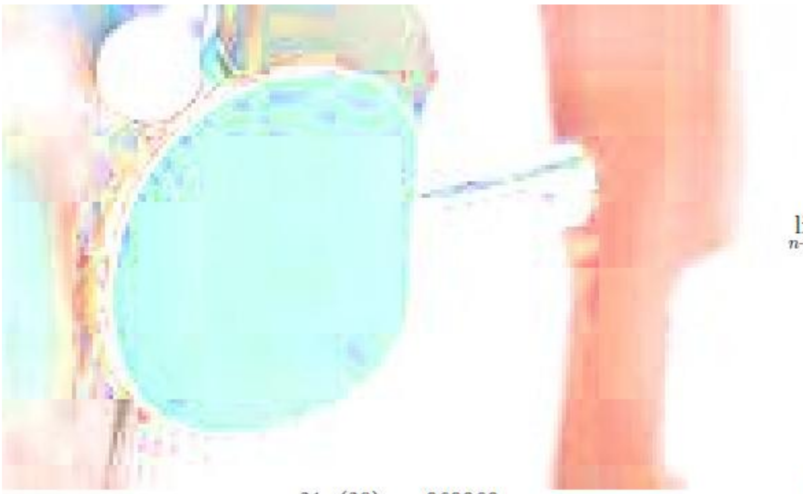
Jocs d'atzar i probabilitat

Pseudònim: Celsius

Curs 2014-15



$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{\frac{4n}{\pi}}} = 1$$

$$\frac{21}{2^{20}}\binom{20}{10} = \frac{969969}{262144}$$

$$p_0 = \frac{p^4}{p^4+q^4} = \frac{1}{2} + 4\,x - 80\,x^3 + 1856\,x^5 - 43264\,x^7 + \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Guanya} \\
 & V_{k+1} \arrow[ur, "p_{k+1}"] & \\
V_k \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & \text{Guanya} \\
 & V_{k-1} \arrow[ur, "p_{k-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Índex

Índex de figures

Capítol 1

Introducció

El motiu pel qual he triat estudiar i investigar la probabilitat i els jocs d'atzar és per l'interès que tinc pels esports individuals com el Tennis Taula (esport que practico de forma freqüent i competeixo en la lliga nacional i provincial). Encara que en principi no sembla que estiguin relacionats amb la probabilitat, es pot pensar que sí ho estan ja que la consecució d'un punt es pot considerar en realitat com un experiment aleatori. També m'interessen els jocs d'atzar com la loteria nacional, la primitiva o la grossa de Nadal que mouen milers de milions d'euros.

Aquesta branca de les matemàtiques s'estudia poc en l'educació secundària i encara menys durant el batxillerat. A 4t d'ESO, vaig tenir la sort de que el meu professor de matemàtiques hi va dedicar gairebé un trimestre, de manera que en vaig poder aprendre una mica. Malgrat tot, no vam poder aprofundir molt i, com que trobo la probabilitat interessant, vaig decidir estudiar-la en el meu treball de recerca.

Per altra banda, una de les meves il·lusions presents és poder estudiar una carrera de l'àmbit de les ciències, i penso que la probabilitat és un tema que s'ha de conèixer bé per arribar a ser un bon professional. De fet, bona part de les activitats de l'àmbit de les ciències utilitzen el càlcul de probabilitats.

1.1 Objectius inicials

Els objectius que hem anat desenvolupant han sorgit de la necessitat d'emmarcar l'estudi d'un cas en el seu context teòric, és a dir, l'estudi dels jocs d'atzar en la branca de les matemàtiques que els explica. Per això, hem fixat les bases teòriques sobre la probabilitat, atenent als orígens i als axiomes principals. Precisament, la probabilitat va néixer de l'interès en resoldre problemes de jocs d'atzar. A més a més, aquí hem aplicat el marc teòric als jocs d'atzar, com ara el Texas Hold'em Poker, la ruleta, els daus i fins i tot la loteria. L'estudi d'aquests jocs m'han permès analitzar un joc que no ha estat tant estudiat des del punt de vista de la probabilitat, com és el Tennis Taula. La segona part del treball consisteix en la creació d'una aplicació informàtica per a telèfon mòbil *Android*[1] que permet calcular la probabilitat de guanyar un partit a partir de diferents variables. Per tal de poder afrontar aquest repte, he hagut d'estudiar mínimament el llenguatge de programació Java.

Per tant, el treball és plural en els objectes d'estudi, però em calia seguir tots els objectius esmentats per comprendre i aplicar la probabilitat a l'esport del Tennis Taula. Els objectius principals d'aquest treball són:

a) Entendre l'origen de la probabilitat.

b) Conèixer els axiomes de la probabilitat.

c) Aplicar el càlcul de probabilitats a alguns jocs d'atzar.

d) Aplicar el càlcul de probabilitats a jocs dels tipus Tennis Taula i veure com augmenta o disminueix la probabilitat de guanyar un partit segons el tipus de puntuació emprada i analitzar la manera més "justa"de decidir un partit.

e) Entendre el concepte de joc equitatiu, mirar si ho són alguns com les loteries o la ruleta i calcular l'esperança matemàtica del guany en aquests jocs.

f) Aprendre a redactar i escriure fórmules en el sistema tipogràfic LaTeX.[2].

g) Aprendre a programar en llenguatge de Java una aplicació simple relacionada amb la probabilitat i els esports.

h) Programar una aplicació que he anomenat *TTProbabilitats*.

1.2 Contingut del treball

El treball consta d'una part teòrica que es desenvolupa en el primer capítol i en un apèndix: història, axiomes i teories de la probabilitat i de jocs. I d'una part pràctica on es calculen les probabilitats de diversos jocs d'atzar,

[1]Ribas Lequerica, Joan. *Desarrollo de aplicaciones para* Android. Ed Anaya. Madrid 2011.

[2]Valiente, Gabriel. *Composició de textos científics amb LaTeX*. Edicions de la UPC. Barcelona 1996.

així com el Tennis Taula i es construeix una aplicació per mòbil *Android*. La part pràctica és la més interessant i important del treball perquè és la que ha comportat més creativitat, visible fonamentalment en la creació d'una aplicació pel mòbil. El darrer capítol és el de conclusions.

En el transcurs d'aquest treball, les propostes inicials han evolucionat, però els resultats han estat propers a les referides propostes. A principis d'estiu de l'any passat, vaig decidir fer un treball sobre l'estudi del joc d'apostes Texas Hold'em Pòker, començant amb jocs d'atzar més simples. Aquesta és la raó per la qual molts exemples de les aplicacions de la teoria de la probabilitat, com per exemple la Regla de Laplace, són sobre el Texas Hold'em Pòker. Encara no havia concretat quin seria el meu estudi, quan em vaig adonar que era gairebé impossible per mi treballar amb tants factors i amb tantes variables influents.

