Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas

por

Kronecker

Índice general

Resumen

En este proyecto se realiza una investigación sobre el origen del número e y su importancia en distintos campos de las matemáticas en la actualidad. Para esto nos hemos remontado a la época de Napier y hemos analizado sus textos, en donde encontramos una primera aproximación del valor de e. Posteriormente, hemos analizado en orden cronológico los textos de Oughtred, que da la primera tabla de logaritmos neperianos y los de Speidell, que contribuyó a los logaritmos facilitando su uso y dio una segunda aproximación del valor de e; los de Leibniz, primer matemático que usa e como la constante que hoy conocemos, aunque le llama b; los de Jacob Bernouilli, que utiliza por primera vez la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ al estudiar el interés compuesto y acota dicha expresión; y los de Euler, en los que se define e y se exponen algunas de las propiedades de e. Para estudiar las aplicaciones en matemáticas hemos analizado otros textos de Euler en los que obtiene la fórmula que lleva su nombre, hemos examinado escritos de De Moivre sobre la distribución normal y un artículo de Fourier en el que introduce su serie para representar funciones periódicas.

Abstract

In this project we have researched the origin of the number e and its importance in different areas of mathematics nowadays. For this purpose we have gone back to Napier's time and we have analysed his texts to see where we can find an approximation of the value of e. Later on we have analysed, in chronological order, the texts of Oughtred, who created the first table of napierian logarithms, and those from Speidell, who contributed to the logarithms research to simplify their use and who gave a second approximation of e's value. Then we reviewed Leibniz texts, the first mathematic to use e as the constant that we currently use, although he named it b. Afterwards we focused on Jacob Bernouilli's texts, who used for the first time the expression $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ when studying compound interest and he limited the expression. Finally we studied the texts from Leonhard Euler where e is defined and some of its properties are explained. To research e's mathematical applications we have analysed more texts from Euler where he obtained his formula, writings from De Moivre about the normal distribution and an article from Fourier where he introduced his series for representing periodic functions.

Introducción

Al entrar a cuarto de la ESO empecé a interesarme por las matemáticas y varias ramas relacionadas, por lo que decidí investigar y avanzar por mi cuenta. Al llegar a una expresión que no pude comprender le pregunté a mi profesora si me podía aclarar lo que significaba. Ella me explicó que la letra e que veía en la fórmula no era otra variable, sino una constante cuyo valor aproximado es 2.71. Al principio me pareció natural ya que conocía otras constantes como π o φ, pero conforme avancé investigando me sorprendió la frecuencia con la que aparecía en campos tan dispares dentro de la propia matemática. También me sorprendió la propia definición de la constante, siendo muy distinta a las de las otras estudiadas durante la ESO y bachillerato: π es el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro y φ es el cociente entre dos segmentos a y b, donde a es mayor que b, cuando este cociente es igual a la división entre la suma de los dos segmentos y el segmento a; sin embargo e se define mediante el límite de una función, la cual es “rara” para las que se suelen ver a niveles bajos. Por todo esto me surgieron varias preguntas:

– ¿Cuál es el motivo por el que aparece e tan frecuentemente en todos los campos de las matemáticas?

– ¿Cómo se ha llegado a la definición de e?

Busqué en internet y en revistas de matemáticas la respuesta a estas preguntas y sólo encontré algunos artículos en los que se hablaba, sobre todo, del origen de los logaritmos. Por este motivo, decidí que mi trabajo de investigación de bachillerato fuese sobre el número e, tanto indagando en su origen como buscando sus aplicaciones. Como primer paso a la realización del proyecto definí mis objetivos y establecí unas hipótesis que trataría de demostrar o refutar.

Objetivos

Los objetivos generales de este trabajo son:

– Encontrar el proceso que se sigue a lo largo de la historia hasta definir el número e.

– Investigar las principales aplicaciones de e en las matemáticas así como en otras áreas relacionadas.

El primer objetivo general lo he dividido en otros cuatro objetivos específicos que conforman la primera parte de este proyecto:

- Determinar la primera aparición de e en la historia de las matemáticas.
- Mostrar en orden cronológico todos los autores que utilizan la constante hasta que se da una definición rigurosa de la misma.
- Exponer mediante demostraciones los motivos por los que aparece e a cada uno de estos autores.
- Encontrar el momento en el que e queda definida y nombrada como la constante que se conoce a día de hoy.

El segundo objetivo también lo he dividido en tres objetivos específicos:

- Determinar cuáles son las aplicaciones más importantes de e.
- Dar las demostraciones de por qué apareció e en estas aplicaciones.
- Relacionar cada una de estas aplicaciones con otros usos fuera de las matemáticas.

Hipótesis de trabajo

Con respecto a la pregunta *¿Cómo se ha llegado a la definición de e?* cuya respuesta nos llevaría a alcanzar el primer objetivo general, parto de dos hipótesis en las que he fundamentado esta investigación:

- La primera hipótesis es que Napier tendría alguna relación con el origen de e ya que los logaritmos en base e son llamados comúnmente logaritmos neperianos, nombre dado a partir de John Napier, creador de los logaritmos.
- La segunda hipótesis es que el origen del número e podría guardar alguna relación con Leonhard Euler ya que la constante e ha sido bautizada como "el número de Euler", en honor a este matemático.

Con respecto a la segunda cuestión *¿Cuál es el motivo por el que aparece e tan frecuentemente en numerosos campos de las matemáticas?* no parto de ninguna hipótesis y más que responder esta cuestión, en este trabajo, he tratado de buscar aplicaciones en las que aparece e, en distintos campos, e indagar en el origen de estas aplicaciones tal y como indico en el segundo objetivo general.

Metodología.

Hemos dividido el trabajo en tres partes. Las dos primeras se corresponden con los dos objetivos generales: origen de e y aplicaciones de e. En la tercera parte exponemos un resumen de los resultados obtenidos con la investigación y las conclusiones del trabajo.

Para estudiar las apariciones más importantes de e hasta que esta constante queda definida hemos partido de las hipótesis de trabajo y hemos buscado referencias a esta constante en los textos de Napier y Euler. Además, investigando en fuentes adicionales hemos encontrado otros autores que de alguna manera han aportado algo a la definición de esta constante.

Una vez que determinamos los autores que íbamos a estudiar, hemos buscado los textos de cada uno de ellos en los que aparece e. Estos textos los hemos encontrado a veces en versión original (latín, francés e inglés) y otras traducidos al inglés o al español, algunos los hemos encontrado en formato digital y otros en libro. Hemos traducido algunas partes de cada uno de estos textos, y posteriormente hemos seleccionado para el trabajo aquellos párrafos que hemos considerado necesarios para llegar a los resultados. Para cada uno de estos párrafos, en el trabajo, mostramos el texto original (en negrita), la traducción y la demostración de lo que en el texto se indica pero utilizando las herramientas matemáticas de las que hoy disponemos.

Para esta primera parte hemos estudiado ocho autores, entre los que se incluyen los dos ya mencionados en la hipótesis de trabajo. De estos ocho autores sólo hemos plasmado en el trabajo seis, descartando a De Sarasa y Mercator pues su aportación era muy colateral. Los autores estudiados y las obras analizadas son:

- John Napier y el *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio* de 1614, en el que introdujo por primera vez el concepto de logaritmo. Para ello tradujimos la parte de este libro, en versión digitalizada traducida al inglés por Ian Bruce, comprendida entre las páginas 1-4. Las demostraciones que aporta Napier en esta obra no son muy precisas y distan mucho de la forma en la que se estructuran las actuales, por lo que hemos elaborado nuestras propias demostraciones. Para comprender el texto nos hemos apoyado también en el *Mirifici Logaritmorun Canonis Constructio* de Robert Napier en la versión traducida al inglés por Rae Macdonall.
- William Oughtred escribió un apéndice en la segunda versión de la traducción al inglés del *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio*. Este apéndice trata dos temas, uno de ellos, son unas tablas de logaritmos, que hemos analizado. Como no expone el método que ha seguido para construirlas, para nuestra explicación hemos analizado

los valores de las tablas apoyándonos en afirmaciones de Florian Cajori en su libro *A History of Mathematics*. Para estudiar el apéndice hemos utilizado la versión original digitalizada de esta obra *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio*.

– John Speidell y sus *New Logarithmes*, tanto el publicado en 1619 (texto original en inglés) como el de 1622 (texto original digitalizado en inglés). Se trata de libros en los sólo aparecen tablas, por lo que hemos tenido que hacer las demostraciones partiendo de comparaciones numéricas. Estas comparaciones son reforzadas por afirmaciones de James Ivory en su serie de artículos *An Account of a Table of Logarithms*.

– Correspondencia de G. W. Leibniz con Christiaan Huygens entre 1690 y 1691. Hemos utilizado las recopilaciones de las obras de Leibniz realizada por Gerhardt (versiones digitalizadas en latín y francés), así como la traducción de estas obras al inglés realizada por Child (versión digitalizada). Hemos tomado de las recopilaciones en inglés y en latín algunas citas, y de la recopilación en francés hemos analizado la correspondencia que aparece entre las páginas 54-76.

– Publicación sobre el interés compuesto en el *Acta Eroditorum* de Jacob Bernoulli. Hemos trabajado con la edición original digitalizada en latín, analizando la información de la página 222.

– *Introductio in Analysin Infinitorum* (la versión traducida al español por la Real Sociedad Matemática Española (RSME)) de Leonhard Euler. Hemos analizado el capítulo VII.

La forma de trabajar que he utilizado para determinar las aplicaciones de e ha sido diferente. Como no disponía de autores concretos con los que trabajar mi tutora contactó con siete profesores de las facultades de matemáticas y física, de áreas diferentes, de la universidad de Murcia. Obtuvimos la colaboración de cinco de ellos con los que nos entrevistamos directamente o bien obtuvimos información por email. La pregunta que realizamos a todos ellos era: *En tu área de trabajo, ¿aparece e?*, si la respuesta era afirmativa le pedíamos que nos indicara cuál era para ellos la fórmula más interesante en la que aparecía e en su área de trabajo. Una vez que tuvimos sus respuestas, seguimos el mismo método de trabajo que para la realización de la primera parte. Las personas entrevistadas y las respuestas que obtuvimos son:

– El Dr. D. Víctor Jiménez López, catedrático de análisis matemático en el departamento de matemáticas de la Universidad de Murcia, que nos respondió que para él, sin ninguna duda, la fórmula más importante es la identidad de Euler. Para conocer el origen de esta fórmula hemos analizado el capítulo VIII del *Introductio in Analysin Infinitorum* (traducción al español por la RSME) de Leonhard Euler.

– D. José Ginés Espín Buendía, becario de investigación en la facultad de matemáticas de la Universidad de Murcia, nos indicó que para él la aplicación más importante es el hecho de que cualquier función periódica se pueda expresar como la suma de funciones exponenciales con base e. Este resultado viene dado por el desarrollo de una función mediante la serie de Fourier y el criterio de convergencia de Dirichlet. Los resultados de estos dos autores los hemos estudiado a partir del artículo de Fourier *Memoire sur la propagation du Chaleur* (recopilación digitalizada en francés de G. Darboux) y del artículo de Dirichlet *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* (versión original en francés digitalizada). Mientras que hemos analizado el primer artículo entero, en el segundo hemos extraído únicamente una cita que necesitábamos.

– La Dra. Dª. Noemi Zoroa Alonso, directora del departamento de estadística e investigación operativa de la Universidad de Murcia, nos indicó que:

> *El número e aparece en múltiples ocasiones dentro del contexto de la Probabilidad y la Estadística [...] Así, el número e aparece, de forma evidente, en la definición de las distribuciones: Normal, de Poisson, de Laplace, (gamma), (ji-cuadrado) y otras muchas. También interviene en la definición de función generatriz de momentos y de función característica, conceptos ambos que proporcionan potentes herramientas matemáticas aplicables en diversos problemas.*
>
> *De entre todas las expresiones y fórmulas posibles en las que interviene el número e vamos a elegir la que corresponde a la distribución Normal, también llamada de Gauss. El solo hecho de que e aparezca en la definición de esta distribución ya pone de manifiesto su importancia dentro del universo de la Probabilidad y la Estadística.*
>
> *[...] Esta distribución de probabilidad es sin duda la más importante de las distribuciones continuas, siendo la distribución que describe el comportamiento de multitud de variables correspondientes a fenómenos naturales, así como los errores de medida.*

Para estudiar esta distribución buscamos los primeros textos en los que ésta aparecía y encontramos que se definía por primera vez en el *Doctrine of Chances* de Abraham de Moivre (versión original en inglés digitalizada). De este libro hemos analizado las páginas 243-252.

– El Dr. D. Alfredo Marín Pérez, profesor de investigación operativa en la Universidad de Murcia, nos indicó que e no aparece en su campo de trabajo.

– El Dr. D. Jaime Colchero Paetz, profesor titular de la facultad de Física en la Universidad de Murcia, nos habló de las aplicaciones físicas que tienen las fórmulas ya mencionadas en las que aparece e. Éstas han sido expuestas tras la explicación matemática de cada aplicación.

– Los profesores de los que no obtuvimos respuesta eran del área de Geometría y Álgebra.

Parte I

Origen del número e

John Napier y la primera aproximación de e: *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio.*

La primera vez que encontramos una aproximación del número e en un tratado matemático es en el año 1614, en el que se publica el *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio*[1] de Jonh Napier, Barón de Merchiston.

John Napier fue un matemático y teólogo nacido en Merchiston en 1550 en una familia estrechamente relacionada con la corona escocesa. A los 13 años ingresó en el St. Salvator's College de la universidad de St. Andrews, acompañado por un sirviente. Sus estudios anteriores se cree que pudo haberlos realizado en Edimburgo o que pudo haber sido enseñado por profesores particulares. Tres años después de su llegada al St. Salvator's College, la muerte de su madre y la llegada reformista a Escocia llevaron a Napier a involucrarse cada vez más en debates religiosos, adoptando posturas de fanatismo protestante. Archibald Napier, padre de John, decidió que su hijo debía alejarse de aquel entorno y lo embarcó en un viaje alrededor de Europa, que parece ser que duró siete años.

Figura 1: Retrato de John Napier obtenido de Wikipedia en John Napier (2017).

A su vuelta a Merchiston firmó el contrato de matrimonio para su boda con Elizabeth Stirling, boda que se efectuó un año después. Este enlace hizo que la vida de Napier se orientase a sus responsabilidades políticas y financieras. En 1588 Napier ya era un icono del protestantismo, como se puede ver reflejado en su obra *Plain Discovery of the whole Revelation of Saint John*. Sin embargo, a partir de 1594 sus pensamientos se redirigieron a la mecánica, concretamente a la construcción de bocetos militares y de máquinas de defensa que nunca llegaron a ver la luz. Además, Napier se hizo cargo de la administración de Merchiston, lo que implicó la realización de numerosos cálculos tediosos que fueron la motivación para inventar sus logaritmos.

Su publicación más importante, *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio*, introdujo en la sociedad matemática de su época el concepto de logaritmo, diferente al logaritmo conocido actualmente, pero con la misma particularidad que lo caracteriza hoy en día: ambos permiten transformar productos en sumas y potencias en multiplicaciones. El logaritmo

[1] En adelante nos referiremos a ella únicamente como *Descriptio*

utilizado por Napier se asemeja más a una regla de cálculo que a una operación ya que fue la propiedad de simplificar los productos y potencias lo que le llevó a definirlo, según menciona Napier en la introducción de la *Descriptio*:

> *Ya que nada es más tedioso, colegas matemáticos, en la práctica de las artes matemáticas que los grandes retrasos sufridos en el tedio de las largas multiplicaciones y divisiones, el cálculo de razones y la extracción de las raíces cuadradas o cúbicas, y en las cuales no sólo se ha de considerar el retraso de tiempo sino también la molestia de los muchos errores tontos producidos; le he estado dando vueltas a mi mente y, por el arte seguro y expeditivo, podría ser capaz de mejorar estas dificultades citadas. Después de pensar lo suficiente, finalmente he encontrado una regla maravillosa para hacer los procedimientos más cortos, y tal vez la manera en la que el método surgió se establece en otros lugares. Realmente, en lo que concierne a estas materias, no hay nada más útil que el método que he encontrado. Así, todos los métodos asociados a las multiplicaciones y divisiones de números y a las largas y arduas extracciones de las raíces cuadradas y cúbicas son todos rechazados en la obra, y su lugar lo ocupan otros números en su sustitución, los cuales hacen las mismas operaciones rechazadas a través de sumas, restas y la división entre dos o tres únicamente. Como realmente el secreto se hace mejor si es común a todos, tal como pasa con las cosas buenas, es una tarea agradable establecer el método para el uso público de todos los matemáticos. Así, los estudiantes de matemáticas aceptarán y disfrutarán libremente de este trabajo que ha sido producido por mi benevolencia. Farewell.*

Revista SUMA+, número 75, p. 39.

En la *Descriptio* no se indica de forma precisa cómo se obtienen las tablas que en ella aparecen, esperando ver el grado de aceptación del método propuesto. Éste tuvo una gran aceptación en Europa y Napier fue colmado de elogios. Así, el profesor del Gresham College de Londres Henry Briggs visitó a Napier los dos veranos de 1615 y 1616, anteriores a su muerte, con la intención de disfrutar de su compañía y de discutir sobre sus logaritmos. De hecho, Henry Briggs publicó sus propias tablas de logaritmos como se puede ver en el *Arithmetica Logarithmica*. Por citar otro ejemplo más, Johannes Kepler incluyó una carta elogiando a Napier en su *Ephemerides* por haber simplificado los cálculos para las posiciones de Marte.

Debido a esta fama su hijo, Robert Napier, publicó en 1619 el *Mirifici Logarithmorun Canonis Constructio* (que en adelante nombraremos como *Constructio*), en el que explica los procedimientos empleados por su padre para crear los logaritmos.

Para buscar la idea que propició la creación de los logaritmos partimos de dos hipótesis:

1. Que los logaritmos surgieron a partir de unas fórmulas que fueron usadas a finales del siglo XVI y principios del XVII para simplificar la realización de cálculos en trabajos de astronomía. Estas fórmulas permitían expresar productos como sumas y se conocían como fórmulas de prostaféresis, que no son más que las que hoy conocemos como fórmulas trigonométricas de trasformación de sumas en productos:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \\ \cos\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \end{aligned}$$

   Pero estas fórmulas presentan ciertas complicaciones algorítmicas en caso de raíces o potencias. La presencia de estas fórmulas en los primeros años del siglo XVII se debe al trabajo de Johannes Müller, conocido bajo el nombre de Regiomontano. Aunque es cierto que la trigonometría ya se conocía en la antigua Grecia gracias a Hiparco de Nicea, y que la conquista árabe proporcionó fuentes de trigonometría a Europa en el siglo XII según indica Prado-Bassas (2010) en su artículo: *Una breve historia impresionista de la trigonometría II: de Arabia a Europa*, fue Regiomontano el que, en su obra titulada *De Triangulis Omnimodis*, profundizó en la trigonometría y la convirtió en un aspecto relevante en la vida de los cartógrafos. Su obra establece los conceptos de funciones trigonométricas y demuestra 56 postulados y teoremas sobre trigonometría, en los que se trata también trigonometría esférica. Regiomontano realizó también la tabla del seno con una frecuencia de un minuto y una exactitud de hasta la séptima cifra. Para realizar los cálculos utilizó circunferencias de radio 10^7 y no dió el valor del actual seno sino que el seno de un ángulo era igual sólo al valor del cateto opuesto sin dividir por el radio de la circunferencia, por tanto era el valor actual multiplicado por 10^7. Este radio, impuesto por Regiomontano para evitar el error al coger muchas cifras decimales, ya que las fracciones decimales no eran conocidas (H. Méndez (1992), p.184), influirá de manera significativa en la aparición de la primera aproximación de e como veremos más adelante en este apartado.

2. La segunda hipótesis es que los logaritmos de Napier surgen a partir de las fórmulas que aparecen en el *Arithmetica integra* de Michael Stifel (1544). Esta publicación trajo a las matemáticas, por primera vez, el concepto de exponente, así como mejoras en la notación (Forner Martínez y otros 2012, p. 22). También fue la primera

obra en formular definidamente la idea con la que Arquímedes experimentó en el pasado. Arquímedes, al estudiar conjuntamente series de progresiones geométricas y aritméticas se dio cuenta de que todo cambio en la progresión aritmética mostraba una correspondencia con los cambios de la progresión geométrica, y esto le permitió establecer una relación entre la potencia y la suma, como se muestra aquí:

x: Progresión aritmética de diferencia 1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x: Progresión geométrica de razón 2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Como se puede apreciar, en el caso de que quisiéramos saber el resultado de $2 \cdot 4$ se puede realizar la operación y concluir que es 8, o podemos mirar sus exponentes 1 y 2, sumarlos $1 + 2 = 3$ y mirar el valor correspondiente a 3 en la progresión geométrica, que es 8. Esto queda plasmado en el *Arithmetica integra* de la siguiente manera:

$$q^n \cdot q^m = q^{n+m} \qquad \frac{q^n}{q^m} = q^{n-m}$$

Fue además el primer libro en introducir un exponente negativo, deduciéndolo de la fórmula anterior para $n = 0$:

$$\frac{1}{q^m} = q^{-m}$$

Pero volviendo a la obra *Descriptio*, publicada en 1614 por Napier, vemos que la primera definición que este autor da de logaritmo se basa en nociones de cinemática y de movimientos a lo largo de una recta. Para ello, introduce dos tipos de movimientos y calcula las expresiones que representan los espacios recorridos en cada uno de estos movimientos.

> ***Def 1. Linea æqualiter crescere dicitur, quam punctus eam describens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.***
>
> Napier (1614), p. 2.
>
> *Definición 1*[2]*. Se dice que una línea crece uniformemente, cuando el punto que la describe recorre intervalos iguales en momentos o intervalos de tiempo iguales.*

Apoyándonos en la figura 2 podemos deducir las condiciones que la función cumple. Definimos la progresión x_t como la distancia recorrida por el punto b en el instante t,

[2]Estas traducciones al castellano están realizadas a partir de las traducciones al inglés de Ian Bruce (s.f.) de la obra *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio*, pp.2-5.

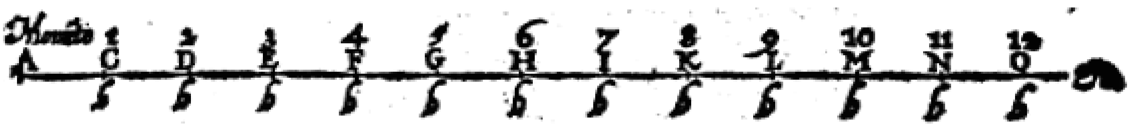


Figura 2: Imagen original de la proposición 1.

por lo que $AC = x_1$, $AD = x_2$, $AE = x_3$, ... Como las distancias recorridas en intervalos de tiempo iguales son iguales, tenemos que:

$$x_{t+1} - x_t = x_t - x_{t-1} \ \forall t \in \mathbb{N}$$

Como los términos contiguos tienen la misma diferencia, si denotamos ésta por d tenemos:

$$x_t = d + x_{t-1}$$

Sabiendo que la distancia recorrida en $t = 0$ es 0 podemos calcular los valores:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0\\
&x_1 = x_0 + d = d\\
&x_2 = x_1 + d = d + d = 2d\\
&x_3 = x_2 + d = 2d + d = 3d\\
&\dots
\end{aligned}$$

Por lo que por inducción podemos demostrar que:

$$x_t = t \cdot d \ \forall t \in \mathbb{N}_0$$

> ***Def 2. Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens aequalibus momentis, segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.***

Napier (1614), p. 2.

> *Definición 2. Se dice que una línea decrece proporcionalmente haciéndose más pequeña, cuando el punto que describe la línea corta en intervalos iguales de tiempo segmentos con el mismo radio que la longitud de lo que queda de la línea que se está cortando.*

De la figura 3 podemos volver a obtener las condiciones que Napier fija para el movimiento. La función que Napier necesita para definir su logaritmo da los valores de $\gamma\omega$, $\delta\omega$, $\varepsilon\omega$... Para hallarlos sigue este procedimiento:

Comienza con la distancia total $\alpha\omega$ asociada a $t = 0$.

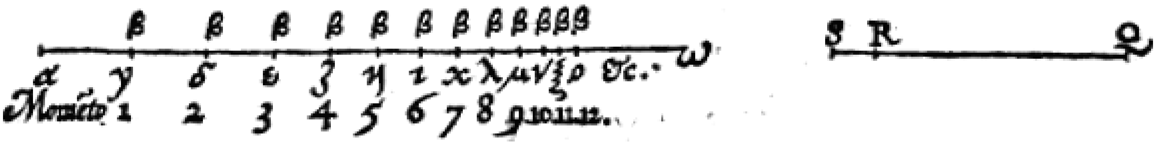


Figura 3: Imagen original de la proposición 2.

Para hallar la siguiente distancia ($\gamma\omega$) lo que hace es restar a la distancia $\alpha\omega$ la distancia $\alpha\gamma$, la cual es obtenida al multiplicar la distancia total por la razón de decrecimiento escogida (que denotaremos por k). Esto nos deja con:

$$\gamma\omega = \alpha\omega - \alpha\gamma = \alpha\omega - k\cdot \alpha\omega = \alpha\omega(1-k)$$

Para obtener la siguiente distancia se sigue el mismo proceso:

$$\gamma\omega = \gamma\omega - k\cdot \gamma\omega = \gamma\omega(1-k) = \alpha\omega(1-k)^2$$

Si nombramos cada una de las distancias por y_t, podemos obtener la relación de recurrencia:

$$y_t = y_{t-1} - y_{t-1}\cdot k = y_{t-1}(1-k)$$

Sabiendo que $y_0 = \alpha\omega$, al calcular los primeros valores tenemos:

$$\begin{aligned}
&y_0 = y_0\\
&y_1 = y_0(1-k)\\
&y_2 = y_1(1-k) = y_0(1-k)(1-k) = y_0(1-k)^2\\
&y_3 = y_2(1-k) = y_0(1-k)^2(1-k) = y_0(1-k)^3\\
&y_4 = y_3(1-k) = y_0(1-k)^3(1-k) = y_0(1-k)^4
\end{aligned}$$

Otra vez, por inducción podemos obtener que:

$$y_t = \alpha\omega(1-k)^t \ \ : t \in \mathbb{N}$$

Demostración: Suponemos que $y_{t-1} = \alpha\omega(1-k)^{t-1}$ entonces:

$$y_t = y_{t-1}(1-k) = \alpha\omega(1-k)^{t-1}(1-k) = \alpha\omega(1-k)^t$$

Tras la definición de las dos funciones, vamos a ver que Napier va a relacionar ambas progresiones, es decir, va a relacionar una progresión geométrica y una progresión aritmética:

$$x_t = t\cdot d \qquad\qquad y_t = \alpha\omega(1-k)^t$$

Por este motivo descartamos la primera hipótesis sobre el origen de los logaritmos. En lugar de emplear las fórmulas de la prostaféresis, Napier se inspira en la relación de progresión aritmética y geométrica para definirlos.

Def 6. Logarithmus ergo cujusque sinus, est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea, dumsinus-totius, línea proportionaliter in sinum illum descrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio aequiveloce.

Napier (1614), p. 4.

Definición 6. Entonces el logaritmo de un seno[3] *es el número que más se aproxima a la línea con crecimiento uniforme, recorrida en el mismo tiempo que la línea del seno decrece proporcionalmente, y con ambos movimientos sincronizados y empezando con las mismas velocidades.*

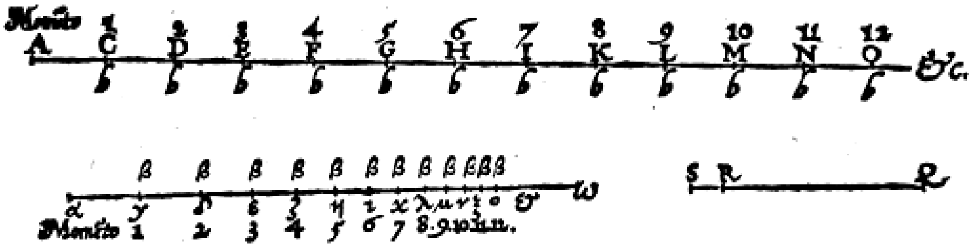


Figura 4: Imagen original de la proposición 6.

Para entender este definición vamos a aplicar a los dos movimientos las condiciones que fija Napier.

Comenzaremos viendo que implica que las velocidades iniciales son iguales. La velocidad inicial es la derivada de la función que representa el espacio recorrido en función del tiempo, en $t = 0$. Sin embargo, como no estamos trabajando con funciones continuas sino con progresiones, hallaremos la velocidad inicial como la variación del espacio entre $t = 1$ y $t = 0$:

$$x'_0 \simeq \frac{x_1 - x_0}{1} = d$$

Antes de hallar la velocidad inicial para el movimiento y_t tenemos que hacer una consideración. La velocidad del punto β no vendrá dada por la progresión y_t ya que esta función da la posición de β medida respecto a ω, sino por $\alpha\omega - y_t$, es decir la distancia del punto β a α.

Por esto, la velocidad inicial vendrá dada por:

$$y'_0 = \frac{(\alpha\omega - y_1) - (\alpha\omega - y_0)}{1} = \alpha\omega - \alpha\omega(1-k) - \alpha\omega + \alpha\omega = \alpha\omega\cdot k$$

[3]Napier halla en sus tablas los logaritmos para los senos de los ángulos de 0º a 90º. Recordemos que el valor que aparece en estas tablas para el seno es el actual multiplicado por 10^7, costumbre que se debe a Regiomontano como ya explicamos antes.

