo un método que está todavía en proceso de desarrollo: los autómatas celulares. En un principio, el tema nos desconcertó dado que desconocíamos por completo tanto los principios en los que se basaba como el uso que de él se hacía. Así pues, decidimos atacar el tema desde un punto de vista más tradicional, no solamente por la cantidad de información disponible sino también por la proximidad conceptual que nos suponía el darle un enfoque desde las ecuaciones diferenciales.

Una vez comprendimos en qué consistía la modelación de poblaciones fijamos el objetivo de nuestro trabajo: la comparación de los dos métodos de estudio de la evolución de las poblaciones, las ecuaciones diferenciales y los autómatas celulares. Queríamos conocer las diferencias entre ambos métodos para identificar las características particulares de cada uno de ellos y comparar su grado de eficacia según la situación concreta a la que nos refiriésemos.

Con el fin de progresar en nuestro proyecto era imprescindible la búsqueda de cualquier tipo de información referente al tema. Durante el proceso de indagación nos encontramos principalmente con dos dificultades. Por una parte, un exceso de enfoques diferentes para estudiar una misma idea, en lo que se refiere a las ecuaciones diferenciales, nos obligó a seleccionar los casos más conocidos y aceptados a nivel científico. Por el contrario, la dificultad que se nos planteó en los autómatas celulares radicaba en la novedad del tema y la consecuente escasez de información relacionada con el mismo. Los únicos documentos existentes estaban escritos en inglés y hacían uso de un lenguaje técnico que dificultaba la comprensión del texto. Además, al tratarse de un tema estudiado principalmente en universidades y fundaciones estadounidenses, la obtención de sus estudios debíamos realizarla vía Internet, cosa que implicaba el reto de verificar las fuentes.

Tras la asimilación de la teoría referente a los dos métodos de estudio ya mencionados, procedimos a su aplicación. Empezamos de este modo a desarrollar la parte práctica de nuestro trabajo. En el campo de las ecuaciones diferenciales, tomamos modelos ya estudiados anteriormente por los científicos y los analizamos jugando con las constantes implicadas en sus ecuaciones. Por consiguiente, más que inventar,

experimentamos con distintos sistemas que nos condujeron a la constatación de las hipótesis ya corroboradas en el ámbito matemático. En cambio, dado que la aplicación de los autómatas celulares no está especialmente dirigida al estudio de poblaciones, debimos crear nuestros propios modelos.

En ambos casos, sin embargo, tuvimos que emplear el programa *Mathematica 5.0* para analizar los sistemas que nos interesaban, cosa que supuso una barrera a nivel tecnológico para nuestra investigación. Aparte de que se trata de un programa muy complejo que abarca una gran variedad de campos matemáticos, fue necesaria una dedicación intensa para familiarizarnos con el entorno de programación y su lenguaje. Por este motivo tuvimos que consultar la bibliografía existente sobre *Mathematica 5.0* e incluso recurrir a la ayuda del *Stephen Wolfram Science Group*, creadores del programa. La decisión de utilizar dicho programa se debió a las exigencias inherentes a nuestra investigación, que requería medios más especializados y competentes que los que nos ofrecían otros programas, como es el caso de *Turbo Pascal*. Con este último iniciamos nuestros primeros pasos en el diseño de los autómatas celulares, tal y como incluimos en el anexo, pero en vistas de las posibilidades que nos ofrecía el *Mathematica 5.0* nos decantamos por este último.

Aunque inicialmente pretendíamos estudiar unos modelos en concreto bajo ambos métodos, con tal de crear un paralelismo en la estructura del trabajo, posteriormente consideramos la opción de centrarnos en los modelos más significativos tanto de ecuaciones diferenciales como de autómatas celulares. De este modo, podíamos poner en relieve las características fundamentales de cada planteamiento y proceder así a la comparación de ambos, destacando sus ventajas e inconvenientes.

Finalmente, cabe añadir que este trabajo nos ha brindado la posibilidad de descubrir nuevos horizontes más allá de las matemáticas hasta el punto de llegar a cuestionar la concepción clásica del Universo, cosa que debatiremos en la conclusión. En realidad, ninguna investigación puede restringirse a un determinado dominio de la ciencia ya que la interdependencia de los acontecimientos induce al intento de comprender la realidad desde una perspectiva global.

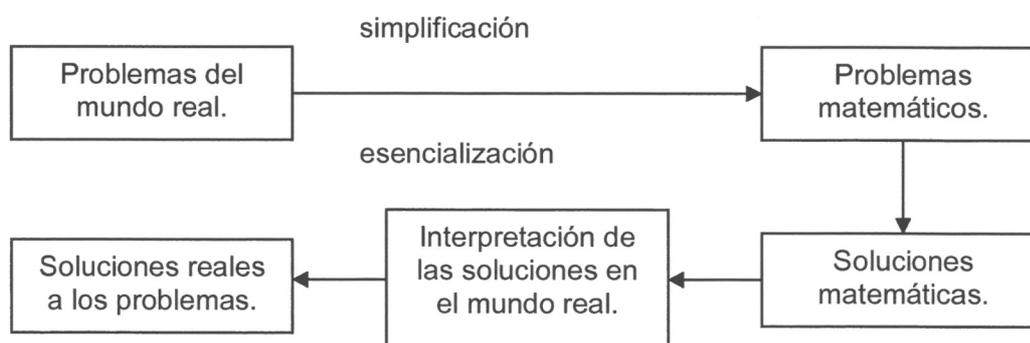
## INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN

- **Definición de modelo**

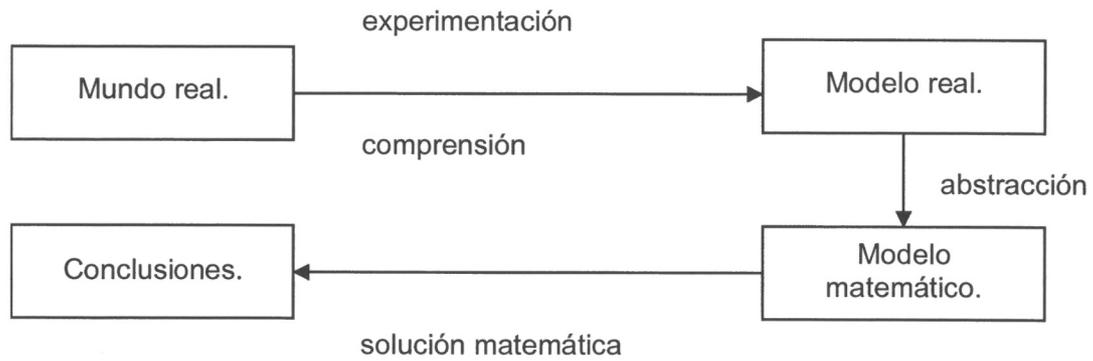
Un modelo es la idealización, la abstracción de un problema existente en el mundo real y su traslado al ámbito matemático. En el mundo físico (la evolución de una población por ejemplo) los problemas se ven afectados por infinidad de factores externos e internos, en muchas ocasiones incontrolables, incalculables, tal como sucede con la evolución de poblaciones. Por lo tanto, el modelo debe tener en cuenta sólo los factores más significativos y adaptarlos a un campo más científico con el fin de proceder al análisis de la situación. Un modelo tiende a ser realista, pero prescindiendo de los detalles al mismo tiempo, así pues busca la esencia del problema para solucionarlo de raíz. Reproduce características del sujeto real mediante tres tipos de variables: las dependientes, las independientes y los parámetros. Finalmente cabe destacar que el modelo se utiliza, además de para solucionar problemas, para hacer predicciones que se parezcan lo máximo posible a los datos del sistema estudiado.

A continuación se ofrecen tres esquemas para definir de forma más visual en qué consiste el concepto de modelo.

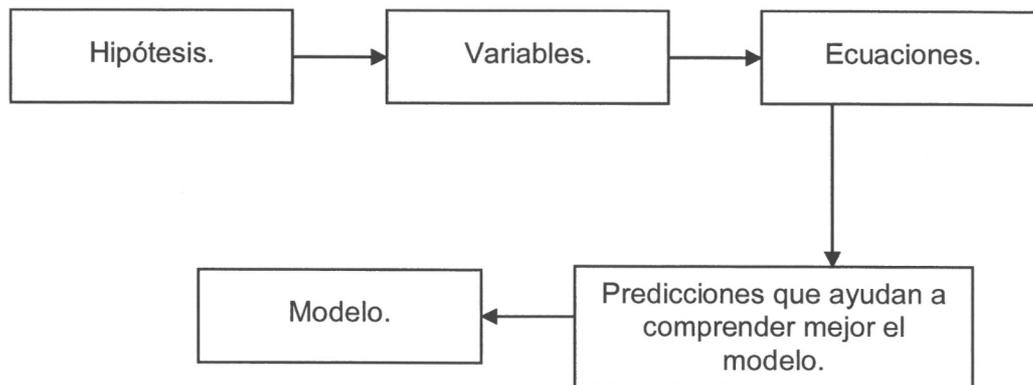
1- El primer esquema presenta un enfoque desde el punto de vista del trabajo que debemos ejercitar mentalmente, como son la simplificación, la esencialización o la interpretación.



2- El segundo esquema muestra el enfoque más pragmático del trabajo que debe realizarse, ofreciendo los pasos que hay que seguir para obtener las conclusiones que buscamos.



3- Por último, el tercer esquema se refiere a la evolución puramente científica del proceso de modelación, desde el comienzo, estableciendo unas hipótesis, hasta la obtención final del modelo.



- **Tipos de modelos**

### ***Continuos y discretos***

El modelar concierne siempre un mismo proceso, tal y como hemos visto, ahora bien, existen diferentes tipos de modelo que se adaptan a cada una de las distintas realidades del mundo que nos envuelve. Empezaremos por hacer una distinción entre el modelo *discreto* y el *continuo* en lo que se refiere a los resultados que derivan del sistema. El modelo discreto es el que se dedica al estudio de un sistema que está cambiando continuamente pero cuyo cambio no se percibe de manera continuada. Es decir, se asume el cambio continuado pero únicamente se expresa cuando se trata de la aparición o desaparición “completa” de los individuos. Con lo cual, nunca se puede hablar de una población de individuos en términos decimales, ya que este modelo considera que un individuo existe o no existe, pero no puede existir una fracción del mismo. Un ejemplo de modelo discreto es la evolución de una población de árboles, donde la tasa de crecimiento y el cambio se miden en función de los árboles vivos y muertos que hay en cada momento, pero no de los árboles en proyecto de nacer o de morir que serían aún fracciones de árboles.

Sin embargo, el modelo continuo estudia el cambio permanente de una población, tiene en cuenta tanto lo individuos existentes como los que están a medio existir o a medio desaparecer. Si realizáramos un estudio de una población humana considerando los individuos vivos, los fetos (como proyecto de nuevos individuos) e incluso los enfermos terminales (como proyecto de individuos que desaparecerán), entonces estaríamos creando un modelo continuo, observando cada mínimo cambio que tiene lugar en el sistema. Aún así, cabe remarcar que el modelo que obtenemos siempre será una aproximación de la realidad en ambos casos.

### ***Exponenciales y logísticos***

En cuanto a la evolución de la trayectoria de las poblaciones, podemos distinguir entre dos tipos de modelos distintos. Por un lado tenemos el modelo exponencial que define una población con un crecimiento ilimitado a lo largo que pasa el tiempo. No existen restricciones de espacio, ni amenazas de especies depredadoras, ni ningún otro factor externo que limite el crecimiento. La tasa de crecimiento de la población es

directamente proporcional a la misma, de modo que definimos el modelo exponencial con esta ecuación genérica:  $\frac{dy}{dt} = ky$

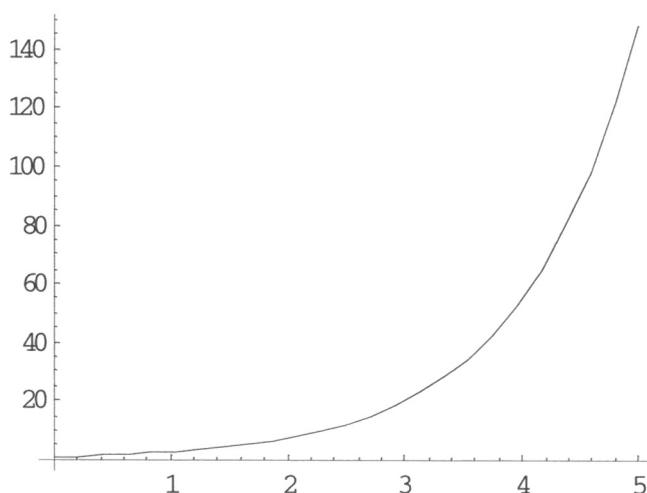
Podemos constatar que para este modelo no existe ninguna situación de equilibrio  $\left(\frac{dy}{dt} = 0\right)$  excepto por  $y = 0$ , cosa que implicaría no trabajar con población alguna.

Incluso podemos reafirmar el hecho de que la población tiene un crecimiento ilimitado, dado que la solución a las ecuaciones diferenciales exponenciales son las funciones

$y[t] = ke^t$ , cuyo límite por un tiempo infinito  $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} y[t] = \infty\right)$  tiende a infinito, con lo cual,

nada limita el crecimiento de la población. A continuación, ofrecemos un posible ejemplo de la trayectoria de una población de bacterias en un espacio no restringido, que responde a la ecuación, donde podemos comprobar que el crecimiento de la especie será ilimitado y tenderá a una tasa de crecimiento cada vez mayor.

Plot  $[[E^t], [t, 0, 5]]$

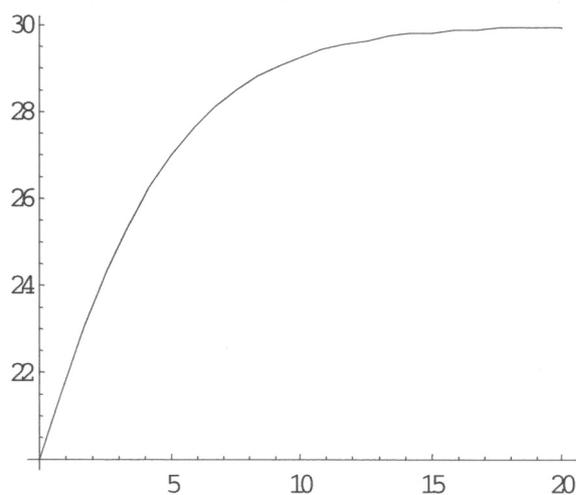


Por otro lado está el modelo logístico, que estudia una población cuyo crecimiento sí que está limitado por factores externos y que por lo tanto no tiene una forma de crecimiento exponencial. La función genérica que nos define este tipo de modelo es la siguiente:  $\frac{dP}{dt} = P(k - bP)$ . Podemos constatar pues que existen dos puntos de equilibrio

del sistema  $\left(\frac{dP}{dt} = 0\right)$ :  $P = 0$  y  $P = \frac{k}{b}$ . La primera solución invalidaría la existencia de la especie, con lo cual no la consideraremos. En cuanto a la segunda, define un punto que nunca se llegará a alcanzar por el impedimento que suponen los factores externos, pero que definirá el límite horizontal del gráfico. En este caso, un ejemplo de modelo logístico sería la evolución de una población de peces dentro de una pecera, con la limitación de espacio de la pecera. A continuación, mostramos un gráfico de una posible evolución del modelo que responde a la ecuación diferencial  $\frac{dP}{dt} = P(0.3 - 0.001P)$ . La trayectoria de la evolución del sistema la obtenemos mediante la resolución de la ecuación diferencial a través del programa *Mathematica 5.0* y corresponde a la ecuación  $P[t] = \frac{60e^{3t/10}}{1 + 2e^{3t/10}}$ .

`DSolve[{y'[t]==y[t](30-y[t])/110,y[0]==20},y[t],t]`

`Plot[ $\left\{\frac{60e^{3t/10}}{1 + 2e^{3t/10}}\right\},\{t,0,20\}$ ]`



Una vez establecida esta clasificación de las ecuaciones diferenciales, podemos adentrarnos en el análisis de los distintos modelos de poblaciones.

## MODELACIÓN CON ECUACIONES DIFERENCIALES

Nos iniciaremos en la modelación a través del método más clásico de estudio de las poblaciones: las ecuaciones diferenciales, con el fin de llegar a comprender el progreso que ha supuesto la aplicación de la tecnología en el campo del estudio de las poblaciones. No obstante, en primer lugar, hemos de comprender qué son propiamente las ecuaciones diferenciales para poder luego experimentar con ellas.

### Introducción a las ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden es aquella que expresa una relación entre una función y su derivada, sin que se conozca de qué función concreta se trata. Consta de tres tipos de variables: la variable independiente (generalmente el tiempo), la variable dependiente (una función de la variable independiente) y los parámetros. La solución de una ecuación diferencial consiste en una función de la variable independiente que, al sustituirse en la ecuación como la variable dependiente, cumple la relación establecida en la ecuación diferencial por todos los valores de la variable independiente. Así pues, la solución o soluciones serán las que nos responderán qué funciones satisfacen la relación determinada en la ecuación diferencial. Vamos a ejemplificarlo:

Tenemos una ecuación diferencial de la forma  $\frac{dy}{dt} = y$  (la ecuación de primer orden más genérica). Como soluciones podemos obtener todas las ecuaciones exponenciales de la forma  $ke^x$ , ya que  $(ke^x)' = ke^x$ .

Las ecuaciones diferenciales se utilizan en diversas disciplinas científicas, como son la física o las matemáticas. Sin embargo, en este trabajo nos centraremos en sus aplicaciones en lo que se refiere a estudios de la evolución de poblaciones según distintos modelos como el de depredador-presa o el de los peces dentro de una pecera, pero antes deberemos analizar el funcionamiento y la utilidad de las ecuaciones diferenciales.

Recordemos que la ecuación diferencial plasma la relación que existe entre el número de individuos que forman un colectivo y la capacidad de crecimiento del mismo, pues cuantos más individuos haya, más individuos se reproducirán, más individuos morirán, etc. De modo que, retomando el ejemplo de la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dt} = y$ ,

observaremos que, al relacionarse una función con su derivada, se está relacionando el crecimiento de una población con la cantidad de individuos que la constituyen. La componente  $y$  de la ecuación diferencial es en realidad una función que expresaría el número de individuos de la población  $y$ , que estaría subordinada a la variable del tiempo.

Mientras que la expresión  $\frac{dy}{dt}$  representaría al crecimiento de la población, también en función del tiempo, ya que se trata de la derivada de la función  $y$ .

Las ecuaciones diferenciales pueden tener desde ninguna, hasta infinitas soluciones. Aunque generalmente tienen una solución única para una condición inicial determinada, hay casos en los que no podemos llegar a conocer las soluciones de una ecuación diferencial, a pesar de que existan. Por este motivo, los problemas de ecuaciones diferenciales a menudo se basan en la comprobación de que una o varias ecuaciones son soluciones de la ecuación en cuestión, en vez de en la búsqueda de dichas soluciones.

Una población nunca permanece estable por mucho tiempo, puesto que siempre existen factores externos que condicionan y dirigen su crecimiento, (cosa que veremos en el modelo de peces en una pecera, donde este factor condicionante es el límite de espacio de convivencia). A causa de esta implicación directa, dichos factores –siempre que no sean muchos– deben estar contenidos en las ecuaciones diferenciales a modo de constantes. Además, éstos desarrollan una doble función: por un lado, determinan las condiciones iniciales de la población o sistema  $y$ , por otro, intervienen directamente en la evolución del mismo. Ahora bien, si quisiéramos tratar la incidencia de un número importante de factores sobre una población o sistema, deberíamos hacer uso de ecuaciones subyacentes, situación que no trataremos en este trabajo.

Finalmente, cabe destacar que las ecuaciones diferenciales que trataremos en el trabajo tienden a un equilibrio, donde la población analizada se estabiliza, aunque no se trata de una regla general. El equilibrio consiste en una función constante como solución (única) a la ecuación diferencial que analizamos, que condiciona la forma del gráfico que muestra la evolución de la especie en función del tiempo, ya que el modelo tenderá a este equilibrio. Ahora bien, hay que matizar que esta situación de equilibrio no se llega a alcanzar nunca ya que siempre habrá algún factor externo que lo impedirá, puesto que debemos recordar que el mundo real no es ideal. De este modo, los factores externos son objeto de experimentación ya que al modificarlos, la situación del sistema respecto al equilibrio va cambiando, tal y como vamos a comprobar en los modelos que prosiguen.

## Modelo de una población de peces en una pecera

### **Explicación teórica**

Para profundizar en la comprensión de qué es una ecuación diferencial, trabajaremos con un caso simple antes de meternos de lleno en el caso del modelo de depredador-presa. Tal como ya habíamos mencionado anteriormente, utilizaremos un modelo sobre la evolución de una población de peces dentro de una pecera, con el propósito de estudiar la incidencia de la limitación del espacio, factor externo que causará la tendencia de la población a establecerse en un límite.

Ilustraremos esta situación mediante una población  $P$  de peces cuyo crecimiento viene representado por la expresión  $\frac{dP}{dt}$ , ya que varía en función del tiempo, tal y como indica la variable  $t$  (tiempo). Pero lo que nos interesa es la tasa relativa de crecimiento de la población, que se define según la forma  $\frac{dP/dt}{P}$ , ya que pretendemos comprender la relación del crecimiento de la especie en función de los individuos que la constituyen. Pues no es lo mismo que hablemos de una tasa de crecimiento de 5 individuos al año para una población de 20 individuos que para una de 100 individuos, ya que la tasa relativa de la primera sería de  $\frac{1}{4}$  mientras que la de la segunda sería de  $\frac{1}{20}$ .

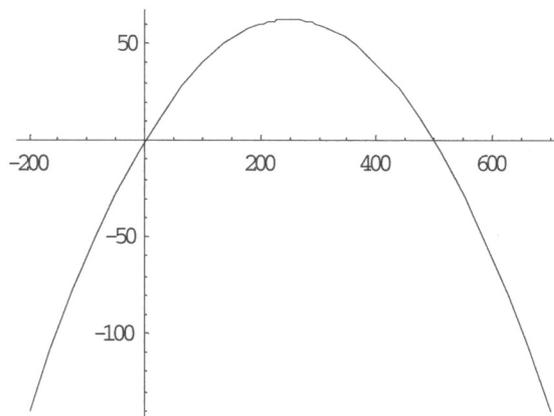
Una vez definida la expresión de la tasa de crecimiento pasamos ya a la definición más simple posible de la ecuación:  $\frac{dP/dt}{P} = k - bP$ , por unas constantes  $k$  y  $b$ , es decir,

la ecuación diferencial con la que trabajaremos será:  $\frac{dP}{dt} = (k - bP)P$ . Con el fin de plantearnos un problema concreto, otorgaremos un valor a las constantes  $k$  y  $b$ . Si quisiéramos que el problema fuera lo más realista posible, estos valores deberíamos obtenerlos de una base de datos, pero dado que nos ha resultado inaccesible y lo que queremos es un análisis a nivel cualitativo del modelo, hemos extraído dichos valores del ejemplo propuesto en un libro. Consideramos  $k = 0.5$  y  $b = 0.001$ , de modo que nuestra ecuación es  $\frac{dP}{dt} = (0.5 - 0.001P)P$ .

Llegados a este punto, con tal de alcanzar nuestro objetivo principal –conocer la evolución de la población de peces– para empezar, nos centraremos en la ecuación diferencial del sistema, que expresa la tasa de crecimiento de la población en función de la misma. Por lo que procederemos a representar el gráfico de  $\frac{dP}{dt}$  en función de  $P$ .

- Gráfico  $\frac{dP}{dt}$  en función de  $P$ :

`Plot[{x(500-x)/1000},{x,-200,700}]`



Este gráfico, al representar la tasa de cambio de la población, nos permite, en primer lugar, saber cuál será el punto de equilibrio de la población de peces, donde la tasa de crecimiento es 0. En el gráfico vemos que hay dos puntos que cumplen esta condición, los puntos de inflexión del gráfico, por  $P = 0$  y por  $P = 500$ . Como la solución de  $P = 0$  se refiere a una población nula, la única solución válida para nuestro problema es  $P = 500$ , con lo cual el equilibrio del sistema se establece en una población de 500 individuos.

A continuación estudiaremos el crecimiento y decrecimiento de la población. El gráfico refleja que por una población contenida en el intervalo  $]0;500[$ , ésta crecerá, ya que la tasa de crecimiento de la población,  $\frac{dP}{dt}$ , tiene un valor positivo en este intervalo. Sin embargo, a partir de los 500 individuos, la población decrecerá, a raíz de que la tasa de crecimiento de la población toma un valor negativo. Ambos comportamientos los

podemos comprender a partir del conocimiento del punto de equilibrio, ya que, lógicamente, las poblaciones inferiores a 500 individuos crecerán mientras que las superiores decrecerán, todas ellas tendiendo al equilibrio.

A pesar de que en el gráfico también vemos que por una población negativa la tasa de crecimiento será también negativa, este comportamiento no lo estudiaremos dado que la idea misma de una población negativa no tiene sentido en el mundo real.

Por último, el hecho de que la función tenga un máximo es un dato interesante para comprender la evolución de las distintas poblaciones de peces, dado que el máximo de esta función representa un punto de inflexión en la función de la población, el punto de crecimiento máximo de la especie. Cuando trabajemos con una población inferior a los 250 individuos, mientras ésta sea inferior a dicha magnitud, su tasa de crecimiento irá aumentando progresivamente, tal y como constatamos en el intervalo  $]0;250[$  en el gráfico. Al llegar a los 250 individuos la población crecerá con una tasa de crecimiento máxima y cuando supere los 250 individuos su tasa de crecimiento irá disminuyendo progresivamente, de modo que cuanto más se acerque a los 500 individuos, menor será su crecimiento ya que nunca podría sobrepasar este valor. Sin embargo, este punto de inflexión no afecta a las poblaciones de más de 250 individuos, ya que el crecimiento o decrecimiento de las mismas, en función de si son mayores o menores a 500 individuos, en ambos casos va disminuyendo a medida que la población se acerca al equilibrio.

A partir de este razonamiento, estudiaremos cómo evolucionarán las distintas poblaciones de peces, mediante su resolución y representación gráfica con el programa *Mathematica 5.0*.

## Experimentación

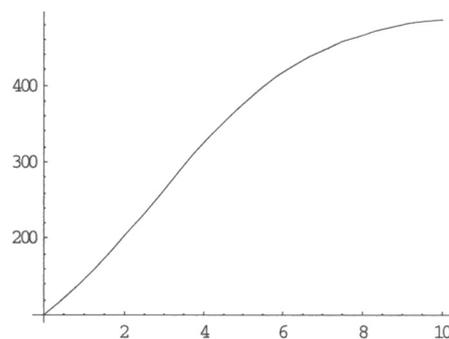
### • Caso 1

Población inicial: 100 individuos.