Llavors, un capítol del llibre (Haigh, 2003) *Matemàticas y juegos de azar* em va cridar l'atenció. Es titulava *"Jugemos al mejor de 3"* i a la pàgina 184 parlava sobre una forma de presentar la probabilitat de guanyar un partit a partir de la probabilitat de guanyar un punt. Vaig pensar que utilitzar el programa Geogebra era una bona manera de combinar en un gràfic les probabilitats de guanyar un punt (eix d'abscisses) i la de guanyar un partit (eix d'ordenades). Em vaig fixar amb la forma del gràfic a mesura que augmentava el número de punts del set. Degut a què en el meu esport, el Tennis Taula, són partits amb puntuació, i gràcies a què una de les sortides que podia tenir el meu treball era una aplicació, vaig tenir la idea de crear una aplicació específica per a jugadors de Tennis Taula. Tot seguit, vaig començar a plantejar els diferents paràmetres que podria tenir: un marcador, diferències... i vaig caure en què les fórmules eren necessàries per al programa. A continuació vaig anar del més simple al més complex fins arribar a la fórmula general amb totes les possibles variables. Finalment, vaig fer que l'aplicació fes simulacions amb un nombre gran de partits, cosa que m'ha fet comprovar que els càlculs teòrics eren correctes per la *Llei dels grans nombres*. Més endavant, vaig redactar les conclusions.

1.3 Recursos utilitzats

En aquest treball he emprat una sèrie de programes informàtics i informacions que m'han ajudat a desenvolupar-lo de la manera que jo he preferit. Ara els citaré i explicaré perquè m'han servit.

a) LaTeX és un conjunt de *macros* de TeX. La idea principal de LaTeX és ajudar a qui escriu un document a centrar-se en el contingut més que en la forma. És molt utilitzat en el món acadèmic, ja sigui per a la composició de tesis i llibres tècnics ja que la qualitat tipogràfica dels documents realitzats amb LaTeX és comparable a la d'una editorial científica de primera línia. LaTeX està disponible per a la majoria de plataformes actuals (Linux, Unix, Windows, Mac).[3]. És el programa en el que he redactat tot el treball de recerca i he escrit totes les operacions matemàtiques així com demostracions, diagrames i taules de fulls de càlcul.

b) *User's Guide to the Diagram Environment* que és la guia de l'entorn de LaTeXper dibuixar diagrames[4], que m'ha ajudat a construir els diagrames correctament en el treball sempre que ho necessitava.

c) *Maxima*, és un sistema per a la manipulació d'expressions simbòliques i numèriques, incloent diferenciació, integració, expansió en sèries de Taylor, transformades de Laplace, equacions diferencials ordinàries, sistemes d'equacions lineals, vectors, matrius i tensors. *Maxima* produeix resultats d'alta precisió usant fraccions exactes, nombres enters de precisió arbitrària i nombres de coma flotant amb precisió variable. Addicionalment pot representar gràficament funcions i dades en dues i tres dimensions[5]. Aquest programa m'ha servit per comprovar si funcionaven o no les fórmules obtingudes (comparant els resultats amb la freqüència relativa de l'aplicació), i per fer desenvolupaments de Taylor d'algunes funcions.

d) *GeoGebra*, que és un programari de matemàtiques dinàmiques per a tots els nivells educatius que reuneix geometria, àlgebra, full de càlcul, gràfics, estadística i càlcul en una única aplicació fàcil d'utilitzar. *GeoGebra* és també una comunitat en ràpida expansió, de milions d'usuaris en gairebé tots els països. *GeoGebra* s'ha convertit en el proveïdor líder de programari de matemàtiques dinàmiques, recolzant l'educació en ciències, tecnologia, enginyeria i matemàtiques (STEM: Science Technology Engineering and Mathematics) i la innovació en l'ensenyament i l'aprenentatge en tot el món[6]. N'he fet ús a l'hora de fer gràfics que mostressin la variació de la probabilitat d'un partit a n punts en funció de la probabilitat de guanyar un punt (apartats 6.1 i 6.2).

e) *Eclipse*. En el camp de la programació, *Eclipse* és un entorn de desenvolupament integrat (IDE). Conté una àrea de treball de base i un

[3] http://ca.wikipedia.org/wiki/LaTeX (consultada 7/I/2015)
[4] (Valiente, 1996, p. 115)
[5] http://maxima.sourceforge.net/es/(consultada 7/I/2015)
[6] http://www.geogebra.org/about (consultada 7/I/2015)

sistema de plug-in extensible per personalitzar l'entorn. Escrit principalment en *Java*, *Eclipse* es pot utilitzar per desenvolupar aplicacions. Per mitjà de diversos plug-ins, *Eclipse* també pot ser utilitzat per a desenvolupar aplicacions en altres llenguatges de programació: *Ada, ABAP, C, C ++, COBOL, JavaScript,* etc. També es pot utilitzar per desenvolupar paquets per al programari *Mathematica*[7]. En ell hi he programat l'aplicació que he anomenat *TTProbabilitats*.

f) *Microsoft Excel*, que és una coneguda aplicació de full de càlcul desenvolupat per *Microsoft* per a *Microsoft Windows* i *Mac OS*. Disposa de càlcul, eines de gràfics, taules dinàmiques, i un llenguatge de programació anomenat *Visual Basic* per a aplicacions. Ha estat un full de càlcul aplicat per a aquestes plataformes, sobretot des de la versió 5 el 1993, i ha reemplaçat *Lotus 1-2-3* com l'estàndard de la indústria per als fulls de càlcul. *Excel* forma part de *Microsoft Office*.[8]. L'he utilitzat per a calcular les esperances de guany a les loteries i altres problemes relacionats amb el jocs de Casino com la Ruleta Europea.

[7]http://en.wikipedia.org/wiki/Eclipse_software (consultada 7/I/2015)
[8]http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel(consultada 7/I/2015)

Capítol 2

Inicis de la probabilitat

Els inicis de la teoria de la probabilitat estan lligats amb els estudis sobre els jocs d'atzar i les apostes. L'any 1494, Luca Pacioli va intentar resoldre el problema relacionat amb la *divisió de l'aposta*. La qüestió era saber quina era la manera correcta o justa de dividir l'aposta total d'un joc si en un moment donat, abans de finalitzar tota la partida, els jugadors decidien no jugar més. El problema deia així:

> Dos jugadors (A i B) juguen a un partida en què per cada joc guanyat s'obté 1 punt. El primer que arriba a 6 punts s'emporta el premi (24 ducats). El joc s'interromp per causes desconegudes en un moment en què el jugador A té 5 punts i el jugador B en té 3, davant la impossibilitat de continuar i acabar la partida. El problema tracta de repartir el premi de manera justa[1].