Como Napier impone la condición de que las velocidades iniciales son iguales tendremos que:

$$x'_0 = y'_0 \;\Leftrightarrow\; d = \alpha\omega\cdot k$$

Y por tanto:

$$x_t = \alpha\omega\cdot k\cdot t \qquad y_t = \alpha\omega(1-k)^t$$

Napier define el logaritmo de una cantidad h, que en adelante denotaremos como $Naplog(h)$, como la distancia recorrida en el movimiento x_t cuando el tiempo empleado en este recorrido es el necesario para que el movimiento y_t descienda al valor h. Es decir:

$$\left.\begin{array}{c} Naplog(h) = x_t \\ y_t = h \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} Naplog(h) = \;\alpha\omega\cdot k\cdot t \\ \alpha\omega(1-k)^t = h \end{array}\right\}$$

Como t es el mismo en ambas ecuaciones, si despejamos t, usando herramientas matemáticas actuales, e igualamos tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} Naplog(h) = \alpha\omega\cdot k\cdot t \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{Naplog(h)}{\alpha\omega\cdot k} \\ \alpha\omega(1-k)^t = h \;\Leftrightarrow\; (1-k)^t = \dfrac{h}{\alpha\omega} \;\Leftrightarrow\; t = \log_{(1-k)}\left(\dfrac{h}{\alpha\omega}\right) \end{array}\right\}$$

$$\frac{Naplog(h)}{\alpha\omega\cdot k} = \log_{(1-k)}\left(\frac{h}{\alpha\omega}\right) \Leftrightarrow Naplog(h) = \alpha\omega\cdot k\cdot \log_{(1-k)}\left(\frac{h}{\alpha\omega}\right)$$

Que es la expresión del logaritmo de Napier en h. Napier da después de la definición un corolario del que podemos deducir la longitud $\alpha\omega$

> ***Cor. Unde sinus totius 10000000. nullum seu 0 est logarithmus: & per consequens, numerum majorum sinus toto logarithmi sunt nihilo minores.***
>
> Napier (1614), p. 5.
>
> *Corolario. Entonces el logaritmo del seno 10000000 es cero o 0; y como consecuencia, los senos de números mayores que todo el seno tienen logaritmos menores que cero.*

Sustituyendo el valor 10^7 obtenemos:

$$Naplog(10^7) = \alpha\omega\cdot k\cdot \log_{(1-k)}\left(\frac{10^7}{\alpha\omega}\right) = 0 \;\Leftrightarrow^{4}\; \log_{(1-k)}\left(\frac{10^7}{\alpha\omega}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{10^7}{\alpha\omega} = 1 \;\Leftrightarrow\; 10^7 = \alpha\omega$$

[4] No tiene sentido por la definición de k y $\alpha\omega$ que estos valores sean 0.

Por lo que:

$$Naplog(h) = 10^7 \cdot k \cdot \log_{(1-k)} \left(\frac{h}{10^7} \right)$$

Observamos que $Naplog(h)$ depende de la razón de decrecimiento k escogida para la progresión. En la tabla que Napier calcula en la *Descriptio* la razón que utiliza es 10^{-7}([5]). Sin embargo, esta razón no es mencionada hasta su obra póstuma, *Mirifici Logarithmorun Canonis Constructio*, en la que se afirma:

> ***16. Hinc sequitur, si à sinu toto septem cyphris aucto, caeterisque inde ortis suam** 10000000^{am} **partem substraxeris, continuari possunt quam facillimè centum numeri, in ea proportione Geometrica, quae est inter sinum totum & sinum eo minorem unitate, scilicet 10000000 & 9999999; hancque seriem proportionas ilium primam Tabulam nominamus.***

Napier (1617), p. 36.

> *16. De donde se sigue que, si del seno total aumentado siete cifras, y con el resto consecuentemente obteniéndose de la resta de su 10000000ª parte, la serie puede ser continuada fácilmente por centenas de números en esa proporción que hay entre el seno total y ese seno menos uno, como puede verse, 10000000 y 9999999; a esta serie de proporciones la llamamos primera tabla.*[6]

---

[5]En la obra *Constructio* se citan otros dos valores de k: 10^{-5} y $5 \cdot 10^{-4}$.

[6]El motivo por el que escoge esta razón es debido a que simplifica mucho los cálculos para la construcción de las tablas, tal y como expone en los párrafos de la *Constructio*:

13. Omnis progreßionis Arithmeticae facilis est constructio, Geometricae autem non omnis.

[...] Solae Geometricae illae progressiones facilè continuantur, quæ per subrectionem facilis partis numeri à toto oriuntur. p. 8

Napier (1617), pp. 13-14.

14. Partes numeri faciles dicimus, partes quaslibet cujus denominationes unitates & cyphris quotcunque notantur [...] p. 8

Napier (1617), p. 14.

13. La construcción de una progresión aritmética es fácil; no ocurre lo mismo con una progresión geométrica [...]

Estas progresiones geométricas solo se realizan con facilidad cuando surgen por sustracción de una "easy part" del número completo.

14. Llamamos "easy part" de un número, cualquier parte cuyo denominador está formado por la unidad y un número de ceros, tales partes se obtienen eliminando tantas cifras al final del número principal como ceros tiene el denominador.

Por tanto:

$$Naplog(h) = 10^7 \cdot 10^{-7} \cdot \log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{h}{10^7}\right) = \log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{h}{10^7}\right)$$

Vamos ahora analizar un fragmento de las tablas de los logaritmos de Napier (figura 5) pero antes daremos la explicación del significado de cada columna:

Gr. 0 + | −

min	Sinus.	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49

Figura 5: Primera página de las tablas que Napier calcula en la Descriptio. (p. 58)

– **Primera y última columna:** Los valores introducidos en la tabla son ángulos tomados desde el 0º hasta 90º. Cada página se dedica a un ángulo α y al ángulo $90-\alpha$, la primera y última columnas de la tabla representan los minutos con una diferencia de 1'. Así en la figura 5 vemos en la primera columna los valores correspondientes a 0º 1', 0º 2'... y en la última columna los valores de 89º 60', 89º 59'...

– **Segunda y Sexta columnas**: Son, respectivamente, los senos[7] de las columnas primera y última, es decir que toman los valores $\sin(\alpha)$ y $\sin(90-\alpha)$.

– **Tercera y quinta columnas**: Calculan el Naplog de las columnas segunda y sexta, respectivamente. Por esto, los valores que estas columnas ofrecen vienen dados por $Naplog(\sin(\alpha))$ y $Naplog(\sin(90-\alpha))$.

– **Cuarta columna**: Da los valores de la resta entre la tercera columna y la quinta columna. Utilizando las propiedades de los logaritmos es posible demostrar que los valores de la columna son los de $Naplog(\tan(\alpha))$:

$$Naplog(\sin(\alpha)) - Naplog(\sin(90-\alpha)) = Naplog\left(\frac{\sin(\alpha)}{\sin(90-\alpha)}\right) =$$

$$Naplog\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = Naplog(\tan(\alpha))$$

[7]Recordamos que los valores que aparecen en las tablas no son los de $\sin\alpha$, sino los de $10^7 \sin\alpha$

Una vez que hemos concretado la finalidad de las columnas, podemos observar comparando los valores numéricos de la tabla en la figura 5 y de $-10^7 \ln\left(\dfrac{x}{10^7}\right)$ que ambas operaciones son iguales.

$$\begin{array}{c|c} Naplog(2909) = 81425681 & 81425309 = -10^7 \ln(\frac{2909}{10^7}) \\ Naplog(5818) = 74494213 & 74493838 = -10^7 \ln(\frac{5818}{10^7}) \\ Naplog(8727) = 70439564 & 70439187 = -10^7 \ln(\frac{8727}{10^7}) \\ Naplog(11636) = 67562745 & 67562366 = -10^7 \ln(\frac{11636}{10^7}) \\ Naplog(14544) = 65331315 & 65331618 = -10^7 \ln(\frac{14544}{10^7}) \\ Naplog(17453) = 63508099 & 63508288 = -10^7 \ln(\frac{17453}{10^7}) \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Para explicar este hecho recordemos que:

$$Naplog(x) = \log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{x}{10^7}\right) = \log_{(1-10^{-7})^{10^7}}\left(\frac{x}{10^7}\right)^{10^7}$$

Y el valor $(1-10^{-7})^{10^7} = \left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ es aproximadamente igual a $e^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ ya que:

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 0{,}3678794228... \simeq 0{,}3678794412... = e^{-1}$$

Por lo que aproximando el valor y aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos que:

$$Naplog(x) = \log_{(1-10^{-7})^{10^7}}\left(\frac{x}{10^7}\right)^{10^7} \simeq 10^7 \log_{e^{-1}}\left(\frac{x}{10^7}\right) = -10^7 \ln\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

De donde podemos ver que el $Naplog(x)$ está relacionado con $\ln(x)$, ya que la base utilizada por Napier $\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ es aproximadamente igual a e^{-1}.

William Oughtred y los primeros logaritmos naturales.

Tras la publicación del *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio* de John Napier el afán por la construcción de nuevas tablas de logaritmos se incrementó. Por ejemplo, el matemático Henry Briggs introdujo en su *Logarithmorun Chilias Prima* los logaritmos decimales, así como otras personalidades como Kepler o Galileo también elaboraron sus propias tablas.

Aunque hemos visto en el desarrollo de Napier que los logaritmos que emplea están relacionados con los logaritmos en base e, éstos siguen sin dar los valores correspondientes a lnx ya que al calcular el $Naplog(x)$ primero divide la variable x, en el caso estudiado, por

10^7 y después le aplica el logaritmo. Pero, si seguimos indagando en posteriores ediciones de la obra de Napier, encontramos en la edición de 1618 un apendice atribuido a William Oughtred, con una tabla de logaritmos que coinciden con los lnx multiplicados por 10^6:

> ***The second edition (1618) of Edward Wright's translation of Napier's Descriptio contains an anonymous Appendix, very probably written by William Oughtred, describing a process of interpolation with the aid of a small table containing the logarithms of 72 sines. The latter are natural logarithms with the decimal point ommited. [...]***

Cajori(1991), p. 153.

> *La segunda edición (1618) de la traducción de la Descriptio de Napier por Edward Wright contiene un apéndice anónimo, muy probablemente escrito por William Oughtred, describiendo un proceso de interpolación con la ayuda de una pequeña tabla con los logaritmos de 72 números. Éstos son logaritmos naturales con la coma omitida. [...]*

William Oughtred[8] (5 de marzo de 1574 - 30 de junio de 1660) fue un matemático inglés y ministro anglicano conocido principalmente por la invención de la regla de cálculo.

Nació en Eton, en Buckinghamshire (parte ahora de Berkshire), y estudió en el King's College en Cambridge. Al ser admitido en las órdenes sagradas dejó la Universidad de Cambridge, sobre 1603, para vivir en Shalford; fue elegido en 1610 para el rectorado de Albury, cerca de Guilford en Surrey, donde se estableció. Se casó con Christsgift Caryll.

Tuvo correspondencia con algunos de los egresados más importantes de su tiempo, incluyendo a Alabaster, Cavendish y Gascoigne. Mantuvo contacto regularmente con el Gresham College, donde conoció a Briggs y a Gunter. Ofreció enseñanza gratuita a sus pupilos, en los que se incluyen Delamain y Moore, lo que le hizo un profesor influyente sobre una generación de matemáticos.

La invención de la regla de cálculo involucró a Oughtred en una disputa sobre la prioridad de la invención con Delamain. También estaban en desacuerdo sobre la pedagogía en matemáticas, argumentando Oughtred que la teoría debía preceder a la práctica. Continuó como rector hasta su muerte el 1660 en Albury.

La introducción a la edición de 1618 de la *Descriptio* citada por Cajori, está dividida en dos partes: la primera trata de la resolución de problemas en triángulos utilizando

[8] Biografía traducida de https://en.wikipedia.org/wiki/William_Oughtred

trigonometría y la segunda es una tabla con los logaritmos de algunos valores y un método para encontrar el logaritmo de los números que no aparecen en dicha tabla.

> ***Yet into the full obtaining of the facility and readiness that the excellent invention of this Author may afford us, two things seemed onto me conveniently might be added hereonto: The one is a direction for the practice of the several rules of the Calculation of Triangles: The other is a perfect and ready way of finding out such Sines and Logarithmes which are not to be found exactly in the Tables. [...]***

Napier (1618), pp. 1-2.

> *Aun teniendo en cuenta la facilidad y completitud que la excelente invención de este autor nos pueda ofrecer, me pareció conveniente añadir dos cosas: la primera es una guía para el uso de diversas reglas del cálculo de triángulos; la otra es una manera perfecta y preparada para encontrar aquellos senos y logaritmos que no se puedan encontrar exactamente en las tablas. [...]*

Si nos centraremos en la segunda parte de esta introduccióna, vemos que Oughtred introduce una tabla precedida de una explicación de lo que representan sus columnas:

> ***For the performance whereof, I have invented and framed this Table following: which consists of two parts; the former being of absolute sines, the latter of tenth and hundredth parts.***

Napier (1618), p. 11.

> *Para lo que he inventado y puesto esta tabla que está compuesta por dos partes: la primera son los números absolutos y la última las partes décima y centésima.*

Sin.	Logarith.	Sin.	Logarith.	Sine.	Logarithme.
1	000000	100	4605168	10000	9210337
2	693146	200	5298314	20000	9803483
3	1096612	300	5703780	30000	10308949
4	1386294	400	5991462	40000	10596631
5	1609437	500	6214605	50000	10819774
6	1791758	600	6396925	60000	11002095
7	1945909	700	6551077	70000	11156246
8	2079441	800	6684609	80000	11289778
9	2197223	900	6802391	90000	11407560
10	2302584	1000	6907753	100000	11512921

Figura 6: Extracto de la tabla ofrecida por Oughtred en el apéndice. Obtenido de Napier, 1618 (p. 12).

Sin embargo, Oughtred no da una explicación de cómo calcula su tabla. Lo máximo que podemos observar por comparación numéricas que los valores que la tabla dan son los del logaritmo neperiano sin coma decimal, es decir, $y(x) \simeq 10^6 \ln x$:

x	Valor en la tabla	$\ln x$
1	000000	0
2	693146	0.693147...
3	1096612	1.098612...
4	1386294	1.386294...
5	1609437	1.609437...

El resto del apéndice está dedicado a un método para obtener los logaritmos de números cuyo logaritmo no se encuentra en la tabla, como los de 11, 27... siendo la primera vez que se empleó el “radix method” para la interpolación de logaritmos (Cajori, 1991, p. 153).

John Speidell y una mejor aproximación: *New Logarithmes*.

Uno de los problemas que presentaban las tablas de Napier era que si se querían calcular logaritmos de números positivos mayores que la distancia total considerada, en el caso estudiado $\alpha\omega = 10^7$, los logaritmos daban resultados negativos. Este problema desapareció en las tablas publicadas por John Speidel con el nombre de *New Logarithmes*.

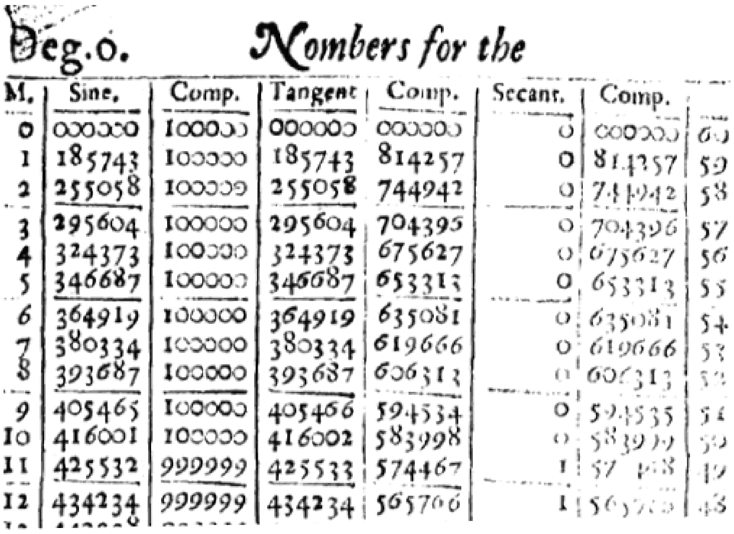
John Speidell[9] (1600-1634) fue un matemático inglés conocido por su trabajo en el cálculo de logaritmos. Speidell era profesor de matemáticas en Londres y uno de de los primeros seguidores del trabajo que Napier había hecho sobre los logaritmos naturales. En 1619 publicó una tabla llamada *New Logarithmes* en la que calculó los logaritmos naturales de senos, tangentes y secantes. Divergió de los métodos de Napier para asegurarse de que todos los logaritmos fueran positivos. En 1622 publicó una nueva edición del *New Logarithmes* que contenía un apéndice con los logaritmos naturales de los números del 1 al 1000. Junto a William Oughtred y Richard Norwood, Speidell ayudó a la adopción de las abreviaciones de las funciones trigonométricas. Speidell publicó un gran número de trabajos sobre matemáticas, entre los que destaca *An Arithmeticall Extraction* en 1628.

Como hemos dicho en este apunte biográfico, Speidell construyó dos tablas de logaritmos:

– En la primera tabla (figura 7) las variables siguen siendo ángulos y los resultados logaritmos de las funciones trigonométricas.

[9] Biografía traducida de https://en.wikipedia.org/wiki/John_Speidell.

– En la segunda tabla (figura 8) la variable deja de ser ángulos y pasa a ser números naturales.



Deg.o. Nombers for the

M.	Sine.	Comp.	Tangent	Comp.	Secant.	Comp.	
0	000000	100000	000000	000000	0	000000	60
1	185743	100000	185743	814257	0	814257	59
2	255058	100000	255058	744942	0	744942	58
3	295604	100000	295604	704395	0	704396	57
4	324373	100000	324373	675627	0	675627	56
5	346687	100000	346687	653313	0	653313	55
6	364919	100000	364919	635081	0	635081	54
7	380334	100000	380334	619666	0	619666	53
8	393687	100000	393687	606313	0	606313	[illegible]
9	405465	100000	405466	594534	0	594535	[illegible]
10	416001	100000	416002	583998	0	[illegible]	[illegible]
11	425532	999999	425533	574467	1	[illegible]	[illegible]
12	434234	999999	434234	565766	1	[illegible]	[illegible]

Figura 7: Recorte de la primera tabla de la edición de 1619 del New Logarithmes.

Las primeras tablas de Speidell no son más que una variación de las ofrecidas por Napier y en ellas Speidell no da ninguna explicación del método que sigue para obtenerlas. Nosotros, en este trabajo, vamos a comparar los valores numéricos de la tabla de Napier (figura 3) y los de esta tabla para intentar deducir la expresión del $Splog(x)$, que es como vamos a denotar al logaritmo calculado por Speidell, pero antes vamos a explicar el significado de cada columna en dicha tabla (figura 7):

– La primera y última columna tienen la misma función que las de Napier, introducen los ángulos, que son la variable en la tabla. En el trozo de tabla seleccionado la primera columna corresponde a los valores de $0^{\circ}\ 0'$, $0^{\circ}\ 1'$... y la última a $89^{\circ}\ 60'$, $89^{\circ}\ 59'$...

– La segunda y tercera columna dan los valores $Splog(\sin\alpha)$ y del complementario[10], respectivamente y la sexta y séptima columna dan $Splog(\sec\alpha)$ y de su complementario $Splog(\cos\alpha)$, donde α hace referencia al ángulo dado en la primera columna[11].

[10]Con complementario Speidell se refiere al inverso. Por ello podemos afirmar que la tercera columna calcula los valores del logaritmo de la cosecante: $Splog\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}\right) = Splog(\operatorname{cosec}\alpha)$.

[11]Si β representa el ángulo dado en la última columna, como $\beta = 90 - \alpha$ tendríamos que la segunda y tercera columna dan los valores $Splog(\cos\beta)$ y del complementario, respectivamente y la secta y séptima columna dan $Splog(\operatorname{cosec}\beta)$ y de su complementario.

– La cuarta y quinta columna dan los logaritmos de la tangente y cotangente del ángulo α.

Si comparamos los valores numéricos en las tablas de Napier y Speidell y consideramos las indicaciones dadas por James Ivory, 1807 (pp. 714-715), que dice:

> ***[...] And for this purpose he chooses a whole number which is greater than the greatest Logarithm contained in Lord Napier's Table, and subtracts from the said whole number each of the Logarithms contained in the said Table. [...]. And Mr. Speidell, in framing his new Logarithms, made choice of this number 100000000 for the whole number from which he resolved to subtract all the Logarithms of Lord Napier's Canon; and the remainders of these several subtractions are the Logarithms of his new Table.***
>
> *[...] Y para este propósito escoge un número mayor que el logaritmo más grande contenido en la tabla de Napier, y resta de dicho número cada logaritmo contenido en la mencionada tabla. [...]. Y el Sr. Speidell, construyendo sus nuevos logaritmos, eligió el número 100000000 para ser el número del que decidió restar todos los logaritmos presentes en las tablas de la Constructio de Napier; y los restos de estas divisiones son los logaritmos de su nueva tabla.*

tenemos que:

$Naplog(x)$	$Splog(x)$	$Naplog(x) + 100Splog(x)$
81425681	185743	99999981
74494213	255058	100000013
70439564	295604	99999964
67562746	324373	100000049
...	...	...

De aquí podemos suponer la relación:

$$Naplog(x) + 100Splog(x) = 10^8 \;\Leftrightarrow\; Splog(x) = 10^6 - 10^{-2}Naplog(x)$$

Podemos entonces hallar el valor del $Splog(x)$ a partir de $Naplog(x) = \log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{x}{10^7}\right)$:

$$Splog(x) \simeq 10^6 - 10^{-2}\log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{x}{10^7}\right) = \log_{(1-10^{-7})}\left(1-10^{-7}\right)^{10^6} + \log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{10^7}{x}\right)^{10^{-2}} =$$

$$10^7\log_{(1-10^{-7})^{10^7}}\left(\frac{(1-10^{-7})^{10^6}10^{7\cdot 10^{-2}}}{x^{10^{-2}}}\right) = 10^7\log_{(1-10^{-7})^{10^7}}\left(\frac{(1-10^{-7})^{10^8}\cdot 10^7}{x}\right)^{10^{-2}} =$$

$$10^5\log_{(1-10^{-7})^{-10^7}}\left(\frac{x}{(1-10^{-7})^{10^8}\cdot 10^7}\right) \simeq 10^5\log_{(1-10^{-7})^{-10^7}}\left(\frac{x}{454}\right)$$

Obtneiendo la expresión del $Splog(x)$. Como $(1-10^{-7})^{-10^7} \simeq e$ tenemos que:

$$Splog(x) \simeq 10^5 \ln\left(\frac{x}{454}\right)$$

Con esta ecuación vemos que Speidell ha cumplido su objetivo: para valores mayores que $\sin(0^{\text{o}}\ 1')$ el logaritmo es positivo. Sin embargo, también podemos ver que el $Splog(x)$ no es exactamente el logaritmo neperiano.

Speidell presentó en 1622 otra tabla en la que no hace referencia a la trigonometría. En la figura 8 vemos una parte de ella: En esta tabla las columnas representan[12]:

000000		0000000	1	000000		5000000	1
693147	693147	9306853	2	346573	346573	4653427	2
1098612	405465	8901388	3	549306	202733	4450694	3
1386294	287682	8613706	4	693147	143841	4306853	1.
1609437	223143	8390563	5	804719	111572	4195281	1
1791759	182321	8208241	6	895879	91160	4104121	2
1945909	154150	8054091	7	972955	77075	4027045	3
2079441	133531	7920559	8	1039720	66765	3960280	2.
2197224	117783	7802776	9	1098612	58892	3901388	1
2302584	105360	7697416	10	1151292	52680	3848708	2
2397894	95310	7602106	1	1198947	47655	3801053	3
2484906	87011	7515094	2	1242453	43506	3757547	3.
2564948	80043	7435052	3	1282474	40021	3717526	1
2639056	74108	7360944	4	1319528	37054	3680472	2
2708049	68993	7291951	15	1354025	34497	3645975	3
	64528				32269		

Figura 8: Recorte de las segundas tablas que aparecen en la edición de 1622 de New Logarithmes.

- La primera columna da los logaritmos de los números de la cuarta columna.
- La segunda columna, intercala entre cada dos valores de la primera columna, las diferencias entre estos. Esto serviría para hallar el logaritmo del cociente entre dos valores consecutivos de la columna 4.
- La tercera columna contiene los complementos de los logaritmos respecto a 10^7, es decir, 3ª col.$= 10^7 -$1ª col.
- Los números de la quinta columna son la mitad de los de la primera, por lo que son los logaritmos de la raíz cuadrada de los números de la cuarta columna.
- Los números de la sexta y séptima columna cumple el mismo patrón que hemos expuesto para la segunda y tercera.

[12] Adaptación de la explicación de Ivory, 1807, p. 727.

Tampoco en esta edición aparece explicación alguna del procedimiento que sigue, por lo que tendremos que deducir el valor del $Splog(x)$ a partir de los valores observados en la tabla, comparándolos con los del logaritmo neperiano:

x	$SpLog(x)$	$\ln(x)$
1	0	0
2	693147	0.6931471806...
3	1098612	1.098612289...
4	1386294	1.386294361...
5	1609437	1.609437912...

Y observamos que $Splog(x) = 10^6 \ln x$. Por esto podemos constatar que en esta tabla Speidell ha refinado la tabla anterior, liberándola del origen geométrico y logrando que su logaritmo dé exactamente los valores del $\ln x$ con la coma movida.

e recibe un nombre: *Acta Eroditorum* de Gottfried W. Leibniz.

Otra cosa que nos llamó la atención al estudiar e es la particularidad de que tanto la derivada como la integral de la funció e^x es ella misma y su presencia, como base del logaritmo neperiano, en varias fórmulas de derivación e integración. Por ello buscamos en el proceso de invención del cálculo diferencial e integral si existía algún momento en el que se llegase a fórmulas en las que apareciera e. Es por este motivo por el que nos hemos remitido a los escritos de Gottfried Wilhelm Leibniz, el padre del cálculo diferencial e integral junto a Isaac Newton.

Figura 9: Retrato de Leibniz obtenido de Universidad Mariano Gálvez (2015).

Gottfried Wilhelm Leibniz[13] fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán, que nació en Leipzig el 1 de julio de 1646 y murió el 14 de noviembre de 1716 . Leibniz nació dos años antes del final de la Guerra de los Treinta Años, era hijo de un padre jurista y profesor de filosofía moral en la Universidad de Leipzig y de una madre cuyo padre era profesor de leyes. Su padre falleció cuando Leibniz tenía seis años, por lo que su educación recayó sobre su madre y su tío. Su padre dejó una biblioteca que Leibniz comenzó a disfrutar a partir de los siete años. Había aprendido latín por su cuenta y empezó a estudiar griego a la edad de doce años, y a los catorce se matriculó en la universidad de Leipzig, completando su especialidad en leyes a los veinte años. Entregó su tesis a la Universidad de Altdorf y obtuvo su doctorado en cinco meses. Aunque ambas universidades le ofrecieron plazas docentes, Leibniz pasó el resto de su vida al servicio de dos familias nobles alemanas.

Su primer puesto de trabajo, a pesar de no tener conocimientos sobre la materia, fue de alquimista asalariado. Pudo ponerse en contacto con Von Boineburg, quién lo contrató como asistente. Von Boineburg promovió su reputación y lo apoyó para llegar a la corona polaca. Las ambiciones de Leibniz eran proteger a la Europa alemana, fatigada por la Guerra de los Cien Años, de Luis XIV de Francia. Para eso propuso distraerlo instándole a conquistar Egipto a cambio de no perturbar a Alemania ni a Holanda. Con esta finalidad,

[13]Biografía obtenida de: https://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz#Biograf.C3.ADa

Leibniz se trasladó en 1672 a París, donde comenzó a investigar en física y matemáticas y a realizar contribuciones en ambas disciplinas. Conoció a Christian Huygens, con el que empezó a solidificar sus conocimientos y que concluyeron en grandes descubrimientos en los que cabe destacar el cálculo infinitesimal y las series finitas.

Al no quedar claro que Francia fuese a realizar su plan, Leibniz se fue a Londres, donde, tras mostrar una máquina capaz de realizar las operaciones aritméticas básicas, la Royal Society lo admitió como miembro externo. Leibniz regresó a Paris, y debido a la muerte de sus dos mecenas aceptó en 1673 una invitación del duque de Brunswick para ser su consejero. Aun así logró retrasar su viaje a Hanover hasta finales de 1676 tras otro viaje a Londres. Este viaje ha sido el detonante de la discusión entre la paternidad del cálculo diferencial: Newton fue el primero en desarrollarlo, pero Leibniz fue el primero en publicarlo. En su viaje pasó por La Haya, donde conoció a Leeuwenhoek. Fue promovido a consejero privado de Justicia, y sirvió a tres gobernantes consecutivos de la casa de Brunswick como historiador, consejero político e historiador.

Leibniz comenzó a trabajar en su cálculo hacia 1674, y para 1677 ya tenía un sistema coherente, aunque no fue hasta 1684 cuando lo publicó en el *Acta Eroditorum*, una revista fundada por Otto Mencke y él en 1682.

En 1711 John Keil acusó a Leibniz de plagiar el cálculo diferencial de Newton, comenzando así la disputa. Comenzó también una investigación de la Royal Society que respaldaba la postura de Newton. Leibniz murió en 1716, tan degradado por la disputa que ni la Royal Society ni la Academia Prusiana de las Ciencias, de las que era miembro, hicieron algo por recordar su memoria. Tan solo asistió a su entierro su secretario personal.

La primera mención que hemos encontrado de una constante que coincide con e es en una carta de Leibniz a Huygens datada el 27 de enero de 1691 y citada por Cajori, 1993 (p.13) de la siguiente manera:

> ***Leibniz used the letter b in letters to Huygens of October 3/13, 1690, and January 27, 1691. In the letter he considers*** $t = \int \frac{dv}{1-v^2}$ ***and writes*** $b^{\frac{t}{\cdot}} = \frac{1+v}{1-v}$***, "b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0."***
>
> *Leibniz usó la letra b en cartas a Huygens datadas el 3/13 de octubre de 1690 y el 27 de enero de 1691. En la carta considera* $t = \int \frac{dv}{1-v^2}$ *y escribe* $b^{\frac{t}{\cdot}} = \frac{1+v}{1-v}$*, "b siendo una gran constante cuyo logaritmo es 1, siendo 0 el logaritmo de 1."*

Para llegar a este resultado necesitamos integrar funciones hiperbólicas, lo que nos llevó a preguntarnos cómo había llegado Leibniz a la conclusión de que esa integral era equivalente a un logaritmo.