Ecuación de la población de peces:  $y = \frac{500e^{t/2}}{4 + e^{t/20}}$

DSolve [{y'[t]==y[t](500-y[t])/1000,y[0]==100},y[t],t]

$$\text{Plot} \left[ \left\{ \frac{500e^{t/2}}{4 + e^{t/20}} \right\}, \{t, 0, 10\} \right]$$



### Análisis

En este caso, podemos observar cómo el punto de inflexión influye en la evolución de la trayectoria de la especie. Desde los 100 individuos hasta los 250, la población crece cada vez más rápido, de modo que en este intervalo la trayectoria responde a la de un modelo exponencial, ya que no aparece ninguna restricción que impida el crecimiento ilimitado de la población. Sin embargo, al superar los 250 individuos, la restricción del espacio incide sobre la tasa de crecimiento de la especie ya que ésta es cada vez menor e intenta que la especie alcance el equilibrio, motivo por el cual, en el intervalo de individuos ]250;500[ la trayectoria de la evolución del sistema responde a un modelo de tipo logístico, donde existen limitaciones al crecimiento. Así pues, por una población inferior a los 250 individuos, es interesante constatar que la modelación de la evolución de la especie comprende tanto el modelo exponencial como el logístico.

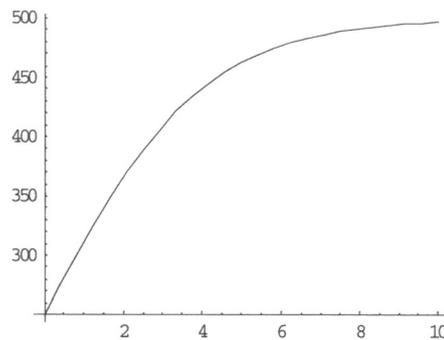
• Caso 2

Población inicial: 250 individuos.

Ecuación de la población de peces:  $y = \frac{500e^{t/2}}{1 + e^{t/20}}$

DSolve [{y'[t]==y[t](500-y[t])/1000,y[0]==250},y[t],t]

$$\text{Plot} \left[ \left\{ \frac{500e^{t/2}}{1 + e^{t/20}} \right\}, \{t, 0, 10\} \right]$$



Análisis.

En este caso, como nuestra población inicial coincide con la inflexión de la tasa de crecimiento de la especie, ésta empezará con un crecimiento máximo que irá minando a medida que pase el tiempo, aunque se mantendrá siempre positivo. Así pues, esta vez nuestra modelación concierne tan sólo al modelo logístico, ya que la limitación de espacio influye en el sistema desde el principio.

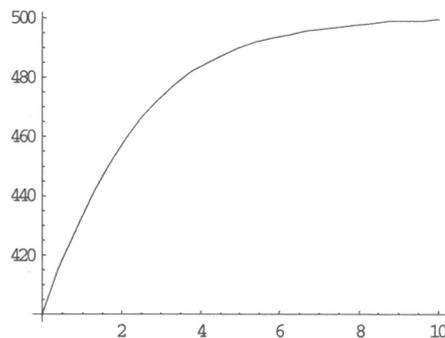
• Caso 3

Población inicial: 400 individuos.

Ecuación de la población de peces:  $y = \frac{2000e^{t/2}}{1 + 4e^{t/20}}$

DSolve [{y'[t]==y[t](500-y[t])/1000,y[0]==400},y[t],t]

$$\text{Plot} \left[ \left\{ \frac{2000e^{t/2}}{1 + 4e^{t/20}} \right\}, \{t, 0, 10\} \right]$$



Análisis.

En cuanto a este ejemplo, la evolución del sistema es equivalente a la del caso anterior, ya que trabajamos con una especie de más de 249 individuos, de modo que el sistema responda un modelo de tipo logístico y su tasa de crecimiento siempre será positiva pero irá disminuyendo en función del tiempo. La única diferencia que encontramos es que la tasa de crecimiento de esta población no alcanzará el máximo posible que establece el modelo, cuando la población es de 250 individuos, sino que tendrá una tasa máxima menor, que coincide con el instante inicial, tal y como sucedía en el caso 2.

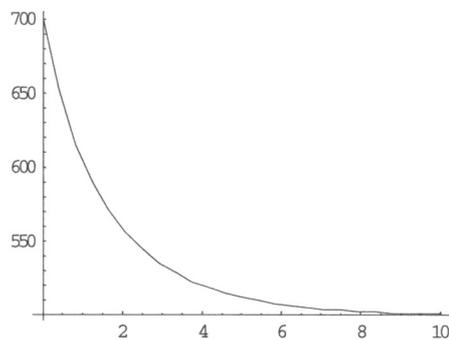
• Caso 4

Población inicial: 100 individuos.

Ecuación de la población de Peces:  $y = \frac{3500e^{t/2}}{-2 + 7e^{t/20}}$

DSolve [{y'[t]==y[t](500-y[t])/1000,y[0]==700},y[t],t]

$$\text{Plot} \left[ \left\{ \frac{3500e^{t/2}}{-2 + 7e^{t/20}} \right\}, \{t, 0, 10\} \right]$$



### Análisis.

Finalmente, en este caso hemos trabajado con una población superior al equilibrio, de 700 individuos, razón por la cual experimenta un crecimiento negativo a causa de la tendencia a alcanzar los 500 individuos. Por lo tanto, aunque el sistema empieza decreciendo más rápidamente, la tasa de crecimiento va aumentando progresivamente, siempre manteniéndose negativa, e impidiendo que la población sea menor a los 500 individuos, con lo cual tendiendo a los 500 individuos pero sin llegar nunca al alcanzar el equilibrio. Se trata pues de un modelo de tipo logístico, ya que la limitación espacial incide en la evolución de la población desde el principio.

## ***Conclusión***

Al trabajar con una única especie, en este modelo hemos experimentado esencialmente con la importancia de la población inicial de peces en tanto que condicionante principal de la trayectoria del crecimiento del sistema. Hemos constatado que el modo de crecer de una población no tiene porqué responder a un único tipo de modelo. Mediante el proceso de experimentación hemos observado que, según la condición inicial de la población, el crecimiento de la especie (los peces) puede empezar siendo exponencial y convertirse luego en logístico, o bien, puede ser siempre logístico, positivo o negativo. Así pues, es muy importante destacar la importancia que supone el número de individuos que constituyen la población inicialmente para ver sus posibilidades de crecimiento. Por último, debemos destacar el hecho de que la limitación de espacio condiciona el crecimiento de la población hacia la situación ideal de equilibrio, donde la tasa de crecimiento se reduce a 0. Así pues, en este caso nos hemos percatado de la gran importancia que tienen tanto las condiciones iniciales de la población como los factores que determinan el crecimiento o decrecimiento de la misma.

## **Modelo depredador-presa.**

### ***Introducción a la ecología.***

La ecología es la ciencia que se ocupa del estudio de los organismos y sus relaciones con el medio que los envuelve, tanto en lo que se refiere al ambiente físico como biótico. La vida de los seres vivos está íntimamente ligada a las condiciones físicas del lugar donde vive y también a los seres vivos que conviven con él, ya sean de su misma especie o de otra.

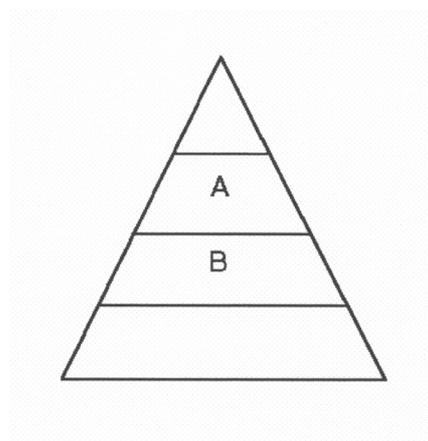
La subsistencia de las especies animales en la naturaleza la podemos comprender gracias a los ecosistemas. Un ecosistema es una unidad natural formada por seres vivos de distintas especies y de materia inerte que interactúan, constituyendo una cadena circular que hace posible la supervivencia de todas las especies que conviven. Dichos ecosistemas tienen una forma piramidal en lo que refiere a la presencia de las distintas especies desde un punto de vista cuantitativo y están constituidos por diferentes niveles, cada uno de ellos representante de una especie, correlacionados los unos con los otros. Cuanto más arriba de la pirámide se encuentra una especie, más fuerte es respecto a las inferiores, de este modo se deduce que cada especie se alimenta de la de un nivel inmediatamente inferior a ella y a la vez es comida por la de un nivel inmediatamente superior. Mientras que la que se encuentra situada en la cúspide de la pirámide no es comida por ninguna otra especie, aunque se descompondrá y servirá de alimento más adelante; la que está situada en la base del esquema no se alimenta de ninguna otra especie animal sino de vegetales o materia inerte. Finalmente, podemos afirmar que entre los distintos niveles de un ecosistema se establece una relación entre las especies de tipo depredador-presa, que estudiaremos a continuación.

### ***Modelación de un sistema de depredador-presa.***

El modelo de depredador-presa fue ideado por A. J. Lotka y V. Volterra en los años veinte del pasado siglo. Se trata de un modelo de apariencia sencilla, con un fin teórico, sin la ambición de ofrecer resultados numéricos precisos, pero que permite demostrar que se pueden formular las condiciones externas y establecer un modelo de comportamiento oscilatorio.

Una vez conocemos qué es un ecosistema y en qué consisten las ecuaciones diferenciales, vamos a fusionar ambos conocimientos en la modelación de la relación entre dos especies depredador-presa mediante las ecuaciones diferenciales. Pero antes de iniciar dicho estudio, debemos matizar que vamos a trabajar con un modelo de tipo cerrado, ya que tanto la población de depredadores como la de presas seguirán una variación de tipo periódica. Además, se trata de un modelo de tipo logístico, ya que la tasa de crecimiento de una especie se ve limitada por el crecimiento de la otra, de modo que ambas poblaciones no pueden crecer de manera ilimitada. No existen límites externos al sistema, sino que es su construcción interna la que lo restringe. Por último, nuestro modelo también corresponde al tipo continuo, ya que, nos expresa el estado del sistema en cada momento, incluyendo los individuos en proyecto de nacer y de morir. Cuando profundicemos en nuestro estudio lo comprenderemos mejor.

Esquema de un ecosistema.



Imaginemos una situación hipotética donde tenemos una especie A de depredadores y una especie B de presas. El crecimiento o decrecimiento de ambas está íntimamente relacionado, como demostraremos a continuación, ya que están en interacción continua. Debemos recordar que la tasa de crecimiento de las dos especies está subordinada al tiempo, por lo tanto este será nuestra variable independiente, en función de la cual definiremos las ecuaciones del crecimiento. Así pues, ya procedemos al razonamiento del sistema de depredador-presa.

Por un lado, vamos a analizar cómo crece la población de los depredadores. Si nosotros tuviéramos una especie A aislada, sus individuos morirían más que se reproducirían por falta de alimento (de la especie presa) . Con lo cual la especie A iría

decreciendo poco a poco y proporcionalmente hasta desaparecer. En términos más matemáticos diríamos que el número de individuos de A perjudica al crecimiento de A. Sin embargo, si a la población A le acercamos una población B de presas, la población A podrá alimentarse y su crecimiento girará entorno al número de individuos que haya en B en relación con los que haya en A. Esta vez la población A se reproducirá más que morirá. Si relacionamos los dos razonamientos expuestos (A aislada y A y B juntas) obtenemos que el crecimiento de A se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = -dy + cxy \text{ (Considerando } y \text{ a los individuos de A y } x \text{ a los de B).}$$

Por otro lado, analicemos cómo crece la población de las presas. Si tenemos una población B aislada del ataque de los depredadores, ésta crecerá de forma proporcional a su dimensión, ya que no habrá individuos muertos por el ataque de otras especies (que sería un hecho implícito en el ecosistema) y se podrá alimentar y reproducir. De este modo afirmamos que la población crecerá proporcionalmente respecto al número de individuos de B. En cambio, si la ponemos en contacto con una población de depredadores A, la población B empezará a disminuir en función del número de individuos de A que se comerán a una parte de B. El número de individuos de A actuará como negativo respecto al crecimiento de B. Con lo cual, este razonamiento nos conduce a la siguiente ecuación del crecimiento de la especie presa:

$$\frac{dy}{dt} = ax - byx \text{ (Considerando } y \text{ a los individuos de A y } x \text{ a los de B).}$$

Podemos observar que los crecimientos de A y B son conceptualmente inversos. Cabe destacar que tanto  $d$  y  $c$  como  $a$  y  $b$  son valores que sería conveniente obtener a partir de estudios con especies reales, siempre positivos que están en función de las especies concretas que estudiemos y que deberíamos sacar de una base de datos para hacer un análisis real de la evolución de un sistema depredador-presa. Ahora bien, en nuestro trabajo inventaremos los valores de estas constantes de forma coherente, ya que nuestro objetivo es hacer un análisis cualitativo, y no cuantitativo, de la evolución de las distintas poblaciones.

Una vez hemos visto cómo evolucionan las dos especies en relación la una con la otra, debemos poner en relación el crecimiento de una y el de la otra para ver cómo evolucionaría su crecimiento general y su coexistencia. Debemos simplificar nuestro

sistema compuesto por dos ecuaciones diferenciales en una sola ecuación, con el fin de hacer más fácil su representación y comprensión. Ello implica definir la ecuación siguiente:

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-dy + cxy}{ax - byx}$$

$$\frac{ax - byx}{y} dy = \frac{-dy + cxy}{x} dx$$

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{-dy + cxy}{x} dx$$

Con la ecuación definida conocemos cuál será el crecimiento del sistema, ahora bien, lo que nos interesa es conocer la relación entre la población de presas y la de depredadores, con lo cual, para eliminar el componente diferencial de nuestra ecuación deberemos integrarla.

Podemos escribir nuestra ecuación de la siguiente forma:  $\left(\frac{a}{y} - b\right) dy = \left(c - \frac{d}{x}\right) dx$ . A

continuación procedemos a la integración de las dos partes de la ecuación, la que está en función de  $x$  y la que está en función de  $y$ , por separado.

$$\left(\left(\frac{a}{y} - b\right) dy\right)' = a \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) - b(y - y_0)$$

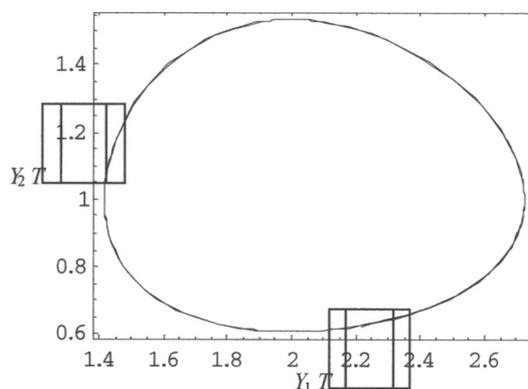
$$\left(\left(c - \frac{d}{x}\right) dx\right)' = c(x - x_0) - d \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

De este modo, obtenemos la ecuación que nos define la trayectoria del sistema, que es la siguiente:

$$a \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) + d \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = b(y - y_0) + c(x - x_0)$$

Esta ecuación ofrece la representación gráfica más realista posible de la evolución del sistema, aunque, no debemos olvidar que siempre trabajamos con aproximaciones de

la realidad y no con la realidad misma. La gráfica que obtendremos al representar esta ecuación será una elipse deformada. Por un lado, la forma elíptica, cerrada, se debe al hecho de que estudiamos esencialmente la evolución del sistema condicionada por la interacción entre la especie de depredadores y la de presas, así pues, los factores externos que tomamos en consideración no son lo suficientemente fuertes como para desestabilizar la evolución cíclica de las poblaciones. Por el otro lado, dichos factores sí que son suficientemente influyentes como para deformar la evolución elíptica e impedir, por lo tanto, que la forma de evolución del sistema sea regular, cosa que implicaría una elipse propiamente. A continuación podemos ver la trayectoria de un sistema depredador-presa genérico:



Ahora bien, la ecuación de la trayectoria del sistema tiene una forma bastante complicada, en cuanto a la realización de su estudio, así pues, a partir de ahora, trabajaremos con una aproximación de la trayectoria del sistema ya que el objetivo de la modelación consiste en la simplificación de lo que sucede en la realidad. Además, este hecho no afectará a nuestras conclusiones dado que en todo caso debemos trabajar con una aproximación del sistema ante la imposibilidad de tratar directamente con la realidad.

### ***Aproximación gráfica: linearización.***

Dado que el modelo depredador-presa se utiliza generalmente para obtener datos cualitativos y analizar los sistemas teóricamente, se ha desarrollado una fórmula para obtener una aproximación gráfica de la evolución concreta de dicho modelo. La aproximación gráfica responde a una ecuación elíptica que está en función de las cuatro constantes expuestas anteriormente en las ecuaciones que relacionan el crecimiento de los depredadores y de las presas ( $a, b, c, d$ ) y de una constante  $C$ . Con la modificación de

las constantes el gráfico irá tomando formas distintas en lo que se refiere a la amplitud y altura de la elipse y a la situación de equilibrio.

Es fundamental destacar que se trata de una aproximación con mayor grado de validez cuanto más cerca del equilibrio están las condiciones iniciales. Ahora bien, esta aproximación solamente es válida cuando la representación de nuestro sistema queda comprendida en el primer cuadrante del eje de coordenadas. Si parte de nuestro gráfico pertenece a algún otro cuadrante, ello implicaría la desaparición de una o de ambas especies, cosa que ya no contempla el modelo de Lotka y Volterra, con lo cual, estaríamos tratando con otro modelo.

Vamos a concretar en qué consiste la deducción de la fórmula de aproximación del gráfico de un sistema depredador-presa. Para realizar esta aproximación se utiliza la técnica de la linearización de las ecuaciones diferenciales de las dos poblaciones, la de depredadores y la de presas. La linearización de una ecuación diferencial consiste en reemplazar la ecuación que define una curva por su línea tangente. Se trata del método utilizado para estudiar el comportamiento de un sistema alrededor de un punto, que aplicaremos al modelo depredador-presa.

Cogemos un punto fijo  $(w,z)$  que será movido hacia el origen según las ecuaciones  $u = x - w$  y  $v = y - z$ , de manera que el sistema se comporte, cerca del punto de equilibrio (origen), según un sistema de linearización de ecuaciones.

$$\frac{du}{dt} = f_x(w,z)y + f_y(w,z)v$$

$$\frac{dv}{dt} = g_x(w,z)y + g_y(w,z)v$$

Como estamos trabajando con el modelo depredador-presa, consideraremos:

$$u = x - \frac{d}{c}$$

$$v = y - \frac{a}{b}$$

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{bd}{c}\right)v$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{ac}{b}\right)u$$

Podemos desarrollar el sistema, relacionando ambas ecuaciones:

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dv}$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{b^2 d v}{ac^2 u}$$

La clave del análisis de esta ecuación está en el hecho de que se trata de una ecuación diferencial separable:

$$ac^2 u du = -db^2 v dv$$

A continuación integramos la ecuación:

$$\frac{ac^2 u^2}{2} = -\frac{b^2 dv^2}{2} + C$$

$$\frac{ac^2 u^2}{2} + \frac{b^2 dv^2}{2} = C$$

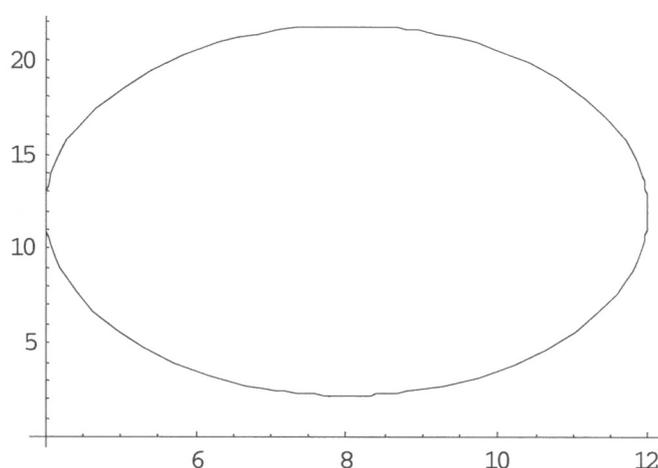
$$\frac{u^2}{b^2 d} + \frac{v^2}{ac^2} = C$$

Finalmente sustituimos las variables  $u$  y  $v$  por nuestras variables del sistema originales de manera que la ecuación de la elipse aproximada a la trayectoria de un sistema depredador-presa queda del modo siguiente:

$$\frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}{b^2 d} + \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}{ac^2} = C$$

### ***Explicación del gráfico genérico del modelo***

Para analizar cómo evoluciona un sistema depredador-presa, nos concentraremos en la forma de su trayectoria. En nuestro estudio trabajaremos esencialmente con la forma elíptica obtenida por la aproximación gráfica expuesta en el apartado anterior, puesto que nos será totalmente válida para el análisis teórico. El gráfico expuesto a continuación responde a unos valores concretos de las variables que intervienen en el sistema, pero que por el momento no nos es preciso conocer.



La forma de tendencia elíptica del gráfico implica que podamos distinguir cuatro situaciones: cuando la población de presas y de depredadores crecen; cuando ambas decrecen; cuando la primera crece y la segunda decrece; cuando la segunda crece y la primera decrece. Si ambas poblaciones están creciendo, llegará un momento en el que la cantidad de individuos de depredadores será excesiva respecto al número de presas. A partir de ese momento la población de presas empezará a disminuir mientras que la de depredadores aún podrá alimentarse de las presas que haya. Pero entonces llegará un punto en el que las presas serán insuficientes para tantos depredadores ya que hay que recordar que su crecimiento (el de las presas) ha pasado a ser negativo, por consiguiente, el número de depredadores disminuirá por la falta de alimento. Al disminuir el número de depredadores la población de las presas podrá empezar a crecer ya que no todos los individuos que nazcan serán comidos. Una vez haya aumentado el número de presas, entonces lo hará el de depredadores ya que habrá alimento de sobras. De este modo el círculo se cerrará y se irá repitiendo las situaciones.

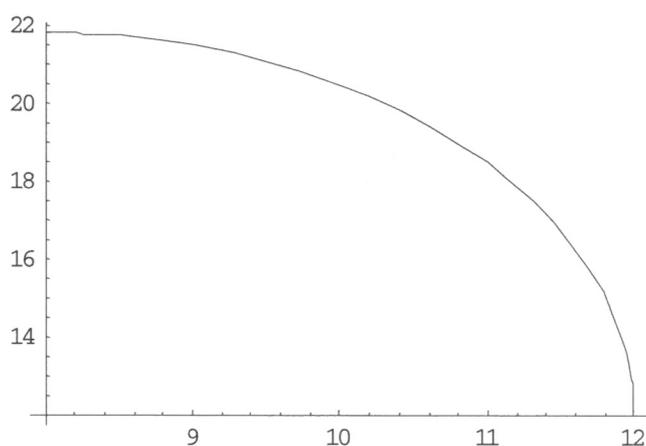
A continuación veremos esquematizadas en una tabla nuestras reflexiones sobre la relación entre el crecimiento del grupo de depredadores y de presas.

	Crecimiento de los depredadores.	Crecimiento de las presas.	Crecimiento del sistema.
Cuadrante 1.	$\frac{dy}{dt} > 0$	$\frac{dx}{dt} < 0$	$\frac{dy}{dx} < 0$
Cuadrante 2.	$\frac{dy}{dt} < 0$	$\frac{dx}{dt} < 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$
Cuadrante 3.	$\frac{dy}{dt} < 0$	$\frac{dx}{dt} > 0$	$\frac{dy}{dx} < 0$
Cuadrante 4.	$\frac{dy}{dt} > 0$	$\frac{dx}{dt} > 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$

### ***Análisis completo de cada cuadrante del gráfico.***

#### Cuadrante 1

Gráfico.



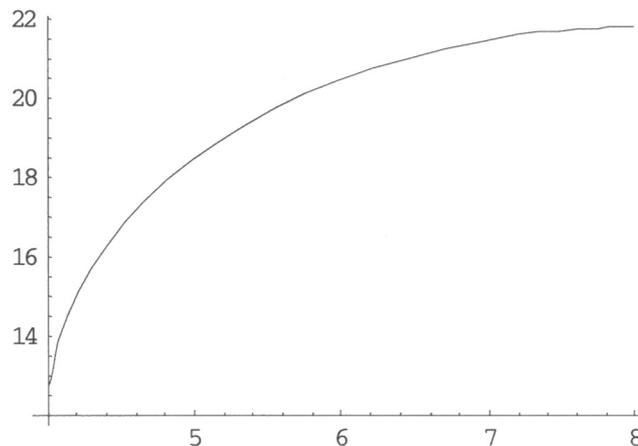
Si analizamos los gráficos en sentido antihorario, en el primer cuadrante podemos observar que hay un crecimiento del número de depredadores frente a un decrecimiento del número de presas. El primero está causado por el hecho de que se procede de una situación en la que había aumentado el número de presas, con lo cual ello había

impulsado al crecimiento de los depredadores. Ahora bien, en este cuadrante podemos observar que el crecimiento de los depredadores resulta perjudicial al crecimiento de las presas, ya que son devoradas a un ritmo mayor al de su reproducción. Al final de esta situación el número de presas se vuelve insuficiente a los depredadores y la cantidad de los mismo existente empieza a decrecer.

Si prestamos atención a la evolución de la derivada de la curva entenderemos más fácilmente lo que está sucediendo. Primeramente la derivada tiene una inclinación superior a  $45^\circ$ , con lo cual, la población del eje  $y$  (los depredadores) están creciendo más rápidamente que la población  $x$  (las presas) decrece. Sin embargo, a medida que la situación avanza, el ángulo va reduciéndose, de manera que las presas cada vez decrecen a un ritmo mayor y los depredadores crecen a un ritmo menor. Esta evolución nos indica ya que los depredadores seguirán una tendencia a un crecimiento negativo, del mismo modo que el decrecimiento de las presas, tras haber alcanzado su máximo, volverá a reducirse. Cuando el ángulo de inclinación es exactamente de  $45^\circ$  estamos ante una situación de mismo coeficiente de crecimiento tanto para las presas como para los depredadores, pero con signo contrario.

### Cuadrante 2.

Gráfico.