La solució de Pacioli es va limitar a fer un repartiment proporcional entre els jocs guanyats i l'aposta total[2]. Per tant, un dels jugadors obtindria els 5/8 de l'aposta, o sigui 15 ducats, i l'altre els 3/8 restants, és a dir 9 ducats.

Niccolo Tartaglia (1499-1557) va observar un error a la solució que donava Pacioli. Així, sostenia que en el cas que tan sols s'hagués jugat una única partida, tota l'aposta recauria en un sol jugador, que és la proporció entre els jocs guanyats i els jugats. Vist així, el repartiment era clarament injust. Tartaglia proposava tenir en compte els punts d'avantatge i el nombre total de jocs que quedaven encara per guanyar. En el nostre exemple, correspondrien 2 punts d'avantatge pel jugador A més els 6 totals que es necessiten per a guanyar: $2 + 6 = 8$. De forma equivalent, el jugador B tindria 2 punts de

[1] http://ca.wikipedia.org/wiki/El_problema_dels_punts, (consultada 24/VII/2014)

[2] Katz, Victor J. 1993. *A History of Mathematics*, Addison Wesley. Boston 1993. p. 490

desavantatge: $-2+6=4$. Per tant, la proporció es 8:4 o el que és el mateix 2:1 o sigui 2/3 pel jugador A (16 ducats) i el terç restant pel jugador, és a dir 8 ducats- [3]. La seva proposta, però, tampoc era convincent. D'aquesta manera, si utilitzéssim la seva fórmula en una partida de 100 jocs, veuríem que es repartiria de la mateixa manera a un jugador tant si guanya 99-89, com si guanya 65-55, amb un repartiment proporcional a 110:90[4]. Això sembla que tampoc és just, ja que el jugador que té 99 punts li falta un únic punt per a emportar-se tota l'aposta, mentre que el jugador amb 65 punts, li'n falten 35.

Blaise Pascal i Pierre Fermat varen mantenir correspondència per resoldre aquest i altres problemes, arribant tots dos en alguns d'ells a la mateixa solució per camins diferents. Aquesta correspondència és considerada pels historiadors de la matemàtica com l'inici del càlcul de probabilitats.

2.1 La correspondència entre Fermat i Pascal sobre probabilitat

Durant el segle XVII, es produeix un intercanvi de cartes entre Fermat i Blaise Pascal on es tracten 3 problemes bàsics sobre els jocs d'atzar, que els va permetre avançar en el concepte de probabilitat, i fins i tot, establir unes regles bàsiques. En aquest intercanvi de cartes, Fermat i Pascal expliquen tots els raonaments, en especial Pascal. Aquest debat epistolar es considera el començament de la teoria matemàtica de probabilitats. Aquests són els tres problemes esmentats que apareixen a les cartes:

a) El problema dels daus

b) El problema de la divisió de les apostes en el joc dels daus

c) El problema de la divisió de les apostes en una partida amb diferents jocs

El problema dels daus deia així:

> Llançant dos daus, quants llançaments són necessaris per tal de tenir una probabilitat més gran que 0.5 d'obtenir almenys un doble 6?[5].

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Teilungsproblem (consultada 28/VIII/2014)
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_points, (consultada 25/VII/2014)
[5] Fermat, Pierre de, *Obra matemàtica vària*, IEC, Barcelona, 2008, p. 269

En una carta, Pascal li va comentar que el cavaller De Méré havia trobat una contradicció. Així, si es planteja el mateix problema, però tirant un sol dau, els llançaments necessaris per a tenir una probabilitat més gran del 50% són 4. Llavors, el cavaller De Méré va creure que la proporció es mantenia, i va dir que: "apostar per un resultat de 6 a 4 llançaments serà com fer-ho per un resultat de $36 = 6 \cdot 6$ a $24 = 4 \cdot 6$ llançaments".

$$4 : 6 :: 24 : 36$$

Tot i això, pel que diu Pascal, el cavaller De Méré havia calculat correctament els valors, però arribava a la contradicció que eren necessàries 25 tirades. Vegem els càlculs:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,49 \text{ i } 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0,505$$

Amb aquest càlcul, el cavaller restava al $100\% = 1$ la fracció en què es definia el número de casos favorables (totes les possibilitats menys el doble 6) entre el número de casos possibles (tots els casos) $(6 \cdot 6 = 36)$.[6].

De Méré emprava aquesta estratègia perquè valorava que era més fàcil restar-li al 100% la probabilitat de què no sortís el doble 6, en lloc d'anar comptant totes les maneres possibles en què sortiria el doble 6 en 24 tirades. A partir d'aquí, va anar provant en 1 tirada, 2 tirades, 3 tirades... fins arribar a obtenir un nombre més gran que 0,5.

No li quadraven els càlculs perquè partia de la premissa errònia que la probabilitat mantenia una proporció lineal al llarg de les tirades amb diferents números daus.

El problema de la divisió de les apostes s'enuncia així:

> ¿Com s'han de repartir les apostes si, per les circumstàncies que siguin, el joc s'interromp abans d'una tirada determinada?[7].

Fermat, com a exemple de joc, proposa anar llançant un dau fins a vuit vegades. Si en alguna tirada apareix una cara determinada, com per exemple 5, es guanya l'aposta. Si no apareix en cap, es perd.

En aquesta carta va introduir un concepte important i molt clarificador a la seva solució, que era el relatiu a la independència de les tirades. A més a més, va establir el càlcul de probabilitats com a divisió entre el nombre de casos favorables i casos possibles. Fermat deia que si hom es negava a fer la primera tirada, legítimament, li hauria de correspondre $\frac{1}{6}$ de l'aposta total i

[6] Regla de Laplace

[7] (Fermat, 2008, p. 271)

si també es negava a fer la segona, li hauria de correspondre $\frac{1}{6}$ de l'aposta total que, ara, és un $\frac{5}{36}$.

Ja acabat el raonament i un cop en mans de Pascal la carta, aquest va respondre referint el problema que més els importava. Es tractava del problema de la divisió de les apostes en una partida amb diferents jocs [8]. El problema diu així:

> Dos jugadors juguen una partida que consisteix a guanyar un nombre determinat de jocs independents entre si. Cada jugador té les mateixes probabilitats de guanyar cadascun dels jocs. La qüestió és: com s'han de repartir les apostes si la partida s'interromp abans que un dels jugadors hagi guanyat el nombre necessari de jocs per guanyar la partida[9].

Com ja he dit abans, Luca Pacioli i Niccolo Tartaglia ja havien intentat temps enrere fer una divisió justa de les apostes, fracassant tots dos. Fins i tot Tartaglia va afegir: "Sigui quina sigui la forma en què la divisió es fa, hi haurà motiu de litigis".[10].