Para ello hemos buscado en los manuscritos en los que Leibniz desarrolló el cálculo diferencial e integral, en los que hemos encontrado tres menciones claras.

La primera mención en orden cronológico la encontramos en un escrito datado del 11 de noviembre de 1673 disponible en Gerhardt, 1848 (p. 34), en el que Leibniz escribe:

> ***Nempe*** $\omega = \frac{a^2}{x}$***; jam*** $\int \omega = \frac{y^2}{2}$***, ergo*** $y = \sqrt{2 \int \omega}$ ***vel*** $\sqrt{2 \int \frac{a^2}{x}}$***. Jam*** $\int \omega$ ***non potestat inveniri nisi ope curvae logarithmicae.***
>
> *A saber* $\omega = \frac{a^2}{x}$*; ahora* $\int \omega = \frac{y^2}{2}$*, por lo que* $y = \sqrt{2 \int \omega}$ *o* $\sqrt{2 \int \frac{a^2}{x}}$*. Ahora,* $\int \omega$ *no puede ser encontrada más que con ayuda de la curva logarítmica.*

La segunda mención es en un papel del 26 de octubre de 1675 presente en Child, 1920 (p. 70). Tras afirmar la relación que en notación actual es:

$$\int xdy = x \int dy - \int \int dy$$

Leibniz la aplica a una hipérbola definida por $xdt = a$, de donde obtenemos que $dy = \frac{a}{x}$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior obtenemos:

$$\int a = x \int \frac{a}{x} - \int \int \frac{a}{x}$$

que según él remarca (p. 71):

> ***[...] the last theorem expresses the sum of logarithms in terms of the known quadrature of the hyperbola.***
>
> *[...] el último teorema expresa la suma de los logaritmos en términos de la conocida cuadratura de la hipérbola.*

La tercera vez que aparece esta relación es en un manuscrito de julio de 1676 y citado en Gerhardt, 1848 (p. 54) en el que "resuelve" uno de los problemas que Descartes planteó en su *Géométrie*. La relación en palabras del propio Leibniz es:

> ***Jam*** $c \int \frac{dy}{y} = \frac{a}{f} z$***, ergo*** $\frac{fc}{a} \int \frac{1}{y} = z$***, quae est ad logarithmicam.***
>
> *Ahora,* $c \int \frac{dy}{y} = \frac{a}{f} z$*, por lo que* $\frac{fc}{a} \int \frac{1}{y} = z$*, que es un logaritmo.*

De estas tres afirmaciones deducimos que Leibniz conoce la integral de una función hiperbólica aunque en ninguna de las ocasiones lo demuestra. A pesar de esto, el que Leibniz en la seunda cita diga que "expresa la suma de los logaritmos en términos de la conocida cuadratura de la hipérbola" nos incita al siguiente razonamiento:

Sabemos que para Leibniz la integral de una función representa el área encerrada por la curva[14] y el eje de abscisas. También conocemos que en 1675 ya se conocía que el área encerrada por la hipérbola (o la cuadratura, tal y como ellos se refieren) es un logaritmo gracias a los trabajos de De Sarasa y Mercator[15] y que al menos Huygens, con quien Leibniz mantiene correspondencia, conoce los trabajos de Mercator[16]. Por esto suponemos que Leibniz utiliza los resultados de De Sarasa y Mercator para hallar el área bajo curvas, es decir, para resolver integrales.

Pero, independientemente de cómo conoce Leibniz la relación entre la integral hiperbólica y los logaritmos, lo que observamos es que aplica estos conocimientos para resolver un problema planteado por él mismo a Huygens, tal y como cita Cajori. Sin embargo, para

---

[14]Véase https://www.math10.com/en/maths-history/history5/origins-differential-integral2.html

[15]Alphonse Antonio De Sarasa encuentra la relación entre los logaritmos y el área bajo la hipérbola al resolver el problema de Mersenne en su libro *Solutio Problematis a R. P. Marino Mersenne Minimo Propositio*. La manera en la que lo concluye es mediante una analogía al observar que si las ordenadas que encierran áreas hiperbólicas están en progresión geométrica entonces las áreas están en progresión aritmética. Esta propiedad le recuerda a los logaritmos, y concluye que ambas operaciones deben ser equivalentes. Este resultado es la pieza clave para resolver el problema de Mersenne. Nikolaus Mercator encuentra esta relación de manera distinta en su *Logaritmotechnia*. Tras haber desarrollado una forma analítica de calcular logaritmos dedica un apartado únicamente a calcular el área bajo la hipérbola. Tras haberla calculado mediante una serie al infinito compara el proceso que ha seguido con su método de construcción de logaritmos, concluyendo por similitud que ambas deben ser iguales.

[16]Se pueden leer referencias por parte de Huygens a la cuadratura de Mercator en Gerhardt, 1850 (p. 63)

> ***Celui qui a donné cette relation s'est imaginé que vostre quadrature de l'hyperbole par*** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + etc.$ ***estoit la même que celle j'avois jointe à ma quadrature arithmetique du cercle, parceque je voyois une certaine analogie assez belle. Cependant la mienne est celle de Mercator, tirée de*** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + etc.$ ***et par consequent diferente de la vostre.***
>
> *El que ha dado esta relación ha imaginado que su cuadratura de la hipérbola por* $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + etc.$ *era la misma que yo adjunté a mi cuadratura aritmética el círculo, ya que vi una cierta analogía bella. La mía depende de aquella de Mercator, obtenida de* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + etc.$ *y por consecuente diferente de la suya.*

tratar todas las cartas entre Huygens y Leibniz nos hemos remitido a la recopilación de la correspondencia de Leibniz realizada por Gerhardt (1950). El problema que Hugens y Leibniz discuten comienza en una carta datada el 3 de octubre de 1690 (citada por Gerhardt, 1850, p. 54), que dice:

> ***Considerant ce que j'ay dit de la resistance du milieu dans les Actes de Leipzig, Fevrier 1689, vous trouverés, Monsieur art. 5 n. 3, qu'encor chez moy (les élements des temps pris egaux, condition que vous et Mr. Newton avés dissimule) les resistances sont comme les quarrés des vitesses. Et par le n. 4 et 6 de cet article, il s'ensuit aussi que la somme*** $a + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{5}a^3 etc.$ ***se reduit à la quadrature de l'hyperbole.***

> *Considerando lo que he dicho sobre la resistencia del medio en las Actas de Leipzig, febrero de 1689, encontrará en el artículo 5 n. 3 que sin embargo, para mí (los elementos del tiempo tomados iguales, condición que usted y el Sr. Newton habéis disimulado) las resistencias son como el cuadrado de las velocidades. Y por el número 4 y 6 de ese artículo[17] se sigue que la suma* $a + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{5}a^3 etc.$ *se reduce a la cuadratura de la hipérbola.*

---

[17]Hay un error en el texto consultado pues este artículo fue publicado en el Acta Eroditorum de enero, no de febrero. Los puntos que Leibniz menciona dicen (Leibniz, 1689, pp. 44-45):

> ***(3) Resistentia est ad impressionem novam, a gravitate eodem temporis elemento factam (seu diminutio velocitatis ad accessionem) ut quadratum excessus velocitatis maximae super acquisitam est ad quadratum maximae [...]***

> *(3) La resistencia es a la nueva impresión, hecha por el peso en elementos de tiempo iguales (o a la disminución de la velocidad por ascender) como el cuadrado del exceso del cuadrado de la velocidad máxima adquirida sobre el cuadrado de la mayor [...]*

> ***(4) Si rationes inter summam & differentiam velocitatis maximae & minoris assumtae, sin tut numeri; tempora quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, erunt ut Logarithmi. Cum enim incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem & resistentiam, hinc (ex praecedenti) fatim sequitur impressionem esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis assumtae. Ex quo scimus per quadraturas summam impressionum inde ab initio; que est proportionalis insumto tempori, esse ut Logarithmum, si numerus sit qualem in propositione hac enunciavimus.***

> *(4) Si las razones entre la suma y diferencia de las velocidades máxima y mínima son asumidas como los números, el tiempo en el que las velocidades asumidas son adquiridas*

En este párrafo Leibniz comienza la línea de correspondencia relativa al artículo 5 de las citadas *Actas*. El párrafo en sí no tiene una especial relevancia, ya que únicamente afirma que la resistencia causada por el medio a un objeto que se mueve en él es el cuadrado de la velocidad y que la serie[18] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)}$ está relacionada con la cuadratura de la hipérbola. La importancia que tiene reside en que es el comienzo de una serie de cartas que llevan a ambos autores a realizar integrales hiperbólicas y a expresar los resultados

---

es un logaritmo. Como un incremento en la velocidad es la diferencia entre la impresión y la resistencia, de aquí (como anteriormente) se sigue la impresión sea al incremento de la velocidad, como el cuadrado de la velocidad máxima al exceso de este cuadrado sobre el cuadrado de la velocidad presente asumida. Por lo que sabemos por cuadraturas la suma de las impresiones desde el principio, que es proporcional al tiempo transcurrido, siendo como un logaritmo si este número es el mismo que la proposición enunció.

(6) Si velocitates acquisitae (AV fig. 4) sint ut sinus (arcuum HK portionum quadrantis circularis HKB) erunt spatia percurs[f]a (AS) ut Logarithmi sinuum complementi (VK) posito radium seu sinum totum (AB) esse ut velocitatem maximam. Nam ex hypothesi 2 sequitur incrementa spatii esse in ratione composite velocitatum acquisitarum & impressionum gravitatis, sed impressiones sunt ad incrementa velocitatis, ut enunciatum est in demonstration prop. 4. Hinc sequitur incrementa spatii esse in ratione composite incrementorum velocitatis & velocitatum directa, & reciproca ratione excessus quadrati maximae velocitatis super quadratum assumtae. Unde scimus per quadraturas sequi propositum. Patet hinc Logarithmum sinus totius esse 0 (cum velocitas est 0) at evanescencis sinus complementi (cum velocitas est maxima) Logarithmum seu spatium esse infinitum, unde rursus patet velocitatem maximam nusquam attingi.

(6) Si la velocidad adquirida (AV fig. 4) sean un seno (arco HK, porción del cuadrante circular HKB) se erige el espacio (AS) como el logaritmo del complemento del seno (VK), puesto que el radio o seno total (AB) sea como la velocidad máxima. De la hipótesis 2 se sigue que el incremento del espacio está en razón compuesta con la velocidad adquirida y la gravedad, pero las impresiones son como el incremento de velocidad, como está enunciado en la demostración de la prop. 4. De aquí se sigue que el incremento del espacio está en razón compuesta directamente con el incremento de la velocidad, y en razón recíproca con la razón del exceso del cuadrado de la velocidad máxima en el cuadrado asumido. Por tanto, por cuadraturas sigue la proposición. Se ve que el logaritmo del seno total es 0 (y que la velocidad es 0), pero el logaritmo del complemento del seno desapareciendo (cuando la velocidad es máxima) o el espacio es infinito, por lo que al final es evidente que la velocidad máxima es inalcanzable.

[18]Podemos ver que los valores de la serie no concuerdan con los expuestos por Leibniz. No sabemos si se debe a un fallo de transcripción de la fuente o a un fallo del propio Leibniz, pero los valores correctos son los que da el desarrollo compacto que escribimos. Esto se demostrará posteriormente.

como exponenciales en las que la base es una constante que llaman b relacionada con e.

Así, el 18 de noviembre de 1690 Huygens responde a Leibniz diciendo:

> ***Ce sont mes paroles precises et por vous faire voir qu'elles s'ajustent à la proposition ainsi corrigée et transposée, aussi bien qu'avec vos découvertes, appellons comme auparavant le temps*** t***, les velocités*** v***, la plus grande velocité*** a***, les resistences*** r***. Or il est manifeste que les elemens des velocités, c'est à dire les differences de deux velocités prochaines se trouvent en adjoutant à la velocité precedente la nouvelle impression faite par la gravité et en soustrayant en mesme temps la resistence ouperte causée par le milieu, donc*** dv ***(increment de la velocité precedente pour faire la suivante) est*** $dt - r$***. Or*** $r = \frac{dt \cdot v^2}{a^2}$***, donc*** $dv = dt - dt\frac{v^2}{a^2}$***, ou bien*** $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$ ***[...]***
>
> Gerhardt (1850), p. 60.

> *Estas son mis palabras precisas y para haceros ver que se ajustan a la proposición así corregida y traspuesta, así como usted ha descubierto, llamemos como previamente al tiempo* t*, las velocidades* v*, la máxima velocidad* a*, las resistencias* r*. O es obvio que los elementos de las velocidades, es decir las diferencias de dos velocidades próximas se encuentran añadiendo a la velocidad precedente la nueva impresión hecha por la gravedad y restando a la vez la resistencia causada por el medio, por lo que* dv *(incremento de la velocidad anterior para hacer la siguiente) es* $dt - r$*. O* $r = \frac{dt \cdot v^2}{a^2}$*, por lo que* $dv = dt - dt\frac{v^2}{a^2}$*, o bien* $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$ *[...]*

En esta primera parte de la carta fija las variables que utilizará en el desarrollo e indica que la variación de la velocidad es igual a la impresión hecha por la gravedad (dt) menos la resistencia[19] $dv = dt - r$ y que esta resistencia viene dada por $\frac{dt \cdot v^2}{a^2}$.

Juntando estas dos fórmulas obtiene que $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$:

$$dv = dt - r = dt - dt\frac{v^2}{a^2} = dt\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 - v^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$$

Huygens continúa en su carta:

[19]No entraremos en este trabajo en mostrar de donde obtiene estos resultados Huygens sino que nos centraremos en las integrales que calcula y su paso a exponenciales.

Car dt ***expriment aussi bien les elemens des temps, que les impressiones de la pesanteur, qui sont proportionelles à ces elemens. Par là vous voyés, Monsieur, que*** $t = \int \frac{dv \cdot a^2}{a^2 - v^2}$***, ou, parlant à l'ordinaire, que le temps est la somme de*** $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$***, c'est à dire selon vore expression, que le temps est*** $\frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$***+etc. Mais solon la mienne, les temps sont comme les logarithmes de*** $\sqrt{a^2 - v^2}$***, c'est à dire les velocités*** v ***estant comme les sinus, les temps sont comme les logarithmes sinus complementi. Et vous trouverés que ces deux expressions s'accordent. [...]***

Gerhardt (1850), pp. 60-61.

Por lo que dt expresa también los elementos del tiempo[20]*, al igual que las impresiones de la gravedad, que son proporcionales a estos elementos. Por eso verá, señor, que* $t = \int \frac{dv \cdot a^2}{a^2 - v^2}$*, o, hablando ordinariamente, que el tiempo es la suma de* $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$*, es decir según vuestra expresión, que el tiempo es* $\frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \cdots$*. Pero según la mía, el tiempo es como el logaritmo de* $\sqrt{a^2 - v^2}$*, es decir que las velocidades v sean los números, el tiempo será como los logaritmos de los complementos del número. Y usted encontrará que ambas expresiones concuerdan. [...]*

Huygens afirma que partiendo de la relación anterior $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$ se puede obtener que:

$$dt = dv\frac{a^2}{a^2 - v^2} \Leftrightarrow t = \int \frac{a^2}{a^2 - v^2}dv$$

Y recuerda que Leibniz ha expuesto en el artículo que esa integral es equivalente a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{n+1}}{(2n+1)}$[21] y dice que él ha obtenido que la solución de esa integral es el logaritmo de $\sqrt{a^2 - v^2}$.

Sin embargo, si realizamos esta integral vemos que la afirmación que da Huygens no es cierta, siendo la solución correcta:

$$\int \frac{a^2}{a^2 - v^2}dv = \frac{a}{2}\int \frac{dv}{a+v} + \frac{a}{2}\int \frac{dv}{a-v} = \frac{a}{2}\ln(a+v) - \frac{a}{2}\ln(a-v) = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right)$$

Huygens continúa en su carta:

[20] Con los elementos del tiempo hace referencia a variaciones pequeñas de tiempo.

[21] Esta equivalencia la demuestra Leibniz en su siguiente carta y nosotros la mostraremos en este trabajo.

En symboles les espaces estant marqués par s ***et les elemens de*** ds ***comme auparavant, puisque*** $r = \dfrac{ds\cdot v}{a}$ ***et*** $v = dt - r$***, on aura*** $ds = \dfrac{dv\cdot av}{a^2 - v^2}$***, ou*** $s = \displaystyle\int \frac{dv\cdot av}{a^2 - v^2}$***. Ce qui depend encor de la quadrature de l'Hyperbole ou des Logarithmes. On le pourroit encor exprimer par cette series*** $s = \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{1}{4}v^4 + \dfrac{1}{6}v^6$ ***etc., Mais j'ay crû mieux faire en disant, que les velocités estant*** v***, les espaces sont comme les logarithmes de les raisons de*** $a + v$ ***à*** $a - v$***. Ainsi j'ay ces expressions exponentiales (que vous appellés en riant supertrascendentes)*** $\sqrt{1 - v^2}$ ***comme*** $b^?$ ***et*** $\dfrac{1 - v^2}{1 + v}$ ***comme*** $b^?$***,*** b ***estant un certain nombre constant.***

Gerhardt (1850), p. 61.

Siendo marcado el espacio por el símbolo s y los elementos por ds como anteriormente, ya que $r = \dfrac{ds\cdot v}{a}$ *y* $v = dt - r$*, tendremos que* $ds = \dfrac{dv\cdot av}{a^2 - v^2}$*, o* $s = \displaystyle\int \frac{dv\cdot av}{a^2 - v^2}$*. Esto depende de nuevo de la cuadratura de la hipérbola o de los logaritmos. Podremos expresarlo de nuevo por esta serie* $s = \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{1}{4}v^4 + \dfrac{1}{6}v^6 + \cdots$*, pero he creído mejor decir que las velocidades siendo* v*, los espacios son como los logaritmos de la razón de* $a+v$ *y* $a-v$*. Así tengo expresiones exponenciales (a las que usted llama con gracia supertrascendentes)* $\sqrt{1 - v^2}$ *como* b^t *y* $\dfrac{1 - v^2}{1 + v}$[22] *como* b^s*, siendo* b *algún número constante.*

Aquí Huygens introduce una nueva magnitud, el espacio, que denota por s y da la expresión de la fuerza de rozamiento como $r = \dfrac{ds\cdot v}{a}$.

De donde podemos obtener que:

$$\frac{dt\cdot v^2}{a^2} = \frac{ds\cdot v}{a} \Leftrightarrow \frac{dt\cdot v}{a} = ds \Leftrightarrow dt = \frac{ds\cdot a}{v}$$

Y sustituyendo esto en la primera ecuación dada por Huygens tenemos:

$$dv = dt - r = \frac{ds\cdot a}{v} - \frac{ds\cdot v}{a} = ds\Big(\frac{a^2 - v^2}{av}\Big) \Leftrightarrow ds = \frac{av}{a^2 - v^2}\cdot dv \Leftrightarrow s = \int \frac{av}{a^2 - v^2}dv$$

Huygens indica que esta integral es el logaritmo de $\dfrac{1+v}{1-v}$, sin embargo de nuevo este resultado es erróneo ya que si resolvemos la integral obtenemos:

$$s = \int \frac{av}{a^2 - v^2}dv =^{23} -\frac{a}{2}\int \frac{ds}{s} = -\frac{a}{2}\ln s = -a\ln\sqrt{a^2 - v^2}$$

[22]Debería decir $\dfrac{1+v}{1-v}$, puede ser un error del texto del que hemos obtenido la información.

Huygens introduce además una constante que llama b, que no es exactamente e ya que si seguimos con los resultados que expone llegamos a:

$$t = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \Leftrightarrow \frac{1+v}{1-v} = \left(e^{\frac{2}{a}}\right)^t$$

luego b en este caso sería $e^{\frac{2}{a}}$.

$$s = -a\ln\sqrt{a^2-v^2} \Leftrightarrow a^2 - v^2 = \left(e^{-\frac{2}{a}}\right)^s$$

y en este otro b sería $e^{\frac{-2}{a}}$.

En la contestación de Leibniz el 25 de octubre de 1690 (Gerhardt, 1850, pp. 65-66), le corrige los resultados de las integrales que ha dado y se los demuestra:

> ***Car les temps estant t, espaces s, velocités v, la grande velocité a, il est vray, comme j'ay marqué, que les temps sont comme les sommes de $\frac{a^2}{a^2-v^2}$, et les espaces comme les sommes de $\frac{a^2v}{a^2-v^2}$. Mais au lieu d'en tirer cette consequence que les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{a^2-v^2}$ et les espaces comme les logarithmes de la raison de $a+v$ à $a-v$, je devois dire le contraire. Et peut estre ne seriés vous pas faché, Monsieur, d'en voir la demonstration. Soit (fig 10) ECG l'hyperbole, dont le centre A, le vertex C, les asymptotes AB, AH; et BC costé du carré AC soit l'unité ou a, dont le logarithme 0. L'on scait que l'espace ou parallelogramme hyperbolique (comme vous l'appellés) BG sera le logarithme de AF, mais -BE sera le logarithme de AD, ou bien BE sera le logarithme de DE ou de $\frac{1}{AD}$. Donc il est clair que BD ou BF estant v, alors BG ou le log. de $1+v$ sera $\frac{1}{1}v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3$ etc., et BE ou le log. de $\frac{1}{1-v}$ sera $\frac{1}{1}v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4$ etc. donc $BG + BE$ ou le log. de $\frac{1+v}{1-v}$, sera $\frac{2}{1}v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{5}v^5$ etc. ce qui est le double de la somme de $\frac{a^2}{a^2-v^2}$: mais $BG - BE$ ou le log. $(1+v)$ par $(1-v)$ c'est à dire le log. de $(1-v^2)$ sera $-\frac{2}{2}v^2 - \frac{2}{4}v^4 - \frac{2}{6}v^6$ etc. Ou bien le log. de $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ sera $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ etc. [...] Cette methode servira en beaucoup d'autres rencontres; donc les velocités estant v, les temps seront les logarithmes de $\frac{1-v}{1+v}$, et les espaces seront les logarithmes de $\sqrt{1-v^2}$.***

[23]Sea $s = a^2 - v^2$, por lo que $ds = -2v\cdot dv$

Por lo que el tiempo siendo t, el espacio s, la velocidad v, la máxima velocidad a, es cierto, como he marcado, que el tiempo es como la suma de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$. Pero en lugar de obtener la consecuencia de que el tiempo es como el logaritmo de $\sqrt{a^2 - v^2}$ y el espacio como el logaritmo de la razón de $a + v$ y $a - v$, debo decir lo contrario. Y puede ser que ninguna serie, señor, os haya hecho ver la demostración. Sea (figura 10) la hipérbola ECG, cuyo centro es A, el vértice es C, la asíntotas AB, AH; y el lado BC del cuadrado AC la unidad o a, cuyo logaritmo es 0. Sabemos que el espacio del paralelogramo hiperbólico (como usted lo llama) BG será el logaritmo de AF, pero -BE será el logaritmo de AD, o bien BE será el logaritmo de DE o de $\frac{1}{AD}$. Por lo que está claro que BD o BF siendo v, entonces BG o el log. de $1+v$ será $\frac{1}{1}v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \cdots$, y BE o el log. de $\frac{1}{1-v}$ será $\frac{2}{1}v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{5}v^5 + \cdots$ por lo que $BG + BE$ o el log. de $\frac{1+v}{1-v}$ será $\frac{2}{1}v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{5}v^5 + \cdots$, que es el doble de la suma de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$, pero $BG - BE$ o el log. de $(1+v)$ por $(1-v)$, es decir el log. de $(1 - v^2)$ será $-\frac{2}{2}v^2 - \frac{2}{4}v^4 - \frac{2}{6}v^6$, o bien el log. de $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ será $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6 + \cdots$ [...] Este método servirá en muchas otras ocasiones; por lo que las velocidades siendo v, el tiempo será el logaritmo de $\frac{1-v}{1+v}$, y el espacio será el logaritmo de $\sqrt{1-v^2}$.

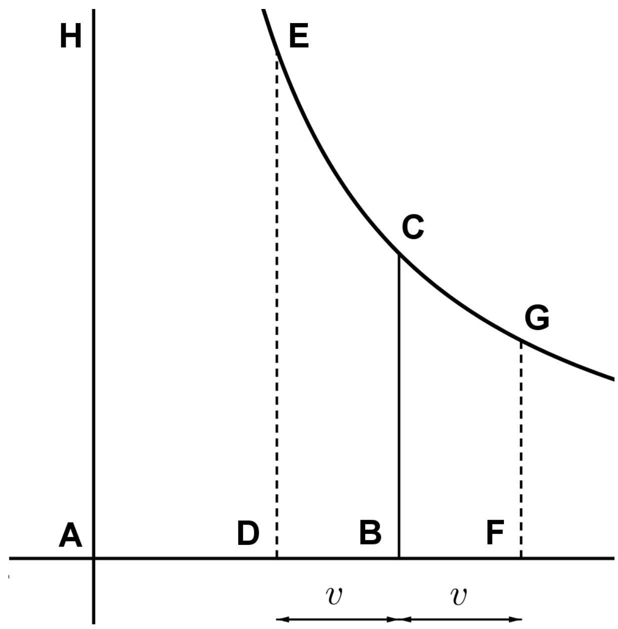


Figura 10: Imagen que hemos realizado a partir de la descripción que da Leibniz ya que no la hemos encontrado en los textos consultados.

Tal y como hemos mostrado antes, Leibniz también se da cuenta de que las integrales que

Huygens ha calculado son incorrectas, y para dar la demostración correcta introduce la figura 10 en la que se apoyará para dar su demostración.

A lo largo de este párrafo usará la cuadratura de la hipérbola que publicó anteriormente en el *Acta Eroditorum* (Leibniz, 1691, pp. 178-179),[24] donde afirma que:

> ***Jam anno 1675 compositum habebam Opusculum Quadrate Arithmeticae amicis ab illlo tempore lectum, sed quo materia sub manis crescente limare ad adtionems non vacavit, pstquam aliae occupationes supervenere: [...]***
>
> ***Nempe sit radius unitas, arcus A tangens t, sinus rectus s, sinus versus v, logarithmus l, numerus 1+n (logarithmo ipsius unitatis seu l existente 0), siet:***
>
> $$l = \frac{1}{1}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \ etc.$$
>
> *En el año 1675 estaba componiendo un pequeño trabajo sobre la Cuadratura Aritmética leído por mis amigos en aquel momento, pero porque otras tareas de distintas ocupaciones intervinieron, con el trabajo que hacer aumentando no tuve tiempo libre para refinar el trabajo para una publicación: [...]*
>
> *Claramente, el radio será la unidad, t la tangente del arco a, el seno correcto será s, el seno versado v, el logaritmo l, el número 1+n (para el logaritmo de la unidad o para sí mismo l siendo 0), las series se harán:*
>
> $$l = \frac{1}{1}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \cdots$$

De aquí podemos obtener la relación en notación actual:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Leibniz fija en la figura 10 que la distancia AB, y por consecuente BC, es 1. Tal y como dice, si medimos las distancias desde B, y las ponemos como la variable v, tenemos que las áreas BG y BE se pueden expresar como:

$$BG = \int_B^F \frac{1}{x}dx = \int_1^{1+v} \frac{1}{x}dx = \ln(1+v) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v^n}{n}$$

[24]A pesar de que la publicación es posterior a la fecha de la carta, hemos buscado en las *Actas Eroditorum* entre 1682 y 1690 y no hemos encontrado ningún artículo en el que Leibniz de esta relación. Por eso, tal y como dice el primer párrafo, puede ser que Leibniz haya utilizado en esta demostración la serie que ya había hallado en 1675.

$$BE = \int_D^B \frac{1}{x}dx = \int_{1-v}^1 \frac{1}{x}dx = -\ln(1-v) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-v)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^n}{n}$$

Utilizando estas relaciones Leibniz afirma entonces que:

$$BG+BE = \ln(1+v)-\ln(1-v) = \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^n}{n}((-1)^{n+1}+1)$$

$$BG-BE = \ln(1+v)+\ln(1-v) = \ln(1-v^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^n}{n}((-1)^{n+1}-1)$$

Las dos últimas expresiones se pueden simplificar. Si observamos la serie correspondiente a $BG + BE$ observamos dos posibilidades:

- Si n es par, por lo que $n = 2k$, observamos que los términos se eliminan:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^{2k}}{2k}(1+(-1)^{2k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^{2k}}{2k}(-1+1) = 0$$

- Al contrario, si n es impar, por lo que $n = 2k+1$, observamos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{2k+1}}{2k+1}(1+(-1)^{2k+2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{2k+1}}{2k+1}(1+1) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{2k+1}}{2k+1}$$

Por este motivo podemos expresar la suma en términos exclusivamente de términos impares, obteniendo:

$$BG+BE = \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{2n+1}}{2n+1}$$

Se puede seguir el mismo proceso para la otra expresión:

- Si n es par, por lo que $n = 2k$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^{2k}}{2k}((-1)^{2k+1}-1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^{2k}}{2k}(-1-1) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^{2k}}{2k}$$

- Si n es impar, por lo que $n = 2k+1$, el término desaparecerá:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{2k+1}}{2k+1}((-1)^{2k+2}-1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{2k+1}}{2k+1}(1-1) = 0$$

Por este motivo se puede expresar la suma en términos únicamente de números pares, obteniendo:

$$BG-BE = \ln(1-v^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^{2n}}{2n}$$

De aquí se puede llegar a la última afirmación que hace Leibniz:

$$\ln\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = -\frac{1}{2}\ln(1-v^2) = -\frac{1}{2}\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^{2n}}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^{2n}}{2n}$$

Leibniz cierra este párrafo diciendo que este método puede ser empleado en multitud de ocasiones, lo que parece reforzar la suposición que tenemos respecto al método de integrar funciones hiperbólicas de Leibniz.