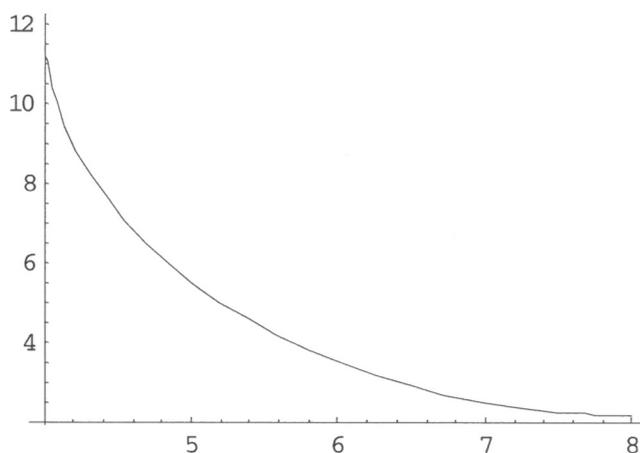
En este caso se experimenta la decaída de la especie de depredadores y de la de presas. Los depredadores empiezan a morir a causa de la falta de alimento en proporción a la cantidad de individuos depredadores que hay, ya que han crecido en el cuadrante anterior. Las presas también decrecen ya que hay una superioridad de depredadores que se las comen e impiden que la especie que sirve de alimento crezca, pero, al reducirse

progresivamente el número de depredadores, su decrecimiento es cada vez menos brusco.

Respecto a las rectas tangentes a la curva, podemos constatar que empiezan teniendo una inclinación de  $0^\circ$  y llegan a alcanzar una inclinación de  $90^\circ$ . Si tenemos en cuenta que ambas especies están decreciendo en esta situación, de hecho las derivadas nos lo muestran al tener el sentido hacia abajo, podemos decir que al inicio el decrecimiento de los depredadores es inferior al de las presas, ya que, por cada depredador que muere, desaparecen muchas más presas. Por el contrario, a medida que el tiempo va pasando la situación se va invirtiendo y concluye con un decrecimiento máximo de depredadores frente a una situación estable en el caso de las presas, han dejado de decrecer.

### Cuadrante 3.

Gráfico.



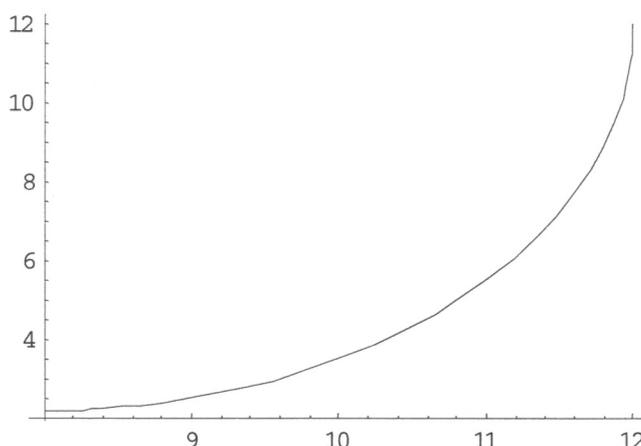
A causa de la falta de alimento la cantidad de depredadores va reduciéndose hasta llegar a un punto límite, a la vez que el grupo de las presas han mostrado una superioridad frente al de los depredadores y han podido empezar a crecer. Los depredadores se sumen plenamente en un decrecimiento máximo pero que podrá recuperarse gracias a la recuperación que tiene lugar en este cuadrante en cuanto a la población de las presas.

La evolución de las derivadas a la curva es interesante ya que va mostrando como en el eje x el crecimiento es cada vez mayor, mientras que el decrecimiento en el eje y es cada vez menor, empieza siendo máximo pero se va equilibrando gracias al crecimiento

de las presas. De este modo se llega a un punto de estabilidad en el que ambas especies van a emprender distintos crecimientos pero a la vez.

#### Cuadrante 4.

Gráfico.



En este último cuadrante se produce la recuperación de la especie depredadora y la especie presa logra mantenerse creciendo, pero cada vez de forma más débil. Los depredadores aprovechan la cantidad de alimento presa que tienen a su disposición, ya que éste ha aumentado, cosa que le permite reproducirse y crecer a un ritmo cada vez más acelerado. Sin embargo, la especie de las presas ha crecido en el cuadrante anterior lo suficiente para seguir reproduciéndose, ser comida, y aún así seguir creciendo, a pesar de que cada vez lo haga de forma más débil, a un ritmo cada vez más lento ya que cada vez hay más depredadores que consumen a dichos individuos.

Si observamos la evolución de la derivada en este tramo veremos que pasa de formar un ángulo de  $0^\circ$  a uno de  $90^\circ$  con el eje horizontal. Esta observación nos permite hacer la siguiente interpretación: la especie presa, al inicio del cuadrante, tiene un crecimiento superior al de la especie depredadora, pero poco a poco, el crecimiento de la especie depredadora se va mostrando superior al de la especie presa (a partir de la formación de un ángulo superior a  $45^\circ$  entre la derivada y el eje  $x$ ). Cuando el ángulo formado entre la derivada de la curva y el eje de las abscisas es exactamente  $45^\circ$  las dos especies están creciendo a un mismo ritmo, aunque esta situación es poco duradera. Al final, las presas alcanzan una situación límite, a partir de la cual van a empezar a decrecer, mientras que los depredadores seguirán creciendo. De este modo se cierra el círculo de la interrelación entre las especies y se vuelve al cuadrante 1.

### ***Estudio del punto de equilibrio entre las dos especies y análisis de los factores que alteran dicho equilibrio.***

En un sistema depredador-presa no se llega a alcanzar el punto de equilibrio nunca, debido a los numerosos factores del medio que alteran dicha posibilidad. Como ejemplo de dichos factores de distorsión encontramos los cultivos, los núcleos urbanos, las dehesas, los tendidos eléctricos, los vallados, las carreteras, los ríos limpios y los contaminados, o los bosques de ribera, entre otros. Incluso el simple hecho de que un depredador o una especie enfermen y mueran ya altera la estabilidad del sistema. Ahora bien, en el momento de modelar, todos estos factores externos los consideraremos mediante las constantes que intervienen en el sistema y que nos permiten evaluar la incidencia de los mismos sobre la relación entre depredadores y presas.

El equilibrio para el sistema depredador-presa sería el punto en el cual ni la población depredadora ni la presa crecieran o decrecieran, sino que se mantuvieran estables. Para conocer dicho punto vamos a recurrir a las ecuaciones que expresan el crecimiento de cada especie por separado y buscar sus soluciones por un crecimiento 0.

$$\text{Crecimiento de los depredadores: } \frac{dy}{dt} = y(cx - d) = 0$$

$$\text{Soluciones: } y = 0; x = \frac{d}{c}$$

$$\text{Crecimiento de las presas: } \frac{dx}{dt} = x(a - by) = 0$$

$$\text{Soluciones: } x = 0; y = \frac{a}{b};$$

Encontramos de este modo cuatro soluciones, dos para cada población. Ahora bien, como en cada caso una de las dos soluciones se refiere a una población de 0 individuos, cosa que no tiene sentido porque el sistema depredador-presa desaparecería en ausencia de una población, sólo podemos tomar una solución en cada caso. Así pues, nuestro

equilibrio estaría en el punto  $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ .

Como trabajamos con una aproximación gráfica del la trayectoria del sistema y no directamente con la ecuación del sistema, nuestro gráfico tendrá siempre una forma de

elipse perfecta. Así pues, el punto de equilibrio teóricamente debería ser el centro de la elipse, cosa que vamos a comprobar.

La ecuación de una elipse es de la forma  $\frac{(x-f)^2}{a^2} + \frac{(y-g)^2}{b^2} = 1$  de modo que la elipse definida tiene su centro en el punto . Según la ecuación que hemos obtenido de la

aproximación de la trayectoria del sistema depredador-presa,  $\frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}{b^2 d} + \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}{ac^2} = C$  ,

el centro de la elipse viene definido por el punto  $(f, g)$ , que coincide con el punto  $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$  de equilibrio del sistema obtenido anteriormente. Por lo tanto, podemos afirmar que el punto de equilibrio del sistema es el centro de la elipse que representa su trayectoria aproximadamente.

### ***Estudio de un sistema concreto y experimentación con la modificación de sus constantes***

En este apartado vamos a trabajar con un modelo concreto de sistema de depredador-presa con el fin de observar cuáles son los cambios que se producen en la evolución del sistema al modificar la incidencia de los factores externos en él. El efecto que tienen los factores exteriores se representa mediante las constantes que intervienen en la ecuación que define la trayectoria del sistema. Mediante estas constantes definimos el equilibrio del sistema y podemos ir observando diversas trayectorias según las condiciones iniciales del sistema, es decir, los depredadores y presas que tengamos inicialmente. Ahora bien, en estas constantes no vienen contenidas únicamente las condiciones iniciales del sistema, sino que también están integrados todo tipo de factores externos que lo desequilibran, puesto que si no fuera así nuestro gráfico consistiría únicamente en alcanzar el punto de equilibrio.

Vamos a trabajar con la aproximación gráfica deducida anteriormente, utilizando el programa informático *Mathematica 5.0*. Antes de definir el valor del equilibrio que estudiaremos, vamos a definir, según lo requiere el programa informático, los valores de las variables  $x$  e  $y$  del gráfico. Para realizar la representación gráfica necesitamos reescribir la ecuación de forma paramétrica. Nuestra ecuación original está escrita en función de las

variables  $x$  e  $y$ , pero ahora nos interesa definirla en función de un ángulo  $\theta$ , de modo que deberemos expresar tanto  $x$  como  $y$  mediante la variable  $\theta$ . Deberemos recurrir las ecuaciones trigonométricas y, por lo tanto, representar la función en un intervalo de  $[0;2\pi]$ . A continuación vamos a proceder al razonamiento de la transformación.

$$\text{Tenemos: } \frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}{b^2 d} + \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}{ac^2} = C$$

Definimos la constante como  $k^2$ , para así convertir la ecuación al sistema paramétrico de manera más fácil.

$$\frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}{b^2 d} + \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}{ac^2} = k^2 \text{ de manera que } \frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}{k^2 b^2 d} + \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}{k^2 ac^2} = 1$$

Así pues, aprovecharemos la igualdad  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$  para definir:

$$\cos^2(\theta) = \frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}{k^2 b^2 d} \quad \sin^2(\theta) = \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}{k^2 ac^2}$$

A continuación expresamos  $x$  e  $y$  como funciones de  $\theta$ .

Por un lado,

$$\cos(\theta) = \frac{\left(x - \frac{d}{c}\right)}{kb\sqrt{d}}$$

$$x(\text{presas}) = kb\sqrt{d} \cos(\theta) + \frac{d}{c}$$

Por el otro,

$$\sin(\theta) = \frac{\left(y - \frac{a}{b}\right)}{kc\sqrt{a}}$$

$$y(\text{depredador es}) = kc\sqrt{a} \sin(\theta) + \frac{a}{b}$$

Finalmente sólo debemos agrupar las dos funciones de  $x$  e  $y$  obtenidas, para llegar a la ecuación de la trayectoria en forma paramétrica siguiente:

$$F(\theta) = \left[ kb\sqrt{d} \cos(\theta) + \frac{d}{c}, kc\sqrt{a} \sin(\theta) + \frac{a}{b} \right]$$

Una vez hemos determinado nuestras variables, procedemos a hacer un estudio de la trayectoria en función de los valores de las constantes. Ahora bien, debemos tener presente que podemos modificar los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $k$ , pero que siempre hemos de mantener la relación de  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{d}{c}$  que definen el punto de equilibrio de las dos especies, para trabajar siempre con el mismo sistema. Nuestro sistema consistirá en un equilibrio definido por 8 depredadores y 12 presas, por lo tanto  $\frac{a}{b} = 8$  y  $\frac{d}{c} = 12$ , con lo cual, el centro de la elipse, a pesar de los cambios que podemos hacer de sus constantes, será siempre el punto (12, 8).

#### Modificación de las constantes a, b, c y d

Vamos a trabajar primero sobre el efecto de la modificación de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , y en todos los casos otorgaremos a  $k$  el valor 1, para facilitar nuestro razonamiento.

En primer lugar, tomaremos un caso concreto como punto de comparación del resto de casos, para ver si las situaciones se equilibran o desequilibran según aumentamos o disminuimos el valor de las constantes.

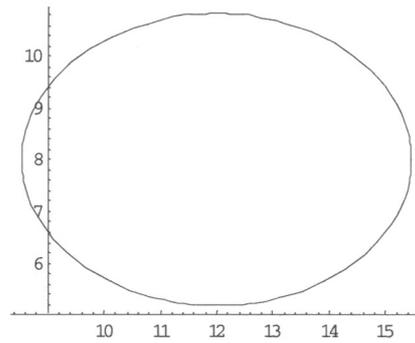
#### • Caso original

$a = 8$   
 $b = 1$   
 $c = 1$   
 $d = 12$

#### Posibles condiciones iniciales

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + \sqrt{12}$
$8 + \sqrt{8}$	12
8	$12 - \sqrt{12}$
$8 - \sqrt{8}$	12

ParametricPlot[{{12+Sqrt[12]Cos[x],8+Sqrt[8]Sin[x]},{x, 0,2Pi}]



Disminución de las constantes a, b, c y d

En este apartado procederemos a la disminución el valor de las constantes, de modo que siempre se mantenga su proporcionalidad, pero que otorguemos valores iniciales distintos a nuestra situación y los factores externos influyan de forma distinta en cada caso. Al final de la experimentación ofrecemos nuestras conclusiones.

• Caso 1

Posibles condiciones iniciales

a = 4

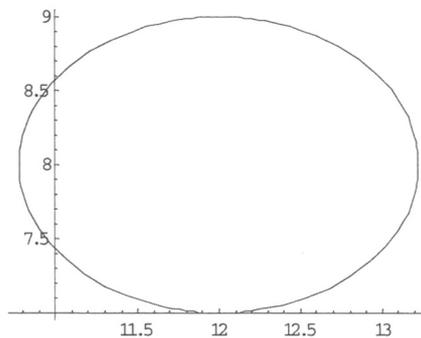
b =  $\frac{1}{2}$

c =  $\frac{1}{2}$

d = 6

Depredadores (y).	Presas (x).
8	$12 + \frac{1}{2}\sqrt{6}$
$8 + \frac{1}{2}\sqrt{4}$	12
8	$12 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$
$8 - \frac{1}{2}\sqrt{4}$	12

ParametricPlot[{{12+Sqrt[6]Cos[x]/2,8+Sin[x]},{x, 0,2Pi}]



• Caso 2

Posibles condiciones iniciales

$a = 1$

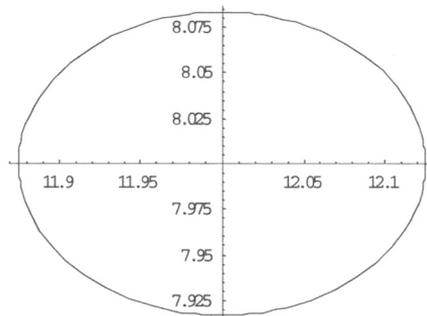
$b = 1/8$

$c = 1/12$

$d = 1$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + \frac{1}{8}$
$8 + \frac{1}{12}$	12
8	$12 - \frac{1}{8}$
$8 - \frac{1}{12}$	12

ParametricPlot[{12+Cos[x]/8,8+Sin[x]/12},{x, 0,2Pi}]



• Caso 3

Posibles condiciones iniciales

$a = \frac{1}{2}$

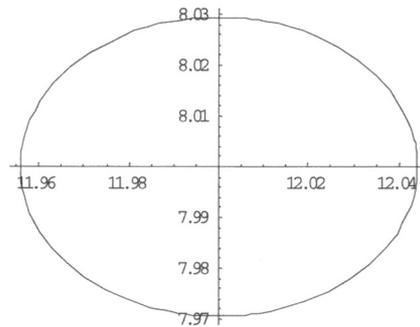
$b = 1/16$

$c = 1/24$

$d = \frac{1}{2}$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + \frac{1}{16} \sqrt{\frac{1}{2}}$
$8 + \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{2}}$	12
8	$12 - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{1}{2}}$
$8 - \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{2}}$	12

ParametricPlot[{12+Sqrt[1/2]Cos[x]/16,8+Sqrt[1/2]Sin[x]/24},{x, 0,2Pi}]



Tras realizar este experimento de disminución del valor de las constantes, observamos que, cuanto menores son, más cercano al equilibrio gira el sistema. En cada caso, progresivamente, el intervalo de valores de  $x$  e  $y$  disminuye, ya que estamos definiendo cada vez posibles situaciones iniciales cercanas a los 8 depredadores y las 12 presas. Las situaciones iniciales posibles vienen determinadas por los valores de las constantes, tal y como está determinado en la ecuación paramétrica del sistema. La

población de depredadores viene definida como  $y = kc\sqrt{a} \sin(\theta) + \frac{a}{b}$  y la de presas como

$x = kb\sqrt{d} \cos(\theta) + \frac{d}{c}$ , tal y como hemos visto. Teniendo en cuenta que la situación del

equilibrio es siempre la misma para un mismo sistema, con lo cual  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{d}{c}$  se mantienen

constantes, vemos que los valores de  $x$  e  $y$  dependen únicamente de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , y también de  $k$ , aunque este caso lo analizaremos más adelante. De este modo, al definir unos valores pequeños de estas constantes, observamos que  $x$  e  $y$  toman valores más cercanos a la situación de equilibrio, al 12 y al 8 respectivamente. Debemos tener en cuenta que los valores determinados por el  $\cos(\theta)$  y  $\sin(\theta)$  el son bastante insignificantes de por sí, de modo que al ser multiplicados por valores pequeños, no ganarán mucho protagonismo a la hora de determinar el número de individuos de depredadores y de presas. Así pues, es lógico que cuanto más cercanas al equilibrio estén las condiciones iniciales del sistema, el sistema tendrá una evolución más perfecta y se acercará a la estabilidad definitiva.

En el mundo real no podemos determinar unas condiciones iniciales de un sistema, a no ser que nos creemos uno artificialmente para la experimentación, pero dichas constantes vienen determinadas por las condiciones externas. De esta forma, aquello que

intentamos expresar de forma cuantitativa en las constantes es la incidencia de los factores externos en el sistema, que son los que realmente determina las condiciones iniciales e impiden que se llegue al equilibrio. Al acercarse nuestra trayectoria al equilibrio, por una disminución del valor de las constantes, constatamos que dichos factores son menos incidentes. Visto de manera contraria, la disminución del efecto producido por un hecho, externo a la relación depredador-presa, se traduce matemáticamente con la disminución del valor de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Así pues, podemos deducir, antes de comprobarlo experimentalmente, que cuando aumentemos el valor de dichas constantes el sistema irá tendiendo a una mayor desequilibrio y girará cada vez más alejado del centro de la elipse, del punto  $(12, 8)$ .

Aumento de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

Ahora procederemos a la investigación del proceso contrario, el aumento del valor de las constantes, para comprobar si nuestra tesis es buena.

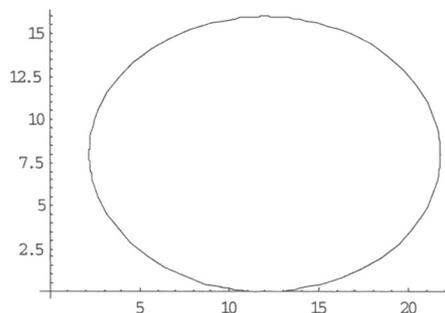
• Caso 1

Posibles condiciones iniciales

- $a = 16$
- $b = 2$
- $c = 2$
- $d = 24$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + 2\sqrt{24}$
$8 + 2\sqrt{16}$	12
8	$12 - 2\sqrt{24}$
$8 - 2\sqrt{16}$	12

ParametricPlot[ $\{12+2\text{Sqrt}[24]\text{Cos}[x],8+8\text{Sin}[x]\},\{x, 0,2\text{Pi}\}$ ]



• Caso 2

Posibles condiciones iniciales

$a = 32$

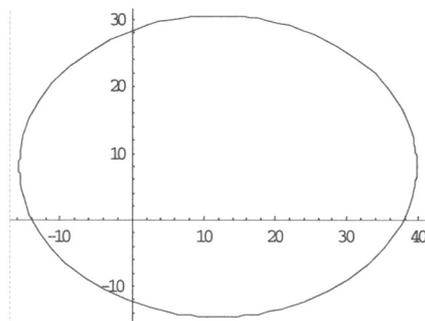
$b = 4$

$c = 4$

$d = 48$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + 4\sqrt{48}$
$8 + 4\sqrt{32}$	12
8	$12 - 4\sqrt{48}$
$8 - 4\sqrt{32}$	12

ParametricPlot[{12+4Sqrt[48]Cos[x],8+4Sqrt[32]Sin[x]},{x, 0,2Pi}]



• Caso 3

Posibles condiciones iniciales

$a = 96$

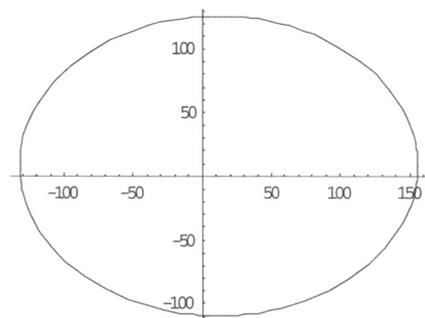
$b = 12$

$c = 12$

$d = 144$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + 144$
$8 + 12\sqrt{96}$	12
8	$12 - 144$
$8 - 12\sqrt{96}$	12

ParametricPlot[{12+144Cos[x],8+12Sqrt[96]Sin[x]},{x, 0,2Pi}]



Una vez hecho el experimento de aumentar el valor de las constantes, podemos afirmar la certeza de nuestra deducción realizada anteriormente acerca del alejamiento del equilibrio al crecer el valor de las mismas. Cuanto más valen las constantes, más se aleja nuestro sistema del equilibrio, con lo cual, la elipse, que siempre mantiene su centro en (12, 8), gira entorno a él pero cada vez con una trayectoria más amplia. Se trata pues de una situación con un comportamiento más inestable a medida que se aumentan sus constantes. Podemos decir, desde una perspectiva más asentada en la realidad, que los factores externos al sistema son más incidentes, ya que determinan unas condiciones iniciales más separadas de la estabilidad.

Ahora bien, con esta experimentación podemos sacar más conclusiones. En el segundo y tercer caso observamos que el comportamiento de la elipse implica que parte de ella se encuentre en el segundo, tercero y cuarto cuadrante. Cuando esto suceda, dejaremos de hablar del modelo de Lotka y Volterra, ya que éste comprende la interacción de un sistema depredador-presa, pero no la desaparición de sus especies. Sin embargo, podemos igualmente interpretar la situación, siempre recordando que las conclusiones que extraigamos responden a otro modelo distinto del que estamos analizando. Así pues, si el gráfico va más allá del primer cuadrante, ello significa que la variable  $x$  o la variable  $y$ , o bien ambas a la vez, tomarán en algún momento un valor negativo, con lo cual, pasaríamos a hablar de poblaciones de depredadores o presas negativas, un concepto inválido en el mundo real. Si consideramos unas condiciones iniciales y luego observamos que la trayectoria del sistema se comporta de tal modo, constataremos que se trataría de unas condiciones iniciales insostenibles, puesto que causarían la extinción de las dos especies que compiten, de modo que desaparecería el sistema del mundo. La incidencia de los factores externos sería demasiado fuerte para permitir su supervivencia. Es interesante fijarse en la manera como se extinguen las dos especies, ya que primeramente son las presas las que toman un valor negativo (desaparecen) y más adelante, por falta de alimento los depredadores. Cabe remarcar que en los casos en que las especies tomen valores negativos, no tiene sentido fijarse en la evolución de la trayectoria en tanto que circular, sino que dicha trayectoria sólo es válida por un análisis que se concentre en una única vuelta de la elipse, sino estaríamos hablando de una aparición de vida espontánea en un medio.

### Modificación de la constante C.

En este apartado trabajaremos con la modificación de la constante  $C$ , que en nuestro programa informático equivale a  $k^2$ , así que a partir de ahora hablaremos de la modificación de  $k$ . En este caso, consideraremos unos valores constantes para  $a, b, c, d$ , y, por lo tanto, siempre estaremos hablando de un mismo equilibrio. Si observamos la ecuación en forma paramétrica de la trayectoria:

$$F(\theta) = \left[ kb\sqrt{d} \cos(\theta) + \frac{d}{c}, kc\sqrt{a} \sin(\theta) + \frac{a}{b} \right],$$

constatamos que el cambio del valor de  $k$  tendrá un efecto similar al cambio de valores de  $a, b, c, d$ , llevado a cabo en la experimentación anterior, donde se mantenía el equilibrio. Así pues, ya podemos deducir que al aumentar el valor de  $k$ , el sistema se alejará de la situación de equilibrio y, sin embargo, al disminuirlo se acercará al centro de la elipse.

Vamos a proceder a la experimentación con el fin de confirmar las tesis realizadas. Retomaremos el caso original del apartado anterior y observaremos los cambios al crecer y decrecer .

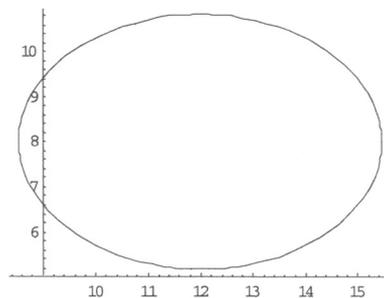
#### • Caso original

$a = 8$   
 $b = 1$   
 $c = 1$   
 $d = 12$

#### Posibles condiciones iniciales

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + \sqrt{12}$
$8 + \sqrt{8}$	12
8	$12 - \sqrt{12}$
$8 - \sqrt{8}$	12

ParametricPlot[{{12+Sqrt[12]Cos[x],8+Sqrt[8]Sin[x]},{x, 0,2Pi}]



Disminución de la constante k.