Sobre aquest problema Blaise Pascal va oferir un raonament bonic i, al mateix temps, simple. Desenvolupa aquesta solució amb un exemple: Tracta d'una partida de 2 jugadors on cadascun aposta 32 pistoles. La partida es disputa al millor de 5 jocs. Ell suposa que un dels jugadors (anomenem-li J1) guanya per 2 jocs a 1 a l'altre jugador (anomenat J2) i s'interromp la partida.

Segueix amb el raonament, pensant que el següent joc que disputin es poden donar 2 possibilitats: o bé J1 guanyarà totes les pistoles apostades, que en són 64, o bé J2 forçarà el 2 a 2 i, conseqüentment, cadascú mantindrà 32 pistoles. A partir d'aquí, planteja la situació des d'un altre punt de vista. Observa que si J1 guanya es quedarà amb 64 pistoles i si perd en tindrà 32. Llavors, si els jugadors pacten no aventurar-se a jugar el quart joc, J1 hauria de dir: "Estic segur de tenir 32 pistoles ja que, malgrat que perdi aquest joc, la mateixa pèrdua me les assegura. Pel que fa les altres 32, potser les guanyaré jo o potser les guanyareu vós ja que les probabilitats estaran equilibrades. Repartim doncs aquestes 32 pistoles a parts iguals, i doneu-me en addició les meves 32, que em pertanyen en qualsevol cas". Llavors a J1 li correspondran 48 pistoles i a J2 16. El raonament matemàtic, des de la situació de J1, es

[8] Aquest problema l'havia intentat resoldre Pacioli i Tartaglia, com hem vist a l'apartat anterior.

[9] (Fermat, 2008, p. 271)

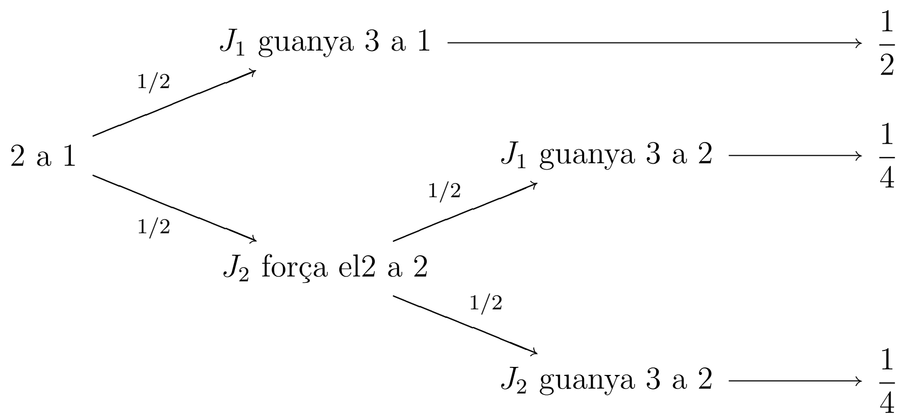
[10] Tartaglia, citat a Katz,"Pascal i la invenció de la Teoria de la Probabilitat", pp. 414 i ss.

resumeix a: si perdo el proper joc em corresponen x pistoles. Si guanyo me'n corresponen y ($y > x$). Per tant m'he d'endur $x + \left(\frac{y-x}{2}\right)$. Comprovem que es compleix la fórmula per aquest cas:

$$32 + \left(\frac{64-32}{2}\right) = 32 + 16 = 48$$

J2 s'emporta la resta

$$64 - 48 = 16$$



Com podem veure, J1 té 3/4 de probabilitat de guanyar i J2 1/4. Com que la probabilitat de guanyar la partida i l'aposta justa merescuda hauria de ser proporcional, podem aplicar proporcionalitat directa:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{64} \implies x = \frac{192}{4} = 48$$
$$\frac{1}{4} = \frac{y}{64} \implies x = \frac{64}{4} = 16$$

2.2 Altres desenvolupaments en els inicis de la probabilitat

Blaise Pascal i Pierre de Fermat han estat considerats com els qui van fixar els fonaments de la probabilitat matemàtica perquè van resoldre el problema dels punts, és a dir, el problema de dividir equitativament les apostes. Tot i que el tema es remunta a abans de 1654, segons s'ha vist Pascal i Fermat van ser els primers en donar la solució que ara considerem correcta. També van respondre altres preguntes sobre probabilitats justes en els jocs d'atzar. Les seves idees principals van ser popularitzats per Christian Huygens, en el seu *De ratiociniis en aleae ludo*, publicat el 1657. Durant el segle que va seguir a aquest llibre, altres autors, James i Nicolau Bernoulli, Pierre Rémond de Montmort, i Abraham De Moivre, van desenvolupar eines matemàtiques més potents per tal de calcular les probabilitats en els jocs més complicats. A més a més, De Moivre, Thomas Simpson, i altres també van utilitzar la teoria per calcular preus justos per pensions vitalícies i pòlisses d'assegurances.

James Bernoulli en el seu *Ars conjectandi*, publicat el 1713, va establir les bases filosòfiques per a aplicacions més àmplies. Bernoulli va portar la idea filosòfica de regles de probabilitat a la teoria matemàtica, i va demostrar el seu famós teorema: la probabilitat d'un esdeveniment es pot aproximar per la freqüència amb què es produeix. Bernoulli va avançar aquest teorema, més tard anomenat la llei dels grans nombres de Poisson, que li va permetre l'ús de freqüències observades com si fossin les probabilitats, que es combinaran amb les seves regles per resoldre qüestions pràctiques. Les idees de Bernoulli van atreure l'atenció filosòfica i matemàtica, però els jocs d'atzar, ja sigui en els jocs o en la vida, van seguir essent la font principal de noves idees per teoria de la probabilitat durant la primera meitat del segle XVIII.

Entre les aportacions de l'època, esmentem la discussió epistolar sostinguda per Nicolau i Daniel Bernoulli, que és el joc conegut com la "paradoxa de San Petesburg". Aquest joc consisteix en què una persona llança un dau en diverses ocasions, i guanya un premi quan per primera vegada surt un sis. El premi es duplica cada vegada que no s'aconsegueix el sis. Guanya una corona si obté un 6 en el primer tir, dues corones, si el seu primer 6 està en el segon tir, quatre corones si és a la tercera banda, i així successivament. Quant s'hauria de pagar per jugar a aquest joc, en el benentès que l'aposta justa o l'anomenat joc d'esperança nul.la. Aquest joc s'hauria de jugar necessàriament amb independència de la quantitat que et demanin per jugar, atès què si la quantitat li diem x i tenim prou diners per jugar tantes vegades com calgui arribarà el moment en què el guany serà superior a la quantitat jugada.