> ***[...] Car une meme courbe peut recevoir les trois expressions, que je viens de dire. Par exemple la courbe susdite [qui exprime la relation entre les temps et les vitesses imprimées par la pesanteur (qui sont proportionelles au temps) et entre les vitesses absolues, qui en restent à cause de la resistence du milieu] c'est à dire la courbe dont les abscises sont*** v ***et les ordonnées*** t ***se peut exprimer serialement par*** $t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \&c.$ ***et differentialement par*** $t = \int \frac{dv}{1-v^2}$***, et enfin exponentialement par*** $b^t = \frac{1+v}{1-v}$***; ce qui veut dire que*** $\frac{1+v}{1-v}$ ***estant comme les nombres,*** t ***sont comme les logarithmes;*** b ***estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0.***

Leibniz (1691), p. 76.

> *[...] Por lo que una misma curva puede recibir las tres expresiones que acabo de decir. Por ejemplo la curva dicha [que expresa la relación entre el tiempo y las velocidades impresas por el peso (que son proporcionales al tiempo) y entre las velocidades absolutas, que siguen siendo a causa de la resistencia del medio] es decir, la curva cuyas abscisas son* v *y cuyas ordenadas son* t *se puede expresar en serie por* $t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \cdots$ *y diferencialmente por* $t = \int \frac{dv}{1-v^2}$*, y finalmente exponencialmente por* $b^t = \frac{1+v}{1-v}$*, lo que quiere decir que sean* $\frac{1+v}{1-v}$ *los números,* t *serán como los logaritmos;* b *siendo una gran constante cuyo logaritmo es 1, siendo 0 el logaritmo de 1.*

En este último párrafo Leibniz vuelve a los resultados obtenidos anteriormente y expresa t de tres formas diferentes, como series, como logaritmo o como una exponencial:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^{2n+1}}{2n+1}, \qquad t = \int\frac{dv}{1-v^2}, \qquad b^{\frac{t}{\cdot}} = \frac{1+v}{1-v}$$

E introduce, para la expresión exponencial, la constante b utilizada por Huygens anteriormente pero no aparece b^t sino $b^{\frac{t}{\cdot}}$.

Si nosotros reescribimos exponencialmente la expresión de t:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = t \;\Leftrightarrow\; \frac{1+v}{1-v} = e^{2t} = b^{2t}$$

obtenemos:

$$\frac{1+v}{1-v} = e^{2t} = e^{\frac{t}{\frac{1}{2}}}$$

Mientras que Leibniz escribe:

$$b^{\frac{t}{\cdot}} = \frac{1+v}{1-v}$$

E indica que el logaritmo de b es 1, lo que nos induce a pensar que la base de los logaritmos utilizados para cuadrar la hipérbola es b, que coincide con lo que actualmente es e. De aquí podemos deducir que Leibniz tenía ya conocimientos sobre una constante importante, que reconoció como base de los logaritmos para cuadrar la hipérbola y a la que llamó b.

Primera aparición de la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ y su acotación entre $2{,}5$ y 3: *Acta Eroditorum* de Jacob Bernoulli.

La primera vez que aparece una de las definiciones del número e es en el año 1683, 67 años después de la publicación de la *Descriptio* por John Napier, en el que Jacob Bernoulli obtiene una de las fórmulas que hoy usamos para definir e y da una acotación del valor de esta fórmula entre 2,5 y 3, pero sigue sin asociarle un nombre a dicho valor.

Figura 11: Retrato de Jacob Bernoulli de Wikipedia en Jakob Bernoulli (2016).

Jacob Bernouilli fue un matemático, teólogo y filósofo perteneciente a la familia Bernouilli, famosos por su influencia en las matemáticas[25]. Nació el 27 de diciembre de 1654 en Basilea y murió el 16 de agosto de 1705, en Basilea también.

Fue el primer miembro de la familia Bernouilli en ir a la universidad. Forzado por su padre, estudió teología, filosofía e idiomas en la Universidad de Basilea. Aun así, sentía una gran afección por las matemáticas y estudiaba a escondidas, logrando resolver problemas considerados difíciles. Al terminar sus estudios comenzó un viaje por Suiza, Francia e Italia, lugares en los que llevaba una libreta para anotar comentarios científicos, que en su mayor parte eran problemas matemáticos. Dos años después de haber regresado a Basilea, viaja a Inglaterra y a Holanda, donde conoce a Huygens, quién ejerce una gran influencia en su trabajo sobre teoría de las probabilidades. En Inglaterra visitó el Observatorio Real de Greenwich. Este viaje fue el último que efectuó en el resto de su vida, aunque le sirvió para establecer correspondencia con famosos geómetras europeos.

Fue escogido para ser profesor de matemáticas en la Universidad de Basilea en 1686. Este año Jacob leyó el trabajo de Leibniz sobre el nuevo método, que trataba las bases del cálculo diferencial e integral. Jacob enseñó matemáticas a su hermano Johann, maestro de Euler, mientras que Johann estudiaba medicina. Ambos hermanos estudiaron y contribuyeron ampliamente al cálculo diferencial.

[25]Biografía obtenida de: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3324&Itemid=33&showall=1

Sin embargo a finales del siglo XVII estallaron las disputas entre Jacob y Johann debido al carácter irritable de ambos. Jacob enfermó ese mismo año de tuberculosis, y las disputas con su hermano junto a su enfermedad le provocaron la muerte.

Aunque fue menos importante que su hermano Johann, la fama de Jacob se debe a su trabajo en ecuaciones diferenciales, series infinitas, la espiral logarítmica y, especialmente, aportaciones en el área de estadística y probabilidades con su *Ars conjectandi*¸ publicada en 1713, ocho años después de su muerte, por su sobrino Nicolaus I. Además, es también la persona a la que se atribuye la primera definición de número e, tras estudiar un problema relacionado con el interés compuesto.

El problema propuesto por Bernoulli se presenta de la siguiente manera en la página 222 del *Acta Eroditorum* (1685):

> ***Alterius naturæ hoc Problema est: Quæritur, si creditor aliquis pecuniæ summam fænori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur; quantum ipsi finito anno debeatur? Resp, si sors vocetur*** a***, usura annua*** b***, creditori elapso anno deberitur*** $a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4a^3}+\&c.$
>
> *Este problema es de naturaleza diferente: La pregunta es, si algún prestamista invirtiera una suma de dinero con interés, dejándolo acumular, tal que a cada momento recibiera una parte proporcional de su interés anual; ¿cuánto se le debería al final del año? Respuesta*[26]*, si tenemos una cantidad a, utilizando b como el crédito anual, al inversor se le deberá al final del año* $a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4a^3}+\cdots$

Esta serie que Bernoulli escribe se puede reescribir como:

$$a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n!\cdot a^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Posteriormente acota el valor de esta serie entre dos expresiones (p. 222):

> ***Quae summa major est, quam*** $a+b+\frac{b^2}{2a}$***, ut patet; sed minor quam*** $a+b+\frac{b^2}{2a-b}$***, quoniam*** $\frac{b^2}{2a-b}$ ***est summa progressionis Geometricae*** $\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a^3}+\&c.$

[26]Hemos interpretado la expresión “Resp” como responsum, que se traduce como respuesta.

Cuya suma es mayor que $a+b+\frac{b^2}{2a}$ *y es menor que* $a+b+\frac{b^2}{2a-b}$*, donde* $\frac{b^2}{2a-b}$ *es la suma de la progresión geométrica* $\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a^3}+\cdots$

En efecto, la primera afirmación es evidente ya que indica que la suma de los términos de una progresión, de términos positivos, es mayor que la suma de los tres primeros términos

Para demostrar la segunda afirmación, que la cota superior de esta suma infinita es menor que $a+b+\frac{b^2}{2a-b}$, tenemos:

- Que $\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a^3}+\cdots>\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot a^3}+\cdots$ ya que si comparamos las dos progresiones geométricas término a término tenemos:
  1. : $\frac{b^2}{2a}=\frac{b^2}{2a}$.
  2. : $\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot a^2}<\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a^2}$ ya que $\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}$.
  3. : $\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot a^3}<\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a^3}$ por los mismos motivos.
  4. : $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!\cdot a^n}<\frac{b^{n+1}}{2^n a^n}$ ya que $\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{2^n}$
- Que $\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a}+\cdots=\frac{b^2}{2a-b}$ ya que utilizando la fórmula de la suma infinita de una progresión geométrica de razón menor que 1 tenemos que:

$$\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a}+\cdots=b\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)^n=b\cdot\frac{\frac{b}{2a}}{1-\frac{b}{2a}}=\frac{b^2}{2a-b}$$

- Que $\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)<a+b+\frac{b^2}{2a-b}$ ya que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)=a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot a^3}+\cdots<$$
$$a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a^3}+\cdots=a+b+\frac{b^2}{2a-b}$$

Por tanto la afirmación queda demostrada.

Tras escribir un ejemplo de cómo usar la serie que ha expuesto Bernoulli afirma (p. 222):

Si $a=b$***, deberitur plu quam*** $2\frac{1}{2}a$***, & minus quam*** $3a$***.***

Si $a=b$*, será más que* $2{,}5a$ *y menos que* $3a$*.*

Estas afirmaciones se pueden comprobar sustituyendo $b = a$ en las cotas que ha dado anteriormente:

$$a + a + \frac{a^2}{2a} = 2a + \frac{a}{2} = a\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 2{,}5a$$

$$a + a + \frac{a^2}{2a - a} = 2a + \frac{a^2}{a} = 3a$$

Sin embargo, con los conocimientos actuales al sustituir $b = a$ en la serie original obtenemos:

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n! \cdot a^{n-1}} = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n!} = a\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Lo que nos lleva a una de las definiciones actuales de e:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Por tanto, uniendo todo lo anterior llegamos a:

$$2{,}5a < a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3a \;\Leftrightarrow\; 2{,}5a < e \cdot a < 3a \;\Leftrightarrow\; 2{,}5 < e < 3$$

Por lo que, sin saberlo, Bernoulli ha dado la primera definición de e junto a una acotación de su valor.

Definiciones de e: *Introductio in Analysin Infinitorum* de Leonhard Euler.

Tras la definición de Leibniz, numerosos matemáticos que se interesaron por el nuevo cálculo desarrollaron aplicaciones, como usos en física, mecánica, arquitectura y especialmente en el campo de las ecuaciones diferenciales. Por ello, el uso de la constante b estuvo cada vez más presente en los cálculos de la época. Sin embargo, por aquel entonces no se conocía a e con el mismo nombre que ahora. La primera vez que la base del logaritmo natural recibe el nombre de e es en una carta que Leonhard Euler envía a Christian Goldbach.

Leonhard Euler[27] fue un matemático y físico suizo que nació el 15 de abril de 1707 y murió el 18 de septiembre de 1783. Es el matemático más prolífico de la historia y es considerado uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos.

Figura 12: Retrato de Leonhard Euler de Wikipedia en Leonhard Euler (2017).

Las facultades que demostró para las matemáticas, desde temprana edad, le ganaron la estima del patriarca de los Bernoulli, Johann, uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea. Tras graduarse en dicha institución en 1723, fue invitado personalmente, cuatro años más tarde, por Catalina I para convertirse en asociado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde coincidió con otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel, a quien en 1733 relevó en la cátedra de matemáticas.

A causa de su dedicación al trabajo, dos años más tarde perdió la visión del ojo derecho, hecho que no afectó al número de sus hallazgos. Hasta 1741, año en que por invitación de Federico el Grande se trasladó a la Academia de Berlín, refinó los métodos y las formas del cálculo integral (no sólo gracias a resultados novedosos, sino también a un cambio en los habituales métodos de demostración geométricos, que sustituyó por métodos algebraicos), que convirtió en una herramienta de aplicación a problemas de física.

En 1748 publicó la obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, en la que expuso el concepto

[27] Biografía obtenida de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm

de función en el marco del análisis matemático, campo en el que así mismo contribuyó con resultados como el teorema sobre las funciones homogéneas y la teoría de la convergencia. En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricos y relacionarlos con los números complejos mediante la denominada fórmula de Euler; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos.

A raíz de ciertas tensiones con su patrón Federico el Grande, regresó nuevamente a Rusia en 1766, donde al poco de llegar perdió la visión del otro ojo. A pesar de ello, su memoria y capacidad para el tratamiento computacional de los problemas le permitieron continuar su actividad científica; así, entre 1768 y 1772 escribió sus *Lettres à une princesse d'Allemagne*, en las que expuso los principios básicos de la mecánica, la óptica, la acústica y la astrofísica de su tiempo.

Tras su muerte, se inició un proyecto para publicar la totalidad de su obra científica, compuesta por más de ochocientos tratados, lo cual lo convierte en el matemático más prolífico de la historia.

Euler utiliza en sus documentos y apuntes la letra e para representar la constante b. El primer manuscrito en el que comienza a utilizar esta notación es en *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta* de 1728 (p. 1), publicado póstumamente, donde no sólo utiliza e, sino que además da una aproximación de su valor:

> ***Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas,*** e***, qui est 2.7182817... cujus logarithmus secundum Vlacq. est 0.4342944.***
>
> *Escribimos para el número cuyo logaritmo es la unidad, e, que es 2.7182817... cuyo logaritmo segundo Vlacq.*[28] *es 0.4342944.*

Posteriormente menciona el nombre de e en una carta a Goldbach el 25 de noviembre de 1731, disponible en Fuss P. G. (1843) p. 58, en la que, durante la resolución de un problema, define e de la siguiente manera:

> e ***denotat hic numerum, cujus logarithmus hiperbolicus est = 1.***
>
> *e denota el número cuyo logaritmo hiperbólico es = 1.*

[28]Con logaritmo Vlacq., Euler se refiere a los logaritmos calculados por Adriaan Vlacq, que no son más que una extensión de las tablas calculadas por Henry Briggs. Por este motivo, el logaritmo Vlacq es un logaritmo en base 10, y como podemos comprobar $\log_{10} e = 0{,}4342944819\cdots$.

Aun así, la primera publicación abierta en la que introduce la notación moderna de e es en su *Mechanica* de 1736. La primera vez que menciona la constante es en la página 68 del segundo capítulo del primer tomo y lo hace de la siguiente manera:

> ***171. [...] Erit enim*** $\dfrac{dc}{c} = \dfrac{dyds}{sdx}$ ***seu*** $c = e^{\int \frac{dyds}{rdx}}$ ***ybi*** e ***denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1.***

> *171. [...] Será* $\dfrac{dc}{c} = \dfrac{dyds}{sdx}$ *o* $c = e^{\int \frac{dyds}{rdx}}$*, donde e denota el número cuyo logaritmo hiperbólico es 1.*

Pero en todos estos tratados Euler trabaja con e de la misma manera que Leibniz, nombrando la constante como base de los logaritmos hiperbólicos. Es en su obra *Introductio in Analysin Infinitorum* cuando presenta una primera definición de e y calcula un valor numérico aproximado. En el capítulo VII de esta obra comienza la exposición de su estudio de funciones exponenciales por medio de series al infinito.

Para esto hace la siguiente consideración al comenzar el capítulo:

> *114. Por ser* $a^0 = 1$ *y aumentar el valor de la potencia al crecer el exponente de a si éste es algún número mayor que la unidad, se sigue que si el exponente excede de cero infinitamente poco también la potencia habrá de superar a la unidad infinitamente poco. Sea* ω *un número infinitamente pequeño, o una fracción tan exigua que, sin ser igual a cero, sea* $a^\omega = 1 + \psi$*, siendo también* ψ *un número infinitamente pequeño. [...] Así pues, será* $\psi = \omega$*, o* $\psi > \omega$*, o* $\psi < \omega$*, proporción que dependerá entonces de la cantidad de la letra a; como ésta sigue hasta aquí incógnita, se pone* $\psi = k\omega$*, de suerte que* $a^\omega = 1 + k\omega$*, y supuesta a como base logarítmica, será* $\omega = \log_a(1 + k\omega)$*.*

Euler (1748), pp. 103-105.

En este párrafo introductorio podemos observar que Euler ya maneja la idea de límite con soltura. Fija la relación a^ω, considerando que $\omega \to 0^+$, y afirma que este valor será igual a $1 + \psi$, con $\psi \to 0^+$, ya que si $\omega \to 0^+$, $a^\omega \to 1^+$, es decir $a^\omega = 1 + \psi \ : \psi \to 0^+$.

A continuación expresa ψ como $k \cdot \omega$, donde k dependerá de la base a y será igual a 1, menor que 1 o mayor que 1 según sea $\psi = \omega$, o $\psi > \omega$, o $\psi < \omega$. Sustituye esta expresión en la relación anterior y aplica logaritmos en base a obteniendo las dos expresiones con las que Euler cierra el párrafo:

$$a^\omega = 1 + k\omega \Leftrightarrow \omega = \log_a(1 + k\omega) : \omega \to 0^+$$

En el siguiente punto Euler modifica la igualdad que tiene para poder llegar a un desarrollo en serie.

115. Comoquiera que $a^{\omega} = 1 + k\omega$, será $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, cualquiera que sea el número que sustituya a i. Con que

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

Porque si se pone $i = \frac{z}{\omega}$, y z denota un número finito cualquiera, por ser ω infinitamente pequeño se hará i infinitamente grande, y de aquí que $\omega = \frac{z}{i}$, de modo que ω será una fracción con denominador infinito y por ello infinitamente pequeña, cual se la había supuesto. Sustitúyase $\frac{z}{i}$ en lugar de ω, y será

$$a^{z} = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 + \cdots$$

Euler (1748), pp. 105-106

En este párrafo,comienza elevando su expresión original a un número cualquiera, llamado i, y la desarrolla en forma de suma. Nosotros usando el binomio de Newton hemos obtenido la misma expresión pero con un número finito de términos:

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = \sum_{s=0}^{i} \binom{i}{s} 1^{i-s}\cdot (k\omega)^s = \sum_{s=0}^{i} \binom{i}{s} k^s\omega^s$$

Después define i como $\frac{z}{\omega}$, donde z es un número finito[29], e indica que como $\omega \to 0^+$ entonces $i \to \infty$. Despeja ω y lo sustituye en el desarrollo en suma, obteniendo el desarrollo de una potencia en forma de serie infinita. Si nosotros hacemos lo mismo en el desarrollo que obtuvimos al aplicar la fórmula de Newton:

$$a^{z} = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = \sum_{s=0}^{i} \binom{i}{s} k^s \left(\frac{z}{i}\right)^s = \sum_{s=0}^{i} \binom{i}{s} \frac{k^s z^s}{i^s}$$

llegamos a la misma expresión que Euler ya que $i \to \infty$.

En su siguiente explicación se exponen una serie de límites que posteriormente son introducidos en el desarrollo de la serie.

116. Ahora bien, comoquiera que i sea un número infinitamente grande, será $\frac{i-1}{i} = 1$; es patente en efecto que cuanto mayor sea el número que sustituya a

[29]Como Euler afirma que $i \to \infty$, por y sabemos por consideraciones anteriores que $\omega \to 0^+$, se debe cumplir que z es positivo.

i, más estrechamente se acercará a la unidad el valor de la fracción $\frac{i-1}{i}=1$; de aquí que si i es un número mayor a todo número asignable, también la fracción $\frac{i-1}{i}=1$ se igualará a la unidad. Por similar razón serán $\frac{i-2}{i}=1$; $\frac{i-3}{i}=1$, y así sucesivamente; de aquí se sigue que habrán de ser $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}$, $\frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$, y así sucesivamente. Sustituyendo pues estos valores, será

$$a^z = 1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

hasta infinito. Ahora bien, esta ecuación muestra al mismo tiempo la relación entre los números a y k; en efecto, puesto $z=1$, será

$$a = 1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Euler (1748), p. 106

En este párrafo se aplican los actuales límites del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ para simplificar algunas expresiones que aparecen en su desarrollo en serie.

Si $i\to\infty$, y t y r son números finitos, podemos simplificar las fracciones que Euler propone siguiendo el procedimiento:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{i-t}{r\cdot i}=\lim_{i\to\infty}\frac{i}{r\cdot i}-\lim_{i\to\infty}\frac{t}{r\cdot i}=\frac{1}{r}$$

Esta simplificación le sirve para simplificar también el coeficiente binomial presente en su desarrollo:

$$\lim_{i\to\infty}\binom{i}{s}=\lim_{i\to\infty}\frac{i!}{s!\cdot(i-s)!}=\frac{1}{s!}\lim_{i\to\infty}\prod_{h=0}^{s-1}(i-h)$$

Sustituyendo esto en el desarrollo mediante serie tenemos:

$$a^z=\lim_{i\to\infty}\sum_{s=0}^{i}\binom{i}{s}\frac{k^sz^s}{i^s}=\lim_{i\to\infty}\sum_{s=0}^{i}\frac{1}{s!}\prod_{h=0}^{s-1}(i-h)\frac{k^sz^s}{i^s}=\lim_{i\to\infty}\sum_{s=0}^{i}\frac{k^sz^s}{s!}\prod_{h=0}^{s-1}\Big(\frac{i-h}{i}\Big)$$

Mediante el límite calculado anteriormente podemos simplificar el productorio:

$$\lim_{i\to\infty}\prod_{h=0}^{s-1}\Big(\frac{i-h}{i}\Big)=\prod_{h=0}^{s-1}\lim_{i\to\infty}\Big(\frac{i-h}{i}\Big)=\prod_{h=0}^{s-1}1=1$$

Volviendo a sustituir este valor en la expresión anterior obtenemos:

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{s=0}^{i}\frac{k^sz^s}{s!}\prod_{h=0}^{s-1}\Big(\frac{i-h}{i}\Big)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{k^sz^s}{s!}$$

que es la expresión compacta del desarrollo al que llega Euler. Expone también la relación entre k y la base a, para lo que considera $z = 1$ y obtiene su última expresión.

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$$

En el siguiente párrafo expone la manera de averiguar el desarrollo en serie de cualquier función exponencial b^z conociendo el desarrollo de sólo una de ellas a^z.

> *117. Pongamos ser $b = a^n$, y tomado el número a como base logarítmica será $\log_a b = n$. De aquí, comoquiera que $b^z = a^{nz}$, serie infinita mediante será*
>
> $$b^z = 1 + \frac{k \log_a b \cdot z}{1} + \frac{k^2 n^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 n^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 n^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
>
> *puesto $\log_a b = n$, empero, será*
>
> $$b^z = 1 + \frac{k \log_a b \cdot z}{1} + \frac{k^2 (\log_a b)^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 (\log_a b)^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 (\log_a b)^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
>
> *Conque conocido el valor de la letra k a partir del valor de la base a, una cantidad exponencial cualquiera, b^z, se podrá expresar mediante una serie infinita cuyos términos se sucedan según las potencias de z. Esto expuesto, mostremos cómo puede expresarse también cualquier clase de logaritmos mediante series infinitas.*

Euler (1748), pp.107-108

Empieza el párrafo considerando una cantidad cualquiera b y la relaciona exponencialmente con la cantidad a como $b = a^n$ donde n es $\log_a b$. Como conocemos el desarrollo en serie de a^z, podemos averiguar la serie b^z. En efecto, tomando la serie:

$$a^z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s z^s}{s!}$$

Y considerando la relación $a^n = b$ y $n = \log_a b$, podemos sustituir en la serie anterior para obtener:

$$b^z = a^{nz} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s (nz)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s n^s z^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s (\log_a b)^s z^s}{s!}$$

que nos permite expresar cualquier función exponencial b^z como una serie infinita en función de a y la k que le corresponde.

Este párrafo marca un punto de inflexión en el capítulo, por lo que haremos un repaso de todas las conclusiones que Euler ha obtenido:

- Considerando a^ω y fijando $\omega \to 0^+$ obtiene una expresión equivalente que involucra un valor k dependiente de la base a.

– Mediante una nueva cantidad i definida por $i = \frac{z}{\omega}$, siendo z un número finito (por lo que $i \to \infty$), y mediante el desarrollo del binomio obtiene el desarrollo en serie de la función exponencial a^z y una relación entre k y a.

– Relacionando dos cantidades b y a exponencialmente mediante una tercera cantidad n, da el procedimiento general para obtener el desarrollo de la función b^z, sea cual sea la cantidad b conociendo únicamente la cantidad a y su k asociada.

El resto del párrafo, así como los siguientes, los dedica a mostrar cómo expresar series logarítmicas mediante series al infinito. Sin embargo, como esa parte del capítulo no aporta información relevante para la definición que hace de e pasamos al párrafo 122 de su libro donde introduce por primera vez una definición de e, presentada de la siguiente manera:

> *122. Ya que para fundar un sistema de logaritmos es lícito escoger a gusto de cada cual la base de a, se podrá asumir que se haga $k = 1$. Pongamos pues ser $k = 1$, y mediante la serie hallada más arriba, será*
>
> $$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
>
> *términos que convertidos en fracciones decimales y sumados acto seguido ofrecerán como valor de $a = 2{,}71828182845904523536028$, cuyo último carácter en verdad es de conveniencia. Y si ahora se construyen logaritmos sobre tal base, como mediante logaritmos de este tipo se puede cuadrar la hipérbola, se les suele llamar logaritmos naturales o hiperbólicos. En lugar del número $2{,}718281828459...$, pongamos en gracia a la brevedad la letra constante e[30], que denotará entonces la base de los logaritmos naturales o hiperbólicos a la que corresponde el valor de la letra $k = 1$; o lo que es igual, esta letra e expresa también la suma de la serie*
>
> $$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
>
> *hasta infinito.*
>
> Euler (1748), pp.111-112

En este párrafo, Euler acaba de enunciar la definición mediante serie de e. Retomando lo mencionado anteriormente, ya que podemos expresar cualquier función exponencial

[30]Parece que, de esta afirmación, se puede deducir que el nombre de e se debe no tanto a que sea la primera letra del nombre de Euler sino más bien a que es la siguiente vocal no usada en el desarrollo de sus proposiciones. Euler había usado ya a como la base de las funciones exponenciales e i como un número infinitamente grande.

sabiendo el desarrollo de una, Euler toma como función base la que considera más simple, aquella en la que se cumple que $k = 1$. Sustituyendo este valor en la expresión

$$a = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s}{s!}$$

obtiene que el valor buscado es:

$$a = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}$$

Valor que aproxima como $2,71828182845904523536028...$. Hace el apunte de que este valor es el utilizado para los logaritmos empleados en la cuadratura de la hipérbola, hecho que ya hemos expuesto en apartados anteriores de este trabajo. Por conveniencia, ya que es una constante que aparecerá con frecuencia posteriormente, la denota como e, y vuelve a dar la definición una vez más:

$$e = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}$$

definición que coincide con la hallada por Bernoulli en el apartado anterior.

Tras esto aplica la nueva constante con su condición de $k = 1$ a todas sus definiciones anteriores. Comienza en el párrafo 123 de esta manera:

> *123. Así pues, los logaritmos hiperbólicos tendrán la propiedad de que el logaritmo del número $1 + \omega$ sea ω, significando ω una cantidad infinitamente pequeña; y como a partir de esta propiedad se da a conocer el valor de $k = 1$, se podrán exponer los logaritmos hiperbólicos de todos los números. De suerte que puesto e en lugar del número antes hallado será cierto siempre que*
>
> $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
>
> *[. . .]*

Euler (1748), p.112

La primera afirmación de este párrafo es fácil deducirla de la expresión del párrafo 115 aplicando la condición $k = 1$, y como consecuencia $a = e$

$$e^{\omega} = 1 + 1\cdot \omega = 1 + \omega \;\Leftrightarrow\; \omega = \ln(1 + \omega)$$

La segunda afirmación del párrafo resulta sencilla de deducir a partir de la dada en el párrafo 116, aplicando nuevamente $k = 1$ y consecuentemente $a = e$:

$$a^z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s z^s}{s!} \;\Leftrightarrow\; e^z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!}$$

mientras que el resto del párrafo (el cual no hemos reproducido) lo dedica al estudio del desarrollo de la función logarítmica en los casos en los que la base es e.

En el último párrafo del capítulo explica la manera de expresar cualquier función exponencial tomando como referencia e^z, y da la definición de la función exponencial en una base a mediante un límite.

> *125. Comoquiera que*
> $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
> *si se pone* $a^y = e^z$ *al tomar logaritmos hiperbólicos será* $y \log_e a = z$*, porque* $\log_e e = 1$*; sustituido* z *por este valor, será*
> $$a^y = 1 + \frac{y \log_e a}{1} + \frac{y^2(\log_e a)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3(\log_e a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4(\log_e a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
> *y por ende, cualquier cantidad exponencial se podrá expresar merced a logaritmos hiperbólicos mediante series infinitas. Pero entonces, si* i *denota un número infinitamente grande, se pueden exponer mediante potencias tanto cantidades exponenciales como logaritmos. En efecto, será* $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$*, y de aquí que* $a^y = \left(1 + \frac{(\log_e a)z}{i}\right)^i$*, [...]*

Euler (1748), p.115

Para finalizar, Euler recurre de nuevo a su método para expresar cualquier función exponencial mediante series. Para esto considera una función exponencial cualquiera a^y y la relaciona con e^z haciendo $a^y = e^z$. De aquí despeja el valor de z, obteniendo que $z = y \ln a$. Esto nos deja con la serie tal que:

$$e^z = e^{y \ln a} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y^s (\ln a)^s}{s!}$$

Sin embargo, como hemos considerado la igualdad $e^z = a^y$, obtenemos que:

$$e^z = a^y = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y^s (\ln a)^s}{s!}$$

que, como ya hemos explicado anteriormente, permite expresar una función exponencial de base a conocido el valor de $\ln a$. Tras eso, volviendo a la fórmula del párrafo 115, y cambiando $k = 1$, por lo que $a = e$ se obtiene:

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i : i \to \infty \;\Leftrightarrow\; e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i : i \to \infty$$

de lo que se puede deducir la definición actual, aunque Euler no lo escribe, del número e haciendo $z = 1$.

$$e = \lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$$

Parte II

Aplicaciones de e

Identidad de Euler: $e^{\pi i} + 1 = 0$.

La primera de las aplicaciones que vamos a estudiar nos la indicó el Dr. D. Víctor Jiménez López, catedrático de análisis matemático en el departamento de matemáticas de la Universidad de Murcia. Se trata de la identidad de Euler, $e^{\pi i}+1 = 0$, que muchos matemáticos consideran como una de las fórmulas más bellas y que relaciona cinco números muy importantes. En Murcia, podemos ver grabada esta fórmula en la puerta de la facultad de matemáticas.