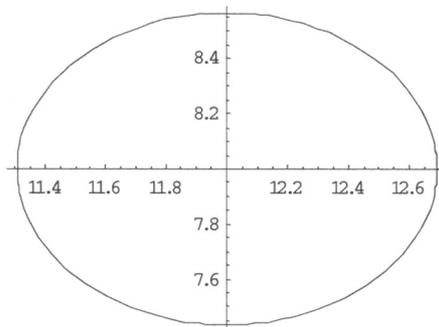
• Caso 1

Posibles condiciones iniciales

$k=1/5$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + \frac{\sqrt{12}}{5}$
$8 + \frac{\sqrt{8}}{5}$	12
8	$12 - \frac{\sqrt{12}}{5}$
$8 - \frac{\sqrt{8}}{5}$	12

ParametricPlot[{{12+Sqrt[12]Cos[x]/5,8+Sqrt[8]Sin[x]/5},{x, 0,2Pi}]



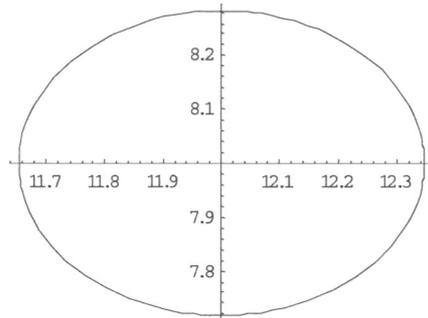
• Caso 2

Posibles condiciones iniciales

$k=1/10$

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + \frac{\sqrt{12}}{10}$
$8 + \frac{\sqrt{8}}{10}$	12
8	$12 - \frac{\sqrt{12}}{10}$
$8 - \frac{\sqrt{8}}{10}$	12

ParametricPlot[{{12+Sqrt[12]Cos[x]/10,8+Sqrt[8]Sin[x]/10}},{x, 0,2Pi}]



Al realizar la reducción del valor de  $k$  observamos que el sistema gira cada vez más próximo al equilibrio. Comprobamos que sucede lo mismo que hemos constatado anteriormente al reducir el valor de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Desde el punto de vista conceptual, podemos analizar esta aproximación al equilibrio como el hecho de que la incidencia de los factores externos al sistema va minando y, consecuentemente, las condiciones iniciales de las poblaciones se aproximan a las del equilibrio. Así pues, si queremos acercarnos lo máximo posible al equilibrio, a pesar de que en la realidad es

imposible alcanzarlo, deberíamos otorgar a  $k$  el valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right)$ . De esta manera,

tendería a valer 0, de modo que los coeficientes  $kb\sqrt{d} \cos(\theta)$  y  $kc\sqrt{a} \sin(\theta)$ , que son los que alteran el equilibrio del sistema en la ecuación de su trayectoria, tenderían también a valer 0 y, por consiguiente, nuestro sistema tendería a ser el punto (12, 8), el equilibrio.

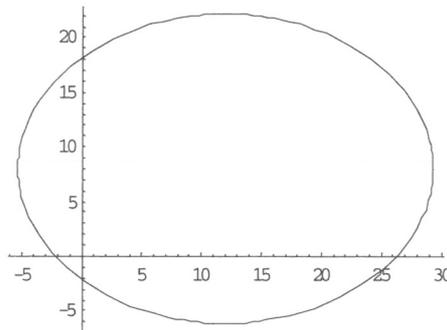
Aumento de la constante k

• Caso 1       $k = 5$

Posibles condiciones iniciales

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + 5\sqrt{12}$
$8 + 5\sqrt{8}$	12
8	$12 - 5\sqrt{12}$
$8 - 5\sqrt{8}$	12

ParametricPlot[{{12+5Sqrt[12]Cos[x],8+5Sqrt[8]Sin[x]}},{x, 0,2Pi}]

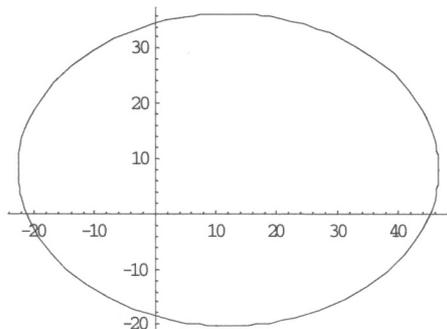


• Caso 2       $k = 10$

Posibles condiciones iniciales

Depredadores ( $y$ ).	Presas ( $x$ ).
8	$12 + 10\sqrt{12}$
$8 + 10\sqrt{8}$	12
8	$12 - 10\sqrt{12}$
$8 - 10\sqrt{8}$	12

ParametricPlot[{{12+10Sqrt[12]Cos[x],8+10Sqrt[8]Sin[x]}},{x, 0,2Pi}]



Si aumentamos el valor de la constante  $k$ , lógicamente el sistema se comportará de manera contraria que al disminuir el valor de  $k$ . En este caso, cuanto más valga  $k$ , más lejos del equilibrio estará el sistema. De este modo, los factores externos que influyen en el sistema son directamente proporcionales al valor de  $k$ , pues cuando estos aumentan, y determinan unas condiciones iniciales más alejadas del equilibrio,  $k$  también lo hace. Si

quisiéramos representar conceptualmente la situación del desequilibrio máximo, deberíamos definir  $k \rightarrow \infty$ , para que  $k$  tomase el valor más grande posible y por lo tanto, el sistema se alejase enormemente del punto de equilibrio (12, 8). Ahora bien, al aumentar  $k$ , corremos el riesgo de que el sistema empiece a tomar valores negativos y dejemos de hablar del modelo de Lotka y Volterra, de modo que, aunque la trayectoria mantenga su carácter cíclico en el gráfico, en la realidad se convierte en un sistema insostenible, ya que, la toma de un valor negativo de una especie indica su desaparición y la consecuente desaparición de la otra especie. Tal y como hemos visto con anterioridad, una vez desaparecen las especies no podrán volver a aparecer espontáneamente.

### ***Conclusión.***

La lógica ha sido la base de nuestra comprensión del modelo de depredador-presa. Más allá de los cálculos numéricos, la estructura del sistema resulta muy clara, muy definida. La causa principal de su evolución elíptica es la interacción entre las dos especies y los factores externos (incluyendo las condiciones iniciales de las poblaciones) afectan de una manera secundaria, ya que alejan o aproximan al equilibrio el sistema pero no le cambian la tendencia evolutiva cíclica y cerrada. Ahora bien, no hay que olvidar que sí que pueden tomar una fuerza suficientemente grande como para provocar la extinción de las dos especies. Finalmente, cabe resaltar que este estudio ha sido muy interesante porque nos ha permitido comprender como funciona un ecosistema, puesto que está constituido por relaciones de tipo depredador-presa en interacción, por lo tanto, hemos comprendido la lógica de crecimiento de las especies en la naturaleza.

### ***Explicación del modelo depredador-presa en espiral.***

Los depredadores y las presas son especies que se encuentran en interacción continua en la naturaleza. Ahora bien, no es sólo su relación basada en el comer y el ser comido la que determina el crecimiento de las dos especies, ya que existen múltiples factores externos que inciden en su evolución. Hemos estudiado a fondo el modelo que trabaja esencialmente la evolución de dos poblaciones afectadas principalmente por la cohabitación la una con la otra y por factores externos de carácter «débil». A continuación nos vamos a interesar por el modelo que incluye también la incidencia de factores externos muy influyentes en el sistema. No nos detendremos a hacer un estudio detallado

sino que enfocaremos la explicación desde un punto de vista más teórico y lógico, sin incidir en la modificación de constantes y las consecuentes alteraciones en el comportamiento del sistema, tal y como hemos hecho anteriormente.

Vamos a analizar este modelo de forma intuitiva, mediante un sistema en el que interactúan una especie de peces y otra de tiburones. Pero, además de la relación que mantengan las dos poblaciones, vamos a ver cómo afectará el factor externo de la pesca sobre el sistema. Para interpretar esta situación podemos dividirla en las relaciones distintas que se dan.

Por un lado, debemos considerar el modo de crecimiento de cada especie por sí sola, sin tener en cuenta su relación con la otra especie ni con el factor de la pesca. De este modo definiríamos la tasa de crecimiento de las dos especies de la siguiente manera:

$$\text{Tasa de crecimiento de los peces (P): } \frac{dP}{dt} = (a - bP)P$$

$$\text{Tasa de crecimiento de los tiburones (T): } \frac{dT}{dt} = (-c - dP)T$$

Por otro lado, vemos reproducida la relación entre una población de presas y otra de depredadores analizada anteriormente, puesto que, la pesca no incidirá en el hecho de que los depredadores mantengan su instinto de subsistencia y se coman a las presas. En este caso, vamos a ver que la presencia de tiburones afecta negativamente a la tasa de crecimiento de los peces y, por el contrario, la presencia de peces favorece a la tasa de crecimiento de los tiburones.

$$\text{Tasa de crecimiento de los peces (P): } \frac{dP}{dt} = (-kS)P$$

$$\text{Tasa de crecimiento de los tiburones (T): } \frac{dT}{dt} = (hP)T$$

Por último, la pesca consideraremos que incidirá del mismo modo sobre la población de los depredadores y la de las presas, es decir, se pescarán el mismo número de individuos de cada especie por un mismo espacio de tiempo, con tal de afrontarnos con la situación más simple posible. Con lo cual, en cuanto a la tasa de crecimiento relativa de las especies, en ambos casos el factor pesca actúa de manera negativa ya que reduce de igual modo el número de individuos que las constituyen. Así pues, ya hemos establecido la relación entre el factor externo y el modo de crecer de las poblaciones.

Matemáticamente representaríamos el factor de la pesca mediante una constante , del modo siguiente:

$$T. \text{ crecimiento de los peces : } \frac{dP}{dt} = (-r)P$$

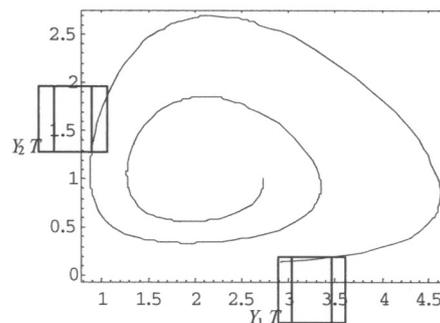
$$T. \text{ crecimiento de los tiburones : } \frac{dT}{dt} = (-r)T$$

Para comprender pues cómo evolucionará el sistema, debemos considerar las tasas de crecimiento de las dos especies que lo constituyen. Ahora bien, antes debemos definir dichas tasas unificando todos los valores que les hemos otorgado al tratar por separado cada uno de los hechos que las determinan. Nos quedaría de este modo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$T. \text{ crecimiento de los peces : } \frac{dP}{dt} = (a - r - bP - kT)P$$

$$T. \text{ crecimiento de los tiburones : } \frac{dT}{dt} = (-c - r - dT + hP)T$$

Una vez conocemos nuestro sistema de ecuaciones, vamos a ver cual sería una gráfica genérica de su correspondiente representación.



La evolución del sistema es de forma espiral, cosa que tiene mucha lógica si razonamos lo que sucede. Nuestro modelo es muy similar a de depredador-presa tratado anteriormente. Existe una misma tendencia a la forma elíptica, al desarrollo cíclico, ahora bien, el factor de la pesca reduce las poblaciones de las dos especies activas de modo que se rompe con el carácter cíclico del sistema. La pesca induce a un acercamiento al equilibrio, de modo que el sistema tiende a estabilizarse, tal y como han determinado estudios científicos.

Por lo tanto, este modelo representa un sistema menos estancado en unos valores determinados, como sucedía con los sistemas de evolución cíclica, pero que tampoco será capaz de alcanzar nunca el equilibrio, ya que la pesca va a mantenerlo siempre en movimiento. Este modelo nos ayuda a reforzar la idea de que en realidad, es imposible llegar al equilibrio, puesto que el aislamiento del sistema, algo imposible de encontrar en el mundo.

## MODELACIÓN CON AUTÓMATAS CELULARES

Después de una breve introducción histórica, empezaremos nuestra investigación analizando autómatas celulares unidimensionales de gran simplicidad que nos permitirán corroborar algunas de las conclusiones aceptadas actualmente por lo que al comportamiento de dichos modelos se refiere. A continuación, estableceremos una correspondencia entre los programas que dan lugar a los autómatas celulares y varios sistemas que hallamos en la Naturaleza, cosa que nos proporcionará el conocimiento necesario para crear por nosotras mismas e interpretar las simulaciones informáticas de la evolución e interacción de poblaciones. Razón por la cual, podremos enfocar el estudio del comportamiento de poblaciones de un modo distinto al convencional.

### **Introducción histórica**

La introducción de innovaciones tecnológicas en nuestra vida cotidiana supone a menudo un cambio de mentalidad que nos conduce a replantearnos la visión que tenemos acerca del mundo, originando así nuevas áreas de conocimiento en las ciencias tradicionales. Por este motivo, nos percatamos de que hacia los años cincuenta, a raíz de la llegada de los ordenadores electrónicos, surgieron distintos sistemas equivalentes a lo que actualmente conocemos como Autómatas Celulares.

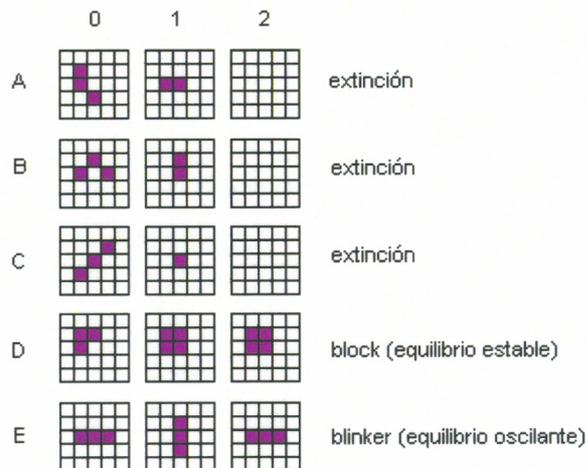
### ***Los primeros pasos***

Se considera que fue John von Neumann quien, tratando de desarrollar modelos basados en construcciones tridimensionales descritas por ecuaciones diferenciales, consiguió el primer autómata celular, es decir, una idealización abstracta o modelo de un sistema determinado. En otras palabras, intentó representar cuestiones matemáticas sobre sistemas dinámicos mediante autómatas celulares (creados por ordenador) –ya que podían ser utilizados para procesar información–, a la vez que analizó sus propiedades autoreproductoras. Pero, la verdadera popularización de dicho modelo vino gracias a John Horton Conway quien, a principios de los setenta, experimentó con diferentes autómatas celulares bidimensionales, motivado por cuestiones de lógica matemática y por los “juegos de simulación” creados por Stanislaw Ulam, colaborador de J. von Neumann.

## El experimento clave

Uno de los más famosos modelos creados por el distinguido matemático John H. Conway es el conocido como "Life", denominado así puesto que se trata de una simulación de las leyes de la selección natural, más concretamente: el nacimiento, la muerte y la supervivencia de los individuos de una determinada población.

Así pues, después de haber escogido unas simples reglas que rijan a la población en cuestión, se procede a la simulación del comportamiento de ésta mediante una cuadrícula donde cada celda pintada de negro representa un individuo. Aplicando las leyes mencionadas, teniendo en cuenta que los nacimientos y las muertes en una "generación" son simultáneas, obtendremos un patrón que muestra la situación de la comunidad, tal como mostraremos a continuación a partir de distintas poblaciones iniciales.



Reglas:

1. *Supervivencia:* los individuos con 2 o 3 individuos adyacentes sobreviven.
2. *Muerte:* Aquellos con 4 o más individuos adyacentes, rodeados tan sólo por un individuo y los que están aislados mueren.
3. *Nacimiento:* En las celdas vacías, rodeadas exactamente por 3 individuos, nace un nuevo individuo.

## ***La racionalización del juego***

A pesar de la aparente simplicidad de este modelo, deberíamos tener en consideración el hecho de que la complejidad puede surgir a partir de la simplicidad, como es el caso de algunos programas informáticos que llevan a cabo operaciones muy sofisticadas partiendo de ciertas normas establecidas mucho más sencillas. De manera que, aunque el ejemplo de Life no parezca más que un mero juego, ha sentado las bases de un nuevo tipo de ciencia que Stephen Wolfram expone en su libro *A New Kind of Science* que ha generado una gran controversia en el mundo científico.

Él sostiene que, hasta el día de hoy, la ciencia ha reducido la complejidad de la Naturaleza a modelos más simples que no resultan ser más que una aproximación limitada de la realidad, motivo por el cual no somos capaces de determinar en qué medida la selección natural afecta en la evolución de las especies y cuáles son los factores que determinan el estado de una población. También asegura que en ciertas ocasiones, en vez de ceñirnos a un campo científico específico, tenemos que considerar el conjunto, puesto que hay formas básicas de comportamiento comunes a sistemas aparentemente distintos, cosa que discutiremos posteriormente porque su tesis tiene una gran repercusión en el estudio de la evolución de las poblaciones.

## **Explicación teórica sobre autómatas celulares**

Al mencionar los modelos de autómatas celulares nos referimos a un *sistema dinámico discreto*, es decir, a una representación discreta (en cuanto a espacio, tiempo y estado) de un sistema constituido por distintos objetos o individuos que interactúan simultáneamente con aquellos que se encuentran más cercanos. Además, no solamente se caracteriza por la posibilidad de representar tanto espacios unidimensionales como espacios en dos y tres dimensiones, si no que también permite que las celdas que lo constituyen adopten distintos estados en función de las reglas que determinan su interacción con las celdas contiguas. De este modo, al tratarse de un modelo discreto, podemos actualizar el estado de cada una de las celdas simultáneamente dependiendo del tiempo transcurrido, cosa que simplifica el análisis de la evolución del sistema, puesto que es fácilmente interpretado visualmente.

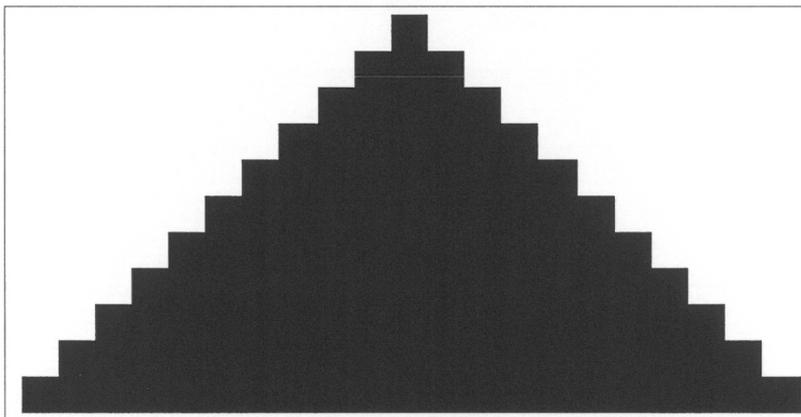
En este capítulo, trabajaremos con autómatas celulares unidimensionales, de manera que cada paso consistirá en una línea de celdas de color blanco o negro. El color

de dichas celdas estará determinado por la línea precedente y una serie de normas que aplicaremos al sistema.

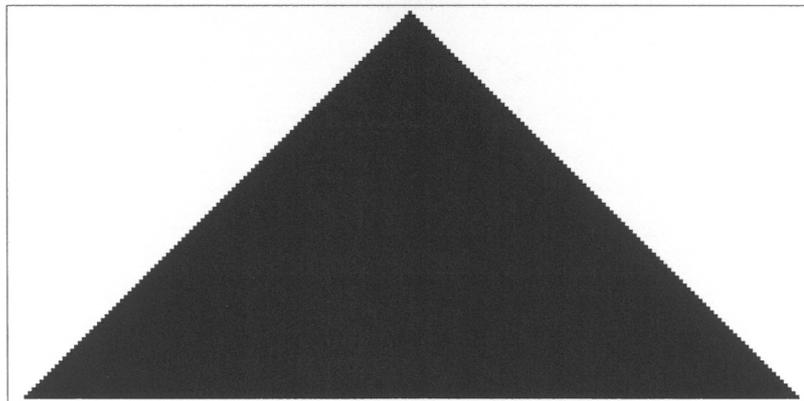
Dado que el uso de ordenadores permite la implementación de una gran variedad de normas diseñadas para realizar operaciones concretas, diseñaremos una gran variedad de modelos con los que estudiaremos el comportamiento general de los autómatas celulares, mediante su correspondiente simulación informática. En realidad, los autómatas celulares también pueden ser concebidos como un programa informático en el que un determinado conjunto de funciones, que representarían las reglas que asignamos al autómata celular, es aplicado a una matriz para cambiar sus valores simultáneamente. Así pues, los elementos de la matriz varían según las funciones o reglas que apliquemos al autómata celular, tal como constataremos a continuación.

Primer factor: las normas

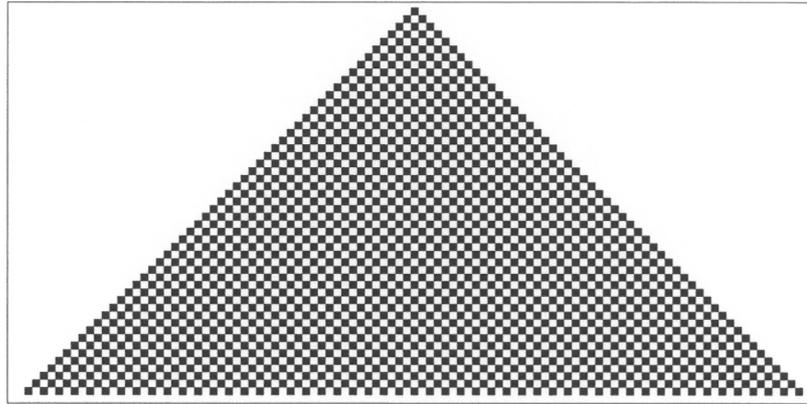
- Por ejemplo, si especificamos que aquellas celdas que tengan casillas contiguas de color negro también serán negras, al cabo de diez pasos obtendremos la siguiente representación:



Así pues, esta norma en concreto conduce a un patrón uniformemente negro.

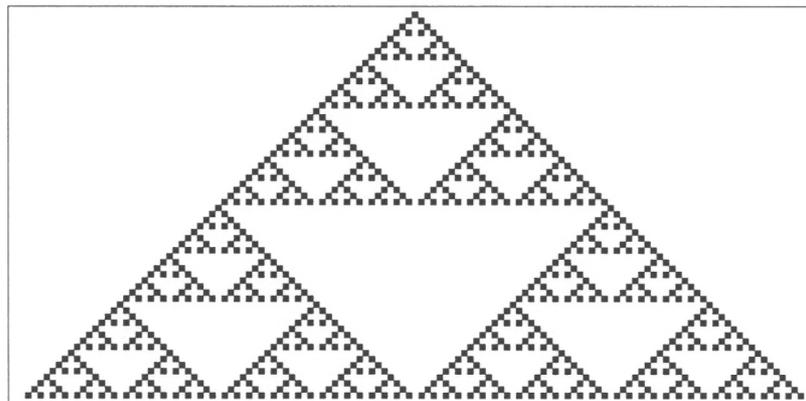


- Sin embargo, alterando las condiciones impuestas, tendremos un patrón distinto, de modo que el resultado de establecer que una celda será blanca si como mínimo dos de sus celdas contiguas en el paso precedente eran blancas será:



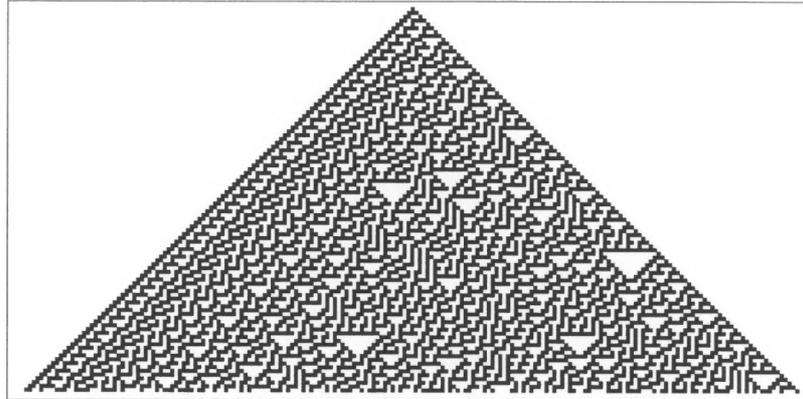
Se trata pues de un patrón que alterna celdas blancas y negras repetitivamente.

- El patrón producido por un autómata celular cuyas normas impliquen que la posición de las celdas negras afectará al color de las celdas del paso siguiente, normas que mostraremos a continuación, dará lugar a una pauta más compleja donde podremos apreciar la aparición de estructuras anidadas, en este caso piezas triangulares, de un modo similar como suele ocurrir con los fractales.



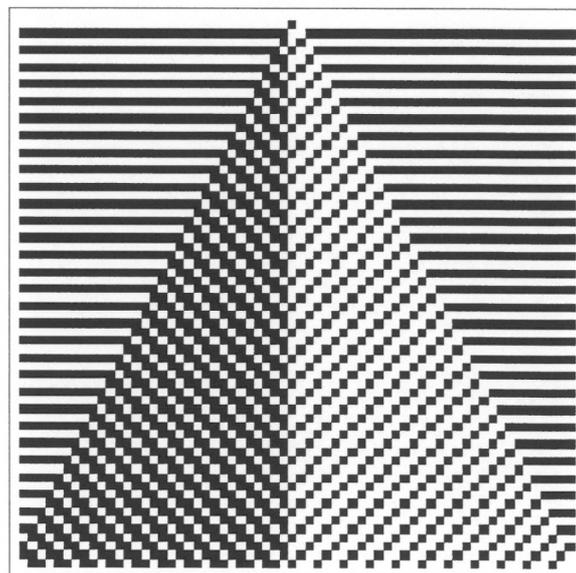
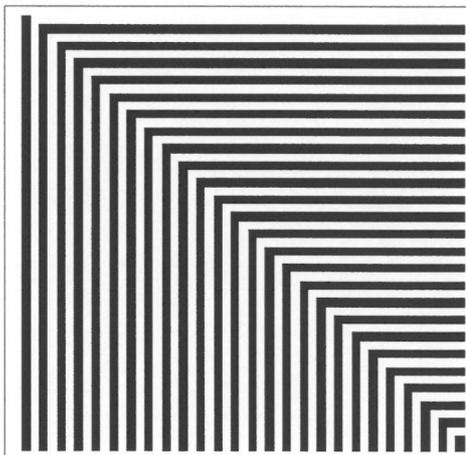
- Finalmente, cabe remarcar que aumentando escasamente el nivel de complejidad de las normas implantadas al sistema, tal como especificaremos en el esquema,

en lugar de obtener un patrón más o menos regular, el autómata celular produce complejidad e irregularidad a partir de unas reglas bastante sencillas.

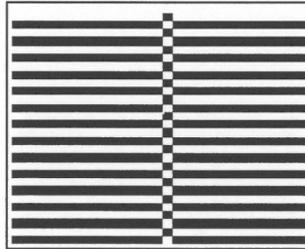


Si ampliamos nuestro estudio a un mayor número de reglas que generen distintos autómatas celulares, en un principio, nos sorprenderá la diversidad de patrones generados. No obstante, hay ciertas semejanzas que surgen al comparar las normas impuestas, puesto que en los casos más simples, todas las celdas del autómata celular tienden a adoptar un mismo color a partir del primer paso, tal como hemos constatado en la primera representación donde obteníamos un patrón uniformemente negro.