Segons les regles de Huygens, s'hauria de pagar una quantitat infinita, però paradoxalment ningú estaria disposat a pagar més d'unes poques corones. Daniel va explicar aquesta formulant la idea de la utilitat esperada. Si el guany esperat per una persona en el joc és només proporcional al seu logaritme, a continuació, el guany esperat és finit. Nicolau no ho veia així, perquè per a ell la teoria de la probabilitat es basa en l'equitat. Si estem parlant del que una persona vol pagar més del que és just, llavors no hi ha base per al càlcul. En efecte, el guany esperat seria:

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 2^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 2^2+\cdots=$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{10}{6}+\left(\frac{10}{6}\right)^2+\left(\frac{10}{6}\right)^3+\left(\frac{10}{6}\right)^4+\cdots\right)=\infty$$

Aquesta suma és infinita atès que es tracta d'una progressió geomètrica de raó 10/6 que és més gran que 1, i per tant es fa tan gran com es vulgui.

De fet, sempre arriba un moment que surt un 6. Si el nombre de vegades que cal llançar el dau és molt elevat (posem per exemple 100), llavors la quantitat a pagar és enorme $1.26\cdot 10^{30}$ corones, i aquesta quantitat no la pot pagar ningú. Per tant, és natural pensar que el nombre de vegades que s'ha de llançar el dau està fitada i llavors la quantitat a pagar per jugar és perfectament raonable.

A la segona meitat del segle XVIII, un nou conjunt d'idees van entrar en joc. Els qui treballaven en astronomia i geodèsia van començar a desenvolupar mètodes per a la conciliació de les observacions. A més, els estudiosos de la teoria de la probabilitat van començar a buscar els fonaments d'aquests mètodes. Aquest treball va inspirar la invenció de Pierre Simon Laplace en el mètode de probabilitat inversa, i es va beneficiar de l'evolució de la llei de Bernoulli dels grans nombres en el que ara anomenem el teorema central del límit. Això va culminar amb la publicació de Adrien Marie de Legendre del mètode dels mínims quadrats en 1805 i en el cas de la probabilitat, el mètode va ser desenvolupat per Laplace i per Carl Friedrich Gauss des de 1809 de 1811. Aquestes idees es van reunir en el gran tractat de Laplace de la probabilitat, *Théorie analytique des probabilités,* publicat en 1812.[11].

[11]Shafer, Glenn. The Early Development of Mathematical Probability, http://www.glennshafer.com/assets/downloads/articles/article50.pdf (consultat 20/IX/2014)

Figura 2.1: Caravaggio, 1594, I bari. Exemple pictòric de la importància dels jocs d'atzar en les activitats socials i lúdiques dels homes en la modernitat, tot just quan es van donar aquests debats relatius a la probabilitat de guanyar o perdre en aquest jocs.

Capítol 3

Probabilitat en els esports

A aquest apartat estudiaré el meu esport preferit, el Tennis Taula, desenvoluparé com influeix el tipus de puntuació en la probabilitat que té un esportista de guanyar un partit al seu contrincant. Per exemple, si un jugador té una probabilitat de guanyar un punt p i el seu contrincant una probabilitat $q = 1 - p$, de quina forma varien les probabilitats de guanyar el partit segons el nombre de sets o el nombre de punts per set (3, 11 o 21)?

El que faré pel Tennis Taula, de fet, es pot generalitzar a un esport que acaba quan s'ha arribat a una certa puntuació (tennis, torneig d'escacs,.... Cal aclarir una mica el tema en el sentit de quina és la finalitat de disputar un enfrontament i perquè s'utilitzen un seguit de regles i no d'altres. No es tracta de posar a prova les teves capacitats físiques, ni mentals (això és una mera conseqüència, més aviat). Les regles del joc són de manera que aquests tenen una duració raonable i proporcionen satisfacció tant als participants com als espectadors. Els jocs no han sigut concebuts com mecanismes estadístics eficaços per decidir entre dos alternatives amb una certa probabilitat cadascuna. De totes maneres, seguint una ètica correcta, les competicions haurien de ser el més justes possibles per als dos rivals. Així, l'avantatge de començar una partida d'escacs amb blanques s'equilibra amb el fet de que la següent partida tu jugaràs amb negres i el teu contrincant començarà jugant. S'haurà de jugar un número total de partides parell, en el Tennis Taula la suposat avantatge del servei s'equilibra amb el fet que cada dos punts el servei canvia de jugador, i com aquests tipus de competicions n'hi ha un nombre molt gran d'exemples.

Abans de tot es necessari suposar que:

a) Cada partida és independent.

b) La probabilitat de que qualsevol jugador guanyi es manté constant al llarg de la competició[1].

Encara que val a dir que això no és del tot cert. Dins del meu esport, el Tennis Taula, si un adversari t'acaba de guanyar tres punts seguits o t'ha remuntat un set que era clarament teu, és una conducta habitual donat que influeix també la percepció del joc del jugador no afrontar els següents punts de la mateixa manera. Suposarem que en els partits que estudiarem seguidament als participants no els hi influirà aquestes variables, de moment són difícils de calcular.

3.1 Joc a dos i a tres punts

Començaré amb un estudi simple de la variació de la probabilitat que té cada jugador segons la puntuació. Per començar, direm que anem a jugar un partit de Tennis Taula a dos punts. Suposarem que, per cada punt, un els jugadors (A) té probabilitat p de guanyar i el seu contrincant (B) té probabilitat de $q = 1 - p$ de guanyar. Ara calcularem mitjançant probabilitat total, les maneres de guanyar del jugador A (en aquest cas, les puntuacions possibles són: 2 a 0 o 2 a 1).

La manera en la que pot arribar a 2-0 és única. Guanyar un punt i després guanyar un punt. Si la probabilitat de guanyar un punt és p, la probabilitat de guanyar dos punts serà p^2 (atès que estem amb la hipòtesi d'independència dels punts). L'altra manera de guanyar era 2-1, però en aquest cas no només pot arribar a guanyar 2-1 amb un sol camí sinó que en té dos de diferents:

a) Guanyar el primer punt, perdre el segon i guanyar el tercer (1,0), (1,1), (2,1).

b) Perdre el primer punt i guanyar els dos següents (0,1), (1,1), (2,1).

Haurem de sumar aquestes dues probabilitats que són iguals a p^2q. La probabilitat de guanyar 2-1 és per tant $2p^2q$). Recordem que p^2 és els 2 punts d'A i $q = (1 - p)$ és el punt de B.