Esta identidad no es más que un caso concreto de la fórmula de Euler, por lo que vamos a estudiar el origen de la fórmula de Euler y a partir de ella obtendremos la identidad.

La fórmula de Euler es presentada por primera vez con su formulación actual[31] por Euler en su obra *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748. En esta obra, tras el capítulo VII, en el que trabaja con las series exponenciales y da varias definiciones de e, encontramos a lo largo de todo el capítulo VIII relaciones importantes entre las funciones seno y coseno que nos conducirán a la fórmula de Euler. En la página 127 escribe:

> *132. Comoquiera que* $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$*, tomando los factores será* $(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = 1$*; factores que, si bien imaginarios, prestan no obstante un servicio ingente a la hora de combinar y multiplicar arcos. En efecto, si se busca el producto de los factores* $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$*, se descubre* $\cos y \cos z - \sin y \sin z + (\cos y \sin z + \sin y \cos z)\sqrt{-1}$. *Por otra parte, comoquiera que sean* $\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos(y + z)$ *y* $\cos y \sin z + \sin y \cos z = \sin(y + z)$*, será también este producto*
>
> $$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y + z) + \sqrt{-1}\sin(y + z)$$
>
> *y de modo similar*
>
> $$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y + z) - \sqrt{-1}\sin(y + z)$$
>
> *y asimismo*
>
> $$\begin{aligned}&(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) =\\ &\cos(x + y + z) \pm \sqrt{-1}\sin(x + y + z)\end{aligned}$$

Euler (1748), p. 127

[31] Roger Cotes ya halló esta expresión en su *Logometria* de 1714. La relación que obtuvo era, en notación actual: $xi = \ln(\cos x + i\sin x)$, que es equivalente a la fórmula de Euler.

Euler comienza este párrafo escribiendo como producto de dos multiplicandos complejos la relación fundamental de la trigonometría $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, obteniendo $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x)$. Euler denomina a $(\cos x \pm i\sin x)$ como el factor, y menciona que presenta propiedades interesantes a la hora de trabajar con senos y cosenos. Un ejemplo de las propiedades que tiene lo expone mediante las siguientes propiedades, sabiendo que $\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y)$ y que $\cos x\sin y + \sin x\cos y = \sin(x+y)$:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos x\cos y + i\cos x\sin y + i\sin x\cos y + i^2\sin x\sin y =$$
$$\cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\cos y - \cos x\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

$$(\cos x - i\sin x)(\cos y - i\sin y) = \cos x\cos y - i\cos x\sin y - i\sin x\cos y + i^2\sin x\sin y =$$
$$\cos x\cos y - \sin x\sin y - i(\sin x\cos y - \cos x\sin y) = \cos(x+y) - i\sin(x+y)$$

$(\cos x \pm i\sin x)(\cos y \pm i\sin y)(\cos z \pm i\sin z) =$ [32]$(\cos(x+y) \pm i\sin(x+y))(\cos z \pm i\sin z) =$ $\cos(x+y+z) \pm i\sin(x+y+z)$

> *133. Y de aquí se sigue que han de ser* $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm i\sin 2z$, *y* $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm i\sin 3z$*; con lo que será en general* $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm i\sin nz$*. De donde se sigue, por causa de la ambigüedad de los signos, que serán*
>
> $$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$
>
> *y*
>
> $$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$
>
> *Desarrollados pues estos binomios mediante series, [...]*
>
> Euler (1748), p. 128

Continuando con los cálculos hechos en el párrafo anterior Euler halla:

$$(\cos x \pm i\sin x)^2 = (\cos x \pm i\sin x)(\cos x \pm i\sin x) = \cos(x+x) \pm i\sin(x+x) = \cos 2x \pm i\sin 2x$$

$$(\cos x \pm i\sin x)^3 = (\cos x \pm i\sin x)(\cos x \pm i\sin x)(\cos x \pm i\sin x) =$$
$$(\cos 2x \pm i\sin 2x)(\cos x \pm i\sin x) = \cos 3x \pm i\sin 3x$$

De aquí Euler deduce la fórmula de De Moivre:

$$(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx$$

[32]Sabemos esto por los resultados anteriores.

Como Euler no da ninguna demostración de la fórmula vamos a desarrollar una propia basada en el método de inducción. Sabemos por los cálculos anteriores que para $n = 1, 2, 3$ la fórmula se cumple, por lo que suponemos que se cumplirá para $n-1$, es decir suponemos que se cumple:

$$(\cos x \pm i \sin x)^{n-1} = \cos((n-1)x) \pm i \sin((n-1)x)$$

Vamos a demostrarla para n.

$(\cos x \pm i \sin x)^n = (\cos x \pm i \sin x)^{n-1}(\cos x \pm i \sin x) =$

$(\cos(n-1)x \pm i \sin(n-1)x)(\cos x \pm i \sin x) = \cos(nx - x + x) \pm i \sin(nx - x + x) =$

$\cos nx \pm i \sin nx$

A partir de este resultado expresa las funciones $\sin nx$ y $\cos nx$ como:

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} = \frac{\cos nx + i \sin nx + \cos nx - i \sin nx}{2} = \frac{2 \cos nx}{2} =$$
$$\cos nx$$

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^n - (\cos x - i \sin x)^n}{2i} = \frac{\cos nx + i \sin nx - \cos nx + i \sin nx}{2i} = \frac{2i \sin nx}{2i} =$$
$$\sin nx$$

> *138. Pongamos nuevamente en la fórmula 133 el arco z infinitamente pequeño, y sea n el número infinitamente grande i, de modo que iz obtenga el valor finito v. Serán entonces $nz = v$ y $z = \frac{v}{i}$, de donde $\sin z = \frac{v}{i}$ y $\cos z = 1$; sustituido éste,*
>
> $$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} y \sin v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2i}$$
>
> *Ahora bien, vimos en el capítulo precedente que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$, donde e denota la base de logaritmos hiperbólicos: con que al escribir en lugar de z por una parte $v\sqrt{-1}$, por otra $-v\sqrt{-1}$, serán*
>
> $$\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \;\; y \;\; \sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2i}$$
>
> *De donde se entiende cómo traer las cantidades exponenciales imaginarias a senos y cosenos de arcos reales. Pues: $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \sin v$ y $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1} \sin v$.*

Euler (1748), pp. 135-136

Euler vuelve a hablar de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Considera los números z y n tales que $z \to 0^+$, $n \to \infty$ y $n\cdot z = v$ (finito)[33]. Además z es tal que $\cos z = 1$ y $\sin z = z = \frac{n}{v}$. Estas últimas igualdades no lo son pero si son buenas aproximaciones. La primera de las igualdades es bastante intuitiva y para mostrar la segunda usaremos la aproximación lineal de una función $f(x)$ en un entorno de $x = a$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

que nos da una buena aproximación de $f(x)$ cuando x está infinitésimamente cerca de a y, al aplicarla a $f(z) = \sin z$ y $a = 0$ tenemos:

$\sin z = \sin 0 + \cos 0 \cdot (z - 0)$, es decir si $z \to 0$, $\sin z \simeq z$.

Si aplicamos estas ideas a los resultados obtenidos en el punto 133 tenemos:

$$\cos nz = \cos v = \frac{(\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{v\cdot i}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{v\cdot i}{n}\right)^n\right)$$

$$\sin nz = \sin v = \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{v\cdot i}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{v\cdot i}{n}\right)^n\right)$$

donde $n \to \infty$

Como Euler indica, ya sabemos por apartados anteriores que $\left(1 + \frac{v\cdot i}{n}\right)^n = e^{v\cdot i}$ si $n \to \infty$ y $\left(1 - \frac{v\cdot i}{n}\right)^n = e^{-v\cdot i}$ cuando $n \to \infty$. Sustituyendo esto en las expresiones anteriores obtenemos:

$$\cos v = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{v\cdot i}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{v\cdot i}{n}\right)^n\right) = \frac{e^{v\cdot i} + e^{-v\cdot i}}{2}$$
$$\sin v = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{v\cdot i}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{v\cdot i}{n}\right)^n\right) = \frac{e^{v\cdot i} - e^{-v\cdot i}}{2i}$$

De donde podemos obtener las fórmulas de Euler:

$$\cos v + i\sin v = \frac{e^{vi} + e^{-vi}}{2} + i\frac{e^{vi} - e^{-vi}}{2i} = \frac{e^{vi} + e^{-vi} + e^{vi} - e^{-vi}}{2} = \frac{2e^{vi}}{2} = e^{vi}$$

$$\cos v - i\sin v = \frac{e^{vi} + e^{-vi}}{2} - i\frac{e^{vi} - e^{-vi}}{2i} = \frac{e^{vi} + e^{-vi} - e^{vi} + e^{-vi}}{2} = \frac{2e^{-vi}}{2} = e^{-vi}$$

Es fácil ver que la identidad de Euler es una consecuencia directa de la fórmula de Euler para el caso $v = \pi$. Sustituyendo este valor obtenemos:

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \;\Leftrightarrow\; e^{\pi i} + 1 = 0$$

[33]Euler utiliza i o n indistintamente para indicar un número que tiende a infinito. Nosotros usaremos n ya que dejaremos i para expresar $\sqrt{-1}$.

De donde acabamos de obtener la identidad de Euler.

Para ver algunas de las aplicaciones de la fórmula de Euler en física hablamos con el Dr. D. Jaime V. Colchero Paetz que nos explicó que la aplicación que él más utiliza de esta fórmula es para representar números complejos, ya que al expresarlos de esta forma puede simplificar las operaciones de multiplicación y exponenciación utilizando las propiedades de la función exponencial:

> *¿Vosotros qué veis al leer e^{ix}? ¿Qué significa para vosotros? Para mí es como una circunferencia. Como el módulo de e^{ix} es 1, al dejar que x tome valores los números complejos que resultan dan vueltas en el plano complejo, formando una circunferencia. Esto es bueno porque nos permite trabajar con las propiedades de la función exponencial en el campo de los complejos.*

Efectivamente, si partimos de las distintas formas de representar un número complejo que estudiamos en bachillerato encontramos que existe una forma mediante coordenadas polares, llamada forma trigonométrica en la que si z es un número complejo con argumento ϕ y módulo r entonces z se puede expresar como:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ : \{r, \varphi\} \in \mathbb{R}$$

Pero utilizando la fórmula de Euler vemos que z se puede expresar como $re^{i\varphi} \ : \{r, \varphi\} \in \mathbb{R}$, por lo que utilizando la función exponencial compleja en base e podemos expresar de forma compacta cualquier número complejo. Y a partir de las propiedades de esta función podemos multiplicar, dividir, elevar a un número entero o hacer raíces de cualquier número complejo de forma sencilla, ya que si:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\phi} \qquad z' = r'(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r'e^{i\alpha}$$

Entonces:

$$z\cdot z' = re^{i\varphi}\cdot r'e^{i\alpha} = rr'e^{i(\varphi+\alpha)} = rr'(\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha))$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\varphi}}{r'e^{i\alpha}} = \frac{r}{r'}e^{i(\varphi-\alpha)} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi-\alpha) + i\sin(\varphi-\alpha))$$
$$z^n = r^n(e^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$
$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(e^{i\varphi+i2\pi k})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})} = r^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\Big) : k = 0, 1, \dots, n-1$$

Desarrollo en serie de Fourier.

La segunda de las aplicaciones nos la indicó D. José Ginés Espín Buendía, becario de investigación en la facultad de matemáticas de la Universidad de Murcia. Él nos dijo que para él la principal aplicación del número e venía dada por su aparición en el desarrollo en serie de cualquier función periódica y continua a trozos, mediante la serie de Fourier.

La serie de Fourier es una serie convergente que expresa cualquier función periódica y continua a trozos $f(x)$ como:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} x}$$

donde c_n es un coeficiente determinado por $c_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2\pi i \frac{n}{T} x} dx$ y T es el periodo.

Este hecho permite expresar cualquier función $g(x)$ continua en $[a, b]$ como combinación de funciones de exponenciales complejas con base e. Para ello, basta definir $f(x)$ como la función periódica, de periodo $T = b - a$, y tal que $f(x) = g(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Una primera versión de la serie de Fourier fue presentada por primera vez por Joseph Fourier[34] en su artículo *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*, que hemos consultado en el libro de recopilaciones *Oeuvres de Fourier* publicado por Gaston Darboux en 1890.

El objetivo de Fourier era demostrar que el calor puede ser expresado como suma de funciones senoidales y cosenoidales, debate que estaba abierto desde decenas de años atrás, aunque ya se conocía la ecuación del calor para casos sencillos.

El artículo comienza planteando el problema que será tratado posteriormente. Sin embargo, no vamos a mostrar este comienzo ya que en su totalidad está referido a cuestiones sobre el calor y su naturaleza, por lo que pasaremos directamente al modelo matemático (Darboux, 1890, pp. 216-217):

> ***Cette température varie avec le temps et la position du point auquel elle appartient; elle est donc une fonction des cordonnées de ce point et du temps. M. Fourier obtient, pour la déterminer, une équation aux différences partielles, savoir***
>
> $$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

[34] El artículo, a pesar de haber sido presentado por Fourier, fue redactado por Siméon Denis Poisson, matemático destacado que pertenecía a la *Societé philomatique* de Paris.

dans laquelle** v **est la température,** t **le temps,** x**,** y**,** z **les trois coordonnées rectangulaires du point, et** a **un coefficient constant.

Esta temperatura varía con el tiempo y la posición del punto al que pertenece; es por tanto función de las coordenadas del punto y del tiempo. El Sr. Fourier obtiene para determinarla una ecuación en derivadas parciales,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

en la que v es la temperatura, t el tiempo, x, y, z las tres coordenadas rectangulares, y a un coeficiente constante.

En este párrafo se acaba de introducir la llamada ecuación del calor, cuyos fundamentos han sido introducidos anteriormente en el artículo. Es una ecuación en derivadas parciales que da la temperatura en función de los puntos del espacio y del tiempo. La expresión general de esta fórmula es:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a\nabla^2 v = 0$$

donde $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ es el laplaciano, que se corresponde con el divergente del gradiente. Si expresamos el laplaciano en coordenadas cartesianas tal y como Fourier dice y pasamos el término al otro lado de la igualdad obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a\nabla^2 v = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

que es la expresión a la que ha llegado anteriormente.

Fourier empieza en el siguiente párrafo a restringir las condiciones iniciales del problema (Darboux, 1890, p. 217).

Lorsque le corps est parvenu à l'état stationnaire, les temperatures de tous les points sont invariables; on a donc

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

et, par consequent,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

Cette équation, quoique plus simple que la précédente, n'est point encore intégrable sous forme finie.

Cuando el cuerpo se encuentra en estado estacionario, las temperaturas de todos los puntos son invariables; tenemos por tanto

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

y, como consecuencia,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

Esta ecuación, aunque más simple que la precedente, todavía no es integrable de forma finita.

Considera que el cuerpo se encuentra en estado estacionario, que sabemos que es cuando las temperaturas no varían a lo largo del tiempo, lo que le lleva a afirmar que $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ y aplicándolo a la fórmula $\frac{\partial v}{\partial t} - a\nabla^2 v = 0$ obtiene que $a\nabla^2 v = 0$. Como $a \neq 0$, nos queda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

Esta ecuación es característica y recibe un nombre especial, la ecuación de Laplace, debido al matemático y físico francés Pierre-Simon Laplace.

Tras la formulación estrictamente matemática Fourier pasa a fijar una serie de condiciones externas que simplificarán el problema (Darboux, 1890, p. 217):

On demande la température des différents points d'une lame rectangulaire, d'une longeur indefinite et d'une épaisseur constant, lorsque cette temperature est parvenue à l'état stationnaire.

Les côtés de la lame parallèles à la longeur sont entretenus constamment à zéro, qu'on suppose être la température primitive de la lame entière. Les points de l'une de ses extrémités sont des foyers de chaleur constante, de sorte que leur température est donnée et peut être différente d'un point à un autre. On fait l'abstraction de l'épaisseur de la lame et du rayonnement, en sorte que, en prenant le plan de la lame pour celui des xy, on pourra supprimer la coordonnée z [...]

Requerimos la temperatura de puntos diferentes de una lámina rectangular de una longitud indefinida y de espesor constante, cuando esa temperatura está dada en estado estacionario.

Los extremos de la lámina paralelos a la longitud son mantenidos constantemente a cero, que suponemos que es la temperatura primitiva de la lámina entera. Los puntos de uno de sus extremos son focos de calor constante, de manera que su temperatura está dada y puede ser diferente de un punto a otro. Hacemos abstracción del grosor de la lámina y de la radiación, de manera que, tomando el plano de la lámina por el de xy, podremos suprimir la coordenada z [...]

Empieza en este párrafo la restricción de variables para reducir el grado de dificultad del problema. La ecuación del calor, que ya hemos visto anteriormente, está definida para las variables x, y, z y t. Lo que esto significa es que asigna un valor de temperatura para cada punto de un espacio $\mathbb{R}^3$ y para cada instante t. Pondremos un ejemplo gráfico de la representación de este tipo de funciones en un instante t en la figura 13:

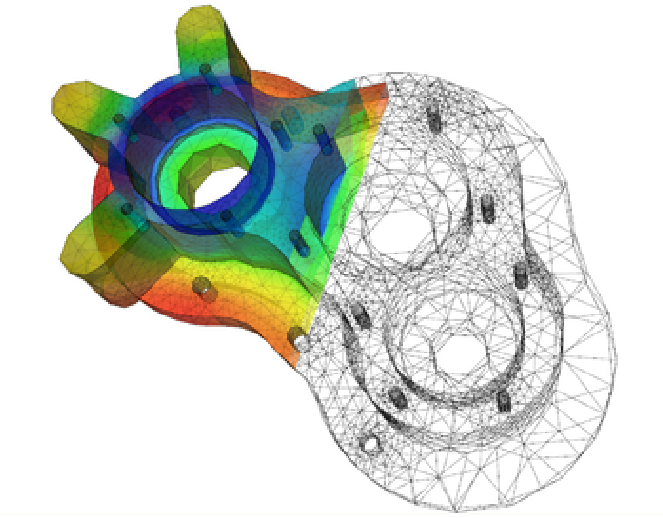


Figura 13: Para un instante determinado t a ciertos puntos del espacio se les ha asignado una temperatura, representada por un color. Imagen obtenida de Wikipedia.

Para simplificar el problema y siguiendo con las condiciones de estado estacionario, supone que el estado primario de la lámina es de temperatura cero, y como consecuencia también lo son los lados. Para introducir el calor en la lámina fija la condición de que uno de los extremos sea una fuente de calor, que supone constante. Fourier termina por concluir que el grosor de la lámina es despreciable, por lo que pasaría a ser un plano. Toma este plano como el plano xy, por lo que la componente z pasaría a no formar parte del modelo. Teniendo en cuenta las condiciones de estado estacionario Fourier continúa en el desarrollo obteniendo otra ecuación (Darboux, 1890, p. 218).

[...] l'équation relative à l'état stationnaire se réduira à

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

dont l'intégrale est

$$v = fonct.(x + y\sqrt{-1}) + fonct.(x - y\sqrt{-1}).$$

[...] la ecuación relativa al estado estacionario se reducirá a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

cuya integral es

$$v = fonct.(x + y\sqrt{-1}) + fonct.(x - y\sqrt{-1}).$$

Se distinguen aquí dos partes claras:

La primera parte, relativa al planteamiento del problema, consiste en hallar la nueva ecuación diferencial que se ajuste a las nuevas condiciones del problema. Sabiendo que la lámina se encuentra en estado estacionario y que no trabajamos con la coordenada z, podemos afirmar que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

La segunda parte está referida a las soluciones que esta ecuación diferencial tiene. Para demostrar esto nos basaremos en que una función $f(z)$ puede ser expresada como $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iw(x,y)$. De aquí podemos obtener que el conjugado vendrá dado por $f(\bar{z}) = f(x-iy) = u(x,-y) + iw(x,-y)$.

Reformulando la función $f(z)$ así es cuestión de sustituirla en la ecuación de Laplace y verificar que la operación es cero. Para ello, nos apoyaremos además en las ecuaciones de Cauchy-Riemman, que afirman que:

Definición: Sea una función compleja $f(z) = x + iy$. Se sabe que $f(z)$ se puede descomponer en dos funciones reales de dos variables u y v, de manera que $f(z) = f(x,y) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Si la función $f(z)$ es derivable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces deben verificarse las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

Suponiendo que la función es derivable en $x, y \in R$, podemos hallar la generalización de estas ecuaciones:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

Y si aplicamos las condiciones de Cauchy-Riemman para $f(\bar{z})$ obtenemos:

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x} = -\frac{\partial v(x,-y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(x,-y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,-y)}{\partial x}$$

Apoyándonos en estos resultados podemos sustituir la función v en la ecuación diferencial para hallar que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial^2 (f(z) + f(\bar{z}))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f(z) + f(\bar{z}))}{\partial y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} +$$
$$i\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 w(x,-y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial y^2} +$$
$$i\frac{\partial^2 w(x,-y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w(x,-y)}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} +$$
$$i\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w(x,-y)}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial x \partial y} = 0$$

Por lo que podemos ver que la función considerada por Fourier cumple la ecuación diferencial.

En el siguiente párrafo Fourier expone la solución de la ecuación simplificada (Darboux, 1890, p. 218):

> ***Au lieu de cette intégrale complète, qui a l'inconvénient de renfermer des imaginaires, M. Fourier emploie la somme d'une infiinité d'intégrales particulières, savoir***
>
> $$\begin{aligned} v =&(ae^{-nx}+be^{nx})\cos(ny)+(a'e^{-n'x}+b'e^{n'x})\cos(n'x)+\cdots \\ &(Ae^{-mx}+Be^{mx})\sin(my)+(A'e^{-m'x}+B'e^{m'x})\cos(m'x)+\cdots \end{aligned}$$
>
> a***,*** a'***, ...,*** b***,*** b'***, ...;*** A***,*** A'***, ...,*** B***,*** B'***, ...;*** n***,*** n'***, ...,*** m***,*** m'***, ... étant des constantes arbitraires.***
>
> *En lugar de esta integral completa, que tiene el inconveniente de contener (cantidades) imaginarias, el Sr. Fourier emplea la suma de una infinidad de integrales particulares,*
>
> $$\begin{aligned} v =&(ae^{-nx}+be^{nx})\cos(ny)+(a'e^{-n'x}+b'e^{n'x})\cos(n'x)+\cdots \\ &(Ae^{-mx}+Be^{mx})\sin(my)+(A'e^{-m'x}+B'e^{m'x})\sin(m'x)+\cdots \end{aligned}$$ [35]
>
> *a, a', ..., b, b', ...; A, A', ..., B, B', ...; n, n', ..., m, m', ... siendo constantes arbitrarias.*

Fourier acaba de mostrar la solución de la ecuación de Laplace bidimensional, aunque Fourier no haya expuesto ningún procedimiento para obtenerla[36]. Aun así, nosotros emplearemos procedimientos actuales para demostrar este resultado.

El método que utilizaremos se llama separación de variables. Consiste en, si al suponer que la solución de la ecuación diferencial es una función formada por productos de funciones de una única variable obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias para cada una de ellas, entonces la solución es el producto de las soluciones de las ecuaciones diferenciales

[35] A pesar de que en el artículo original la función escrita es $\cos(m'y)$, por afirmaciones posteriores en el artículo creemos que se debe a un fallo de transcripción y debería poner $\sin(m'y)$.

[36] Aprovechamos para hacer un apunte histórico. Esta falta de rigor en el texto ya fue criticada por Lagrange y Laplace cuando el texto se presentó al *Institut national*. Aunque posteriormente Fourier publicó en 1822 su *Théorie Analytique du Chaleur*, en el que da una explicación más detallada. Además, indicar que la convergencia de las series trigonométricas que obtiene no se demuestra hasta los trabajos de Dirichlet.

ordinarias. Por tanto, partiremos de la suposición de que $v(x,y) = M(x) \cdot N(y)$, al sustituir en la ecuación diferencial tenemos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow N(y)\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + M(x)\frac{\partial^2 N(y)}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}}{M(x)} = -\frac{\frac{\partial^2 N(y)}{\partial y^2}}{N(y)}$$

Como ambas ecuaciones son iguales y dependen de parámetros distintos (x, y), la única solución posible es que ambas divisiones sean constantes. Designando esta constante como λ obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}}{M(x)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - \lambda M(x) = 0 \qquad \frac{\frac{\partial^2 N(y)}{\partial y^2}}{N(y)} = -\lambda \Leftrightarrow \frac{\partial^2 N(y)}{\partial y^2} + \lambda N(y) = 0$$

de donde acabamos de obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias, de las que expondremos directamente la solución. Efectivamente, como hemos llegado a ecuaciones diferenciales ordinarias la solución podrá ser expresada por la multiplicación de ambas funciones:

$$M(x) = ce^{\sqrt{\lambda}x} + de^{-\sqrt{\lambda}x} \qquad N(y) = k\cos(\sqrt{\lambda}y) + L\sin(\sqrt{\lambda}y)$$

Sin embargo, la solución general de ambas ecuaciones será la suma de las soluciones particulares. Esta solución vendrá dada por tanto por:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\sqrt{\lambda_i}x} + d_i e^{-\sqrt{\lambda_i}x}$$

$$N(y) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(y) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cos(\sqrt{\lambda_i}y) + L_i \sin(\sqrt{\lambda_i}y)$$

Podemos obtener así la solución de la ecuación diferencial sustituyendo en la consideración hecha anteriormente:

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i(x) \cdot N_i(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(c_i e^{\sqrt{\lambda_i}x} + d_i e^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)(k_i \cos(\sqrt{\lambda_i}y) + L_i \sin(\sqrt{\lambda_i}y)) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(c_i e^{\sqrt{\lambda_i}x} + d_i e^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)k_i \cos(\sqrt{\lambda_i}y) + \left(c_i e^{\sqrt{\lambda_i}x} + d_i e^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)L_i \sin(\sqrt{\lambda_i}y)\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(b_i e^{\sqrt{\lambda_i}x} + a_i e^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)\cos(\sqrt{\lambda_i}y) + \left(B_i e^{\sqrt{\lambda_i}x} + A_i e^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)\sin(\sqrt{\lambda_i}y)\right)$$

Donde $b_i = c_i k_i,\ a_i = d_i k_i,\ B_i = c_i L_i,\ A_i = d_i L_i$. En el siguiente párrafo Fourier determina los coeficientes $\sqrt{\lambda_i}$ por medio de la consideración de condiciones restrictivas (Darboux, 1890, p. 218).

Si l'on suppose, pour simplifier, la lame semblablement échauffée de part et d'autre de la ligne qui la partage en deux parties égales dans le sens de sa longeur, et que l'on prenne cette ligne pour axe des x***, les sinus*** $\sin(my)$, $\sin(m'y)$***, ... devront être exclus de la valeur de*** v***. De plus, en prennant pour unité la demi-largeur de la lame, la condition qu'on ait*** $v = 0$ ***quand*** $y = \pm 1$***, quelle que soit la valeur de*** v***, exige que les arbitraires*** n, n', n''***, ... soient la suite des quantités*** $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$***, ...*** π ***désignant la demi-circonférence.***

Si suponemos, para simplificar, la lámina del mismo modo calentada en ambos lados de la línea que la divide en dos partes iguales en el sentido de su longitud, y que tomamos esa línea como el eje de las x*, los senos* $\sin(my)$, $\sin(m'y)$*, ... deberán ser excluidos del valor de* v*. Además, tomando por unidad la mitad de longitud de la lámina, la condición que tenemos* $v = 0$ *cuando* $y = \pm 1$*, el que sea el valor de* v*, exige que las (cantidades) arbitrarias* n, n', n''*, ... sean la serie de cantidades* $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$*, ...* π *designando la semicircunferencia.*

Para la simplificación de este problema Fourier divide la placa de metal en dos mediante un eje imaginario[37], que asocia al de las x. Ahora, independientemente de la longitud de la lámina, si la dividimos por la mitad con el eje ya mencionado Fourier afirma que los senos desaparecen del valor del calor. Esta afirmación tiene su fundamento en la imparidad de la función seno. Si suponemos que los focos de calor están situados a las distancias $-a$ y $+a$ del eje, sabiendo que como son iguales deben tener las mismas velocidades de propagación pero en dirección opuesta, por el principio de superposición el calor será la suma de los calores diferentes en el mismo punto. Juntando todo lo anterior podemos sumar el calor producido por ambos focos mediante:

$$\sin(a - vx) + \sin(-a + vx) = \sin(a - vx) - \sin(a - vx) = 0$$

De esta forma, como los senos se anulan sólo deben quedar cosenos en la función del calor.

Como extremos de la lámina de metal escoge que la distancia desde el eje x al final sea de una unidad, y por condiciones anteriores sabemos que la temperatura en los bordes de la placa deberá ser cero, por lo que Fourier acaba de fijar las condiciones de frontera del problema. Podemos expresar estas condiciones de frontera como:

$$v(x, \pm 1) = 0 \ \forall x$$

[37]Remarcamos que, a pesar de denominar al eje como imaginario, éste no tiene relación alguna con los números imaginarios.

Que, reescribiendo la función mediante variables separadas nos deja con:

$$M(x)\cdot N(\pm 1) = 0 \; \forall x$$

Esto implica que $M(x) = 0 \; \forall x$ o que $N(\pm 1) = 0$. Como la primera de las posibilidades no se cumple salvo que $M(x)$ fuese la función nula, en cuyo caso $v(x, y) = 0$ lo que es falso, debe ocurrir que $N(\pm 1) = 0$:

$$N(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_i}) = 0$$

$$N(-1) = \sum_{i=1}^{\infty} \cos(-\sqrt{\lambda_i}) =^{38} \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_i}) = 0$$

La solución trivial de esta ecuación es que todos los términos del desarrollo sean nulos:

$$\cos(\sqrt{\lambda_i}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\lambda_i} = \frac{\pi}{2} + i\pi = \frac{2i+1}{2}\pi$$

Esta es la solución que da Fourier, pero vamos a probar que existen otras otros valores de λ_i que hacen que la serie converja a 0. Para continuar con la explicación necesitaremos la definición de serie convergente:

Enunciado: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si el límite de sus sumas parciales es un valor finito.