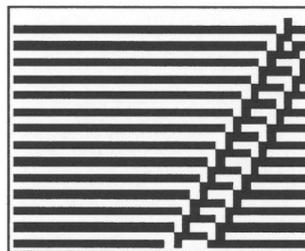
De no ser así, la otra alternativa es que en sucesivos pasos se produzca una alternancia constante entre el blanco y el negro, cosa que genera una infinidad de autómatas celulares distintos, como los que mostramos a continuación.



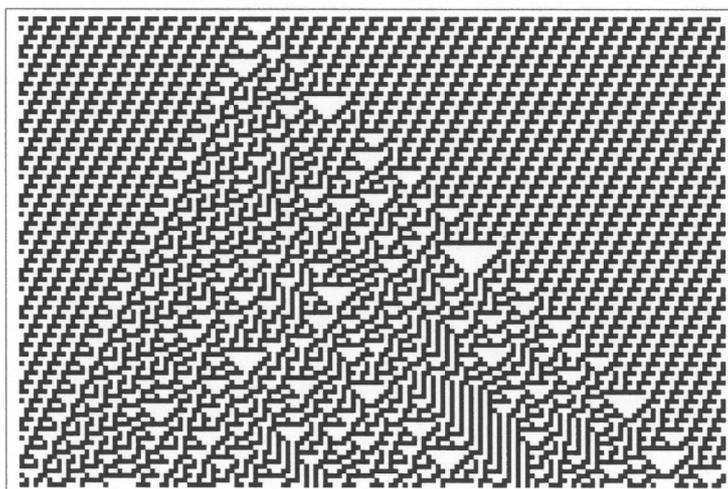
Pero, de entre todas las posibles normas que podemos implementar por combinación, cabe destacar que la estructura simple más común en ellas es la pauta consistente en una celda en concreto o un reducido grupo de celdas que persisten a lo largo del desarrollo. A pesar de que esta pauta suele permanecer estacionaria,

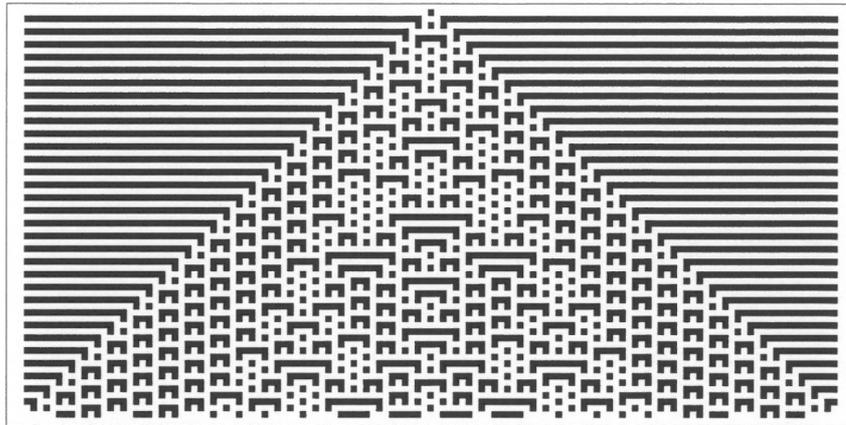


también existen casos en los que puede situarse en distintas posiciones del autómata celular.

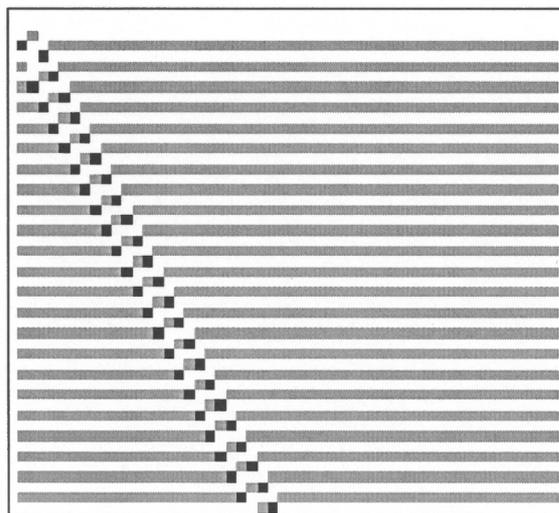


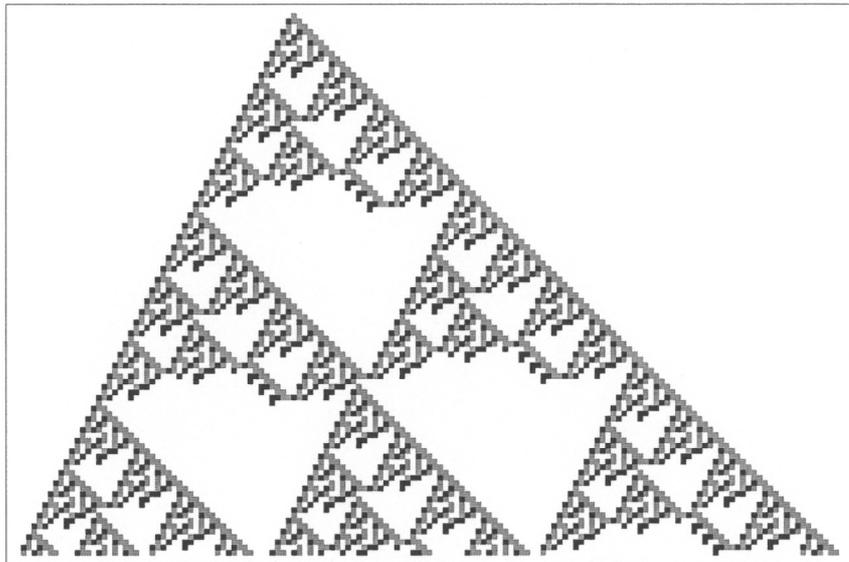
Además, la gran mayoría de los autómatas celulares generados mantienen un determinado tamaño, mientras que los que presentan un crecimiento exponencial suelen ser los que muestran un comportamiento repetitivo. Tanto la repetición como las estructuras anidadas son muy comunes en estos modelos, cosa que no excluye que pueda haber estructuras aparentemente al azar, como ilustramos a continuación:





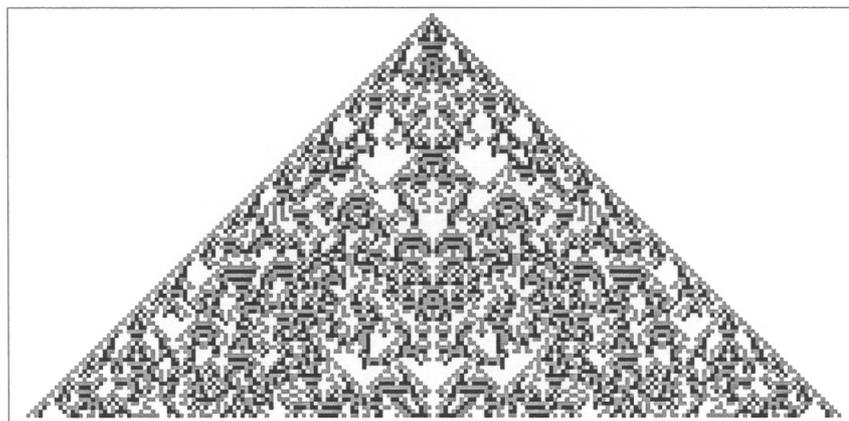
Si hacemos referencia a un “aparente azar” es porque la mayoría de estos ejemplos parecen ser el resultado de un cierto grado de irregularidad junto con un comportamiento regular. Sin embargo, debemos tener en cuenta que de momento sólo hemos considerado autómatas celulares unidimensionales con celdas de dos posibles colores. En realidad, si no estuviésemos limitando nuestro campo de estudio a este determinado tipo de autómatas celulares, el número de reglas que podríamos crear para uno con tres posibles colores de celdas sería tan elevado que resultaría prácticamente imposible de manejar. Por este motivo, a menudo lo que suele hacerse en estos casos es tomar reglas totalísticas, que determinan el color de cada celda en función del color preponderante en las celdas contiguas, de modo que queda reducido a 2187 posibles normas. La valoración de autómatas celulares tricolores muestra que, a pesar de que hemos añadido un cierto nivel de complejidad, el comportamiento general de dichos autómatas no resulta ser mucho más complicado.

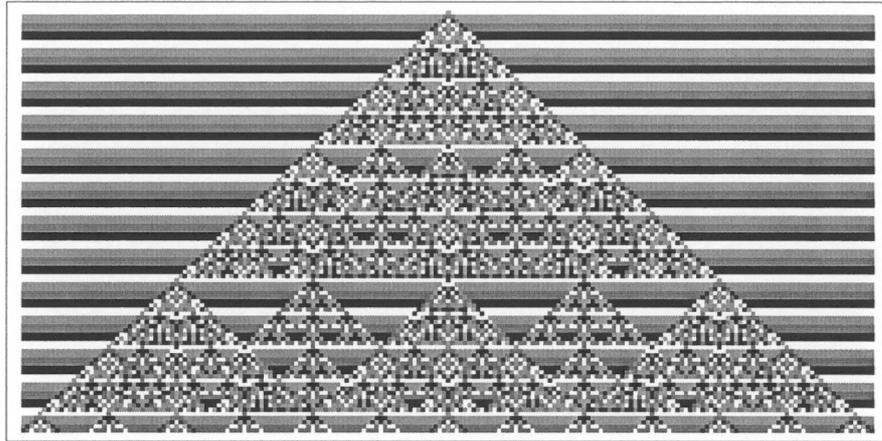




Esta constatación pone en relieve un fenómeno realmente interesante que es el hecho de que a partir de un determinado grado de complejidad, por mucho que tratemos de introducir más especificaciones, lo único que conseguiremos es detallar con más precisión algunas características propias del autómata celular, siendo mucho más complejo en detalles particulares; pero, excepto en casos muy concretos, no conseguiremos un cambio radical en el patrón general.

Los siguientes ejemplos se obtienen matizando las distintas tonalidades de grises, cosa que implica una mayor especificidad del autómata celular –esta propiedad es la que nos proporcionará la posibilidad de determinar y reproducir las características singulares de cada sistema natural o población–.





En resumen, dependiendo de la complejidad de las normas que apliquemos a un sistema particular, su evolución será simple, repetitiva, compleja pero con ciertas regularidades o irregular y compleja. De modo que si dichas normas son suficientemente simples, el sistema solamente exhibirá un comportamiento puramente repetitivo, mientras que si son un poco más complicadas, podremos observar la aparición de un comportamiento irregular aunque con algunas estructuras anidadas. Pero, para que haya una complejidad general en el comportamiento del sistema en cuestión, las normas subyacentes deben cumplir el requisito de ser mínimamente complejas.

Esta última categoría es la que nos interesa, dado que la complejidad que exhibe la Naturaleza nos encamina a suponer que hay veces en que se rige por el azar. No obstante, el problema seguramente radica en que no somos capaces de delimitar su regularidad intrínseca y en la imposibilidad de medir con perfecta precisión algunos fenómenos, hecho que nos impide repetir exactamente un mismo experimento. Por este motivo, el trabajo con modelos como los autómatas celulares hace posible un enfoque tanto teórico como experimental que podemos *a posteriori* identificar con los acontecimientos naturales que nos interesen. Uno de los retos que actualmente se plantean es el intento de plasmar fenómenos físicos y biológicos, en términos de autómatas celulares.

## ***Segundo factor: las condiciones iniciales***

Otro factor a tener en cuenta al trabajar con autómatas celulares, a parte de las reglas que lo rigen, es las condiciones iniciales bajo las cuales se encuentra el sistema. Es decir, las consecuencias de empezar con una sola celda de color negro, tal como hemos considerado en el apartado anterior, son radicalmente distintas que si tuviésemos varias celdas de color negro. Por este motivo, deberemos analizar qué ocurre si tomamos condiciones iniciales al azar.

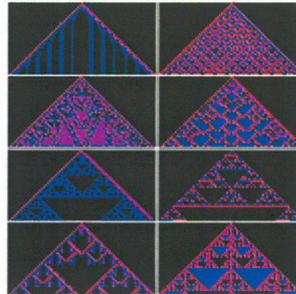
En principio, sería lógico creer que, dado que las normas que asignaremos a los autómatas celulares son ligeramente complejas, nunca surgiría un cierto orden de dicha situación, sobre todo si establecemos condiciones iniciales completamente aleatorias. Pero el tipo de comportamiento que resulta de determinadas condiciones iniciales puede ser clasificado en cuatro categorías, porque a pesar de que evolucionen con distintos parámetros, tienen ciertas características distintivas, que ilustraremos con los siguientes ejemplos.

### Clasificación

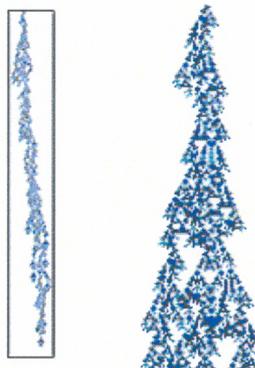
1- En primer lugar, hallamos los autómatas celulares de clase 1, cuyo comportamiento es muy sencillo, puesto que siempre tienden exactamente a una misma situación final. A pesar de que las condiciones iniciales sean divergentes, las irregularidades desaparecen y los distintos sistemas se estabilizan alcanzando el mismo estado final uniforme. Por esta razón, la información sobre las condiciones iniciales tiene una repercusión mínima en este tipo de sistemas, hasta tal punto que durante su evolución se pierde cualquier posible traza de la situación inicial.

2- En los de clase 2, en cambio, hay una gran diversidad de posibles estados finales, pero lo que los distingue es que hay una serie de estructuras simples que permanecen a lo largo de la evolución del sistema o que se repiten al cabo de cierto tiempo. No obstante, presentan cierta similitud con los de clase 1, dado que ambos degeneran hacia estados de inactividad, de igual modo como las condiciones iniciales tampoco tienen un gran impacto en el desarrollo del autómata celular. En este caso, aunque la situación original sí que influye en las estructuras generadas posteriormente,

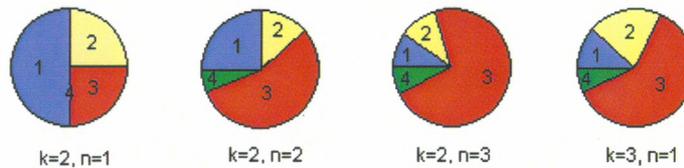
sus características intrínsecas quedan localizadas en determinados puntos del autómata sin que interactúe con estructuras adyacentes.



**3-** Por lo que a los de clase 3 se refiere, su comportamiento es mucho más complicado, cosa que induce a pensar que es aleatorio. No obstante, se puede todavía identificar estructuras a pequeña escala. En cuanto a su característica más esencial, debemos resaltar el nivel de actividad que exhibe, puesto que el hecho de que nunca llegue a un período de estabilidad y que exista una gran libertad en lo que se refiere a la movilidad de los sistemas individuales que lo componen entraña un comportamiento singular. Es decir, un grupo reducido de celdas pueden irse posicionando en distintos puntos del autómata celular por contacto, al contrario que las estacionarias, tal como ilustrábamos al considerar el comportamiento más común en los autómatas celulares. Esta movilidad de estructuras a pequeña escala, incluso de celdas individuales, se traduce en una propagación inmediata de los efectos que causa una pequeña modificación en las condiciones iniciales del sistema al resto del autómata celular. Por lo tanto, la presencia de unas condiciones iniciales aleatorias suponen un cierto grado de azar en el comportamiento general del sistema, aunque no es el factor fundamental a la hora de generar complejidad.

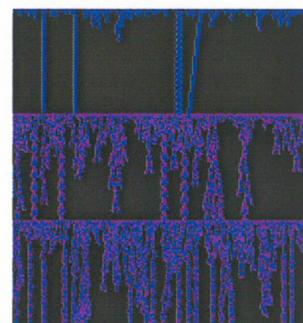


En esta categoría, el factor de las normas es esencial, cosa que podemos deducir a partir de los siguientes gráficos circulares, que muestran el resultado para autómatas celulares totalísticos unidimensionales con  $k$  colores y  $n$  el número de elementos que intervienen en la composición de las reglas que rigen el modelo.



Si interpretamos los resultados obtenidos, advertimos como la frecuencia de los autómatas celulares de clase 3 aumenta al incrementar el número de elementos inherentes a las reglas, ya que a la mínima que cualquiera de estos elementos conduzca a un comportamiento de tipo 3, la tendencia se extenderá hasta dominar el sistema.

4- Finalmente, en la clase 4 advertimos una combinación de orden y azar, ya que, aunque sigue habiendo estructuras simples, éstas interactúan entre ellas y se desplazan de manera compleja. Así pues, podríamos situar este tipo de autómatas celulares en el límite entre los de clase 2 y los de clase 3, con un comportamiento fluctuante sin llegar nunca a estabilizarse. Como en cualquier clasificación, siempre hay casos que se sitúan en el límite entre dos clases distintas, ya que comparten características de ambas; por eso, existen algunos autómatas celulares que no encajan exactamente en un prototipo definido. A pesar de ello, los de clase 4 tienen características definidas, tales como la presencia de algunas estructuras localizadas invariables, otras de una gran movilidad, mientras que otras desaparecen tras algún tiempo. Asimismo, también es notable como la trascendencia de las condiciones iniciales depende en gran medida de las estructuras a las que implique, ya que la situación inicial sólo tendrá una gran influencia en la evolución del autómata celular si afecta a una de las estructuras no estables, de manera que la información se transmita a lo largo de todo el sistema.



En definitiva, un autómata celular se define tanto por las normas que rigen su comportamiento como por las condiciones iniciales en las que se halla el sistema, motivo por el cual, un mismo conjunto de reglas puede generar autómatas celulares de distintas clases.

### Semejanzas con la Naturaleza

Aunque la anterior clasificación no parezca tener gran relevancia, es esencial en nuestro trabajo, puesto que denota el significativo paralelismo que existe entre la evolución de los sistemas ecológicos y los autómatas celulares. Hace años que los científicos tratan de comprender y realizar una abstracción precisa de los mecanismos evolutivos, del mismo modo como se consiguió establecer las leyes y los principios que intervienen en los fenómenos físicos. En principio, pudiendo comprender e imitar las reglas que dirigen la vida y su evolución llegaríamos a una verdadera revolución tecnológica, cosa que a impulsado el estudio de la vida en sí en muy diversos campos científicos, entre los que se incluye la investigación referente a la vida artificial. Precisamente se intenta lograr un modelo que simule el comportamiento esencial de los seres vivos y demás sistemas biológicos mediante complejos algoritmos, objetivo que nos proponemos llevar a cabo en este trabajo representando la evolución e interacción de varias poblaciones a partir de diversos autómatas celulares.

A pesar de que todavía no hay una completa unanimidad en cuanto a la diferenciación de los distintos autómatas celulares, ya que supone un gran reto delimitar exactamente lo que entendemos por complejidad y comportamiento aleatorio, son las cualidades principales de cada categoría las que nos conciernen. Estas propiedades fundamentales son las que nos facilitan el análisis de las semejanzas entre los fenómenos naturales y el comportamiento general de los distintos modelos de autómatas celulares planteados en la sección anterior.

Por consiguiente, podemos establecer diversos paralelismos, según los cuales los autómatas celulares de clase 1 representarían una población que termina por extinguirse, mientras que los de clase 2 mostrarían el comportamiento estable o bien cíclico (con un período fijo de repetición) de otra población.

En los años veinte, el matemático Vito Volterra realizó un estudio acerca de la interacción entre una población de tiburones y una de peces que le condujo a constatar que esta interacción correspondía a un patrón cíclico. Es decir, cuando se produce un aumento en el número de peces, también hay un incremento en la cantidad de tiburones. Sin embargo, habrá un momento en que los recursos alimenticios (los peces) no darán abasto a las necesidades nutritivas de los tiburones, ocasionando entonces la muerte de la mayoría de éstos. Por consiguiente, habrá una recuperación en la población de peces, hecho que nos llevará al inicio del proceso. Otros modelos de predador-presa también

ilustran a la perfección este tipo de comportamiento, por ejemplo, cuando hay competitividad y evolución. Éste sería el caso de las especies que producen una toxina para defenderse de su depredador, quien, al mismo tiempo, se va volviendo inmune a la toxina en cuestión. Por este motivo, sobreviven aquellos individuos que tienen una toxina más venenosa y los depredadores para quienes la toxina es más inocua, cosa que tiene como resultado un patrón repetitivo, típico de los autómatas celulares de clase 2.

Los de clase 3, en cambio, serían representativos de un crecimiento o contracción indefinidos con modificaciones constantes. Tal vez éste sea el tipo de autómata celular menos frecuente en la Naturaleza, porque no hay ninguna relación que se pueda establecer con la selección natural. No obstante, suele compararse con períodos en la historia de grandes cambios generalizados que duran durante un largo tiempo, tales como la época en que se extinguieron los dinosaurios. Si es cierto que su desaparición fue producto del impacto de un meteorito de grandes dimensiones contra la Tierra, el efecto que éste produjo a nivel ambiental afectó en todo el mundo, sin posibilidad de retroceder al estado original. Así pues, las distintas especies que poblaban el planeta se vieron mermadas, a causa de los cambios simultáneos que el impacto provocó, evolucionando por lo tanto de una manera caótica y aleatoria.

En último lugar hallamos los autómatas celulares de clase 4 que son el ejemplo de un comportamiento irregular de crecimiento y contracción de una población. En este caso, las fuerzas externas al sistema son esenciales para predecir su evolución, ya que las poblaciones deben adaptarse al medio en el que viven. En oposición a los de clase 3, los cambios que actúan en estos sistemas afectan a una población limitada durante cierto período de tiempo, cosa que se traduce a nivel ecológico en incendios, inundaciones, terremotos, etc. Por este motivo, el tamaño y evolución de este tipo de poblaciones es caótico y aleatorio, pero luego vuelve a recuperar un patrón definido. En realidad, los autómatas celulares de clase 4 son el resultado de una constante oscilación entre los de clase 2 y los de clase 3.

Tal como hemos ido detallando, son muchos los paralelismos que podemos establecer entre la evolución de los autómatas celulares y la de distintas poblaciones. Sin embargo, no debemos menospreciar el hecho de que somos nosotros quienes decidimos qué criterios de semejanza imponemos al interpretar los resultados obtenidos, motivo por el cual, no debemos dejarnos llevar por el antropomorfismo que algunos científicos manifiestan al afirmar que los autómatas celulares también reflejan caras humanas y

demás. El reconocimiento de pautas comunes debe mantenerse al margen de cualquier lectura condicionada por nuestra naturaleza humana, así como tampoco podemos llevar un fenómeno de complejidad hasta el extremo de afirmar que la complejidad que observamos en los seres vivos que nos rodean y en nosotros mismos es equivalente al de un autómatas celular de clase 4.

Parece no haber duda en que determinados elementos en la Naturaleza son el resultado de procesos computacionales análogos a los de los autómatas celulares, como los patrones de pigmentación de algunos animales o la turbulencia de fluidos, pero hay una gran diferencia entre esta afirmación y las teorías que actualmente sostiene Stephen Wolfram que pretenden desbancar la adaptación y la selección natural como factores de primer orden en la evolución de las especies y que conciben el Universo como un autómatas celular a gran escala donde la información es más relevante que la energía y la materia.

Sus tesis son muy interesantes, pero no tenemos ni el conocimiento ni el tiempo necesarios para poder estudiarlas y analizarlas críticamente, dado que abarcan un extenso número de teorías y conceptos relacionados con la física, las matemáticas e incluso la filosofía. Por este motivo, y a pesar de que existe una estrecha relación entre sistemas macroscópicos y microscópicos, ceñiremos nuestro estudio a la implementación de autómatas celulares bidimensionales como herramienta o método para modelar la evolución y la interacción entre poblaciones, sin entrar en campos científicos que se basen en la asunción de valores más subjetivos –como por ejemplo, cuando intentamos simular la vida de un organismo y los procesos biológicos que ésta conlleva mediante un autómatas celular–. En realidad, tanto los sistemas biológicos como los ecológicos podrían considerarse la culminación de la complejidad en la Naturaleza, dado que no solamente se caracterizan por una gran diversidad de componentes sino también porque dichos componentes pueden ser tanto internos como exteriores al sistema.

Una vez hayamos creado una reproducción del sistema ecológico que pretendamos estudiar, dependiendo de las simulaciones obtenidas, emplearemos las propiedades de cada tipo de autómatas celular para argumentar una predicción aproximativa de la posible evolución del sistema en cuestión.

## **Experimentación con modelos ecológicos**

Justamente, una de las ventajas de los autómatas celulares es que se trata de modelos discretos por lo que a espacio y tiempo se refiere, cosa que nos otorga la posibilidad de determinar el color de una celda en un lugar y momento concretos sin tener que seguir la evolución concreta de una ecuación diferencial. De modo que la dificultad que supone la heterogeneidad espacial que caracteriza los sistemas ecológicos queda reducida a una mera representación espacial de los individuos de la población. Además, al estar basados en normas simples, en lugar de en una ecuación que dependa de diversos parámetros, los autómatas celulares son ideales para implementar sistemas donde haya interacciones simples entre organismos.

Asimismo, en las últimas décadas se ha probado la hipótesis de que las fluctuaciones de las poblaciones se basan mayoritariamente en fenómenos deterministas elementales, como, por ejemplo, la tendencia al equilibrio, las bifurcaciones, la resonancia, los polos de atracción, fenómenos transitorios e incluso el caos. De manera que la combinación de estas fuerzas individuales provoca la evolución de las poblaciones, de igual modo como ocurre con las distintas normas que actúan en un autómata celular.

Los modelos CA (*cellular automata*) se están consolidando como un instrumento básico a la hora de modelar sistemas ecológicos de todo tipo, pero, para lograr comprender el funcionamiento de esta potente herramienta deberemos primero empezar por los ejemplos más simples.

### ***Modelo de una población en un espacio limitado***

Para iniciarnos en la investigación con modelos CA, experimentaremos primero tomando como ejemplo una sola población en que la única competencia existente es la espacial, cosa que se traduce en un abastecimiento prácticamente ilimitado de recursos esenciales para su existencia, como los alimenticios. En este caso en concreto, no existe ninguna fuerza externa que influya en la evolución de la población, de modo que su supervivencia dependerá simplemente de la concentración de individuos, ya que en un punto donde haya una superpoblación podemos suponer que habrá un exceso de competencia entre individuos, cosa que implicará la muerte de una fracción de ellos. La implementación de este modelo, que podría representar a un bosque en un valle delimitado, podríamos realizarla aplicando el modelo del *Game of Life* de John Conway.