Llavors la suma entre la probabilitat de guanyar 2-1 i la probabilitat de guanyar 2-0 és, lògicament, la probabilitat que té de guanyar A. Efectuem la suma:

$$P(A) = p^2 + 2(p^2 \cdot (1-p)) = p^2 + 2(p^2 - p^3) = p^2 + 2p^2 - 2p^3 = 3p^2 - 2p^3 \quad (3.1)$$

Per interpretar aquesta fórmula suposarem el cas en que els dos jugadors estan bastant igualats i expressarem $p = 1/2 + x$ on x podem pensar que és

[1](Haigh, 2003, p. 182).

una quantitat petita, en aquest cas $q = 1 - p = 1 - (1/2 + x) = 1/2 - x$, llavors:

$$\begin{aligned} P(A) &= p^2(3-2p) = \left(\frac{1}{2}+x\right)^2(3-(1+2x)) = \left(\frac{1}{4}+x+x^2\right)(2-2x) = \\ &= \frac{1}{2}+\frac{3}{2}x-2x^3 \end{aligned}$$

Interpretaré aquesta fórmula amb el gràfic de la funció[2]:

$$y = P(A) = f(x) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}x-2x^3$$

comparant-la amb el gràfic de la funció $y = 1/2 + x$, que és com hem dit la probabilitat que el jugador guanyi un punt:

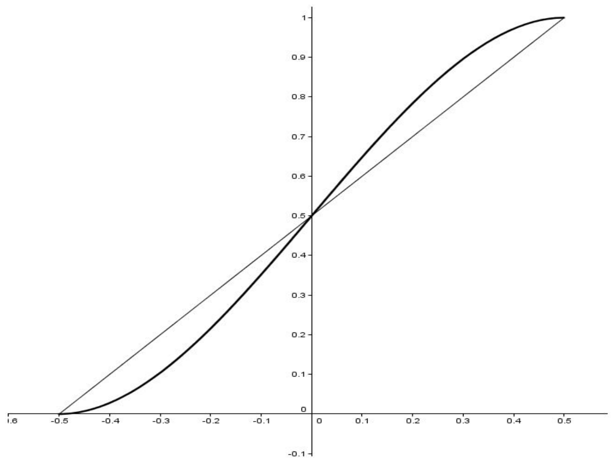


Figura 3.1: Probabilitat de guanyar un joc a dos punts

Observem que quan x és positiu (la qual cosa vol dir que el jugador A, és millor que el B), la probabilitat de guanyar A en una partida a dos punts, és més gran que en una partida a un punt (la qual cosa ja intuïm ja que el component d'atzar disminueix), i que aquest augment, quan x és petit, és aproximadament $3/2x$. En aquest cas, menyspreem el valor $-2x^3$ que és molt inferior a $3/2x$, en termes numèrics: si el jugador A està 5 punts per damunt del 50% ($x = 0.05$, $p = 0.55$), llavors la probabilitat de guanyar un joc a dos punts serà aproximadament 7.5 punts per damunt del 50% ($P(A) = 0,57475 \approx 0,575 = 57,5\%$).

Ara estudiaré el cas en que el joc és a tres punts, per tant:

[2](Haigh, 2003, p. 184).

> Si A té probabilitat p de guanyar un punt respecte a B, quina és la probabilitat que té de guanyar una partida al millor de cinc punts?

Aquest problema em resulta molt curiós i, al mateix temps, em porta bons records. Un dels Opens d'estiu que se celebren a Catalunya s'anomena 'Triopen de Calella'. No és un torneig normal i corrent amb grups per a la classificació i partits al millor de cinc onzes, sinó que el campionat són només eliminatòries i juguen partits al millor de cinc punts!. És un torneig molt divertit i emocionant perquè hi ha 500 € en joc, la qual cosa fa que el número de jugadors bons sigui major que en altres competicions, així com les ganes de guanyar. El més bonic de tot es veure com jugadors de baix nivell guanyen a jugadors professionals. Al cap i a la fi, només es tracta de 3 punts. He dit que tinc bons records perquè el meu company d'equip de Tennis Taula, Enric Cassadó, fa dos anys va arribar a la final fent un gran campionat i guanyant a la semifinal el vigent campió de Catalunya juvenil, Adrià Mallorquí.

Després d'aquesta petita introducció, anem a resoldre el problema. El camí cap a la solució és el mateix que l'anterior amb la petita diferència que ara estem parlant de que guanyar comporta fer 3 punts abans que l'adversari. Ara A té tres maneres de guanyar B, (3,0), (3,1) o (3,2). Per a guanyar (3,0), (3,1) o (3,2) s'ha de arribar abans al (2,0), (2,1) o (2,2). Hem de comptar les maneres diferents d'arribar a (2,0), (2,1) o (2,2) i les seves probabilitats. Seguidament les multiplicarem per p, ja que A ha de fer l'últim punt per a tancar el partit.

Puntuació	Maneres de combinar	Número combinatori	Probabilitat
2-0	AA	1	p^2
2-1	BAA, ABA, AAB	3	$3p^2q$
2-2	AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA	6	$6p^2q^2$

Cada probabilitat l'hem de multiplicar per p, sumar i ja tindrem la probabilitat que tenim de guanyar un partit al millor de 5 punts. Llavors:

$$\begin{aligned} P(A) &= p^2 \cdot p + 3qp^2p + 6q^2p^2p = p^3 + 3qp^3 + 6q^2p^3 = \\ &= p^3\left(1 + 3q + 6q^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{15}{8}\,x - 5\,x^3 + 6\,x^5 \end{aligned}$$

He obtingut la darrera igualtat substituint el valor $p = 1/2 + x$ i $q = 1/2 - x$ i amb el programa *wxMaxima*: [3]

[3] *wxMaxima* es una interface gráfica de usuario para el Sistema de Álgebra Simbólica (CAS) *Maxima* creada 13/04/02

```
p:1/2+x;
q:1/2-x;
f2:p^3*(1+3*q+6*q^2);
expand(f2);
(\%o32) 6\,{x}^{5}-5\,{x}^{3}+\frac{15\,x}{8}+\frac{1}{2}
```

Amb aquesta expressió podem definir una funció $y = f(x)$ i representar-la gràficament, a continuació representaré les dues funcions en un mateix gràfic on veurem com augmenta la probabilitat de guanyar del jugador bo quan passem de dos a tres punts.