Es decir que, si S_n es la suma de los primeros n términos de la sucesión incluyendo al n-ésimo término, entonces para que una serie converja debe cumplirse $\lim_{n\leftarrow\infty} S_n = L \;:\; L \in \mathbb{R}$.

En nuestro caso se debe cumplir que $\lim_{n\leftarrow\infty} S_n = 0$. Existen muchas posibilidades de que esto ocurra, por ejemplo si $S_n = \frac{1}{n}$ entonces $\lim_{n\leftarrow\infty} S_n = 0$[39]. Para ello $S_1 = a_1$, entonces sería $a_1 = 1$, y aprovechándonos de que $S_n + a_{n+1} = S_{n+1} \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ podemos hallar el resto de los valores de la serie:

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Como nuestra serie viene dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_i})$, los términos a_n serán $a_n = \cos(\sqrt{\lambda_n})$. Sabiendo que $a_1 = \cos(\sqrt{\lambda_1}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\lambda_1} = \frac{2j+1}{2}\pi$, el resto de términos pueden ser

[38] Sabemos que $\cos(-x) = \cos(+x)$.

[39] Otra opción es $S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots$

obtenidos mediante:

$$a_{n+1} = \cos(\sqrt{\lambda_{n+1}}) = -\frac{1}{n(n+1)} \ \Leftrightarrow\ \sqrt{\lambda_{n+1}} = \arccos\Big(-\frac{1}{n(n+1)}\Big)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto prueba la no unicidad de la solución de Fourier. Pero si adoptamos la solución dada por Fourier, podemos reescribir nuestra función como:

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(b_i e^{\frac{2i+1}{2}\pi x} + a_i e^{-\frac{2i+1}{2}\pi x}\Big)\cos\Big(\frac{2i+1}{2}\pi y\Big)$$

que es la forma compacta del desarrollo que Fourier expone.

En el siguiente párrafo se simplifica la solución mediante un razonamiento físico (Darboux, 1890, p. 218):

> ***Enfin, la température devant décroite à mesure que l'on s'éloigne du foyer de chaleur constante, la valeur de*** v ***ne doit pas renfermer les exponentielles*** e^{nx}***,*** $e^{n'x}$***, ... dont les exposants sont positifs; cette valeur deviendra donc***
>
> $$v = ae^{-\frac{\pi x}{2}}\cos\Big(\frac{\pi y}{2}\Big) + a'e^{-3\frac{\pi x}{2}}\cos\Big(3\frac{\pi y}{2}\Big) + a''e^{-5\frac{\pi x}{2}}\cos\Big(5\frac{\pi y}{2}\Big) + \cdots$$
>
> *Finalmente, (como) la temperatura debe decrecer a medida que nos separemos del foco de calor constante, el valor de v no debe contener las exponenciales* e^{nx}, $e^{n'x}$, *... cuyos exponentes son positivos; este valor se hará por tanto*
>
> $$v = ae^{-\frac{\pi x}{2}}\cos\Big(\frac{\pi y}{2}\Big) + a'e^{-3\frac{\pi x}{2}}\cos\Big(3\frac{\pi y}{2}\Big) + a''e^{-5\frac{\pi x}{2}}\cos\Big(5\frac{\pi y}{2}\Big) + \cdots$$

Para la explicación supongamos un foco de calor constante en $x = 0$. Por las nociones que tenemos del calor, en un estado estacionario en el que el calor no se propaga, sabemos que a medida que nos alejemos del foco del calor la temperatura deberá disminuir. Supongamos entonces que el coeficiente b_i no es nulo. Sabemos que conforme variemos la temperatura únicamente en función de x ésta no decrecerá, sino que cada vez se hará más grande conforme más lejos estemos. Como esto es contradictorio con las nociones que tenemos, la única solución será que el coeficiente b_i sea nulo. Con esta simplificación nuestra función queda tal que:

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\frac{2i+1}{2}\pi x}\cos\Big(\frac{2i+1}{2}\pi y\Big)$$

Fourier dedica el siguiente párrafo a determinar los coeficientes restantes mediante dos propiedades relacionadas con integrales (Darboux, 1890, pp. 218-219):

Il ne reste plus que les coefficients a, a', a'', ***... à déterminer; or, si l'on fixe l'origine des*** x ***au foyer de chaleur constante, la valeur de*** v ***relative a*** $x = 0$ ***sera donnée en fonction de*** y***; soit alors*** $v = \varphi(y)$***, on aura***

$$\varphi(y) = a\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + a'\cos\left(3\frac{\pi y}{2}\right) + a''\cos\left(5\frac{\pi y}{2}\right) + \cdots$$

Multipliant de part et d'autre par $\cos\left[(2i+1)\frac{\pi y}{2}\right]$***, et intégrant ensuite depuis*** $y = -1$ ***jusqu'à*** $y = 1$***, il vient***

$$a_i = \int_{-1}^{+1} \varphi(y)\cos\left[(2i+1)\frac{\pi y}{2}\right]dy,$$

car il est facile de s'assurer que l'intégrale

$$\int \cos\left[(2i+1)\frac{\pi y}{2}\right]\cos\left[(2i'+1)\frac{\pi y}{2}\right],$$

prise depuis $y = -1$ ***jusqu'à*** $y = 1$***, est nulle, excepté dans le cas de*** $i = i'$***, où elle est égale à 1.***

No queda más que determinar los coeficientes a, a', a'', ...; o, si fijamos el origen de las x en el foco de calor constante, el valor de v relativo a $x = 0$ será dado en función de y; sea entonces $v = \varphi(y)$, tendremos

$$\varphi(y) = a\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + a'\cos\left(3\frac{\pi y}{2}\right) + a''\cos\left(5\frac{\pi y}{2}\right) + \cdots$$

Multiplicando una parte y la otra por $\cos\left[(2i+1)\frac{\pi y}{2}\right]$, e integrando entonces desde $y = -1$ hasta $y = 1$, se obtiene

$$a_i = \int_{-1}^{+1} \varphi(y)\cos\left[(2i+1)\frac{\pi y}{2}\right]dy,$$

por lo que es fácil asegurar que la integral

$$\int \cos\left[(2i+1)\frac{\pi y}{2}\right]\cos\left[(2i'+1)\frac{\pi y}{2}\right],$$

tomada desde $y = -1$ hasta $y = 1$ es nula, excepto en el caso de $i = i'$, en el que es igual a 1.

Tras las consideraciones que Fourier ha hecho, sólo quedan por determinar los coeficientes a_i. Fourier define la función $\varphi(y)$ como $\varphi(y) = v(0, y)$, de donde podemos obtener:

$$\varphi(y) = v(0, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\frac{2i+1}{2}\pi\cdot 0}\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)$$

Para determinar los coeficientes Fourier multiplica ambos lados por $\cos\left(\dfrac{2i'+1}{2}\pi y\right)$, obteniendo:

$$\varphi(y)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)$$

Como ambos lados son la misma función, al integrar ambas bajo los mismos límites de integración se deberá mantener la igualdad. En este caso Fourier escoge como límites -1 y 1 por conveniencia:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy = \int_{-1}^{+1} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{-1}^{+1} a_i \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy$$

Para simplificar esta suma infinita de integrales, Fourier se apoya en las dos siguientes propiedades, que ha expuesto anteriormente en su texto sin justificarlas:

Propiedad 1: Si $i \neq i'$ y $i, i' \in \mathbb{N}$ entonces $\displaystyle\int_{-1}^{+1} a_i \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy = 0$

Demostración:

$$\int \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy =^{[40]} \frac{2}{(2i'+1)\pi}\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)+$$
$$\frac{2i+1}{2i'+1}\int \sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy =^{[41]} \frac{2}{(2i'+1)\pi}\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)-$$
$$\frac{2(2i+1)}{(2i'+1)^2\pi}\sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)+$$
$$\left(\frac{2i+1}{2i'+1}\right)^2\int \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy \;\Leftrightarrow$$
$$\left(1-\left(\frac{2i+1}{21'+1}\right)^2\right)\int \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy =$$
$$\frac{2}{(2i'+1)\pi}\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right) - \frac{2(2i+1)}{(2i'+1)^2\pi}\sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right) \;\Leftrightarrow$$
$$\int \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy =$$
$$\frac{(2i'+1)^2}{(2i'+1)^2-(2i+1)^2}\left[\frac{2}{(2i'+1)\pi}\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)-\right.$$
$$\left.\frac{2(2i+1)}{(2i'+1)^2\pi}\sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\right] + k \;\Leftrightarrow$$
$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy =$$

$$\frac{(2i'+1)^2}{(2i'+1)^2-(2i+1)^2}\left[\frac{2}{(2i'+1)\pi}\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)-\right.$$
$$\left.\frac{2(2i+1)}{(2i'+1)^2\pi}\sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)\right]_{-1}^{1}=$$
$$\frac{(2i'+1)^2}{(2i'+1)^2-(2i+1)^2}[0-0]=0$$

Este método, integración por partes, no sirve en el caso de $i=i'$ ya que se llegaría a una igualdad. Para esta demostración seguimos un procedimiento deferente:

Propiedad 2: Si $i=i'$ y $i,i'\in\mathbb{N}$ entonces $\int\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy=1$

Demostración:

$$\int\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy=\int\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)dy=$$
$$\int\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)+\sin^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)-\sin^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)dy=^{42}$$
$$\int\cos[(2i+1)\pi y]dy+\int\left[1-\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\right]dy=\frac{\sin[(2i+1)\pi y]}{(2i+1)\pi}+x-$$
$$\int\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\ \Leftrightarrow\ 2\int\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)=\frac{\sin[(2i+1)\pi y]}{(2i+1)\pi}+x+k\ \Leftrightarrow$$
$$\int\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)dy=\frac{\sin[(2i+1)\pi y]}{2\pi(2i+1)}+\frac{y}{2}+k$$

De donde:

$$\int_{-1}^{1}\cos^2\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)dy=\left[\frac{\sin[(2i+1)\pi y]}{2\pi(2i+1)}+\frac{y}{2}\right]_{-1}^{1}=$$
$$\frac{\sin[(2i+1)\pi]}{2\pi(2i+1)}+\frac{1}{2}+\frac{\sin[(2i+1)\pi]}{2\pi(2i+1)}+\frac{1}{2}=\frac{\sin[(2i+1)\pi]}{\pi(2i+1)}+1=1$$

De esta manera quedan demostradas las dos afirmaciones hechas por Fourier, y podemos continuar con la determinación de los coeficientes.

Como todas las integrales en las que $i\neq i'$ son nulas, y por tanto desaparecen tanto ellas como su coeficiente, mientras que la que cumple que $i=i'$ es 1, todo el desarrollo infinito a la derecha de la expresión será igual al coeficiente $a_{i'}$:

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(y)\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)dy=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}a_i\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)=a_{i'}$$

[41]Haciendo integración por partes con $u=\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)$ y $dv=\cos\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy$.

[41]Volvemos a hacer integración por partes con $u=\sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)$ y $dv=\sin\left(\frac{2i'+1}{2}\pi y\right)dy$.

[42]Sabemos que $\cos^2(ax)-\sin^2(ax)=\cos(2ax)$

Con la determinación de los coeficientes, Fourier acaba de obtener el desarrollo de una función $\varphi(y)$ bajo unas condiciones bastante restrictivas.

Sin embargo, la serie de Fourier permite representar funciones periódicas con condiciones más generales que las que Fourier obtiene en este texto. Hemos analizado éstas porque es la primera vez que aparece la serie de Fourier, aunque sea bajo ciertas condiciones.

Una serie más general la concluye Fourier en la página 257, de su *Théorie analytique de la chaleur*, publicada originalmente en 1822 (aunque nosotros hemos trabajado con una versión de 1988), tras haber desarrollado la demostración en las páginas 190-260:

> ***On écrira [...], au lieu de la variable*** x***, la quantité*** $\pi\frac{x}{r}$***, [...] et*** $2r$ ***la longeur de l'intervalle dans lequel est placé l'arc qui représente*** Fx***; cette fonction sera*** $F\left(\pi\frac{x}{r}\right)$***, que nous désignerons par*** fx***. Les limites qui étaient*** $x=-\pi$ ***et*** $x=\pi$ ***deviendront*** $\pi\frac{x}{r}=-\pi$***,*** $\pi\frac{x}{r}=\pi$***; on aura donc, après la substitution:***

$$rfx=\frac{1}{2}\int_{-r}^{+r}fxdx\begin{array}{l}+\cos\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cos\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cdots\\+\sin\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\sin\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\sin\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\sin\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cdots\end{array}$$

> ***toutes les intégrales doivent être prises comme la première, de*** $x=-r$ ***à*** $x=+r$***.***
>
> *Escribiremos [...], en lugar de la variable* x*, la cantidad* $\pi\frac{x}{r}$*, [...] y* $2r$ *la longitud del intervalo correspondiente al arco que representa* Fx*; esta función será* $F\left(\pi\frac{x}{r}\right)$*, que designaremos por* fx*. Los límites que eran* $x=-\pi$ *y* $x=\pi$ *se convertirán en* $\pi\frac{x}{r}=-\pi$*,* $\pi\frac{x}{r}=\pi$*; tendremos como consecuencia, después de la sustitución:*

$$rfx=\frac{1}{2}\int_{-r}^{+r}fxdx\begin{array}{l}+\cos\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cos\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cdots\\+\sin\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\sin\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\sin\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\sin\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cdots\end{array}$$

> *todas las integrales deben ser tomadas como la primera, de* $x=-r$ *a* $x=+r$*.*

En esta definición hace referencia a una función Fx que Fourier había desarrollado en la página 256 y que es la serie de Fourier con periodo 2π.

> ***On obtient par-là l'équation suivante (p), qui sert à developer une function quelconque en une suite formée de sinus et de cosines***

d'arcs multiples:

$$\pi Fx = \frac{1}{2}\int Fxdx \quad \begin{array}{l} +\cos x \displaystyle\int Fx\cos xdx + \cos 2x \int Fx\cos 2xdx + etc. \\ +\sin x \displaystyle\int Fx\sin xdx + \sin 2x \int Fx\sin 2xdx + etc. \end{array}$$

La fonction Fx, qui entre dans cette équation, est représentée par une ligne $F'F'FF$, d'une forme quelconque. L'arc $F'F'FF$, qui répond à l'intervalle de $-\pi$ a $+\pi$ est arbitraire; toutes les autres parties de la ligne sont déterminées, et l'arc F'F'FF est répété dans tous les intervalles consécutifs dont la longeur est 2π.

Obtenemos por esto la ecuación siguiente (p), que sirve para desarrollar una función cualquiera en una serie formada por cosenos y senos de múltiples arcos:

$$\pi Fx = \frac{1}{2}\int Fxdx \quad \begin{array}{l} +\cos x \displaystyle\int Fx\cos xdx + \cos 2x \int Fx\cos 2xdx + \cdots \\ +\sin x \displaystyle\int Fx\sin xdx + \sin 2x \int Fx\sin 2xdx + \cdots \end{array}$$

La función Fx, que se introduce en esta ecuación, está representada por una línea $F'F'FF$ cualquiera. El arco $F'F'FF$, que responde al intervalo $-\pi$ a $+\pi$, es arbitrario; todas las otras partes de la línea están determinadas, y el arco $F'F'FF$ está repetido en todos los intervalos consecutivos de longitud 2π.

La primera expresión primera es casi la formulación moderna de la serie de Fourier. De hecho, es fácil llegar a la definición actual haciendo la consideración $2r = T$, donde T representa el periodo de la función considerada:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

donde $A_0,\ a_n,\ b_n$ son los coeficientes de Fourier, determinados por:

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

Pero existe otra formulación de la serie de Fourier mediante series complejas:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T}x}$$

donde c_n es un coeficiente determinado por $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{T}x}dx$.

Tras buscar en diferentes autores y fuentes, no hemos encontrado el origen de esta fórmula, pero usando las identidades de Euler[43] resulta sencillo obtenerla a partir de la serie de Fourier no compleja:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{2\pi n}{T}x\Big)\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\Big(\frac{2\pi n}{T}x\Big)dx +$$
$$\sin\Big(\frac{2\pi n}{T}x\Big)\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\Big(\frac{2\pi n}{T}x\Big)dx = \frac{A_0}{2} +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix} + e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix} + e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx +$$
$$\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix} - e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{T\cdot i}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix} - e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{2\cdot i}dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx +$$
$$\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx + \frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx + \frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx -$$
$$\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx + \frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx + \frac{e^{\frac{-2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx -$$
$$\frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{2}dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}dx +$$
$$\frac{e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{\frac{2\pi n}{T}ix}dx$$

Denominando $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-\frac{2\pi n}{T}ix}dx = c_n$ y sabiendo que $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx =$ $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-\frac{2\pi\cdot 0}{T}ix}dx = c_0 e^{\frac{2\pi\cdot 0}{T}ix}$ obtenemos:

$$c_0 e^{\frac{2\pi\cdot 0}{T}ix} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{T}ix} + c_{-n}e^{-\frac{2\pi n}{T}ix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{T}ix} + c_0 e^{\frac{2\pi\cdot 0}{T}ix} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{T}ix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{T}ix}$$

Sin embargo, tras ver la serie de Fourier es posible que se nos plantee una pregunta: ¿Convergerá la serie de Fourier para todas las funciones? La primera solución parcial con un carácter general viene dada por Peter Lejeune Dirichlet en su artículo *Sur la convergence des séries trigonometétriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* de 1829. Tras el desarrollo en el que da la demostración, en la páginas 168 y 169 escribe:

[43]Recordemos que estas identidades afirman que $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ y $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$.

Les considérations précédentes prouvent d'une manière rigoureuse que, si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont suppossées finies et déterminées, ne presente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limies $-\pi$ et π, et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de máxima et de minima entre ces mêmes limites, la série (7.)[44], dont les coëfficiens sont des intégrales définies dépendentes de la fonction $\varphi(x)$ est convergente et a une valeur généralement exprimée par $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, où ε désigne un nombre infiniment petit.

Las consideraciones precedentes prueban de una forma rigurosa que, si la función $\varphi(x)$, cuyos valores son supuestos finitos y determinados, presenta un número finito de soluciones de continuidad entre los límites $-\pi$ y π, y si por otro lado tiene un número determinado de máximos y mínimos entre estos mismos límites, la serie (7), cuyos coeficientes son las integrales definidas dependientes de la función $\varphi(x)$ converge a un valor expresado generalmente por $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, donde ε representa un número infinitamente pequeño.

Esto se conoce actualmente como el teorema de convergencia de Dirichlet para las series de Fourier, aplicado en este artículo para funciones de periodo 2π:

Teorema de convergencia de Dirichlet: Si f satisface las condiciones de convergencia de Dirichlet entonces para todo x tenemos que la serie de Fourier converge para el valor x, cuyo valor viene dado por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-inx} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{a\to x^+} f(a) + \lim_{a\to x^-} f(a)\Big)$$

donde $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$

Como vemos este teorema se apoya en las condiciones de convergencia de Dirichlet, que también son introducidas en este párrafo y que en notación actual establecen:

Condiciones de convergencia de Dirichlet: Una función periódica f es igual a la suma de su serie de Fourier correspondiente en cada punto donde f sea continua si f es

[44]La serie que menciona es:

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(x)dx + \frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{c} \cos x\displaystyle\int \varphi(x)\cos x dx + \cos 2x \int \varphi(x)\cos 2x dx \cdots \\ \sin x\displaystyle\int \varphi(x)\sin x dx + \sin 2x \int \varphi(x)\sin 2x dx \cdots \end{array}\right\}$$

absolutamente integrable en todo su periodo, si f tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo escogido y si f tiene un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo escogido, siendo estas discontinuidades finitas.

Apoyándonos en estos resultados podemos dar una explicación de lo expuesto por José Ginés en el párrafo.

> *Supongamos que queremos estudiar una función f en un intervalo $[a, b]$ en el que se cumplen las condiciones de Dirichlet. Para ello haremos que la función sea periódica en el intervalo a estudiar, por lo que el periodo será $T = b - a$. Habiendo determinado el periodo de la función a estudiar y sabiendo los puntos b y a podemos desarrollar la función f como una función periódica en $[a, b]$ mediante la serie de Fourier asociada. Como hemos demostrado que dicha serie tiene una representación mediante la función exponencial compleja, podemos afirmar que una función arbitraria f que cumpla las condiciones de Dirichlet en un intervalo $[a, b]$ podrá ser estudiada en ese mismo intervalo mediante una suma de funciones exponenciales.*

El Dr. Jaime Colchero, del departamento de Física, nos indicó que la serie de Fourier tiene muchas aplicaciones en diversos campos: electromagnéticos, ondulatorios... en los que las ondas juegan un papel clave ya que son el modelo que necesariamente los describe. Pero nos habló sobre todo de su aplicación en distintos formatos de comprensión de datos como el MP3:

> *La serie de Fourier es muy utilizada porque permite descomponer todo tipo de ondas en forma de ondas más simples. Como esto es posible, muchos fenómenos ondulatorios en la naturaleza pueden ser estudiados mediante el desarrollo de Fourier. Por ejemplo, en la música se suele emplear porque el sonido es una onda material, lo que hace que muchos formatos de compresión como el MP3 utilicen a Fourier para manejar la información.*

El algoritmo de compresión de música en formato MP3 se basa en:

- El estudio de la percepción humana del sonido: se sabe por datos experimentales que el rango de frecuencias que el ser humano puede percibir se encuentra entre los 20 Hz y los 2 kHz aproximadamente.
- En el uso de la transformada de Fourier (herramienta que deriva de la serie de Fourier pero que nosotros no hemos utilizado) que nos permite expresar la onda en función de la frecuencia, por lo que esta expresión es muy útil ya que permite eliminar las ondas inaudibles. Esta eliminación de información irrelevante se conoce como

eliminación subjetivamente sin pérdidas, ya que no se pierde ninguna información que hubiera podido ser interpretada. La transformada discreta de Fourier, también utiliza la función exponencial:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad : k = \{0, 1, ..., N-1\}$$

– Muchos algoritmos que buscan calcular los valores de la expresión anterior de una manera más rápida. Así, mientras que el número de operaciones que se necesitarían normalmente sería de orden $O(n^2)$ con algoritmos como el de Cooley-Turkey se reduce el orden de operaciones a $O(n \log n)$

La distribución normal.

La tercera de las aplicaciones nos la indicó la Dra. D.ª Noemi Zoroa Alonso, directora del departamento de estadística e investigación operativa de la Universidad de Murcia y que trabaja en el área de estadística y probabilidad. Ella nos dijo que el número e aparece en múltiples ocasiones en su área de trabajo aunque destacó su presencia en la distribución normal y el teorema central de límite.

Por este motivo, al igual que hemos hecho con el resto de aplicaciones, vamos a analizar los primeros textos en los que se habla de la función de densidad de la distribución normal. Buscando en Wikipedia[45] encontramos que:

> *La distribución normal fue presentada por primera vez por De Moivre en un artículo del año 1733, que fue reimpreso en la segunda edición de su The Doctrine of Chances, de 1738, en el contexto de cierta aproximación de la distribución binomial para grandes valores de n. Su resultado fue ampliado por Laplace en su libro Teoría analítica de las probabilidades (1812).*

Y en el artículo *Direct and indirect influences of Jakob Bernoulli's Ars conjectandi in 18th century Great Britain* de Ivon Schneider (2006), en la página 13, se indica:

> *La aproximación de la distribución binomial a través de la normal con sus consecuencias fue la culminación de la Doctrine a partir de la segunda edición. [De Moivre] Usó este resultado puramente matemático como un recurso para combinar la teoría de probabilidad con la religión natural. En este sentido, De Moivre consideró esta forma del teorema central del límite como una prueba estocástica de la existencia del orden y el diseño en la naturaleza, [...].*

Por tanto, para buscar el origen de la fórmula de la función de densidad de la distribución normal hemos buscado la parte del texto de la segunda edición de *The Doctrine of Chances* de De Moivre donde trabaja esta aproximación de la binomial a la normal.

Antes de comenzar el estudio de este texto expondremos algunos conceptos de los que parte De Moivre: el ensayo de Bernoulli y la distribución binomial.

- Ensayo de Bernoulli que es una prueba en la que sólo existen dos sucesos posibles, que se denominan como éxito o fracaso. Ambos sucesos tienen unas probabilidades p y q, respectivamente, de aparecer. Un ejemplo sería el de tirar un dado y considerar los sucesos de sacar o no un 6 con unas probabilidades de $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$. Estos ensayos constituyen la base de la llamada distribución binomial.

[45] https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci %C3 %B3n_normal

– Distribución binomial, que se denota como $B(n,p)$ y que es la asociada a un experimento consistente en la realización de n ensayos idénticos e independientes de Bernouilli. Se trata por tanto de una distribución discreta cuya función de probabilidad nos permite hallar la probabilidad de obtener m éxitos en n ensayos de Bernoulli independientes[46]. Su función de probabilidad viene dada por:

$$P(X=m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad : m \in \mathbb{N}_0 \ y \ 0 \leq m \leq n \ ({}^{47})$$

Si en un ensayo de Bernoulli llamamos a al número de casos favorables y b el número de casos desfavorables tendremos que $p = \dfrac{a}{a+b}$, y $q = \dfrac{b}{a+b}$ y esto nos permite presentar la función de probabilidad de la distribución binomial de otra forma que utilizaremos a lo largo del desarrollo de De Moivre:

$$\binom{n}{m} p^m q^{n-m} = \binom{n}{m} \left(\frac{a}{a+b}\right)^m \cdot \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-m} = \binom{n}{m} \frac{a^m \cdot b^{n-m}}{(a+b)^n}$$

En la segunda edición de *Doctrine of Chances* escrita en 1738 por el francés Abraham de Moivre, entre las páginas 243 y 250 desarrolla un método para aproximar la suma de ciertos términos de la distribución binomial cuando el número de ensayos de Bernoulli realizados n es muy grande. Divide este estudio en dos partes, la primera cuando en los ensayos de Bernoulli realizados $p = \frac{1}{2}$ y la segunda parte para un p cualquiera. Nosotros vamos a traducir lo que De Moivre escribe en estas páginas tratando de demostrar sus afirmaciones y exponiendo lo que a día de hoy representan los resultados encontrados, mostrando en la parte final como estos resultados llevan a la fórmula que hoy usamos como función de densidad de una distribución normal.

> ***It is now a dozen years or more since I had found what follows: if the binomial*** $1+1$ ***be raised by a very high power denoted by*** n***, the ratio which the middle term has to the sum of all terms, that is, to*** 2^n***, [...] that Expresion will changed into*** $\frac{2}{B\sqrt{n}}$ ***[...] found that the Quantity B did denote the Square-root of the of the Circumference of a Circle whose Radius is Unity, so that if the Circumference be called*** c***, the Ratio of the middle Term to the Sum of all the Terms will be expressed by*** $\frac{2}{\sqrt{nc}}$***.***

De Moivre (1756), pp. 243-244.

[46]La probabilidad de éxito p y la probabilidad de fracaso q se mantienen constantes entre ensayos

[47]$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Hace ya una docena de años o más desde que encontré lo que sigue: si el binomio $1+1$ *es elevado a una potencia muy elevada denotada por* n*, la razón que el término medio tiene a la suma de todos los términos, es decir, a* 2^n*, [...] esa expresión será trasformada en* $\dfrac{2}{B\sqrt{n}}$ *[...] encontré que la cantidad* B *denotaba la raíz cuadrada de la circunferencia de un círculo cuyo radio es la unidad, así que si la circunferencia es llamada* c*, la razón del término medio a la suma de todos los términos será expresada por* $\dfrac{2}{\sqrt{nc}}$.

De Moivre presenta una demostración de esta afirmación diferente a la que nosotros vamos a realizar. Él utiliza un desarrollo en series y nosotros usaremos herramientas matemáticas actuales como el binomio de Newton, la fórmula de Stirling[48]...

Si desarrollamos el binomio $(1+1)^n$, mediante el binomio de Newton obtenemos:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \quad : k \in \mathbb{N}_0 \ y \ n \in \mathbb{N}$$

El cociente entre el término medio y la suma de todos los términos es:

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n} = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\cdot \frac{n}{2}!}\cdot \frac{1}{2^n} \quad : n \in \mathbb{N}$$

Aproximando los factoriales mediante la fórmula de Stirling[49]:

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n} = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\cdot \frac{n}{2}!}\cdot \frac{1}{2^n} \simeq \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}\cdot \frac{e^{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi n}\cdot n^{\frac{n}{2}}}\cdot \frac{e^{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi n}\cdot n^{\frac{n}{2}}}\cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

Que coincide con la fórmula que da De Moivre en el texto, ya que éste indica que $B = \sqrt{2\pi}$.

Siguiendo con el texto De Moivre continúa en la página 244 exponiendo:

I also found that the Logarithm of the Ratio which the middle Term of a high Power has to any Term distant from it by an Interval denoted by l***, would be denoted by a very near approximation, (supposing*** $m = \frac{1}{2}n$***) by the Quantities*** $(m+l-\dfrac{1}{2})\ln(m+l-1) + (m-l+\dfrac{1}{2})\ln(m-l+1) - 2m\ln m + \ln\left(\dfrac{m+l}{m}\right)$***.***

---

[48]Parece que también De Moivre pudo usar en sus demostraciones la fórmula de Stirling pero, probablemente, no la que nosotros usamos.

[49]La fórmula de Stirling dice: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1 \Leftrightarrow n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

También encontré que el logaritmo de la razón que el término medio de una potencia tiene a cualquier término distante de él por un intervalo l*, será denotado por una cercana aproximación (suponiendo* $m = \frac{1}{2}n$*) por las cantidades* $(m+l-\dfrac{1}{2})\ln(m+l-1)+(m-l+\dfrac{1}{2})\ln(m-l+1)-2m\ln m+\ln\Big(\dfrac{m+l}{m}\Big)$.