- Las condiciones iniciales

En primer lugar, deberíamos crear una tabla bidimensional donde cada celda podría estar ocupada por un solo individuo de la población. A continuación, habría que determinar las condiciones iniciales del sistema, es decir, colocar cada individuo en su lugar correspondiente dentro de la tabla según la posición que ocupe en la realidad. Gracias a la informática, podemos determinar que las condiciones iniciales sean aleatorias, cosa que nos permite universalizar el modelo, sin centrarnos siempre en una misma población. No obstante, sabiendo que cada vez que ejecutemos el programa estaremos considerando una nueva población, debemos tener en cuenta las condiciones iniciales que han generado nuestro ejemplo, porque tal como ya hemos mencionado anteriormente, las condiciones iniciales pueden tener una gran repercusión en el desarrollo del sistema –dependiendo de la clase de modelo CA–.

- Las normas

En segundo lugar, hay que determinar las normas que rigen la vida de la población. Puesto que en este caso tan sólo intervienen factores internos, únicamente tendremos que señalar las condiciones que causan el nacimiento, la supervivencia o la muerte de un individuo.

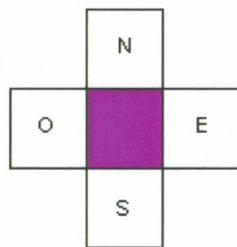
- El tipo de adyacencia

Sin embargo, a la vez que detallamos las reglas que queremos aplicar, también debemos matizar la aplicación de dichas reglas, lo que es equivalente a acordar el número de celdas que consideramos adyacentes. No es lo mismo considerar una “adyacencia von Neumann” que una “adyacencia Moore”, que es como se suelen denominar los dos tipos de yuxtaposición. En realidad, lo que estamos eligiendo es la manera de actualizar la tabla, ya que el contenido de cada celda será el resultado de aplicarle unas reglas que dependen a su vez del número de individuos contiguos a la celda en cuestión.

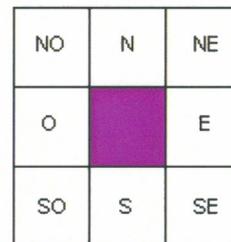
Por lo tanto, si consideramos que las únicas celdas contiguas que influyen en el estado de dicha celda son las primeras que se encuentran en dirección norte, sur, este y

oeste, entonces estaremos tratando con la “adyacencia von Neumann” (4 celdas contiguas). En cambio, si también tenemos en cuenta las que primeras que hallamos en dirección noreste, sureste, sudoeste y noroeste, se tratará de una “adyacencia Moore” (8 celdas contiguas). Esta última es la que emplearemos en los sucesivos autómatas celulares que diseñaremos para realizar nuestra investigación.

Adyacencia von Neumann



Adyacencia Moore



Una vez introducidos los conocimientos necesarios para llevar a cabo una simulación, entraremos en materia concretando las reglas que fijaremos para nuestro sistema.

#### Reglas:

1. *Supervivencia*: los individuos con 2 o 3 individuos adyacentes sobreviven.
2. *Muerte*: Aquellos con 4 o más individuos adyacentes, rodeados tan sólo por un individuo y los que están aislados mueren.
3. *Nacimiento*: En las celdas vacías, rodeadas exactamente por 3 individuos, nace un nuevo individuo.

El esquema de un programa que ejecutase los distintos requisitos a los que acabamos de hacer alusión, que reproduciría el modelo creado por John Horton Cromway, es el que mostramos a continuación.

- Algoritmo:

```

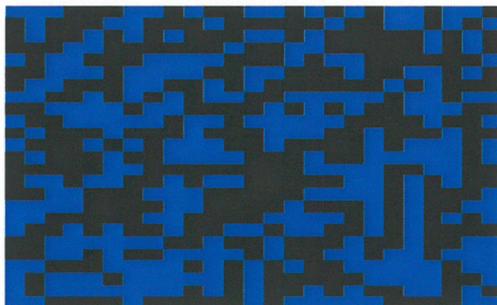
Inicio
  Introducción de los datos (situación de los individuos y número de interacciones (al
  que denominaremos S))
  Representación gráfica de la población.
  Por k=1 hasta S hacer (por el núm. de generaciones)
    Inicio
    Por i:=1 hasta N hacer
      Por j:=1 hasta M hacer (por cada posición posible)
        Inicio
        C:= número de individuos a su alrededor;
        (Aplicación de las reglas) { Si (t[i,j]=1) y ((c>3) o (c<2)) entonces t1[i,j]:=0;
        Si (t[i,j]=1) y ((c<3) y (c>2)) entonces t1[i,j]:=1;
        Si (t[i,j]=0) y ((c=3) o (c=2)) entonces t1[i,j]:=1;
        Si (t[i,j]=0) y ((c<>3) y (c<>2)) entonces t1[i,j]:=y;
        Fin
      Representación gráfica de la nueva población
    Fin
  Fin algoritmo.

```

La escritura del algoritmo en forma esquemática nos permite que podamos implementarlo en cualquier tipo de lenguaje informático, dado que todos tienen una estructura lógica común. Así pues, este programa puede “traducirse” tanto al Turbo Pascal como a *Mathematica* –en el anexo está detallado el programa en ambos lenguajes–.

Utilizando el programa que hemos diseñado mediante el lenguaje de *Mathematica*, que genera las distintas fases en la evolución de una población a partir de unas condiciones iniciales aleatorias, y aplicando las reglas que hemos mencionado antes, tiene lugar el proceso que podemos visualizar a continuación.

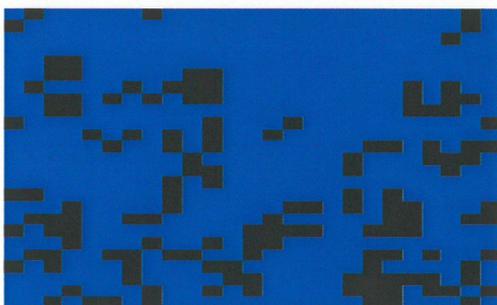
- Situación inicial (paso 1)



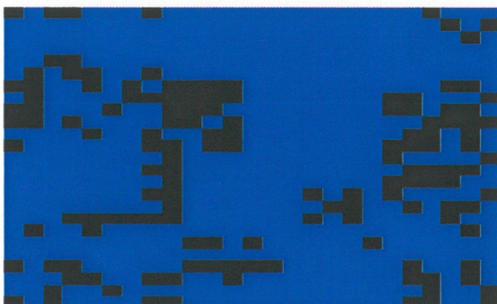
- Paso 2



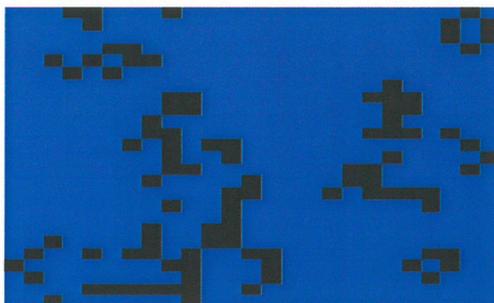
- Paso 3



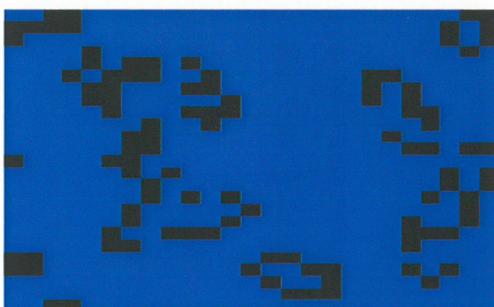
- Paso 5



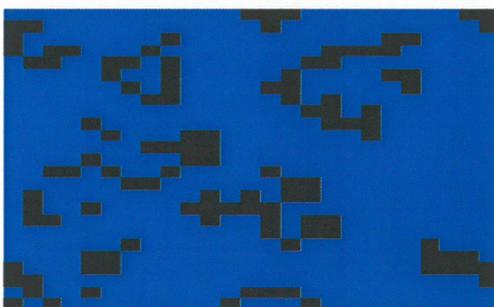
- Paso 10



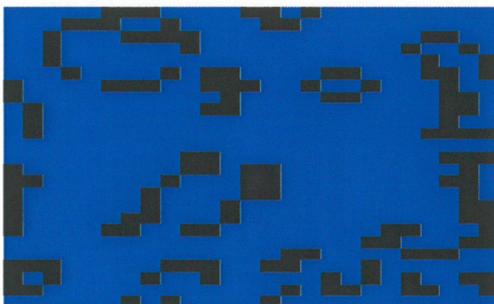
- Paso 20



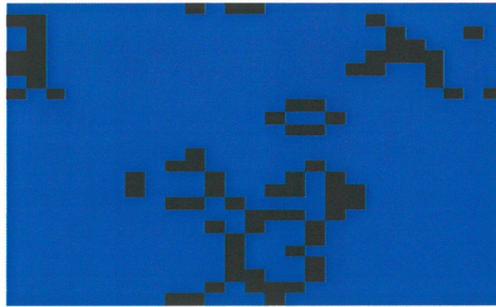
- Paso 40



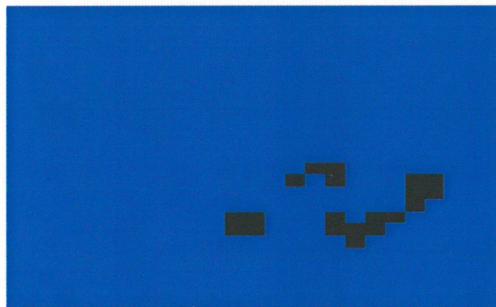
- Paso 100



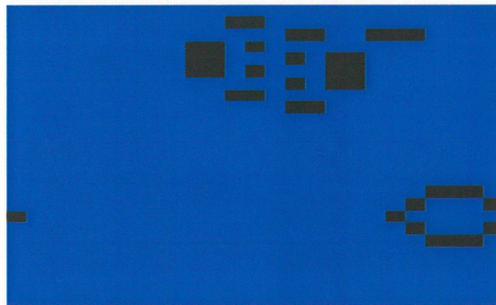
- Paso 150



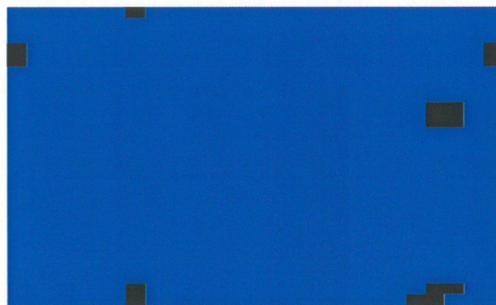
- Paso 200



- Paso 250



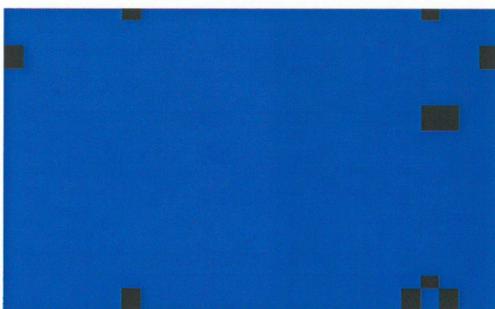
- Paso 359



- Paso 360



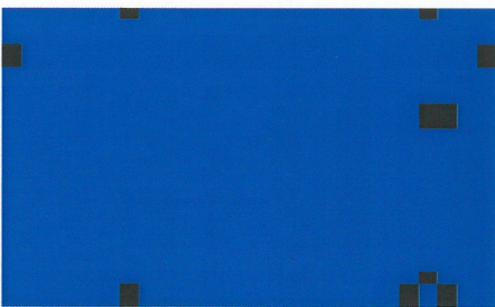
- Paso 361



- Paso 362

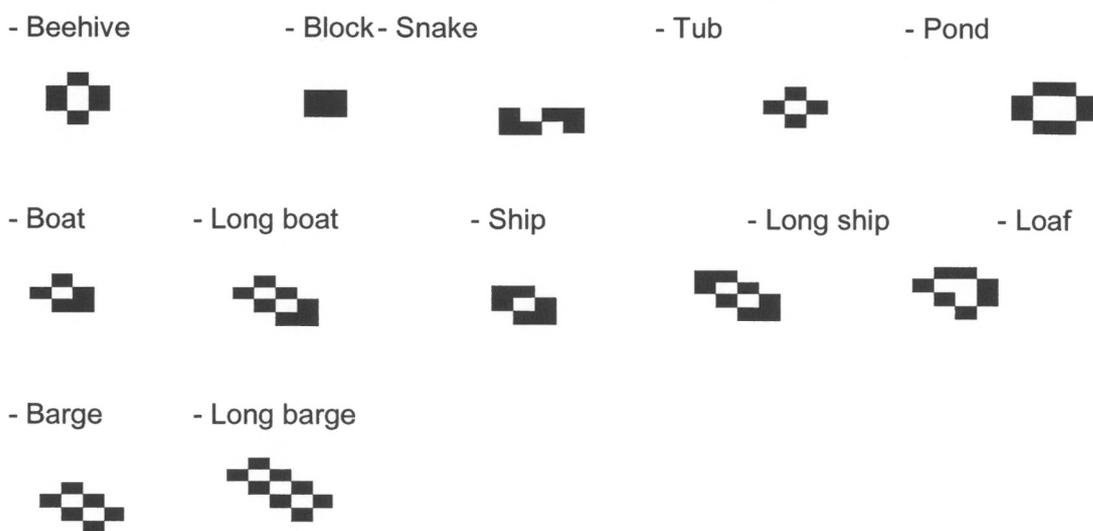


- Paso 363



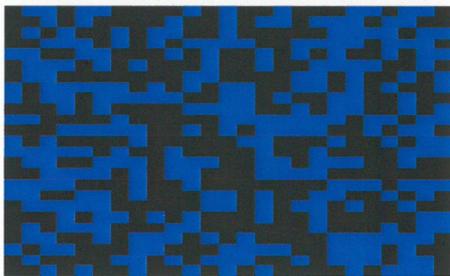
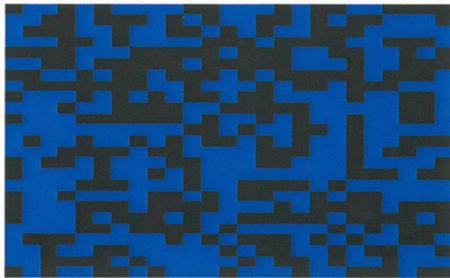
En las ilustraciones anteriores hemos podido ir siguiendo la evolución de una población situada en un espacio limitado con un "aforo" de 625 individuos. A pesar de su capacidad, en el supuesto bosque que estamos simulando no pueden sobrevivir 625 árboles simultáneamente, dado que la competencia que se origina entre ellos los conduce a la muerte. Análogamente, el hecho de que haya demasiada separación entre ellos, al no poder reproducirse, predispone a su extinción. Por este motivo, existe un límite en el que según el número y la disposición de los árboles todos pueden coexistir. Dicho estado de equilibrio es al que tiende la población, de modo que al cabo de cierto tiempo, debería en principio alcanzar este equilibrio que varía dependiendo de las condiciones iniciales.

En algunos casos excepcionales, esta estabilización se consigue solamente a través de la extinción de la población; pero, llevando a cabo multitud de pruebas hemos observado que, tal como ya enunció Conway, en general, se suele alcanzar un estado en que tanto puede haber patrones que oscilan eternamente (rodeado en color rojo) como patrones que se mantienen inalterables (rodeado en violeta). Estos patrones suelen tener nombres específicos, por ejemplo, el que está rodeado en color violeta suele denominarse en inglés *block*. Las formas estables más comunes son las siguientes:

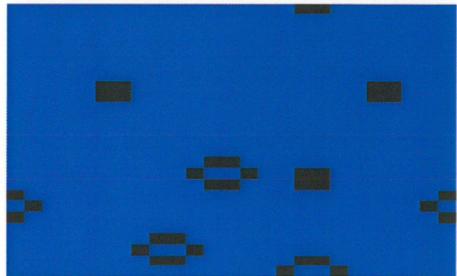
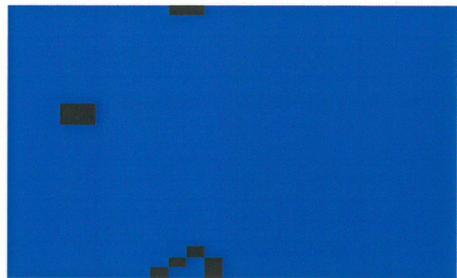


Aunque no entraremos en detalles por lo que a las formas que derivan en una oscilación periódica se refiere, dado que existe un gran número de ellas y a veces con períodos de repetición muy amplios, a continuación destacaremos algunos particularmente conocidos (equilibrios oscilantes), junto con otras situaciones que derivan en un equilibrio inmutable.

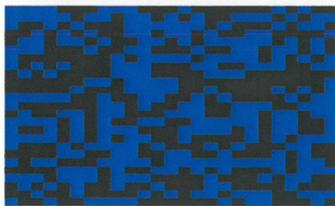
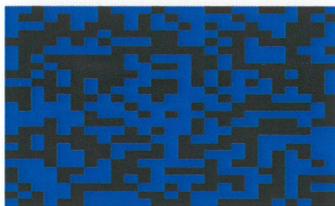
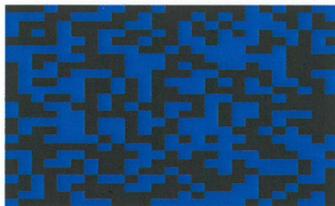
- Situación inicial



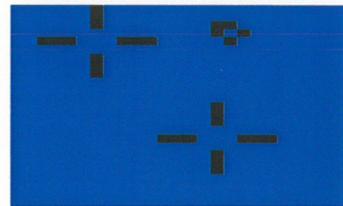
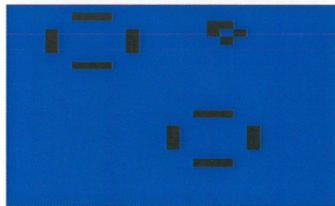
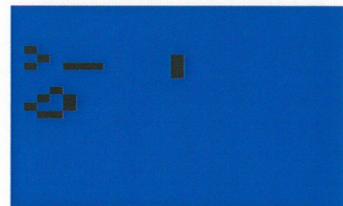
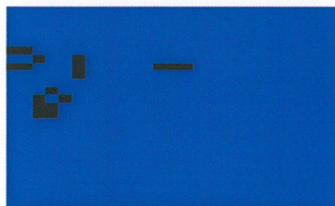
- Equilibrio inalterable



- Situación inicial



- Equilibrio oscilante



En definitiva, mediante el *Game of Life* y con algunas de sus variaciones, podemos llegar a simular la evolución de cualquier población en un espacio delimitado. Sin embargo, cabe destacar que como no existe ninguna fuerza exterior que intervenga en su desarrollo (puesto que lo hemos determinado a través de las reglas que rigen el programa), su evolución sólo podrá mostrar dos tipos de comportamiento. Este fenómeno se refleja en los autómatas celulares que simulan dichas poblaciones, ya que, por mucho que modifiquemos las condiciones iniciales, tan sólo conseguiremos modelos CA de clase 1 (extinción de la población) y 2 (estados de equilibrio, tanto inmutables como oscilantes). Por esta razón, se trata de poblaciones cuya evolución es fácilmente predecible.

### ***Modelo de una población en movimiento***

No obstante, el modelo anterior no abarca las simulaciones de la mayoría de poblaciones animales, dado que no tiene en cuenta los desplazamientos que alteran la posición de cada individuo a medida que va transcurriendo el tiempo. Motivo por el cual, cambiaremos algunas de las reglas esenciales del programa, con la intención de poder modelar, pongamos por ejemplo, una población de hormigas en una llanura.

Varios estudios realizados acerca de las colonias de hormigas plantean la cuestión de cómo en una población, en la que no hallamos un orden jerárquico marcado o una cadena de comando que determine la acción de cada hormiga, puede haber un comportamiento u orden colectivo. Se ha llegado a sugerir que las características de organización de estas colonias son el resultado de interacciones locales entre hormigas, de una forma similar a las que ocurren en los autómatas celulares. Así pues, idearemos un posible modelo que represente el comportamiento de una colonia de hormigas.

En este caso, determinaremos que una hormiga puede estar encarada hacia cualquier de las cuatro puntos cardinales y que, cuando ésta procede a desplazarse, lo hace en la dirección hacia la que está encarada. Sin embargo, no todas las hormigas se encuentran en un estado activo, de modo que algunas se hallarán en reposo.

Por consiguiente, si precisamos las reglas que regirán el autómata celular de una colonia de hormigas llegaremos a los siguientes postulados.

### Reglas:

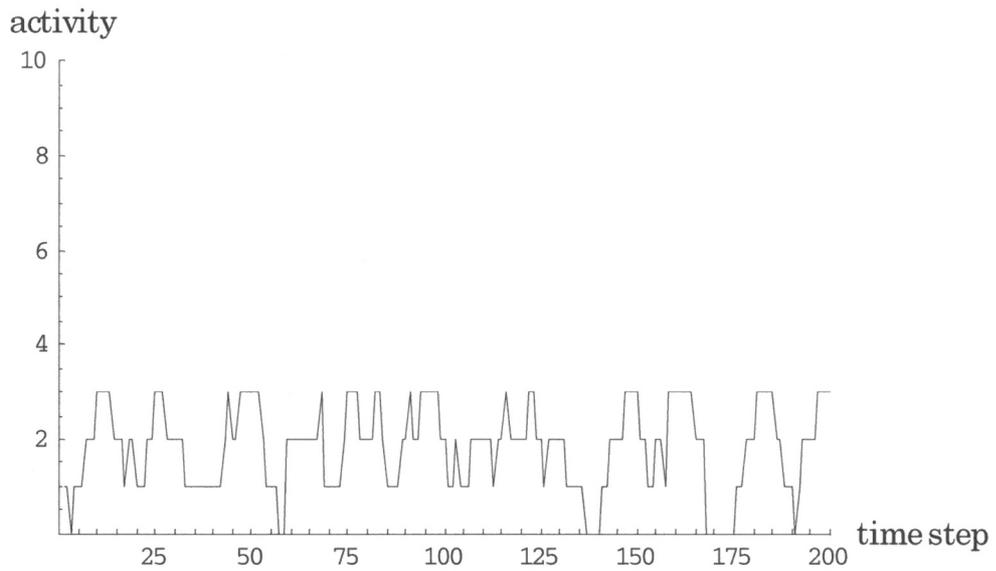
- Una hormiga activa se desplazará en la dirección hacia la que está situada, excepto si este avance supone la colisión con otra hormiga o si la posición que pretende alcanzar está fuera del dominio de la llanura.
- Si ocurren las dos últimas situaciones, la hormiga permanecerá quieta.
- Tanto si la hormiga se mueve o no, cambiará de dirección aleatoriamente e incrementará en uno su "reloj de actividad" (que cuenta el tiempo transcurrido desde que está activa).
- Toda hormiga activa se volverá inactiva pasado cierto tiempo  $t$ .
- Una hormiga inactiva puede activarse espontáneamente o por el contacto con otra hormiga activa.

Como en una población de estas características la población se mantiene constante, a pesar de que sus individuos se trasladan de un lugar a otro de su espacio limitado, la información sobre los individuos y su posición no es relevante. Por el contrario, lo que sí es de gran interés es constatar la evolución del número de hormigas activas e inactivas, cosa que viene determinada por sus respectivos movimientos.

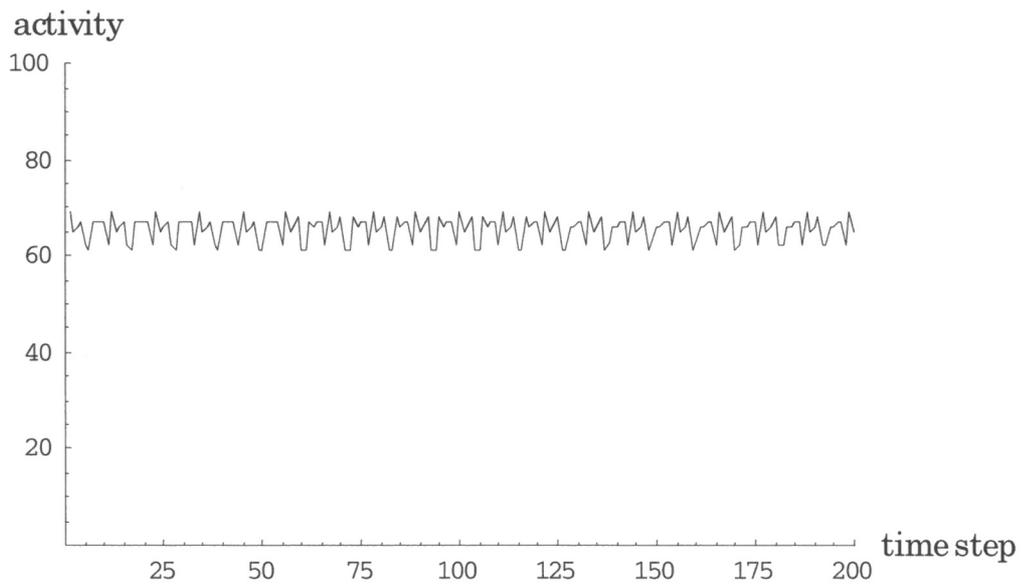
Mediante la variación de los parámetros que establecemos como condiciones iniciales para cada colonia, hemos podido observar un hecho interesante. Si comparamos dos colonias de hormigas, una con una gran densidad de hormigas y la otra con una menor densidad, podremos constatar que su comportamiento difiere en cuanto al nivel de actividad, tal como evidencian los gráficos que mostraremos a continuación.

Las divergencias entre ambos gráficos ponen en relieve que las colonias de baja densidad de población muestran una pauta de actividad caótica, mientras que los de alta densidad siguen un cierto ritmo de periodicidad. Por mucho que variemos las condiciones iniciales del sistema (la posición de los individuos), estas pautas se conservan para cada tipo de colonia.

- Colonia de baja densidad de población



- Colonia de alta densidad de población

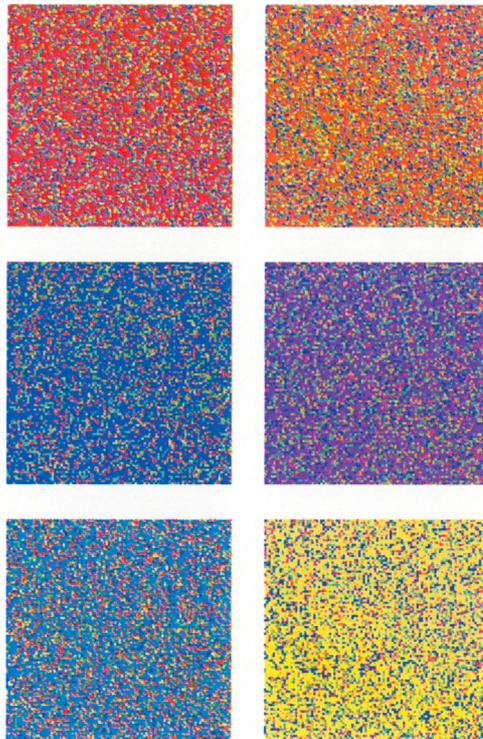


Además, posteriormente hemos descubierto que la periodicidad que muestra este último gráfico es característica de los denominados sistemas de medio excitable, que tienen lugar en muchos fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales, tales como la

formación de estrellas en las galaxias de disco espiral o las epidemias de enfermedades infecciosas.