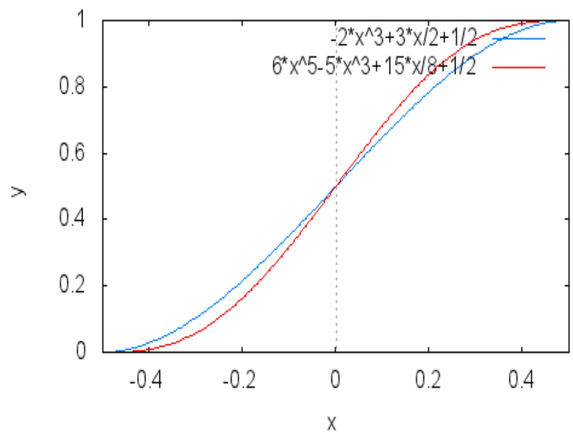


Figura 3.2: Probabilitat de guanyar un joc a dos i a tres punts

Després d'haver exemplificat dos problemes, buscaré una fórmula en funció de n que ens permeti calcular la probabilitat per un nombre n de punts. És a dir, per 4,5,6... punts.

La clau per a trobar la fórmula és fixar's-hi amb els números combinatoris que sorgeixen al llarg de la funció. També és important fixar's-hi amb l'exponent de p i $q = 1-p$, però això és més simple. Per una part, sabem que cada sumand de la funció conté p^n, el que significa que podem treure factor comú. També sabem que el número de punts que fa B és igual a l'exponent d'$q = 1-p$. Repassem la fórmula anterior de la probabilitat de guanyar algú a un triopen:

$$p^3(1 + 3q + 6q^2) \tag{3.2}$$

Està clar que en aquest cas el número 3 és resultat del número combinatori $\binom{3}{1}$ i el número 6 és resultat del $\binom{4}{2}$.

Vista la fórmula pel cas d'aconseguir 3 punts, la fórmula en el cas general d'arribar a n punts serà:

$$p^n\left(1+\binom{n}{1}q+\binom{n+1}{2}q^2+\cdots+\binom{2n-2}{n-1}q^{n-1}\right)=p^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{i}q^i \tag{3.3}$$

3.2 Joc a 11 punts

En el cas d'una partida a 11 punts la fórmula és:

$$p^{11}\sum_{i=0}^{10}q^i\binom{10+i}{i}\ =p^{11}\left(1+\binom{11}{1}q+\binom{12}{2}q^2+\cdots+\binom{20}{10}q^{10}\right) \tag{3.4}$$

Substituint el valor $p=1/2+x$ i $q=1/2-x$ i amb el programa *wxMaxima*, obtenim el resultat següent de la probabilitat de guanyar una partida a 11 punts (es juguen un màxim de 21 punts), en el cas que la probabilitat de guanyar cada punt sigui $p=1/2+x$:

```
p:1/2+x $
q:1/2-x $
f11:p^11*(1+binomial(11,1)*q+binomial(12,2)*q^2+binomial(13,3)*q^3+
binomial(14,4)*q^4+binomial(15,5)*q^5+
binomial(16,6)*q^6+binomial(17,7)*q^7+binomial(18,8)*q^8+
binomial(19,9)*q^9+binomial(20,10)*q^10)$
expand(f11);
```

$$\begin{aligned} P(Guanyar) &= 184756\,x^{21}-510510\,x^{19}+\frac{2567565\,x^{17}}{4}-\frac{969969\,x^{15}}{2}+\\ &+\frac{7834365\,x^{13}}{32}-\frac{5555277\,x^{11}}{64}+\frac{11316305\,x^{9}}{512}-\\ &-\frac{2078505\,x^{7}}{512}+\frac{8729721\,x^{5}}{16384}-\frac{1616615\,x^{3}}{32768}+\frac{969969\,x}{262144}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Si el valor de x és petit, la part de la fórmula que ens interessa és la lineal o sigui $\frac{969969\,x}{262144}$ que és aproximadament $3.7001x$. També observem que les potències de x són totes imparells, més endavant justificarem que aquest fet passa per qualsevol n. En la gràfica de la funció podem veure que a partir del valor $x = 0.2$, és pràcticament segur que el jugador guanyarà el set a 11 punts.

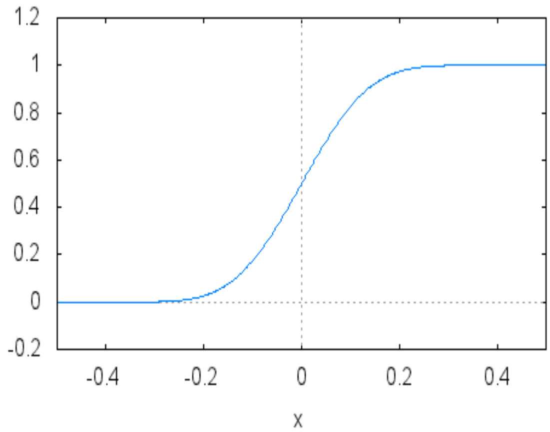


Figura 3.3: Probabilitat de guanyar un joc a 11 punts

3.3 Probabilitat de guanyar en funció del marcador

Si considerem un partit ja començat a n punts amb a punts guanyats per un jugador (J1) i b punts guanyats per un altre jugador (J2), ara anem a buscar una fórmula que ens permeti calcular les probabilitats de guanyar de cada jugador en funció d'a, b i n.

Començarem amb un cas particular. Imaginem que J1 guanya per 4 a 2 a J2 i el joc és a 11 punts. Com es pot veure, hi ha una diferència de 2 punts entre els dos jugadors, el que significa que aquesta situació és la mateixa (teòricament) que començar a jugar $2 = 4 - 2$ a $0 = 2 - 2$. Amb la diferència que ara el partit no serà a 11 punts, sinó a $9 = 11 - 2$ punts. Llavors, si volem calcular quina probabilitat té J1 de guanyar el partit, és trivial que el número de punts necessaris que haurà de guanyar J1 per emportar-se el partit seran $7 = 9 - 2$ i que el número màxim de punts que podrà guanyar J2 seran $8 = 9 - 1$. Un cop calculades aquestes variacions anem a veure de quantes maneres diferents pot J1 guanyar a J2:

a) Guanyar els 7 punts seguits amb probabilitat p^7. El resultat final seria 11-2

b) Guanyar 7 punts i perdre'n 1, amb probabilitat $\binom{7}{1}qp^7$. El resultat final seria 11-3

c) Guanyar 7 punts i perdre'n 2, amb probabilitat $\binom{8}{2}q^2p^7$. El resultat final seria 11-4

d) I així fins arribar a 11-10 [4]

Finalment la probabilitat de guanyar és la suma d'aquestes possibilitats:

$$p^7 + \left(1 + \binom{7}{1}q + \binom{8}{2}q^2 + \binom{9}{3}q^3 \cdots + \binom{14}{8}q^8\right) \tag{3.5}$$