De Moivre hace una comprobación numérica de este resultado en las páginas 102-106 de su obra *Miscellanea analytica* (1730), que considera como una demostración del mismo. Nosotros vamos a hacer la demostración hallando la razón entre el término medio $m = \dfrac{n}{2}$ y un término distante de éste l unidades[50]:

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n}{m+l}} = \frac{n!}{m!\cdot m!}\cdot\frac{(m+l)!\cdot(m-l)!}{n!} \simeq \frac{e^m}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m}\cdot\frac{e^m}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m}\cdot$$
$$\frac{\sqrt{2\pi(m+l)}\cdot(m+l)^{(m+l)}}{e^{m+l}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(m-l)}\cdot(m-l)^{(m-l)}}{e^{m-l}} =$$
$$\frac{(m+l)^{(m+l+\frac{1}{2})}\cdot(m-l)^{(m-l+\frac{1}{2})}}{m^{(2m+1)}}$$

Si aplicamos logaritmos tenemos:

$$\ln\left(\frac{(m+l)^{(m+l+\frac{1}{2})}\cdot(m-l)^{(m-l+\frac{1}{2})}}{m^{(2m+1)}}\right) = \Big(m+l+\frac{1}{2}\Big)\ln(m+l)+\Big(m-l+\frac{1}{2}\Big)\ln(m-l)-$$
$$(2m+1)\ln m$$

Si desarrollamos la expresión dada por De Moivre:

$$\Big(m+l-\frac{1}{2}\Big)\ln(m+l-1)+\Big(m-l+\frac{1}{2}\Big)\ln(m-l+1)-2m\ln m+\ln\Big(\frac{m+l}{m}\Big) =$$
$$\Big(m+l-\frac{1}{2}\Big)\ln(m+l-1)+\Big(m-l+\frac{1}{2}\Big)\ln(m-l+1)-2m\ln m-\ln m+\ln(m+l) =$$
$$\Big(m+l+\frac{1}{2}\Big)\ln(m+l-1)+\Big(m-l+\frac{1}{2}\Big)\ln(m-l+1)-(2m+1)\ln m$$

Vemos que es aproximadamente igual a la que nosotros hemos obtenido ya que si n es muy grande entonces m es muy grande y $\ln(m\pm l\mp 1)\simeq\ln(m\pm l)$. A continuación, De Moivre incluye un corolario que dice:

> ***Corollary I. This being admitted, I conclude, that if*** m ***or*** $\dfrac{1}{2}n$ ***be a Quantity infinitely great, then the Logarithm of the Ratio, which a Term distant from the middle by the Interval*** l***, has to the middle Term, is*** $-\dfrac{2l^2}{n}$***.***

De Moivre (1756), p. 245.

[50]En el desarrollo de la demostración usaremos la fórmula de Stirling y el hecho de que $m = \dfrac{n}{2}$

Corolario I: Siendo esto admitido, concluyo que si m o $\frac{1}{2}n$ *es una cantidad infinitamente grande, entonces el logaritmo de la razón que un término distante de la mitad por un intervalo l, tiene al término medio es* $-\frac{2l^2}{n}$.

De Moivre no da demostración de este corolario. Nosotros vamos a demostrarlo desarrollando $\ln\left(\frac{\binom{n}{m+l}}{\binom{n}{m}}\right)$ con un n suficientemente grande, $m=\frac{n}{2}$ y usando otra versión de la fórmula de Stirling que dice que $\ln n! \simeq n\ln n - n$:

$$\ln\left(\frac{\binom{n}{m+l}}{\binom{n}{m}}\right) = \ln\left(\frac{n!\cdot m!\cdot m!}{(m-l)!\cdot (m+l)!\cdot n!}\right) = 2\ln m! - \ln(m-l)! - \ln(m+l)! \simeq$$
$$2(m\ln m - m) - [(m-l)\ln(m-l) - (m-l)] - [(m+l)\ln(m+l) - (m+l)] =$$
$$2m\ln m - (m-l)\ln(m-l) - (m+l)\ln(m+l) = 2m\ln m - m\ln(m-l) - m\ln(m+l)+$$
$$l\ln(m-l) - l\ln(m+l) = \ln\left(\frac{m^2}{(m-l)\cdot(m+l)}\right)^m + \ln\left(\frac{m-l}{m+l}\right)^l$$

Si consideramos l del orden de $\sqrt{n}$ y n infinitamente grande, tal y como hace De Moivre siempre que utiliza este corolario en este capítulo, tenemos:

$$\ln\left(1+\frac{1}{\frac{m^2-l^2}{l^2}}\right)^{\frac{m^2-l^2}{l^2}\cdot\frac{l^2}{m^2-l^2}\cdot m} + \ln\left(1+\frac{1}{\frac{m+l}{-2l}}\right)^{\frac{m+l}{-2l}\cdot\frac{-2l}{m+l}\cdot l} \simeq \ln e^{\frac{l^2}{m^2-l^2}\cdot m} + \ln e^{\frac{-2l}{m+l}\cdot l} =$$
$$\frac{l^2\cdot m}{m^2-l^2} + \frac{-2l^2}{m+l} = \frac{-m\cdot l^2 + 2l^3}{m^2-l^2} \simeq \frac{-m\cdot l^2}{m^2} = -\frac{l^2}{m} = -\frac{2l^2}{n}$$

Tras este corolario De Moivre expone un segundo corolario:

Corollary 2: The number, which answers to the Hyperbolic Logarithm $-\frac{2l^2}{n}$***, being***

$$1 - \frac{2l^2}{n} + \frac{4l^4}{2n^2} - \frac{8l^6}{6n^3} + \frac{16l^8}{24n^4} - \frac{32l^{10}}{120n^5} + \frac{64l^{12}}{720n^6}, \&c.$$

it follows, that the Sum of the Terms intercepted between the Middle, and that whole distance from it is denoted by l, will be

$$\frac{2}{\sqrt{nc}}\ \textit{into}\ l - \frac{2l^3}{1\cdot 3n} + \frac{4l^5}{2\cdot 5n^2} - \frac{8l^7}{6\cdot 7n^3} + \frac{16l^9}{24\cdot 9n^4} - \frac{32l^{11}}{120\cdot 11n^5}, \&c.$$

Let now l be supposed $l = s\sqrt{n}$***, then the said Sum will be expressed by the Series***

$$\frac{2}{\sqrt{c}}\ \textit{into}\ s - \frac{2s^3}{3} + \frac{4s^5}{2\cdot 5} - \frac{8s^7}{6\cdot 7} + \frac{16s^9}{24\cdot 9} - \frac{32s^{11}}{120\cdot 11}, \&c.$$

Moreover, if** s **be interpreted by** $\frac{1}{2}$**, then the Series will become

$$\frac{2}{\sqrt{c}} \textit{ into } \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 8} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot 16} + \frac{1}{24\cdot 9\cdot 32} - \frac{1}{120\cdot 11\cdot 64}, \&c.$$

which converges so fast, that by help of no more than seven or eight Terms, the Sum required may be carried to six or seven places of Decimals: [. . .] to which answers the number 0.341344

De Moivre (1756), p. 245.

Corolario 2: El número, al que responde el logaritmo hiperbólico de $-\frac{2l^2}{n}$*, que es*

$$1 - \frac{2l^2}{n} + \frac{4l^4}{2n^2} - \frac{8l^6}{6n^3} + \frac{16l^8}{24n^4} - \frac{32l^{10}}{120n^5} + \frac{64l^{12}}{720n^6} \cdots$$

se sigue, que la suma de los términos que se encuentran entre la mitad, y toda la distancia desde ella denotada por l será

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\left(l - \frac{2l^3}{1\cdot 3n} + \frac{4l^5}{2\cdot 5n^2} - \frac{8l^7}{6\cdot 7n^3} + \frac{16l^9}{24\cdot 9n^4} - \frac{32l^{11}}{120\cdot 11n^5} \cdots\right)$$

Sea ahora supuesta $l = s\sqrt{n}$*, entonces la dicha suma será expresada por la serie*

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(s - \frac{2s^3}{3} + \frac{4s^5}{2\cdot 5} - \frac{8s^7}{6\cdot 7} + \frac{16s^9}{24\cdot 9} - \frac{32s^{11}}{120\cdot 11} \cdots\right)$$

además, si s es interpretada por $\frac{1}{2}$*, la serie se convertirá en*

$$\frac{2}{\sqrt{c}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 8} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot 16} + \frac{1}{24\cdot 9\cdot 32} - \frac{1}{120\cdot 11\cdot 64} \cdots\right)$$

que converge tan rápido, que con la ayuda de no más de siete u ocho decimales, la suma requerida puede ser llevada a cabo hasta seis o siete decimales: [. . .] a lo que responde el número 0.341344.

En este corolario De Moivre demuestra que la probabilidad de que una variable X, que sigue una distribución $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, tome un valor en el intervalo $\left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$, cuando n es suficientemente grande, es siempre 0.341344.

Para ello, comienza indicando que el valor cuyo logaritmo neperiano (que él llama hiperbólico) es $-\frac{2l^2}{n}$ y que puede expresarlo como una serie. Esto se demuestra fácilmente usando el desarrollo de la serie de Taylor correspondiente a la función exponencial ya que:

$$e^{-\frac{2l^2}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k l^{2k}}{k! n^k}$$

Continúa el corolario hablando de la suma de los términos de esta función entre $\dfrac{n}{2}$ y $\dfrac{n}{2}+l$, suponemos que se refiere[51] a $\displaystyle\sum_{s=0}^{l}\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+s}}{(1+1)^n}$.

Usando los resultados anteriores tenemos que:

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+s}}{(1+1)^n}=\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{(1+1)^n}\cdot\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+s}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{2s^2}{n}}$$

Como esta suma la considera para n muy grande y l del orden de $\sqrt{n}$ podemos expresarla como una integral definida:

$$\int_0^l \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{2s^2}{n}}ds=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\int_0^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k s^{2k}}{k!n^k}ds=^{52}\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^l\frac{(-2)^k s^{2k}}{k!n^k}ds=$$
$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!n^k}\int_0^l s^{2k}ds=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k l^{2k+1}}{k!n^k(2k+1)}$$

A continuación De Moivre fija l como $s\sqrt{n}$ y lo sustituye valor en la expresión anterior:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k l^{2k+1}}{k!(2k+1)n^k}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k s^{2k+1}n^{k+\frac{1}{2}}}{k!(2k+1)n^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k s^{2k+1}}{k!(2k+1)}$$

Tras esto halla el valor que tendría esta expresión si $s=\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{k!(2k+1)}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k\cdot 2^{-2k-1}}{k!(2k+1)}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}k!(2k+1)}=0{,}341344...$$

de donde obtenemos que la probabilidad de que una variable X, que sigue una distribución $B\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$, tome un valor en el intervalo $\left[\dfrac{n}{2},\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{n}\right]$, cuando n es suficientemente grande, es siempre 0.341344. A continuación De Moivre escribe:

> ***Lemma. If an Event be so dependent on Chance, as that the Probabilities of its happening or failing be equal, and that a certain***

---

[51]Cuando estudiemos el corolario 3 veremos que esta suposición es correcta.

[52]Podemos integrar el sumatorio término a término usando la siguiente proposición que hemos encontrado en Molinàs Mata y Martínez Boscá en *Series de potencias* (s.f., pp. 5-6):

> *Si una función está representada por una serie de potencias* $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x-a)^j$ *en un intervalo abierto* $(a-r,a+r)$*, se puede demostrar que dicha función es continua en ese intervalo, y su integral en cualquier subintervalo cerrado puede calcularse integrando la serie término a término.*

given number n of Experiments be taken to observe how often it happens and fails, and also that l be another given number, less than $\frac{1}{2}n$, then the Probability of its neither happening more frequently than $\frac{1}{2}n + l$ times, nor more rarely than $\frac{1}{2}n - l$, may be found as follows.

Let L and L be two terms equally distant on both sides of the middle Term of the Binomial $(1+1)^n$ expanded, by an Interval equal to l; let also s be the Sum of the Terms included between L and L together with the Extreams, then the Probability required will be rightly expressed by the Fraction $\frac{s}{2^n}$; which being founded on the common Principles of the Doctrine of Chances, requires no Demonstration in this place.

De Moivre (1756), pp. 245-246.

Lema. Si un suceso es dependiente de la suerte, tal que las probabilidades de que suceda o no son iguales, y que un cierto número n de experimentos son realizados para ver cómo regularmente sucede o no, y sea l también otro número, menor que $\frac{1}{2}n$, entonces la probabilidad de que no ocurra más frecuentemente que $\frac{1}{2}n + l$, tampoco menos frecuentemente que $\frac{1}{2}n - l$, puede ser encontrada como sigue.

Sean L y L dos términos igual de distantes a ambos lados del término medio del binomio $(1+1)^n$ expandido, en un intervalo igual a l; sea también s la suma de los términos incluidos entre L y L junto a los extremos, entonces la probabilidad requerida será expresada correctamente por la fracción $\frac{s}{2^n}$; que estando fundado en los principios comunes de la Doctrine of Chances, no necesita demostración en este lugar.

En este lema, De Moivre continuando con la misma distribución binomial $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, expone que hallar la probabilidad de que una variable X, que sigue una distribución $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, tome un valor en un intervalo $\left[\frac{n}{2} - l, \frac{n}{2} + l\right]$ es equivalente a calcular el cociente entre los casos favorables s y los casos posibles, 2^n. Y continúa con el corolario 3 donde calcula esta probabilidad para unos intervalos concretos en el caso de n suficientemente grande:

Corollary 3. And therefore, if it was possible to take an infinite number of Experiments, the Probability that an Event which has equal number of Chances to happen or to fail, shall neither appear

more frequently than $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\sqrt{n}$ times, nor more rarely than $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\sqrt{n}$ times, will be expressed by the double Sum of the number exhibited in the second Corollary, that is, by 0.682688, and consequently the Probability of the contrary, which is that of happening more frequently or more rarely than in the proportion above assigned will be 0.317312, those two Probabilities together compleating Unity, which is the measure of Certainty. [. . .]

De Moivre (1756), p. 246.

Corolario 3. Y por consecuente, si fuera posible tomar un número infinito de experimentos, la probabilidad de que un evento que tiene la misma probabilidad de suceder que de no hacerlo no aparezca más frecuentemente que $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\sqrt{n}$ veces, y tampoco no más raramente que $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\sqrt{n}$ veces será expresada por la doble suma del número expuesto en el segundo corolario, que es 0.682688, y consecuentemente la probabilidad del contrario, que es aquella de suceder más frecuentemente o más raramente que la proporción asignada arriba será 0.317312, estas dos probabilidades juntas completando la unidad, que es la medida de la certeza. [. . .]

Por el lema sabemos que la probabilidad buscada es $\frac{s}{2^n}$ donde s es la suma de los términos del desarrollo de $(1+1)^n$ comprendidos entre $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\sqrt{n}$ y $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\sqrt{n}$; es decir

$$\frac{s}{2^n}=\frac{\sum_{l=-\frac{1}{2}\sqrt{n}}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\binom{n}{\frac{n}{2}+l}}{2^n}=\sum_{l=-\frac{1}{2}\sqrt{n}}^{0}\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+l}}{2^n}+\sum_{l=0}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+l}}{2^n}={}^{53}2\sum_{l=0}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+l}}{2^n}={}^{54}2\cdot 0{,}341344=$$

$0{,}682688$

De Moivre hace un último apunte señalando que la probabilidad de obtener un suceso que no se encuentre en el intervalo $\left[\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{n},\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$ es 0.317312..., que no es más que la probabilidad del suceso contrario: $1-0{,}682688...$

Corollary 5. And therefore we may lay this down for a fundamental Maxim, that in high Powers, the Ratio, which the Sum of the Terms included between two Extreams distant on both sides from the middle Term by an interval equal to $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, bears to the Sum of

[54] Por el triángulo de Tartaglia los términos son iguales y la suma da lo mismo.

[54] Por el corolario 2.

all the Terms, will be rightly expressed by the Decimal 0.682688, that is $\frac{28}{41}$ nearly. [...]

De Moivre (1756), pp. 246-247.

Corolario 5. Y por consecuente podemos asumir como una máxima fundamental, que en potencias elevadas, la razón que la suma de los términos incluidos entre dos extremos distantes en ambos lados del término medio en un intervalo igual a $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, tiene a la suma de los términos, será expresada correctamente por el decimal 0.682688, que es $\frac{28}{41}$ aproximadamente. [...]

En este quinto corolario, eleva lo que va a exponer a la categoría de "Máxima fundamental". Parece curioso que, aunque no lo supiese, estuviera exponiendo un caso concreto de una propiedad característica de la distribución normal: la probabilidad de encontrar un suceso perteneciente al intervalo $[\mu - s\sigma, \mu + s\sigma]$ es siempre la misma, independientemente de μ y de σ. Este resultado no es nada extraño ya que por el teorema central del límite si una variable X sigue una distribución $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ y n es suficientemente grande entonces se puede aproximar a una distribución normal de media $n \cdot \frac{1}{2}$ y desviación típica $\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$, es decir $N\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$.

A partir de aquí, De Moivre comienza el mismo proceso que acaba de hacer pero para p cualquiera. En la figura 14 vemos algunos ejemplos de estas distribuciones:

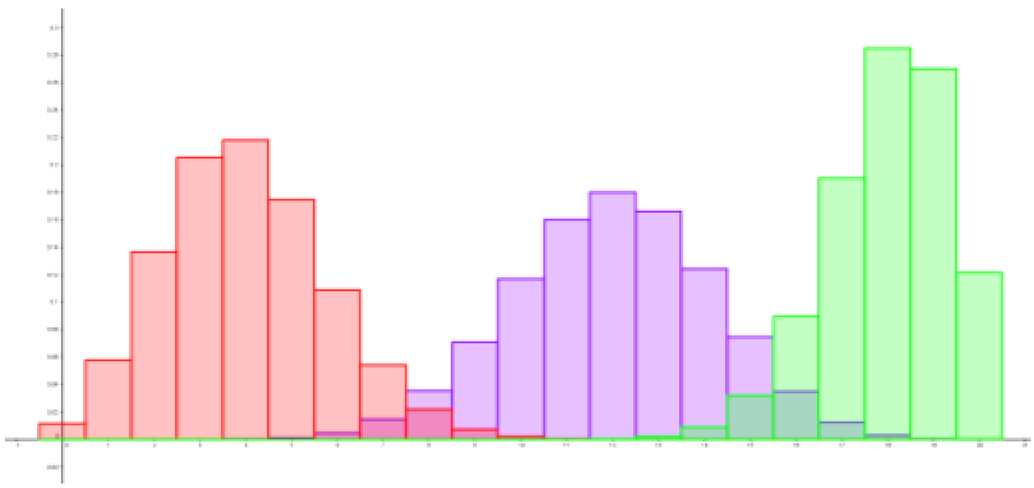


Figura 14: Tres distribuciones binomiales con $p = 0{,}2, 0{,}6,$ y $0{,}9$ y $n = 20$.

Lemma 3. If an Event so depends on Chance, as that the Probabilities of its happening or failing be in any assigned proportion, such as may be supposed of** a **to** b**, and a certain number of Experiments be designed to be taken, in order to observe how often the

Event will happen or fail; then the Probability that it shall neither happen more frequently than so many times as are denoted by $\frac{an}{a+b}+l$, nor more rarely than so many times as are denoted by $\frac{an}{a+b}-l$, will be found as follows:

Let L and R be equally distant by the interval l from the greatest Term; let also S be the sum of the Terms included between L and R, together with those Extreams, then the Probability required will be rightly expressed by $\frac{S}{(a+b)^n}$.

De Moivre (1756), p. 249.

Lema 3. Si un suceso depende de la suerte, tal que las probabilidades de que ocurra o no estén en cualquier proporción asignada, como puede ser supuesto de a a b, y un cierto número de experimentos son tomados para observar cómo el experimento ocurrirá o no; entonces la probabilidad de que no ocurra más frecuentemente que tantas veces como $\frac{an}{a+b}+l$, y tampoco más raramente que tantas veces como $\frac{an}{a+b}-l$, será encontrada como sigue:

Sean L y R igualmente distantes por un intervalo l del mayor término; sea también S la suma de los términos incluidos entre L y R, juntos con los extremos, entonces la probabilidad requerida será expresada correctamente por $\frac{S}{(a+b)^n}$.

Al igual que en el lema anterior, De Moivre expone aquí una forma de hallar la probabilidad de que una variable X, que sigue una distribución $B\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$, tome un valor en un intervalo $\left[\frac{n}{2}-l, \frac{n}{2}+l\right]$ e igual que allí indica que este cálculo es equivalente a encontrar el cociente entre los casos favorables s y los casos posibles, $(a+b)^n$.

Corollary 8. The Ratio which, in an infinite power denoted by n, the greatest Term bears to the Sum of all the rest, will be rightly expressed by the Fraction $\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$, wherein c denotes, as before, the Circumference of a Circle for a Radius equal to Unity.

De Moivre (1756), pp. 249-250.

Corolario 8. La razón que, en una potencia infinita denotada como n, el término más grande tiene a la suma de todos los demás, será correctamente expresada por la fracción $\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$, donde c denota, como antes, la circunferencia de un círculo de radio igual a la unidad.

Este corolario es similar al primer resultado que aquí expusimos pero para una $B\Big(n, \dfrac{a}{a+b}\Big)$ donde a y b son los números de casos que ocurren a favor y en contra respectivamente en cada ensayo de Bernoulli. Siguiendo, por tanto, el mismo proceso para hallar la suma de la probabilidad de todos los términos, obtenemos:

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{m}\cdot b^{n-m}=(a+b)^{n}$$

Del enunciado del lema 3, deducimos que con el término medio de este desarrollo se refiere al término que ocupa el lugar $k=\dfrac{an}{a+b}$, por lo que su probabilidad es:

$$\binom{n}{\frac{an}{a+b}}a^{\frac{an}{a+b}}\cdot b^{n-\frac{an}{a+b}}$$

Luego la razón entre esta probabilidad y la suma de todos los términos será:

$$\frac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}}a^{(\frac{an}{a+b})}\cdot b^{(n-\frac{an}{a+b})}}{(a+b)^{n}}=\frac{n!}{\big(\frac{an}{a+b}\big)!\cdot\big(n-\frac{an}{a+b}\big)!}\cdot a^{(\frac{an}{a+b})}\cdot b^{(n-\frac{an}{a+b})}\cdot\frac{1}{(a+b)^{n}}\simeq\text{[55]}\,\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^{n}}{e^{n}}\cdot$$

$$\frac{e^{(\frac{an}{a+b})}}{\sqrt{2\pi\big(\frac{an}{a+b}\big)}\cdot\big(\frac{an}{a+b}\big)^{(\frac{an}{a+b})}}\cdot\frac{e^{(n-\frac{an}{a+b})}}{\sqrt{2\pi\big(n-\frac{an}{a+b}\big)}\cdot\big(n-\frac{an}{a+b}\big)^{(n-\frac{an}{a+b})}}a^{(\frac{an}{a+b})}\cdot b^{(n-\frac{an}{a+b})}\cdot\frac{1}{(a+b)^{n}}=\text{[56]}$$

$$\sqrt{n}\cdot n^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\big(\frac{an}{a+b}\big)}\cdot\big(\frac{an}{a+b}\big)^{(\frac{an}{a+b})}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\big(\frac{bn}{a+b}\big)}\cdot\big(\frac{bn}{a+b}\big)^{(\frac{bn}{a+b})}}a^{(\frac{an}{a+b})}\cdot b^{(\frac{bn}{a+b})}\cdot\frac{1}{(a+b)^{n}}=$$

$$n^{(n+\frac{1}{2})}n^{-(\frac{an}{a+b}+\frac{1}{2})}n^{-(\frac{bn}{a+b}+\frac{1}{2})}a^{-(\frac{an}{a+b}+\frac{1}{2})}b^{-(\frac{bn}{a+b}+\frac{1}{2})}a^{(\frac{an}{a+b})}b^{(\frac{bn}{a+b})}(a+b)^{(\frac{an}{a+b}+\frac{1}{2})}$$

$$(a+b)^{(\frac{bn}{a+b}+\frac{1}{2})}(a+b)^{-n}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$n^{(n-\frac{n(a+b)}{a+b}-1+\frac{1}{2})}(ab)^{-\frac{1}{2}}(a+b)^{(\frac{n(a+b)}{a+b}+1-n)}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}}$$

que es el resultado dado por De Moivre ya que $c=2\pi$.

> ***Corollary 9. If, in an infinite Power, any Term be distant from the Greatest by the Interval*** l***, then the Hyperbolic Logarithm of the Ratio which that Term bears to the Greatest will be expressed by the Fraction*** $-\dfrac{(a+b)^{2}}{2abn}l^{2}$***; provided the ratio of*** l ***to*** n ***be not a finite Ratio, but such a one as may be conceived between any given number*** p ***and*** $\sqrt{n}$***, so that*** l ***be expressible by*** $p\sqrt{n}$***, in which Case the two Terms*** L ***and*** R ***will be equal.***
>
> De Moivre (1756), p. 250.

[56]Por ser n suficientemente grande podremos emplear la fórmula de Stirling.

[56]Utilizaremos $\Big(n-\dfrac{an}{a+b}\Big)=n\Big(1-\dfrac{a}{a+b}\Big)=a\dfrac{a+b-a}{a+b}=\dfrac{bn}{a+b}$ para simplificar las potencias de e.

Corolario 9. Si, en una potencia infinita, un término es distante del mayor por un intervalo l, entonces el logaritmo hiperbólico de la razón que el término tiene respecto al mayor será expresada por la fracción $-\frac{(a+b)^2}{2abn}l^2$; dado que la razón de l a n no es finita, sino una razón que puede ser concebida entre cualquier número dado p y $\sqrt{n}$, así que l sea expresable por $p\sqrt{n}$, en cuyo caso los dos términos L y R serán iguales.

En este corolario llega a una expresión similar a la del corolario 1. Tampoco en este caso presenta De Moivre ninguna demostración y nosotros no hemos podido demostrarlo. Pero si analizamos lo dicho en los corolarios 8 y 9 tenemos que para una distribución $B\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ con n infinitamente grande:

- $\dfrac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}} a^{\left(\frac{an}{a+b}\right)} \cdot b^{\left(n-\frac{an}{a+b}\right)}}{(a+b)^n} \simeq \dfrac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}}$ (corolario 8).
- $\ln\left(\dfrac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}+l} a^{\left(\frac{an}{a+b}+l\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}-l\right)}}{\binom{n}{\frac{an}{a+b}} a^{\left(\frac{an}{a+b}\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}\right)}}\right) \simeq -l^2\dfrac{(a+b)^2}{2abn} \Leftrightarrow \dfrac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}+l} a^{\left(\frac{an}{a+b}+l\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}-l\right)}}{\binom{n}{\frac{an}{a+b}} a^{\left(\frac{an}{a+b}\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}\right)}} \simeq e^{-l^2\frac{(a+b)^2}{2abn}}$ (corolario 9).

donde l es la distancia entre $\frac{an}{a+b}$ y un punto x.

Por tanto, la probabilidad de que una variable estadística X que sigue una distribución $B\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ tome un valor $x = \frac{na}{a+b} + l$ será

$$\frac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}+l} a^{\left(\frac{an}{a+b}+l\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}-l\right)}}{(a+b)^n} = \frac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}+l} a^{\left(\frac{an}{a+b}+l\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}-l\right)}}{\binom{n}{\frac{an}{a+b}} a^{\left(\frac{an}{a+b}\right)} b^{\left(\frac{bn}{a+b}\right)}} \cdot \frac{\binom{n}{\frac{an}{a+b}} a^{\left(\frac{an}{a+b}\right)} \cdot b^{\left(n-\frac{an}{a+b}\right)}}{(a+b)^n} \simeq e^{-l^2\frac{(a+b)^2}{2abn}} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}}$$

para n infinitamente grande y l del orden de $\sqrt{n}$.

Y como sabemos que en una distribución binomial:

$$\mu = p \cdot n = \frac{an}{a+b} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{n\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}} = \frac{\sqrt{nab}}{a+b} \qquad x = \frac{na}{a+b} + l$$

Obtenemos:

$$f(x) = e^{-l^2\frac{(a+b)^2}{2abn}} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}} = e^{-\left(x-\frac{na}{a+b}\right)^2 \frac{1}{\frac{2abn}{(a+b)^2}}} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}} = e^{-(x-\mu)^2\frac{1}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Que es la fórmula de la función de densidad de una distribución normal de media μ y desviación típica σ.

Para acabar este apartado mostramos las dos notas con las que termina De Moivre este capítulo y que sin hacer referencia a la distribución normal sí que habla de una ley que siguen los fenómenos regidos por el azar y que hoy conocemos como el teorema central del límite y, por tanto, de forma implícita está hablando de la distribución normal.

El teorema central del límite también ha sido mencionado por la Dra. Zoroa como una de las razones más importantes que hacen que la distribución normal sea tan importante:

> *Una explicación matemática tanto de la denominada ley de errores como del hecho de que la distribución Normal aparezca en numerosas ocasiones en la naturaleza se obtiene con el conjunto de resultados englobados bajo el nombre de Teorema central del límite, en estos teoremas se demuestra la convergencia de ciertas sumas de variables aleatorias a la distribución Normal, lo que implica que, si se satisfacen determinadas condiciones, la distribución de una variable aleatoria que se obtiene como suma de un número grande de variables es aproximadamente Normal. Todo lo anterior también conduce a que la distribución normal sea una distribución básica y fundamental en el, cada vez más amplio, campo de aplicación de la Estadística.*

Remark I.