Un medio excitable consiste en elementos distribuidos en un espacio y que experimentan lo que llamamos un ciclo de *excitación-refracción-receptividad*. Este ciclo es el que afecta a un elemento que inicialmente se encuentra en un estado de pasividad y que es excitado como consecuencia de la interacción con un elemento adyacente en estado excitado. Pero, en vez de permanecer excitado, al cabo de un cierto tiempo vuelve a su estado original de inactividad, en que es de nuevo receptivo a ser excitado.

Por lo tanto, este mismo modelo sirve para predecir la expansión de un fuego en un bosque o incluso modelar la difusión de una epidemia en una población cuyos individuos pueden ser inmunes a la enfermedad, estar infectados o ser susceptibles de ser infectados.



Estos gráficos representan el estado de una población en varias etapas de la epidemia, donde el color de cada individuo simboliza su grado de infección o inmunidad.

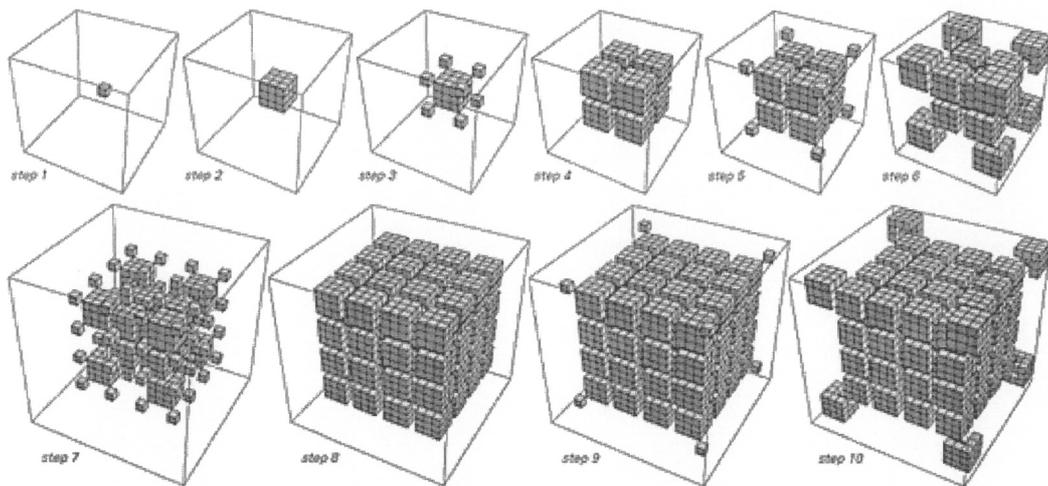
## ***Modelo depredador-presa***

Si bien es cierto que en el modelo anterior hemos añadido un componente esencial en las especies, a saber, la movilidad de los individuos (que está relacionado con el espacio y la posición correspondiente a cada elemento de la población), lo hemos hecho en detrimento de la evolución en si misma. La idea que pretendemos comunicar es que, hasta el momento, hemos tomado en consideración factores aislados. En el primer modelo analizábamos la repercusión de los fenómenos de natalidad y mortalidad en la población, mientras que en el segundo nos centrábamos en el desplazamiento de los individuos por el espacio marcado. No obstante, incurriríamos en un error si consideráramos que los factores de cambio en una especie fuesen únicos, dado que es el conjunto de influencias que intervienen en la evolución de una población dada la que determina sus transformaciones.

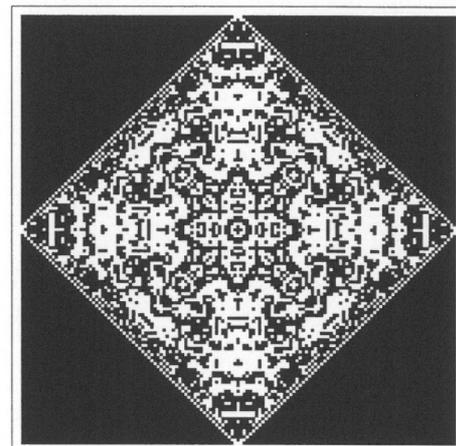
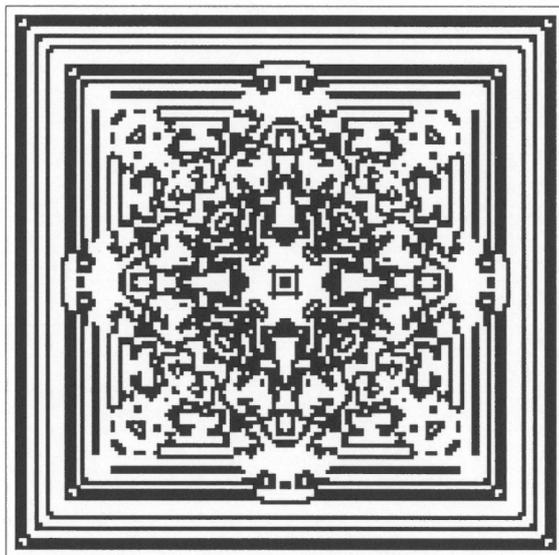
Por este motivo, mediante la modificación de ciertos parámetros y aplicando distintas reglas, procuraremos llegar a simulaciones más complejas. Nos adentraremos pues en el campo de la ecología que estudia la interacción entre varias poblaciones, centrándonos principalmente en el modelo depredador-presa, puesto que tiene su respectivo modelo en el dominio de las ecuaciones diferenciales.

Con el propósito de realizar un enfoque sobre este tradicional prototipo de competencia entre especies a partir de un modelo discreto, emplearemos un autómata celular bidimensional que represente el territorio en el que depredador y presa cohabitan.

La elección del tipo de autómata celular que utilizamos para cada ecosistema es fundamental, ya que si tratásemos el ejemplo que hemos propuesto en la sección de ecuaciones diferenciales, en que estudiamos la evolución de una pecera donde existe una única especie de peces, deberíamos desarrollar un autómata celular en tres dimensiones. No es lo mismo considerar un espacio con volumen –tales como en una pecera o los pájaros en el aire– donde los individuos están distribuidos en distintos niveles y profundidades, que si contemplamos un espacio en el que la población se encuentra repartida en una superficie. En el primer caso, emplearíamos un autómata celular en tres dimensiones –aunque deberíamos redefinir el tipo de adyacencia aplicada al modelo–,



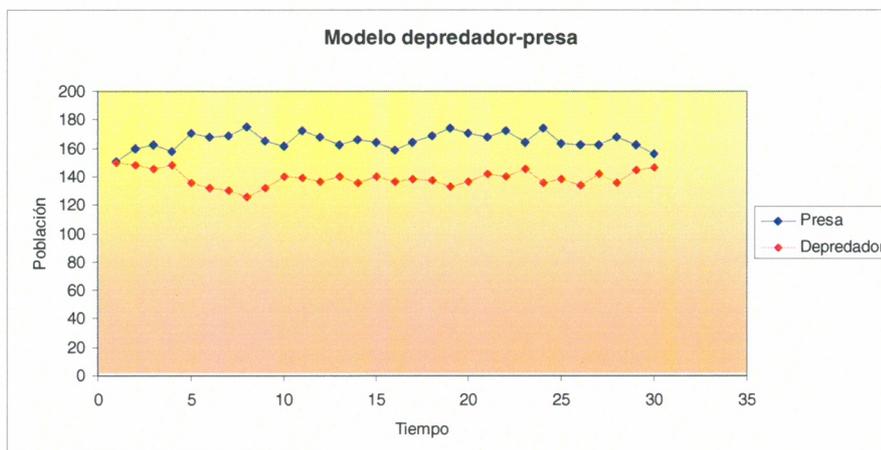
A pesar de que nuestro mundo está configurado como un realidad tridimensional, en el segundo caso podemos reducir el sistema a un modelo bidimensional, cosa que simplifica su computabilidad.



Así pues, concebiremos un modelo CA bidimensional en el que habrá celdas ocupadas por seres predadores o bien por presas, a las que aplicaremos las reglas de nacimiento, supervivencia y muerte que establecíamos en el primer modelo. También tendremos en cuenta que los predadores pueden desplazarse por el terreno, tal como mostrábamos en el segundo modelo. No obstante, incorporaremos la condición de que si el predador lleva cierto tiempo sin comer, puede morir por inanición, cosa que no implica

que el predador esté continuamente en busca de presa, tal como presuponen los modelos de Lotka-Volterra en las ecuaciones diferenciales.

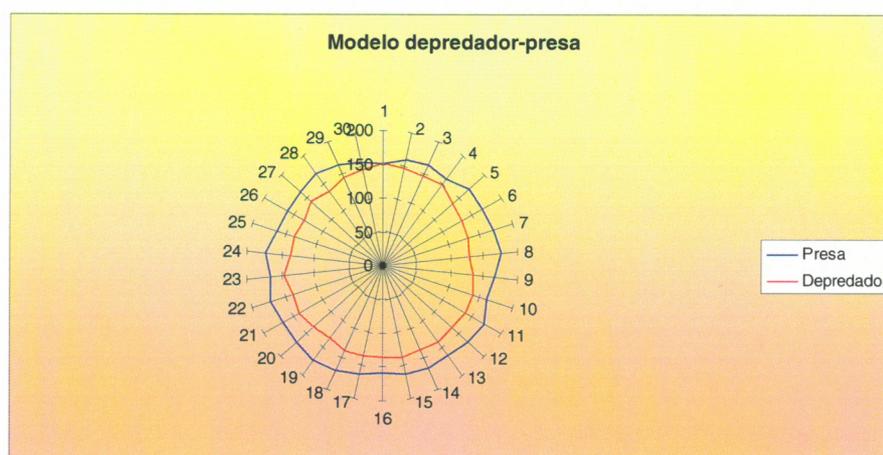
Al mismo tiempo que nuestro programa realiza las distintas funciones que le hemos designado, introduciremos unos contadores que calculen la densidad de población de cada una de las dos especies por cada generación. Si extrapolamos dicha información a un gráfico, observaremos fluctuaciones oscilatorias entre las densidades de población de presas y de predadores, de tal modo que se establece una relación de dependencia entre ambas que genera un comportamiento cíclico, cosa que también podemos constatar en la simulación visual del autómatas celular.



Este tipo de comportamiento es el correspondiente a los autómatas celulares de clase 2, sean cuales sean las condiciones iniciales que determinemos para el sistema, tal como ya habíamos comentado previamente en la sección de semejanzas con la Naturaleza. Así pues, nos hallamos frente a un método alternativo que logra establecer las mismas conclusiones y relaciones que los modelos Lotka-Volterra, motivo por el que es igual de válido que éste último. Además, presenta una gran ventaja con respecto al método tradicional dado que permite obtener una representación espacial de gran utilidad a la hora de estudiar con más profundidad el comportamiento de ambas especies.

Por esta razón también podemos constatar que cuando trabajamos con densidades de población bajas, sucede un fenómeno similar al que ocurría con la colonia de hormigas, puesto que el contacto entre presa y predador es más esporádico. No obstante, esta menor frecuencia de interacción entre ambas especies no afecta al

comportamiento general del sistema, conservándose así el patrón cíclico, pero sí que hay una alteración en la relación numérica. De modo que si recurriésemos a las representaciones gráficas de ecuaciones diferenciales observaríamos que la trayectoria cerrada sería de menor tamaño, acercándose al punto de equilibrio central.



Por el contrario, si introdujésemos una fuerza externa al sistema que fuese mermando los efectivos de cada población, sí que constataríamos una ruptura en el comportamiento cíclico del sistema en cuestión. Del mismo modo como en ecuaciones diferenciales este cambio causado por la fuerza externa comporta una variación de la trayectoria, convirtiéndose entonces en una espiral, en los autómatas celulares se traduce por un cambio en la clase de modelo CA.

Por lo tanto, si programamos que en un momento predeterminado o aleatorio se produzca la intervención de una fuerza externa al sistema que modifique la evolución de las poblaciones, pasaremos de estar considerando un autómata celular de clase 2 a uno de clase 3 o 4. El tipo de autómata celular obtenido variará según de qué tipo de fuerza se trate, ya que, tal como habíamos mencionado en el apartado de clasificación de autómatas celulares, todo depende de si la fuerza actúa a nivel global o a pequeña escala y de si es una fuerza puntual o continua. Además, también habrá que tener en cuenta los casos límite en que la distinción entre las distintas clases resulta en una cuestión francamente subjetiva.

En definitiva, cabe remarcar el carácter “camaleónico” de los autómatas celulares, dado que la esencia de su capacidad de representar un sistema ecológico radica en la elección de las normas que determinarán sus progresivas transformaciones y en la influencia que ejercen las condiciones iniciales del sistema. Pero una vez logrados estos dos puntos, en principio, no debería existir límite alguno que impidiese predecir la evolución de las poblaciones estudiadas. A pesar de ello, hay sistemas en que la infinidad de factores que intervienen en este proceso suponen un límite teórico en cuanto a lo que a su programación se refiere. Sin embargo, la existencia o la inexistencia de este límite al aspirar a la simplificación la complejidad es un tema muy amplio y polémico que discutiremos brevemente en la conclusión.

## CONCLUSIÓN

### Comparación de los métodos de estudio de la evolución de las poblaciones

En este trabajo hemos mostrado el funcionamiento de los dos principales métodos empleados para el estudio de la evolución de las poblaciones: las ecuaciones diferenciales y los autómatas celulares. El primer método se considera más tradicional ya que goza de ventaja histórica frente al segundo. El método de las células autómatas es más innovador y ofrece nuevas posibilidades en el estudio de las poblaciones que probablemente le harán ganar posiciones en la cúspide de las matemáticas dentro de unos años.

<b>Ecuaciones diferenciales.</b>	<b>Autómatas celulares.</b>
Representación esencialmente de modelos continuos; los modelos discretos son de gran complejidad en este lenguaje.	Representación de modelos discretos, además de continuos, con mayor facilidad.
Obtención de información principalmente cuantitativa	Obtención de información cuantitativa y cualitativa a la vez.
Intervención no siempre directa del factor tiempo, dependiendo del modelo estudiado.	Intervención siempre directa del factor tiempo.
Reducción de los factores externos a constantes pertenecientes a las ecuaciones de evolución del sistema.	Posibilidad de estudio de cada factor externo de manera aislada, en tanto que norma del sistema.

### ***Sistemas discretos versus continuos.***

Una de las diferencias esenciales entre ambos métodos es que al tratar con ecuaciones diferenciales estamos empleando un modelo continuo. En cambio, los modelos basados en autómatas celulares, o al menos todos los que hemos estudiado en secciones anteriores, a pesar de sus divergencias estructurales, son discretos.

En un principio trabajamos con autómatas celulares en que sus celdas sólo pueden adoptar un conjunto determinado de formas posibles, generalmente blanco y negro, cosa que se traduce en 0 y 1 a la hora de implementarlo en un programa. Sin embargo, si introducimos una graduación continua de grises, tal como habíamos explicado en la sección acerca de modelos CA, mediante una combinación de reglas totalísticas y mapas iterativos, conseguiremos reducir el carácter discreto del autómata celular, sin que, por ello, la complejidad del sistema se vea mermada. Un modelo de estas características permitiría introducir el factor de la edad o la capacidad de resistencia de la población, hecho que aproximaría el modelo a la realidad, ya que hasta el momento hemos considerado que la vida de los individuos es ilimitada mientras no se encuentren en condiciones extremas. No obstante, la resistencia a factores de peligro depende también de la energía del individuo y de su estado físico, de modo que esta graduación es idónea para representar la infinidad de posibles circunstancias en que se halle cada individuo.

Asimismo, al igual como hemos eliminado cierto grado de discreción que existe en los autómatas celulares ordinarios, también podemos alterar la manera como actualizamos dichos modelos, de modo que no sea discreto en lo que al tiempo se refiere. No obstante, resulta sorprendente el hecho de que para poder realizar este paso hacia una mejora de los modelos planteados hasta el momento, debemos recurrir a las ecuaciones diferenciales, porque en vez de determinar un grado de gris en un momento y en una celda concretos, debemos suponer que existe un cierto grado de gris para cada momento en el tiempo y en cada punto del espacio. En otras palabras, es como si lleváramos nuestro sistema hasta el límite en que cada celda fuese de un tamaño infinitesimal y en que cada paso en el tiempo fuese también infinitesimal. Dicha situación nos remite a las ecuaciones diferenciales parciales, puesto que debemos especificar una tasa en que cada grado de gris sea modificado en función del tiempo en cada punto del espacio. De hecho, ninguna población de seres vivos evoluciona repentinamente de un día para otro; sino que se trata de una progresión que, a nivel macroscópico, conlleva una serie de cambios en la población, del mismo modo como también comporta alteraciones a nivel microscópico que modifican la existencia de los individuos.

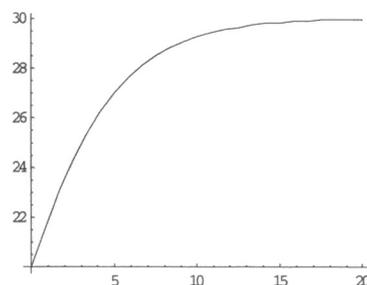
Así pues, al intentar aproximarnos a un modelo más verosímil se establece entre ambos modelos matemáticos un punto de conexión en que se fusionan para dar lugar a una esquematización realista de la complejidad observada en la vida natural.

Además, una de las mayores ventajas que ofrecen los sistemas discretos es que pueden ser estudiados más directamente que los continuos, no solamente porque son fácilmente implementados mediante sencillos programas informáticos que permiten una gran facilidad de experimentación, sino también por la representación visual que indica el comportamiento del sistema a largo plazo. Asimismo, los sistemas discretos resultan más lógicos, porque toman en consideración individuos concretos, es decir, cada individuo es una unidad, mientras que en las ecuaciones diferenciales podemos estar trabajando con fracciones de individuos, por ejemplo, una población de 20,7 bacterias. Por una parte, esta particularidad nos define un modelo más realista en el caso de los autómatas celulares, aunque, por otra parte, nos impide predecir el futuro inmediato de cada ser. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales nos permiten conocer el proyecto de reproducción o desaparición de los individuos, mientras que en los modelos discretos nos es imposible determinar los cambios que ocurren entre los intervalos que hemos definido. Para ilustrar este caso, cabe mencionar que en los autómatas celulares podemos pasar de una población  $x$  a una que tenga  $x + k$  individuos sin constatar la transición entre ambos estados.

Por lo que, aparte de aportar un análisis cuantitativo y cualitativo, los autómatas celulares no requieren un profundo análisis de ecuaciones que suelen incurrir en el error de distanciarse de la realidad por lo que al espacio y posición se refiere.

### ***Información cuantitativa y cualitativa: distribución en el espacio.***

En lo que se refiere al tipo de predicción que ofrecen los dos métodos de análisis estudiados, cabe destacar que ambos utilizan sistemas de expresión distintos y, por lo tanto, ofrecen informaciones que pueden llegar a complementarse. Por un lado, las ecuaciones diferenciales emplean los gráficos tradicionales, de modo que tienen un carácter puramente matemático, y tienen por objetivo brindar una evolución esencialmente cuantitativa de la población, tal y como podemos observar en este gráfico genérico.



Por otro lado, los autómatas celulares trabajan con una combinación de matemáticas e informática, ya que se rigen por un tipo de reglas más general, dado que el uso de ordenadores permite la implementación de una gran variedad de normas diseñadas para realizar operaciones más concretas. Con lo cual, a través de un simple programa informático podemos llegar a integrar un conjunto de normas muy diversas que traducen la complejidad de una población a un tipo de representación gráfica no convencional que comprende a la vez información cuantitativa y cualitativa. Entendemos por cambios cuantitativos el crecimiento numérico del sistema en cuestión y por cualitativos los cambios de ubicación de cada individuo en función del tiempo y de los factores tanto externos como internos del sistema. Con este nuevo procedimiento se puede conocer, además de cuántos individuos sobrevivirán y cuántos morirán, dónde estarán situados los supervivientes en todo momento, tal y como podemos observar en el siguiente gráfico.



Además, podemos incluso trabajar con distintas dimensiones, cosa que nos permitiría tomar en consideración, por ejemplo en el caso de la población de peces en una pecera, el hecho de que los peces están en un espacio tridimensional, de modo, que no debemos referirnos a un tipo de interacción nueva que la bidimensionalidad de las ecuaciones diferenciales no nos permitía considerar. Por último, encontramos también el tema del movimiento. los autómatas celulares nos permiten considerar el movimiento de los individuos de una especie, mientras que en las ecuaciones diferenciales este movimiento no se considera.

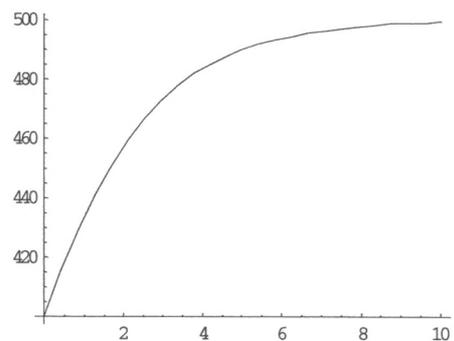
Finalmente, hay que añadir que los autómatas celulares no sólo ofrecen una simulación visual sino que también otros tipos de representaciones como es el caso de las auditivas, cosa que les otorga unas propiedades inexistentes en las ecuaciones diferenciales y muy útiles a la hora de estudiar y entender una población.

## ***Intervención del tiempo***

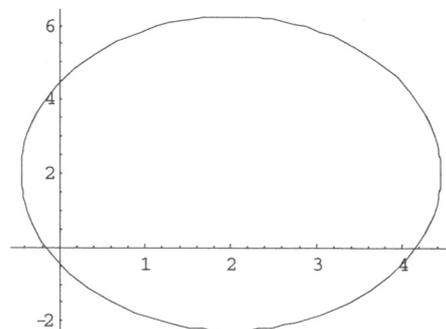
En cuanto al papel que juega el tiempo en los modelos, vamos a concentrarnos en la manera de plasmar el concepto de evolución en cada método. En el caso de las ecuaciones diferenciales, distinguiremos entre los dos modelos estudiados: la evolución de una población de peces y la evolución de un modelo depredador-presa. En el primer ejemplo, hemos observado una intervención directa del tiempo en el crecimiento o decrecimiento de la población de peces cosa que vemos en el gráfico correspondiente, ya que, a medida que transcurre, éste tiende a un equilibrio, a un límite. Sin embargo, en el segundo caso, constatamos que el tiempo influye indirectamente en dicha representación puesto que, lo que la condiciona realmente son las interacciones entre los depredadores y las presas. El factor tiempo viene implícito en el crecimiento de las dos especies y por lo tanto influye en dicho contacto, pero no aparece plasmado directamente en la simulación del sistema. Así pues, no podemos saber por un determinado momento en qué condiciones se halla el sistema.

### Gráficos comparativos.

Modelo de peces en una pecera. (El eje de la abcisas corresponde al tiempo y el de las ordenadas a la población de peces.)



Modelo depredador-presa. (El eje de las abcisas corresponde a la población de presas, mientras que el de la ordenadas corresponde a la población de depredadores)



Por lo que a los autómatas celulares se refiere, el factor del tiempo siempre está presente directamente en el sistema, ya que su representación visual muestra consecutivamente el estado de la población que estamos estudiando, mediante lo que hemos denominado pasos. De este modo, siempre podemos acceder a la distribución y al número de individuos que hay en cada instante. Por lo tanto, en el método de las células autómatas tiempo y evolución están íntimamente relacionados a la hora de modelar una o más poblaciones. Así pues, la perspectiva desde la que trabajan los autómatas celulares es la misma que rige a la evolución en el mundo real.

### ***Factores externos***

En el estudio de toda población debemos considerar siempre los factores externos que inciden en ella. Ahora bien, estos factores se manifiestan a través de distintos medios dependiendo del sistema de modelación que sigamos.

Por un lado, dado que en las ecuaciones diferenciales trabajamos con una base puramente numérica dichas influencias son reducidas a determinadas constantes que figuran en las ecuaciones que simbolizan cada población. Según el valor que otorguemos a las constantes estaremos determinando el grado de incidencia de los factores sobre la población de manera que su posibilidad de alcanzar el equilibrio estará subordinada a los mismos.

Por otro lado, tal y como ya hemos explicado anteriormente, los autómatas celulares transforman cada factor externo o interno en una condición integrada en el programa que diseñemos para cada población. Esto nos permite explotar una vertiente más teórica en cuanto a la simulación porque aislando el factor que nos interese estudiar podemos analizar su repercusión en tanto que único incidente. Por lo tanto, no enfocamos nuestra investigación exclusivamente hacia un fin práctico y experimental, sino que también introducimos un aspecto teórico que induce a una clasificación del comportamiento de los autómatas.

## Reflexiones

Todas las interpretaciones propuestas acerca del misterio de qué es la vida y el Universo, de cuáles son sus respectivos orígenes y límites, entre otras cuestiones planteadas por la ciencia y la filosofía, en principio, son igual de válidas. No es más que una cuestión de tiempo y de tecnología el que lleguen a ser falsables o no (referencia a la teoría sobre la ciencia de Karl Popper). En cierto modo, nuestro trabajo consiste en destacar que no podemos asumir que exista un método ideal para representar la realidad, puesto que por ahora no ha sido encontrada ninguna teoría que englobe y comprenda racionalmente el universo en su totalidad.

Al centrarnos en el estudio de poblaciones, hemos constatado que con las ecuaciones diferenciales trabajamos con modelos demasiado idealizados, porque, cuando pretendemos tener en cuenta un gran número de factores que influyan en la población, debemos introducir funciones subyacentes a la ecuación. Pero dicha ecuación variará tanto en función de las condiciones iniciales que no tendrá sentido el intentar predecir su evolución. En cambio, en lo que a los autómatas celulares se refiere, se trata de un estudio que se basa en la aceptación de que la naturaleza es discreta, en vez de continua, idea que hasta hoy en día compartían los científicos desde hace siglos.

Por consiguiente, nos hallamos ante el dilema surgido de estas dos visiones del Universo, distintas pero complementarias. La primera de ellas, fundada a partir de las matemáticas tradicionales, es la que defiende una concepción analítica, mientras que los algoritmos han dado lugar a una segunda opción, una visión computacional del Universo, cuya idea central es la teoría de información algorítmica (AIT), según la cual comprensión significa compresión. Es decir, aspira a encontrar "la hipótesis más simple pero la más rica en fenómenos", objetivo que comparten con la ciencia tradicional.

La diferencia, sin embargo, radica en que, según esta última interpretación, la complejidad en la Naturaleza es el resultado de una aplicación repetitiva de transformaciones computacionales, cosa que ha propiciado la aparición de la denominada

filosofía digital. Esta filosofía tiene su origen en la obra de Richard Feynman, Cybernetics (1948), en la que conjetura un Universo basado en la transformación de información; en otras palabras, la realidad no estaría constituida por materia y energía, o lo que es lo mismo, por partículas, sino como bits de data modificados en función de normas computacionales (Edward Fredkin).

No obstante, esta concepción es duramente criticada por científicos como Ray Kurzweil, principal impulsador de la inteligencia artificial, quien afirma que la complejidad es un *continuum* y que la información debe tener un propósito. Así pues, el estudio del Universo como un fenómeno digital en que tanto el tiempo como el espacio son discretos y las leyes físicas deterministas es un tema muy debatido actualmente. Por este motivo, hay quienes sugieren que el espacio consiste en una red de infinitos puntos aislados, similares a las celdas de un autómata celular, en el que el tiempo transcurre en momentos discretos, concluyendo pues que el Universo puede ser imaginado como un autómata celular, un enorme ordenador. En cambio, sus detractores argumentan que los autómatas celulares no evolucionan suficientemente como para poder generar vida, ya que alcanzan una asíntota que limita su orden de complejidad.

En realidad, en una época en que la tecnología digital está sustituyendo a la analógica, es decir, que la representación discreta de la evolución de las magnitudes reemplaza a la continua, nos enfrentamos al dilema de ver si la naturaleza primordial de la realidad es analógica o digital. Nosotras, por el momento, preferimos mantenernos al margen sin decantarnos por ninguna de las concepciones del Universo ya mencionadas. Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, tal como hemos mostrado en la comparación de cada sistema o visión aplicados a un dominio muy restringido de la ciencia como son los modelos de poblaciones. Por lo tanto, la superposición y complementación de ambas confieren universalidad a la vez que consistencia a nuestra concepción de la realidad.

## BIBLIOGRAFÍA

BLANCHARD, Paul, DEVANEY, Robert L. y HALL, Glen R. *Ecuaciones diferenciales*. (1999). Méjico, International Thomson Editores, S. A. de C. V.

GOLDSTEIN, Larry J., LAY, David C. y SCHNEIDER, David I. *Calculus and its applications*. (1980). EEUU (New Jersey), Prentice-Hall, Inc.

KAPUR, J. N. *Mathematical Modelling*. (1988). India (New Delhi), Wiley Eastern Limited.

NISHIDATE, Kazume y GAYLORD, Richard. *Modeling Nature*. New York. (1996). Telos.

RUCKER, Rudy. "Review of *A New Kind of Science*", publicado en *The American Mathematical Monthly* (volumen 110, número 9), págs. 851-861, noviembre 2002.

SEWELL, Michael. *Mathematical Masterclasses*. (1997). EEUU (New York), Oxford University Press Inc.

SWIFT, Randall y MOONEY, Douglas. *A Course in Mathematical Modelling*. (1999). EEUU, The Mathematical Association of America (Incorporated).

WOLFRAM, Stephen. *A New Kind of Science*. (2002). Canada, Wolfram Media Inc.

<http://digital.el-esceptico.org/leer.php?id=1166&autor=248&tema=3>

[http://www.math.usf.edu/~eclark/ANKOS\\_zuse\\_fredkin\\_thesis.html](http://www.math.usf.edu/~eclark/ANKOS_zuse_fredkin_thesis.html)

<http://www.idsia.ch/~juergen/computeruniverse.html>

<http://digitalphysics.org/Faq/>

<http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/dhb-wolfram.pdf>

<http://www.ams.org/notices/200302/fea-gray.pdf>

[http://arxiv.org/PS\\_cache/quant-ph/pdf/0206/0206089.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/quant-ph/pdf/0206/0206089.pdf)

<http://www.nybooks.com/articles/15762>

<http://www.kurzweilai.net/meme/frame.html?main=/articles/art0464.html>

<http://www.digitalphilosophy.org/>

<http://www.wolframscience.com>

## ANEXO.

En este apartado hemos decidido incluir los programas más significativos con sus representaciones gráficas correspondientes, mediante los cuales hemos realizado la parte experimental de nuestro estudio. Las únicas imágenes no generadas por dichos programas las encontramos en las páginas 70, 71, 72 y 92 (figura superior).

### Modelación con ecuaciones diferenciales.

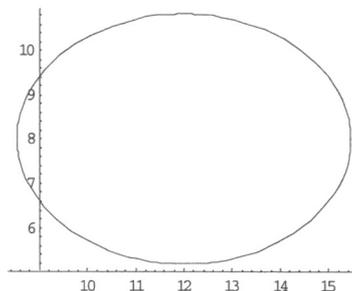
- **Modelo depredador-presa.**

(Programa estándar facilitado por *Mathematica 5.0*)

```
Off[General::spell, General::spell1];
Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];

system = GetNDSolveProblem["LotkaVolterra"];
invts = system["Invariants"];
time = system["TimeData"];
vars = system["DependentVariables"];
step = 3/25;

LotkaVolterraPlot[sol_, vars_, time_, opts___?OptionQ]:=
ParametricPlot[Evaluate[vars/.
sol],time,Evaluate[FilterOptions[ParametricPlot,opts]],
Axes->False,Frame->True,FrameLabel->Join[Map[TraditionalForm,vars],{None,
None}],RotateLabel->False]
```

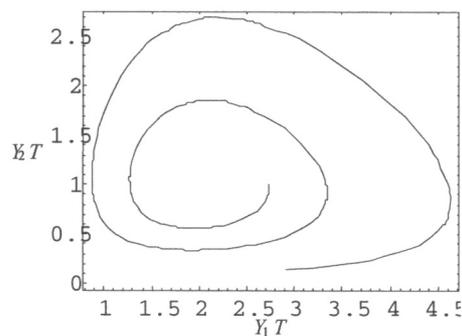


- **Modelo depredador-presa en espiral.**

(Programa estándar facilitado por *Mathematica 5.0*)

```
Off[General::spell, General::spell1];
Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];

system = GetNDSolveProblem["LotkaVolterra"];
invts = system["Invariants"];
time = system["TimeData"];
vars = system["DependentVariables"];
step = 3/25;
LotkaVolterraPlot[sol_, vars_, time_, opts___?OptionQ]:=
ParametricPlot[Evaluate[vars/.
sol],time,Evaluate[FilterOptions[ParametricPlot,opts]],
Axes->False,Frame->True,FrameLabel->Join[Map[TraditionalForm,vars],{None,
None}],RotateLabel->False]
fesol = NDSolve[system,Method->"ExplicitEuler",StartingStepSize->step];
```



### Modelación con autómatas celulares.

- **Representación gráfica de autómatas celulares 1D**

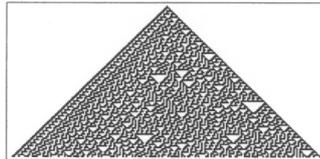
(Programa común a todos los autómatas celulares unidimensionales)

```
CAPlot[data_] := ListDensidadPlot[Reverse[Max[data] - data], AspectRatio -  
> Automatic, Mesh -> False, FrameTicks -> None]
```

*(Ejemplo de unas posibles condiciones iniciales y reglas que generen CA 1D)*

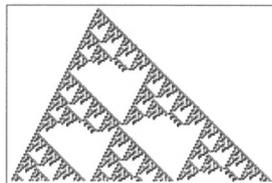
*(1. Autómatas celulares de dos posibles colores)*

```
CAPlot[CellularAutomaton[30, {{1}, 0}, 100]]
```



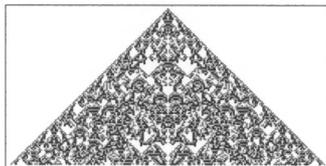
*(2. Autómatas celulares de tres posibles colores)*

```
CAPlot[CellularAutomaton[{921408, 3, 1}, {{1}, 0}, 100]]
```



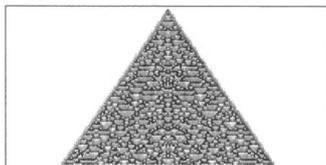
*(3. Autómatas celulares totalísticos)*

```
CAPlot[CellularAutomaton[{867, {3, 1}, 1}, {{1}, 0}, 100]]
```



*(4. Autómatas celulares continuos)*

```
CAPlot[CellularAutomaton[{Mod[1/2 Apply[Plus, #], 1] &, {}, 1}, {{1}, 0}, 100]]
```



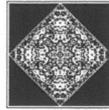
- **Representación gráfica de autómatas celulares bidimensionales**

*(Programa común a todos los autómatas celulares bidimensionales)*

```

CAPlot[data_]:=ListDensidadPlot[Reverse[Max[data]-
data],AspectRatio□Automatic, Mesh□False, FrameTicks□None]
(Ejemplo de unas posibles condiciones iniciales y reglas que generen CA 2D)
code797={797,{2,1},{1,1}};CAPlot[First[CellularAutomaton[code797,{{{1}},
0},70,-1]]]

```



- **1º Programa para simular el Game of Life (Turbo Pascal)**

```

uses crt, graph;
const s=4;
(determinación de las variables)
var te:text;
    n,m,i,j,gd,gm,k,x,y:integer;
    t,t1:array[0..6,0..6] of integer;
    a,b:array[1..8] of integer;
    l,c,r:word;

(tipo de adyacencia Moore y representación gráfica)
procedure intro;
begin
a[1]:=1; b[1]:=1;   a[2]:=1; b[2]:=0;   a[3]:=1; b[3]:=-1;   a[4]:=0; b[4]:=1;
a[5]:=0; b[5]:=-1; a[6]:=-1; b[6]:=1;   a[7]:=-1; b[7]:=0;   a[8]:=-1; b[8]:=-1;
readln(te,n,m); y:=100;
for i:=1 to n do begin
    x:=100;
    for j:=1 to m do begin
        read(te,r); t[i,j]:=r; if t[i,j]=1 then pieslice(x,y,0,360,4); x:=x+15; end;
        y:=y+15;
    end;
end;
readln;

```

**end;**

**begin**

initgraph(gd, gm, 'c:\tp7\bgi');

assign(te, 'life.in'); reset(te);

clrscr;

intro;

*(actualización de cada generación según las normas ya expuestas en el trabajo)*

**for k:=1 to s do begin**

**for i:=1 to n do**

**for j:=1 to m do begin**

            c:=0;

**for l:=1 to 8 do if t[i+a[l],j+b[l]]=1 then inc(c);**

**if (t[i,j]=1) and ((c>3) or (c<2)) then t1[i,j]:=0**

**else begin**

**if (t[i,j]=1) then t1[i,j]:=1**

**else**

**if ((c=2) or (c=3)) then t1[i,j]:=1 else t1[i,j]:=0;**

**end;**

**end;**

        clrscr;    x:=100;    y:=100;

**for i:=1 to n do begin**

        x:=100;

**for j:=1 to m do begin**

            t[i,j]:=t1[i,j];

**if t[i,j]=1 then pieslice(x,y,0,360,4);**

            x:=x+15;

**end;**

        y:=y+15;

**end;**

readln;

end;

closegraph; end.

- **2º Programa para simular el Game of Life (Mathematica 5.0)**

(adaptación del programa propuesto por K. Nishidate y R. Gaylord)

*(determinación de las reglas que influirán en la evolución de la población)*

GameLife[n\_,t\_] :=

Module[{initConfig,MooreNbrhd,update,Supervivencia,MortCond},

initConfig = Table[Random[Integer],{n},{n}];

Supervivencia=Join[(Join[{0},#1]&)/@Permutations[{1,1,1,0,0,0,0}],(Join[{1},#1]&)/@Permutations[{1,1,1,0,0,0,0}],(Join[{1},#1]&)/@Permutations[{1,1,0,0,0,0,0}]]];

MortCond=Complement[Flatten[Permutations/@(Join[Table[1,{#1}],Table[0,{9-#1}]]&)/@Range[0,9],1],Supervivencia];

Apply[(update[##1]=1)&,Supervivencia,1];

Apply[(update[##1]=0)&,MortCond,1];Moore[func\_\_,lat\_] := MapThread[func,(RotateRight[lat,#1]&)/@{{0,0},{1,0},{0,-1},{-1,0},{0,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1}},2];FixedPointList[Moore[update,#1]&,initConfig,t]]

*(actualización de cada generación)*

LifeGoesOn[n\_,t\_] :=

Module[{initConfig,MooreNghbrs,update},initConfig=Table[Random[Integer],{n},{n}];update[1,3]:=1;update[0,3]:=1;update[1,4]:=1;update[\_,\_]:=0;

*(tipo de adyacencia Moore)*

Moore[func\_\_,lat\_] := MapThread[func,(RotateRight[lat,#1]&)/@{{0,0},{1,0},{0,-1},{-1,0},{0,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1}},2];

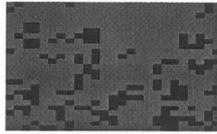
*(determinación de la representación gráfica)*

FixedPointList[MapThread[update,{#1,Moore[Plus,#1]},2]&,initConfig,t]]

ShowLife[list\_,opts\_\_\_] := (Show[Graphics[RasterArray[Reverse[list[]#1[]/.{1[]RGBColor[0,0,0],0[]RGBColor[0,0,1]}]]],opts]&)/@Range[Length[list]]

*(Ejecución del programa)*

ShowLife[GameLife[25,500]];



- **Programa para simular la colonia de hormigas (Mathematica 5.0)**  
(adaptación del programa propuesto por K. Nishidate y R. Gaylord)

*(determinación de la situación inicial de la colonia)*

```
colHormig[n_,p_,s_,r_,t_]:=Module[{horPoblacion,horCol,border,hor},
  horPoblacion =Table[{{-1, 1, 2, 3, 4} □Random[Integer,{1,5}] □,
Random[Integer,{1,s}]]
  Floor[Random[]+p],{n-1},{n-1}]/. {-1,_}□{-1,0};
  border=Append[(Append[#1,{b,0}]&)/@#1,Table[{b,0},{Length[#1]+1}]];
  horCol =border[horPoblacion];
  RND:=Random[Integer,{1,4}];
```

*(una hormiga pasiva se activa al tener otra activa en la proximidad)*

```
hor[{-1,0},{x_?Positive,_},_,_,_,_,_,_,_,_ horCol]:={RND,1};
hor[{-1,0},_,{x_?Positive,_},_,_,_,_,_,_,_] :={RND,1};
hor[{-1,0},_,_,{x_?Positive,_},_,_,_,_,_,_] :={RND,1};
hor[{-1,0},_,_,_,{x_?Positive,_},_,_,_,_,_] :={RND,1};
```

*(hay una probabilidad r de que la una hormiga en estado pasivo se active)*

```
hor[{-1,0},_,_,_,_,_,_,_,_,_] :=({-1+#1
Random[Integer,{2,5}],#1}&)[Floor[Random[]+r]];
```

*(transcurrido un tiempo s, una hormiga activa se vuelve pasiva)*

```
hor[{x_?Positive,s},_,_,_,_,_,_,_,_,_] :={-1,0};
```

*(hormiga activa en dirección a una casilla ya ocupada, permanece en reposo y cambia de dirección al azar)*

```
hor[{1,y},{-1 | x_?Positive | b},_,_,_,_,_,_,_,_] :={RND,y+1};
hor[{2,y},_,{-1 | x_?Positive | b},_,_,_,_,_,_,_] :={RND,y+1};
hor[{3,y},_,_,{-1 | x_?Positive | b},_,_,_,_,_,_] :={RND,y+1};
hor[{4,y},_,_,_,{-1 | x_?Positive | b},_,_,_,_,_] :={RND,y+1};
```

*(cuando al mismo tiempo dos hormigas pretenden ocupar una misma celda, ambas permanecne en reposo y cambina de dirección al azar)*

```
hor[{1,y},{0,0},_,_,_,{4},_,_,_,_,_] :={RND,y+1};
```

$\text{hor}[\{1,y\},\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\{2,\},\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{1,y\},\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\{3,\},\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{2,y\},\_,\{0,0\},\_,\_,\{3,\},\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{2,y\},\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\{1,\},\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{2,y\},\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\{4,\},\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{3,y\},\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\{4,\},\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{3,y\},\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\{2,\},\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{3,y\},\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\{1,\},\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{4,y\},\_,\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\{1,\},\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{4,y\},\_,\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\{3,\},\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{4,y\},\_,\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\{2,\},\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$

*(una hormiga activa que se dirige a una celda vacía abandona su celda)*

$\text{hor}[\{1,\},\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{2,\},\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{3,\},\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{4,\},\_,\_,\_,\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$

*(una celda a la que pretenden dirigirse dos hormigas permanecerá vacía)*

$\text{hor}[\{0,0\},\{3,\},\{4,\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\{3,\},\_,\{1,\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\{3,\},\_,\_,\{2,\},\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\_,\{4,\},\{1,\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\_,\{4,\},\_,\{2,\},\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\_,\_,\{1,\},\{2,\},\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$

*(determinación de las celdas que son ocupadas por hormigas activas)*

$\text{hor}[\{0,0\},\{3,y_?(\#1<s\&)\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\_,\{4,y_?(\#1<s\&)\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\_,\_,\{1,y_?(\#1<s\&)\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$   
 $\text{hor}[\{0,0\},\_,\_,\_,\{2,y_?(\#1<s\&)\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{\text{RND},y+1\};$

*(una celda inoculada permanece inalterable)*

$\text{hor}[\{0,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{0,0\};$   
 $\text{hor}[\{b,0\},\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_] := \{b,0\};$

*(tipo de adyacencia von Neumann)*

```

MvonN[func__,lat_]:=MapThread[func,(RotateRight[lat,#1]&)/@{{0,0},{
1,0},{0,-1},{-1,0},{0,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1},{2,0},{0,-2},{-2,0},{0,2}},2];
evolve=NestList[MvonN[hor,#1]&,horCol,t]]

```

*(Ejecución del programa)*

*(1. Población con una densidad de población baja)*

```

SeedRandom[8]
activityHistory=(Count[Flatten[#1,1],{x_?Positive,_}]&)/@Drop[colHor
mig[10,0.1,10,0.15,250],50];
ListPlot[activityHistory,PlotJoined□True,PlotRange□{{0,200},{0,10}},AxesL
abel□
{FontForm["time step","Century",12],FontForm["activity","Century",12]}}];

```

*(2. Población con una densidad de población alta)*

```

SeedRandom[8]
activityHistory=(Count[Flatten[#1,1],{x_?Positive,_}]&)/@Drop[colHor
mig[10,0.9,10,0.15,250],50];
ListPlot[activityHistory,PlotJoined□True,PlotRange□{{0,200},{0,100}},Axes
Label□
{FontForm["time step","Century",12],FontForm["activity","Century",12]}}];

```

- **Programa para simular una epidemia (Mathematica 5.0)**

(programa propuesto por K. Nishidate y R. Gaylord)

*(determinación de las normas que rigen su propagación)*

```

contagi[n_,s_,a_,g_,t_]:=Module[{poblacio,expan,VonNeumann},
poblacio=Table[Floor[1+s·Random[]]*Random[Integer,{1,a+g}],{n},{n}];
(un individuo inmune puede volverse susceptible a ser infectado o ser
infectado)

```

```

expan[0 / (a+g), __, __, __ ]:=0;

```

*(aumento en el grado de infección de un individuo)*

```

expan[x_?Positive, __, __, __ ]:=x+1;
(contagio por contacto de un individuo no inmune)
expan[0, u_, v_, w_, x_] := 1 /;
  MemberQ[Range[a], u/v/w/x];
(tipo de adyacencia von Neumann)
VonNeumann[func__, lat_] := MapThread[func, Map[RotateRight[lat, #] &, {{0, 0},
{1, 0}, {0, -1}, {-1, 0}, {0, 1}}], 2];
NestList[VonNeumann[expan, #] &, poblacio, t]]

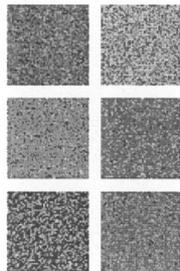
```

*(Ejecución del programa)*

```

SeedRandom[1]
Show[GraphicsArray[Partition[Map[Show[Graphics[RasterArray[#.Thread[
Range[0, Max[#]]] &
Map[Hue, Table[Random[], {Max[#]+1}]]]], DisplayFunction & Identity, AspectR
atio & Automatic] ] &, contagi[100, 0.5, 25, 8, 200][[ {1, 5, 10, 50, 100, 200} ]], 2] ]];

```



- **Programa para simular un sistema predador-presa (Mathematica 5.0)**  
(adaptación del programa propuesto por K. Nishidate y R. Gaylord)

```

PredadorPresas[n_, presaDensidad_, predDensidad_, preg_, muerte_, p_, t_] /; presaDensidad + predDensidad < 1 := Module[{eco, RND, pasture, MvonN},
  RND := Random[Integer, {1, 4}];
  pasture = Table[Floor[Random[] + (presaDensidad + predDensidad)] * Floor[1 + Random[] + predDensidad / (presaDensidad + predDensidad)], {n}, {n}] /. 2 & {RND, Random[Integer, {0, preg}], Random[Integer, {1, muerte}]}];

```

eco[{\\_,0,0},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, preg, muerte}; eco[{\\_,0},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := 0;

eco[{1,a\_,b\_?Positive},0 | 1,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_{4,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{1,a\_,b\_?Positive},0 | 1,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_{2,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{1,a\_,b\_?Positive},0 | 1,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_{3,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{2,a\_,b\_?Positive},\\_,0 | 1,\\_,\\_,\\_{3,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{2,a\_,b\_?Positive},\\_,0 | 1,\\_,\\_,\\_{1,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{2,a\_,b\_?Positive},\\_,0 | 1,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_{4,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{3,a\_,b\_?Positive},\\_,\\_,0 | 1,\\_,\\_,\\_{4,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{3,a\_,b\_?Positive},\\_,\\_,0 | 1,\\_,\\_,\\_{2,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{3,a\_,b\_?Positive},\\_,\\_,0 | 1,\\_,\\_,\\_,\\_,\\_{1,\\_?Positive},\\_,\\_,\\_,\\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{4,a,b\_?Positive},\_,\_,0 | 1,\_,\_{1,\_?Positive},\_,\_,\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{4,a,b\_?Positive},\_,\_,0 | 1,\_,\_{3,\_?Positive},\_,\_,\_] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[{4,a,b\_?Positive},\_,\_,0 | 1,\_,\_,\_,\_{2,\_?Positive}] := {RND, Max[0, a-1], b-1};

eco[1, {3,\_?Positive}, {4,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := 1;

eco[1, {3,\_?Positive}, \_, {1,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := 1;

eco[1, {3,\_?Positive}, \_, {2,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := 1;

eco[1, {4,\_?Positive}, {1,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := 1;

eco[1, {4,\_?Positive}, \_, {2,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := 1;

eco[1, \_, {1,\_?Positive}, {2,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := 1;

eco[0, {3,\_?Positive}, {4,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := Floor[p+Random[]];

eco[0, {3,\_?Positive}, \_, {1,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := Floor[p+Random[]];

eco[0, {3,\_?Positive}, \_, {2,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := Floor[p+Random[]];

eco[0, {4,\_?Positive}, {1,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := Floor[p+Random[]];

eco[0, {4,\_?Positive}, \_, {2,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := Floor[p+Random[]];

eco[0, \_, {1,\_?Positive}, {2,\_?Positive}, \_, \_, \_, \_, \_] := Floor[p+Random[]];

eco[{1,0\_?Positive}, 0 | 1, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := {RND, preg, muerte};

eco[{2,0\_?Positive}, \_, 0 | 1, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := {RND, preg, muerte};

eco[{3,0\_?Positive}, \_, 0 | 1, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := {RND, preg, muerte};

eco[{4,0\_?Positive}, \_, 0 | 1, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := {RND, preg, muerte};

eco[{1,\_?Positive}, 0 | 1, \_, \_, \_, \_, \_, \_] := 0;

```

eco[{2,_,_?Positive},_,0|1,_,_,_,_,_,_,_,_] := 0;
eco[{3,_,_?Positive},_,_,0|1,_,_,_,_,_,_,_] := 0;
eco[{4,_,_?Positive},_,_,_,0|1,_,_,_,_,_,_,_] := 0;
eco[1,{3,0,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,muerte};
eco[1,_{4,0,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,muerte};
eco[1,_,_{1,0,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,muerte};
eco[1,_,_,{2,0,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,muerte};
eco[0,{3,0,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,b-1};
eco[0,_{4,0,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,b-1};
eco[0,_,_{1,0,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,b-1};
eco[0,_,_,{2,0,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,preg,b-1};
eco[1,{3,a,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,muerte};
eco[1,_{4,a,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,muerte};
eco[1,_,_{1,a,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,muerte};
eco[1,_,_,{2,a,_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,muerte};
eco[0,_,_{3,a,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,b-1};
eco[0,_,_{4,a,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,b-1};
eco[0,_,_{1,a,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,b-1};
eco[0,_,_{2,a,b_?Positive},_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,b-1};
eco[{_,a,b},_,_,_,_,_,_,_,_,_] := {RND,a-1,b-1};
eco[1,_,_,_,_,_,_,_,_,_] := 1;
eco[0,_,_,_,_,_,_,_,_,_] := Floor[p+Random[]];

```

```

MvonN[func_,lat_] := MapThread[func,Map[RotateRight[lat,#]&,{0,0},{1,0},{
0,-1},{-1,0},{0,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1},{2,0},{0,-2},{-2,0},{0,2}],2];
NestList[MvonN[eco,#]&,pasture,t]
SeedRandom[2]
graze=PredadorPresas[50,0.3,0.5,2,3,0.1,100];
predadorPop=Map[Count[Flatten[#,1],{__}]&,graze];
presaPop=Map[Count[Flatten[#,1],1]&,graze];
PredPresasPop=Map[Drop[#,20]&,{predadorPop,presaPop}];

```

```
PredPresaPopTimePairs=Map[Transpose[{Range[20,100],#}]&,PredPresaPo  
p];
```