> ***From what has been said, it follows, that Chance very little disturbs the Events which in their natural Institution were designed to happen or fail, according to some determinate Law; for if in order to help our conception, we imagine a round piece of Metal, with two polished opposite faces, differing in nothing but their colour, whereof one may be supposed to be white, and the other black; it is plain that we may say, that this piece may with equal facility exhibit a white or black face, and we may even suppose that it was framed with that particular view of shewing sometimes one face, sometimes the other, and that consequently if it be tossed up Chance shall decide the appearance; But we have seen in our LXXII Problem, that altho' Chance may produce an inequality of appearance, and still a greater inequality according to the length of time in which it may exert itself, yet the appearances, either one way or the other, will perpetually tend to a proportion of Equality: But besides, we have seen in the present Problem, that in a great number of Experiments, such as 3600, it would be the Odds***

of above 2 to 1, that one of the Faces, suppose the white, shall not appear more frequently than 1830 times, nor more rarely than 1770, or in other Terms, that it shall not be above or under the perfect Equality by more than $\frac{1}{120}$ part of the whole number of appearances; and by the same Rule, that if the number of Trials had been 14400 instead of 3600, then still it would be above the Odds of 2 to 1, that the appearances either one way or other would not deviate from perfect Equality by more than $\frac{1}{260}$ part of the whole: and in 1000000 Trials it would be the Odds of above 2 to 1, that the deviation from perfect Equality would not be more than by $\frac{1}{2000}$ part of the whole. But the Odds would increase at a prodigious rate, if instead of taking such narrow limits on both sides the Term of Equality, as are represented by $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, we double those Limits or triple them; for in the first Cafe the Odds would become 21 to 1, and in the second 369 to 1, and still be vastly greater if we were to quadruple them, and at last be infinitely great; and yet whether we double, triple or quadruple them, &c. the Extension of those Limits will bear but an inconsiderable proportion to the whole, and none at all, if the whole be infinite; of which the reason will easily be perceived by Mathematicians, who know, that the Square-root of any Power bears so much a less proportion to that Power, as the Index of it is great. What we have said is also applicable to a Ratio of Inequality, as appears from our 9th Corollary. And thus in all Cases it will be found, that altho' Chance produces Irregularities, still the Odds will be infinitely great, that in process of Time, those Irregularities will bear no proportion to the recurrency of that Order which naturally results from Original Design.

De Moivre (1756), pp. 250-251.

Anotación 1.

De lo que ha sido dicho se sigue que el azar disturba muy poco los eventos que en su institución natural fueron diseñados para suceder o fallar de acuerdo a cierta ley determinada; así que si para ayudar nuestra concepción imaginamos una pieza redonda de metal con dos caras opuestas pulidas, diferenciadas en nada sino en el color, de las que sea supuesta una blanca y la otra negra, es obvio decir que esta pieza exhibirá con igual facilidad una cara blanca que una *negra, y podemos incluso suponer que fue concebida con esa visión particular de enseñar unas veces una cara y otras veces la contraria, y que consecuentemente si fuera tirada el azar decidirá el resultado; pero hemos visto en nuestro problema LXXII que aunque el azar pueda producir una apariencia de desigualdad, e incluso una mayor desigualdad de acuerdo al periodo de tiempo en el que se ejerce, los resultados, de una manera u otra, tenderán a una proporción de igualdad: pero aparte, hemos visto en el problema presente que en un gran número de experimentos, tal como 3600, siendo la probabilidad de 2 a 1, que una de las caras, supongamos la blanca, no aparecerá más frecuentemente que 1830 veces ni tampoco más raramente que 1770 veces, o en otros términos, que no estará por encima ni por debajo de la perfecta igualdad más que una* $\frac{1}{120}$ *parte del número total de apariciones; y por la misma regla, si el número de ensayos hubiera sido 14400 en lugar de 3600, siendo la probabilidad 2 a 1, que las apariciones de una manera u otra no se desviarán de la igualdad perfecta en más que una* $\frac{1}{260}$ *parte del total: y en 1000000 de ensayos siendo la probabilidad de 2 a 1, la desviación de la igualdad perfecta no será mayor que una* $\frac{1}{2000}$ *parte del total. Pero la probabilidad crecerá a un ritmo prodigioso si en lugar de tomar tales estrechos límites a ambos lados del término de igualdad, representados por* $\frac{1}{2}\sqrt{n}$*, los duplicamos o triplicamos; en el primer caso la probabilidad será de 21 a 1, y en el segundo de 369 a 1, y será incluso vastamente mayor si los cuadruplicamos, y finalmente sean infinitamente grandes; y todavía, si duplicamos, triplicamos, cuadruplicamos... la extensión de estos límites no representará más que una proporción inconsiderable al todo, y absolutamente nada si el todo es infinito; cuyo motivo será fácilmente percibido por matemáticos que conozcan que la raíz cuadrada de cualquier potencia representa una menor proporción a esa potencia conforme su índice se hace mayor. Lo que hemos dicho es también aplicable al radio de igualdad, tal y como aparece en nuestro 9º corolario. Y por consecuente en todos los casos será encontrado que, a pesar de que el azar produce irregularidades, todavía serán infinitamente grandes las probabilidades de que, en procesos a lo largo del tiempo, esas irregularidades no representarán ninguna proporción a la recurrencia de ese orden que resulta naturalmente del diseño original.*

Remark II.

As, upon the supposition of a certain determinate Law according to which any Event is to happen, we demonstrate that the Ratio

of Happenings will continually approach to that Law, as the Experiments or Observations are multiplied: so, conversely, if from numberless Observations we find the Ratio of the Events to converge to a determinate quantity, as to the Ratio of P to Q; then we conclude that this Ratio expresses the determinate Law according to which the Event is to happen. For let that Law be expressed not by the Ratio P : Q, but by some other, as R : S ; then would the Ratio of the Events converge to this last, not to the former : which contradics our Hypothesis. And the like, or greater, Absurdity follows, if we should suppose the Event not to happen according to any Law, but in a manner altogether desultory and uncertain; for then the Events would converge to no fixt Ratio at all. Again, as it is thus demonstrable that there are, in the constitution of things, certain Laws according to which Events happen, it is no less evident from Observation, that those Laws serve to wise, useful and beneficent purposes; to preserve the stedfast Order of the Universe, to propagate the several Species of Beings, and furnish to the sentient Kind such degrees of happiness as are suited to their State. But fuch Laws, as well as the original Design and Purpose of their Establishment, must all be from without, the Inertia of matter, and the nature of all created Beings, rendering it impossible that any thing should modify its own essence, or give to itself, or to any thing else, an original determination or propensity. And hence, if we blind not ourselves with metaphysical dust, we shall be led, by a short and obvious way, to the acknowledgment of the great Maker and Governour of all: Himself all-wise, all-powerful and good.

De Moivre (1756), pp. 251-252.

Anotación 2.

Sobre la suposición de cierta ley de acuerdo a la que cualquier evento ocurrirá, demostramos que la razón de los eventos se aproximará continuamente a esa ley al multiplicarse el número de eventos u observaciones: así, conversamente, si de incontables observaciones encontramos que la razón de los eventos converge a una cantidad determinada, como la razón de P a Q, entonces concluimos que esta razón expresa la ley concreta respecto a la cual el evento *ocurrirá. Dejemos que esa ley no sea expresada por la razón P/Q, sino por otra, como R/S, entonces la razón de los eventos convergerá a esta última y no a la correcta, lo que contradice nuestra hipótesis. Y sigue un absurdo mayor si debiésemos suponer que el evento no ocurre respecto a ninguna ley, sino de una manera inconexa e incierta, por lo que los eventos no convergerían a ninguna razón fija. De nuevo, como es demostrable que existen en la constitución de las cosas ciertas leyes de acuerdo a las que los eventos ocurrirán, no es menos evidente de la observación que esas leyes sirven para sabios, útiles y beneficiosos propósitos: para preservar el firme orden del universo, para propagar las diversas especies de seres y servir al sensible rey tales grados de felicidad como se corresponden a su estado. Pero tales leyes, al igual que el diseño y propósito original de su establecimiento, deben estar fuera de la inercia de la materia y la naturaleza de todos los seres creados, haciendo imposible que cualquier cosa debiera modificar su propia esencia, o dar a sí mismo o a cualquier otra cosa una determinación o propensión originales. Y por consecuente, si no nos cegamos con polvo metafísico, seremos llevados por un corto y obvio camino al reconocimiento del gran creador y gobernador de todo: él, todo sabio, todo poderoso y bueno.*

De esto se obtiene el motivo por el cual la distribución normal es tan empleada en modelos estadísticos.

Sobre esta aplicación el Dr. J. Colchero nos indicó que sus aplicaciones en la física eran numerosas e importantes y nos habló de una muy curiosa: la forma probable de una proteína:

La aplicación de la distribución normal viene del teorema central del límite. Ya que en muchos sistemas no podemos conocer exactamente los valores que queremos porque son muy complicados, aplicamos una distribución normal para aproximar lo que serán. Un ejemplo curioso se da en el proceso de formación de las proteínas. Una proteína es una cadena de aminoácidos; sin embargo, al encadenarse cada uno puede quedar en una posición diferente dependiendo de muchos factores. Aplicando esta distribución podemos averiguar cuál sería la forma más probable que adoptaría la proteína.

De lo que nos ha dicho Jaime sacamos varias conclusiones. Sabemos que la distribución normal se usa para aproximar ciertos resultados cuando obtenerlos por los medios convencionales es muy complicado o prácticamente imposible. Es por esto por lo que se aplican a sistemas en los que los elementos no siguen un patrón fijo ni una función definida, sistemas en los que decimos que los elementos que lo forman son aleatorios. Este tipo de sistemas son sistemas económicos a gran escala, modelos cuánticos en los que no podemos establecer la posición u otros modelos en los que se consideran tantas partículas que es muy complicado hallar la posición de éstas. Como estos sucesos son aleatorios, mediante el teorema central del límite y datos experimentales podemos establecer la distribución normal que los aproxima.

Nos resultó curioso cuando nos habló de que también se usaba el teorema central del límite en estudios como el de modelar la forma que tomaba una proteína cualquiera. Una proteína está formada por el encadenamiento lineal de aminoácidos, de lo que cabría pensar que una proteína sería una especie de cadena. Sin embargo, la forma que adoptan no se asemeja a la de una cadena. Para modelar este comportamiento no nos basta con emplear las herramientas típicas de estadística. Como queremos hallar la posición de los nucleótidos en un espacio de tres dimensiones tendremos que encadenar la probabilidad en cada paso consecutivo. Por este motivo recurrimos a los caminos aleatorios para modelar la estructura de la proteína, siendo aplicada la distribución normal ya que cada uno de los pasos aparecerá de acuerdo a una probabilidad fija.

Parte III

Resultados y conclusiones

Resultados

Origen de e.

La primera vez que aparece un valor aproximado al de e es en el *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio* (1614) de John Napier, en el que es definido por primera vez el logaritmo. La aparición de e como la base del logaritmo empleado en sus tablas se debe a la forma en la que construye sus logaritmos:

– Napier define su logaritmo mediante nociones de cinemática. Introduce dos movimientos, el primero definido por una progresión aritmética (asociada a una función lineal $x(t)$) y el segundo definido por una progresión geométrica (asociada a una función exponencial $y(t)$). Una vez definidos y fijadas unas condiciones iniciales Napier define el logaritmo de un número h como la distancia recorrida en x, habiendo transcurrido el tiempo necesario para que $y = h$.

– Escoge como razón de decrecimiento del segundo movimiento $k = 10^{-7}$ para facilitar los cálculos necesarios para la construcción de sus tablas y elige como distancia total a recorrer por ambos movimientos 10^7 debido a que Napier realiza sus tablas para los valores del seno de ángulos y, en aquellos momentos las razones trigonométricas se definían en circunferencias de radio 10^7. Estas elecciones provocan que el valor de la base de su logaritmo sea $(1-10^{-7})^{10^7}$, que podemos ver que es aproximadamente igual al valor de e^{-1}:

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 0{,}3678794228... \simeq 0{,}3678794412... = e^{-1}$$

Por lo que la base de sus logaritmos $(1-10^{-7})^{10^7}$ tiene una estrecha relación con e.

Posteriormente dos autores, William Oughtred y John Speidell, modificaron estas tablas dando otras con valores más cercanos a e. El primero de ellos escribió, según consta en algunos artículos, el apéndice de la segunda edición de la traducción al inglés de la *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio* de John Napier en el que aparece, entre otras cosas un método de interpolación de logaritmos que se apoya en una tabla que el mismo Oughtred proporciona. Si bien no da ninguna explicación de cómo la construye, mediante la comparación numérica de resultados podemos ver que los valores de esta tabla son los de la tabla de logaritmos neperianos multiplicados por 10^6. Por otra parte, John Speidell, buscó la forma de hacer que los logaritmos de valores mayores que la distancia considerada 10^7 fueran positivos y no dieran valores negativos como le ocurría a Napier. Para ello publicó en 1619 unas nuevas tablas llamadas *New Logarithmes*, en las que restó de los valores en las tablas de Napier el número 10^8, obteniendo que sus logaritmos son $10^5 \log_{(1-10^{-7})^{10^7}}\left(\frac{x}{454}\right)$, que es aproximadamente $10^5 \ln\left(\frac{x}{454}\right)$. En la edición de 1622 introdujo una nueva tabla en la que no hace referencia a la trigonometría. En esta tabla calcula los actuales logaritmos neperianos de los números naturales del 1 al 1000 multiplicados por 10^6.

La primera aparición de e como una constante es en una serie de cartas entre Leibniz y Huygens. Comienza Leibniz planteando una serie de dudas relativas a un artículo que el mismo publicó en las *Actas de Leipzig* sobre la resistencia del medio. La contestación de Huygens se centra en plantear el problema analíticamente para encontrar las expresiones del tiempo y espacio en función de la velocidad del objeto. Huygens ya habla de una constante b, base del logaritmo que obtiene al integrar una función hiperbólica. Sin embargo, como Huygens integra mal las dos funciones tiempo y espacio, en la siguiente carta de Leibniz éste da una demostración geométrica de cómo calcular las integrales basándose en series infinitas y vuelve a citar la constante b pero indicando que su valor es tal que el logaritmo de b es 1.

También en otra carta posterior y relativa a un problema diferente Leibniz expresa la función tiempo de tres formas distintas, y vuelve a utilizar la constante b como la base de los logaritmos que permiten hallar el área bajo la hipérbola y vuelve a decir que esta constante es aquella cuyo logaritmo 1, es decir identifica esta constante con e.

La primera aparición de la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ y su acotación entre 2.5 y 3 se presenta en un artículo publicado en el *Acta Eroditorum* de Jacob Bernoulli al intentar encontrar la cantidad que se debería dar a un inversor si en lugar de calcular el interés compuesto anualmente se hallara dicha cantidad cobrando en cada instante una parte proporcional del interés anual. Para ello da una fórmula en forma de serie que depende de unas cantidades a y b, serie que acota entre otras dos expresiones finitas. Después impone la condición de que $a = b$, obteniendo la expresión $a\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, que acota entre $2{,}5a$ y $3a$, por lo que sin saberlo Bernoulli acota el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ entre 2.5 y 3, pero este valor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es una de las definiciones actuales de e, por lo que Jacob Bernouilli acota e entre 2.5 y 3.

La definición de e la da Leonhard Euler. Este utilizó la letra e para denotar la constante que Leibniz denotaba como b, en manuscritos datados de 1728 tales como cartas a otros matemáticos y publicaciones. Sin embargo, es en su *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748 cuando llega a dos definiciones de e. En el capítulo VII estudia el desarrollo de funciones exponenciales y logarítmicas mediante series infinitas, llegando a la serie asociada a una función exponencial de base a. Esta serie depende de una constante k que varía en función de la base a. También muestra la forma de expresar el desarrollo de la función exponencial en otra base cualquiera b en función de la serie de la serie asociada a la función exponencial de base a y el valor de $\log_a b$. Esto le lleva a buscar como valor de a el que considera más sencillo, es decir el que se corresponde con $k = 1$ y expresar el resto de las funciones exponenciales a partir de esta. Pero al dar a k el valor 1 obtiene que a es igual a:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Como este valor será recurrente, lo designa como e y lo aplica a otras definiciones que ha obtenido anteriormente en el capítulo, entre las que podemos encontrar:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

que es la definición actual de e.

Aplicaciones de e.

La identidad de Euler $e^{\pi i} + 1 = 0$ o la fórmula más bella para muchos matemáticos. Ésta es un caso particular de la fórmula de Euler que es usada en física y matemáticas para representar números complejos mediante exponenciales y de esta forma facilitar las operaciones de multiplicación y exponenciación de complejos pues éstas se pueden realizar fácilmente utilizando las propiedades de las exponenciales.

En el estudio realizado para demostrar esta identidad investigamos primero los orígenes de la fórmula de Euler, que encontramos en el capítulo 8 de la *Introductio in Analysin Infinitorum*. En este capítulo vemos que Euler partiendo de la relación fundamental de la trigonometría, halla la fórmula de De Moivre y a partir de ésta, trabajando con cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas obtiene unas fórmulas que involucran la función exponencial compleja y que utiliza para obtener la fórmula de Euler. La obtención de la identidad de Euler no es más que la concreción de esta fórmula para el caso $x = \pi$.

El desarrollo en serie de Fourier en forma compleja que permite expresar cualquier función que cumpla una serie de condiciones como combinación de funciones exponenciales complejas de base e. Esto posibilita estudiar cualquier función continua en un intervalo $[a, b]$ mediante las propiedades de la función exponencial en base e.

En el estudio que hemos realizado, hemos analizado una primera versión de la serie de Fourier desarrollada por éste en un artículo llamado *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*, publicado en 1807. En este artículo Fourier parte de la ecuación del calor, que simplifica estudiando el problema para valores estacionarios y posteriormente eliminando la coordenada z. Una vez que llega a una ecuación en derivadas parciales la resuelve, obteniendo que la solución es una suma infinita. Además, indicamos que en otro artículo posterior *Théorie analytique de la chaleur* de 1822, Fourier obtiene una versión similar a la actual.

También citamos el artículo *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* de Peter Lejeune Dirichlet, en el que expone las condiciones bajo las que la serie de Fourier convergerá.

La distribución normal que debe su importancia sobre todo al teorema central del límite que permite aproximar la suma de n variables (con n suficientemente grande) aleatorias independientes y de varianza finita pero no nula mediante una distribución normal.

La primera vez que aparece la distribución normal en un texto matemático es en el *Doctrine of Chances* de Abraham De Moivre. Éste la encuentra al buscar una aproximación de la suma de parte de los términos del desarrollo de $(a+b)^n$ entre $(a+b)^n$. Pero lo que realmente está haciendo es aproximar la distribución binomial por medio de la distribución normal. Esta aproximación la realiza primero para una $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, y después lo generaliza a una[57] $B(n,p)$. El proceso que sigue es:

- Primero aproxima el cociente entre el término medio de la distribución y la suma de todos los términos.
- Después aproxima el cociente entre un término distanciado del término medio por una distancia l y el término medio.
- Juntando lo anterior, multiplica ambos cocientes, lo que le da el cociente entre un término distanciado del medio en l y al suma de todos los casos, permitiéndole así aproximar la probabilidad del suceso en función de l.

Utilizando las definiciones de las medidas de centralización y dispersión estadística aplicadas a la distribución binomial, podemos obtener la fórmula de la distribución normal. Algunos párrafos los dedica al estudio de propiedades de esta distribución, como que la probabilidad de que ocurra un suceso entre $[\mu - s\sigma, \mu + s\sigma]$ depende únicamente de s.

Aplicaciones en Física:

- La fórmula de Euler sirve para representar números complejos, facilitando las operaciones de multiplicación y exponenciación gracias a las propiedades de la función

[57] De Moivre representa p, la posibilidad de que el suceso elegido ocurra, como $\frac{a}{a+b}$, siendo a el número de casos favorables y b el de casos desfavorables.

exponencial.

– La serie de Fourier tiene varias aplicaciones a la física, en el trabajo nos hemos centrado en el algoritmo de compresión de música en formato MP3.

– La distribución normal es útil como consecuencia del teorema central del límite para aquellos casos en los que es teóricamente imposible determinar lo que va a suceder, como por un ejemplo el estudio de la forma más probable que adoptará una proteína.

Conclusiones

Tras la realización de este trabajo hemos alcanzado todos los objetivos propuestos:

– Hemos encontrado la primera aparición del número e, como la base de los logaritmos que ofrece John Napier en su libro.

– Hemos mostrado, en orden cronológico los autores que utilizan e, los motivos por los que les aparece esta constante y el momento en que es definida:

  - Al perfeccionar, autores como Oughtred y Speidell, las tablas de logaritmos tras la muerte de John Napier, surgen mejores aproximaciones de e.
  - Posteriormente, el número e aparece ligado al cálculo integral y al estudio del área bajo una hipérbola. Autores como Leibniz ya hablan de una constante que llaman b que es nuestro actual número e y que utilizan en la integración de funciones hiperbólicas.
  - Más tarde Jacob Benouilli encuentra y acota una expresión que es el valor de e al estudiar un problema relacionado con el interés compuesto.
  - Y finalmente Euler al estudiar el desarrollo en serie de las funciones exponenciales define e.

– Hemos determinado alguna de las aplicaciones más importantes de e en las matemáticas. Para ello, nos hemos basado en la opinión de profesores de la Universidad de Murcia. Sin embargo, reconocemos que el número e tiene un rango de aplicaciones mucho más amplio que el expuesto en este proyecto. Hemos decidido no tratar más aplicaciones de e porque consideramos que las ya expuestas son suficientemente importantes y dan una visión general de la variedad de usos que tiene esta constante. Las aplicaciones estudiadas han sido:

  - La identidad y la fórmula de Euler.
  - La serie de Fourier.
  - La distribución normal.

Además, tanto al estudiar el origen de e como sus aplicaciones mostramos el momento y el proceso por el que esta constante aparece. Por ello, consideramos que hemos dado respuesta a nuestras dos dudas iniciales:

– ¿Cuál es el motivo por el que aparece e tan frecuentemente en todos los campos de las matemáticas?

– ¿Cómo se ha llegado a la definición de e?

Bibliografía

[Bernoulli, 1685] Bernoulli, J. (1685). Quaestiones nonnullae de usu. vis, cum solutione problematis de sorte alearum, propositi in ephem. gall. *Acta Eroditorum*, pages 219–223. https://books.google.es/books?id=s4pw4GyHTRcC&pg=PA222&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

[Biografías y vidas,] Biografías y vidas. Leonhard euler. http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm.

[Cajori, 1893] Cajori, F. (1893). *A History of Mathematics*. American Mathematical Soc., Rhode Island, 1991 edition. https://books.google.es/books?id=mGJRjIC9fZgC&printsec=frontcover&hl=es.

[Cajori, 1928] Cajori, F. (1928). *A History of mathematical notations*, volume II. Dover Publications, Nueva York, 1993 edition. https://monoskop.org/images/2/21/Cajori_Florian_A_History_of_Mathematical_Notations_2_Vols.pdf.

[Child, 1920] Child, J. M. (1920). *The early mathematical manuscripts of Leibniz*. The Open Court Publishing Company, Chicago, Londres. https://archive.org/details/earlymathematic01gerhgoog.

[Colaboradores de Wikipedia, 2016a] Colaboradores de Wikipedia (2016a). Distribución normal. https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_normal.

[Colaboradores de Wikipedia, 2016b] Colaboradores de Wikipedia (2016b). Gottfried leibniz. https://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz#Biograf.C3.ADa.

[Colaboradores de Wikipedia, 2016c] Colaboradores de Wikipedia (2016c). Jakob bernoulli. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli.

[Colaboradores de Wikipedia, 2016d] Colaboradores de Wikipedia (2016d). John speidell. https://en.wikipedia.org/wiki/John_Speidell.

[Colaboradores de Wikipedia, 2016e] Colaboradores de Wikipedia (2016e). William oughtred. https://en.wikipedia.org/wiki/William_Oughtred.

[Colaboradores de Wikipedia, 2017a] Colaboradores de Wikipedia (2017a). Ecuación diferencial. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial.

[Colaboradores de Wikipedia, 2017b] Colaboradores de Wikipedia (2017b). John napier. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/John_Napier.

[Colaboradores de Wikpedia, 2017] Colaboradores de Wikpedia (2017). Leonhard euler. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler.

[Coolman, 2015] Coolman, R. (2015). Euler's identity: The most beautiful equation. http://www.livescience.com/51399-eulers-identity.html.

[Cotes, 1714] Cotes, R. (1714). Logometria. http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/29/338-350/5.full.pdf+html.

[Darboux, 1890] Darboux, G. (1890). *Oeuvres de Fourier*, volume 2. Gauthier-Fillars et fills, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707/f220.

[Dirichlet, 1829] Dirichlet, P.-G. L. (1829). Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0004&DMDID=dmdlog13.

[Dorce Polo, 2014] Dorce Polo, C. (2014). Un paseo histórico por la invención de los logaritmos. *Revista SUMA+*, 75.

[Euler, 1728] Euler, L. (1728). Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta. https://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E853.pdf.

[Euler, 1736] Euler, L. (1736). Mechanica. https://books.google.es/books?id=qalsP7uMiV4C&pg=PA68&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

[Euler, 1748] Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*. Real Sociedad Matemática Española, Sevilla, 2000 edition.

[Forner Martínez et al., 2014] Forner Martínez, O., Domínguez Sales, M. C., and Forner Gambau, M. (2014). Antecedentes históricos de la construcción de los logaritmos. In *La construcción de los logaritmos: Historia y proyecto didáctico*. Publicacions de la Universitat Jaume I. https://books.google.es/books?id=oRak7QmI2XoC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

[Fourier, 1988] Fourier, J.-B.-J. (1988). *Théorie analytique de la chaleur.* Éditions Jacques Gabay, Sceaux. https://www.irphe.fr/~clanet/otherpaperfile/articles/Fourier/N0029061_PDF_1_676.pdf.

[Fuss, 1843] Fuss, P. G. (1843). *Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIeme siècle*, volume I. Académie Imperiále des Sciences de Saint-Pétesbourg, San Petesburgo. https://books.google.es/books?id=gf1OEXIQQgsC&pg=PA58&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

[Gerhardt, 1848] Gerhardt, C. I. (1848). *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz.* H. W. Schmidt, Halle. http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10053479_00003.html.

[Gerhardt, 1850] Gerhardt, C. I. (1850). *Leibnizens Matematische Schriften*, volume 2. A. Asher & Comp., Berlin. https://ia801403.us.archive.org/10/items/leibnizensmathe01leibgoog/leibnizensmathe01leibgoog.pdf.

[Ivory, 1807] Ivory, J. (1807). An account of a table of logarithms, published by john speidell, an eminent english mathematician, in the year 1619, and afterwards in the year 1628, under the title of new logarithms, extracted from and out of those of lord napier. In Hutton, C., editor, *Scriptores Logarithmici, or a collection of several curious tracts on the nature and construction of logarithms*, volume VI. R. Wilks, Londres. https://books.google.es/books?id=65YiAQAAMAAJ&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

[Leibniz, 1689] Leibniz, W. G. (1689). Scediasma de resistentia medii, & motu projectorum gravium in medio resistente. *Acta Eroditorum.* https://books.google.es/books?id=FdxEAQAAMAAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false.

[Leibniz, 1691] Leibniz, W. G. (1691). O. v. e. quadratura arithmetica communis sectiounum conicarum quae centrum habent, indeque ducta trigonometria canonica ad quantumcunque in numeris exactitudinem a tabularum necessitate liberata: cum usu speciali ad lineam rehomborum nauticam, aptatumque illi planisphaerium. *Acta Eroditorum.* https://books.google.es/books?id=YNtEAQAAMAAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false.

[Moivre, 1730] Moivre, A. D. (1730). Miscellanea analytica. Londres. https://ia600402.us.archive.org/12/items/bub_gb_TFX1165yEc4C/bub_gb_TFX1165yEc4C.pdf.

[Moivre, 1756] Moivre, A. D. (1756). The doctrine of chances. Londres. http://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf.

[Molinàs Mata and Martínez Boscá, s f] Molinàs Mata, P. and Martínez Boscá, J. F. (s. f.). Series de potencias. https://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Series_Potencias.pdf.

[Méndez, 1992] Méndez, H. (1992). Capítulo vii: Funciones trigonométricas. In *Tópicos de matemática elemental*. EUNED. https://books.google.es/books?id=rbQ9dganGRQC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

[Napier, 1618] Napier, J. (1618). A description of the admirable table of logarithms. Londres. http://eebo.chadwyck.com/search/full_rec?SOURCE=pgthumbs.cfg&ACTION=ByID&ID=99900419&FILE=../session/1485296171_16422&SEARCHSCREEN=CITATIONS&SEARCHCONFIG=var_spell.cfg&DISPLAY=AUTHOR.

[Napier, 1889] Napier, J. (1889). *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*. Edimburgo y Londres. http://math.unice.fr/~coppo/MirificiCanonis%20(copy).pdf.

[Prado-Bassas, 2010] Prado-Bassas, J. A. (2010). Una breve historia impresionista de la trigonometría ii: De arabia a europa. Naukas. http://naukas.com/2010/10/15/una-breve-historia-impresionista-de-la-trigonometria-ii-de-arabia-a-europa/.

[Schneider, 2006] Schneider, I. (2006). Direct and indirect influences of jakob bernoulli's ars conjectandi in 18th century great britain. http://www.jehps.net/Juin2006/Schneider.pdf.

[Speidell, 1619] Speidell, J. (1619). New logarithmes. http://eebo.chadwyck.com/search/full_rec?SOURCE=pgimages.cfg&ACTION=ByID&ID=23162388&FILE=../session/1485295894_16128&SEARCHSCREEN=CITATIONS&VID=26324&PAGENO=1&ZOOM=&VIEWPORT=&SEARCHCONFIG=var_spell.cfg&DISPLAY=AUTHOR&HIGHLIGHT_KEYWORD=.

[Speidell, 1622] Speidell, J. (1622). New logarithmes. http://eebo.chadwyck.com/search/full_rec?SOURCE=pgthumbs.cfg&ACTION=ByID&ID=99898376&FILE=../session/1485295502_15597&SEARCHSCREEN=CITATIONS&SEARCHCONFIG=var_spell.cfg&DISPLAY=AUTHOR.

[Stiefel, 1544] Stiefel, M. (1544). Arithmetica integra. https://books.google.es/books?id=fndPsRv08R0C&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

[Sánchez and Valdés, s f] Sánchez, C. and Valdés, C. (s. f.). Bernoulli, jacob (1654-1705). DivulgaMAT. http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3324&Itemid=33&showall=1.

[Universidad Mariano Gálvez, 2015] Universidad Mariano Gálvez (2015). Edad moderna – descartes, malebranche, espinoza, leibniz, hobbes. Recuperado de: http://filosofiaumg2015.blogspot.com.es/2015/03/edad-moderna-descartes-malebranche.html.