Generalitzant aquest procediment a un marcador a-b en un joc a n punts, el número de punts necessaris per a que J1 guanyi és $n - a$, i el màxim de punts que pot fer J2 és $n - b - 1$. Llavors, la fórmula resultant és:

$$p^{n-a} \sum_{i=0}^{n-b-1} \binom{n-a-1+i}{i} q^i$$

3.4 Càlcul de la part lineal en el cas general

A continuació suposarem que fent una partida a qui primer aconsegueixi n punts (o sigui que el màxim de punts disputats és de $2n - 1$), la probabilitat que el jugador A guanyi cada punt és $p = 1/2 + x$ i per tant que el perdi serà $q = 1/2 - x$, justificarem que la probabilitat de guanyar el jugador A, $P(A)$ és $1/2$ més una funció que depèn de x, la part lineal de la qual es pot aproximar per $x\sqrt{4n/\pi}$.[5]

Segons la fórmula 3.3 sabem que:

$$\begin{aligned} P(A) &= p^n \sum_{i=0}^{n-1} q^i \binom{n+i-1}{i} = \\ &= p^n \left(1 + \binom{n}{1}q + \binom{n+1}{2}q^2 + \cdots + \binom{2n-2}{n-1}q^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Aquesta probabilitat també es pot obtenir d'una altra manera que surt de pensar que es juguen els $2n - 1$ punts de la partida. En efecte si un jugador arriba a obtenir n punts, encara que es juguin els punts que faltin

[4] No hem tingut en compte la diferència de 2 punts en arribar a 10-10

[5] (Haigh, 2003, p. 185). Aquest és un resultat que m'ha cridat l'atenció per l'aparició del número π.

per acabar els $2n-1$, el resultat global no canviarà. D'aquesta manera, si fem el desenvolupament del binomi $(p+q)^{2n-1}$, s'obtenen totes les possibilitats del resultats d'aquests $2n-1$ punts:

$$\begin{aligned}(p+q)^{2n-1} &= \binom{2n-1}{0}p^{2n-1} + \binom{2n-1}{1}p^{2n-2}q + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}p^n q^{n-1} + \\ &+ \binom{2n-1}{n}p^{n-1}q^n + \cdots + \binom{2n-1}{2n-1}q^{2n-1}\end{aligned}$$

Las probabilitat que el jugador A guanyi és la suma dels n primers sumands del desenvolupament:

$$\begin{aligned}P(A) &= \binom{2n-1}{0}p^{2n-1} + \binom{2n-1}{1}p^{2n-2}q + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}p^n q^{n-1} = \\ &= p^n\left(\binom{2n-1}{0}p^{n-1} + \binom{2n-1}{1}p^{n-2}q + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}q^{n-1}\right) = \\ &= p^n \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}q^k p^{n-k-1}\end{aligned}$$

Substituïm ara el valor $p = 1/2 + x$ i $q = 1/2 - x$:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}+x\right)^n \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\left(\frac{1}{2}-x\right)^k\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-k-1}$$

Per calcular la part lineal global, considerarem la part constant i lineal de cada desenvolupament:

$$\left(\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n-1}}x+\cdots\right)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\left(\frac{1}{2^{n-k-1}}+\frac{n-k-1}{2^{n-k-2}}x+\cdots\right)\left(\frac{1}{2^k}-\frac{k}{2^{k-1}}x+\cdots\right)$$

Fem les operacions indicades fins la part lineal que és la que ens interessa per aquest apartat:

$$\begin{aligned}P(A) &= \left(\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n-1}}x+\cdots\right)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+x\frac{n-k-1}{2^{n-2}}-\frac{k}{2^{n-2}}x+\cdots\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n-1}}x+\cdots\right)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+x\frac{n-2k-1}{2^{n-2}}+\cdots\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n-1}}x+\cdots\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}+x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\frac{n-2k-1}{2^{n-2}}+\cdots\right)\end{aligned}$$

Ara bé:

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{2n-1} = 2^{n-1}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \left(\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n-1}}x+\cdots\right)\left(2^{n-1}+\frac{x}{2^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}(n-2k-1)+\cdots\right) = \\
&= \frac{1}{2}+nx+\frac{x}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}(n-2k-1)+\cdots = \\
&= \frac{1}{2}+nx+\frac{x}{2^{2n-2}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)\binom{2n-1}{k}-2\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{2n-1}{k}\right)+\cdots = \\
&= \frac{1}{2}+nx+x\left(\frac{n-1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}-\frac{1}{2^{2n-3}}\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{2n-1}{k}+\cdots\right) = \\
&= \frac{1}{2}+nx+x\left((n-1)-\frac{1}{2^{2n-3}}\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{2n-1}{k}+\cdots\right) =
\end{aligned}$$

Ara bé:

$$k\binom{2n-1}{k} = k\frac{(2n-1)!}{k!(2n-1-k)!} = (2n-1)\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(2n-k-1)!} = (2n-1)\binom{2n-2}{k-1}$$

per tant:

$$\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{2n-1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}(2n-1)\binom{2n-2}{k-1} = (2n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-2}{k-1} = (2n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2n-2}{k}$$

Ara mirarem de sumar l'expressió $E=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2n-2}{k}$
Saben que:

$$2^{2n-2} = \binom{2n-2}{0}+\cdots+\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-2}{n-1}+\binom{2n-2}{n}+\cdots+\binom{2n-2}{2n-2}$$

per la simetria dels números combinatoris:

$$2^{2n-2} = 2E+\binom{2n-2}{n-1}$$

i per tant:

$$E = 2^{2n-3} - \frac{1}{2}\binom{2n-2}{n-1}$$

Substituïm ara el valor que hem calculat en la fórmula de $P(A)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2} + x\left((2n-1) - \frac{1}{2^{2n-3}}(2n-1)\left(2^{2n-3} - \frac{1}{2}\binom{2n-2}{n-1}\right)\right) + \cdots = \\ &= \frac{1}{2} + x\frac{2n-1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

Per confirmar que el càlcul és correcte ho he comprovat pel cas $n = 3$ i $n = 11$ que hem estudiat en l'apartat anterior, en efecte:

$$\frac{5}{2^4}\binom{4}{2} = \frac{15}{8} \qquad \text{i} \qquad \frac{21}{2^{20}}\binom{20}{10} = \frac{969969}{262144}$$

A més sabem que si anomenen $P(A) = 1/2 + f(x)$, llavors $f(x) + f(-x) = 0$, ja que $1/2 + f(-x)$ representa la probabilitat que guanyi el jugador B, com $P(A) + P(B) = 1$, en resulta $1/2 + f(x) + 1/2 + f(-x) = 1$ i per tant $f(-x) = -f(x)$, la qual cosa indica que la funció f és imparell i com que és polinòmica, només hi haurà exponents de x imparells, en particular l'exponent de x^2 és 0.[6]

Ara veurem que aquest terme lineal que és el més significatiu per valors petits de x, es pot aproximar per $\sqrt{4n/\pi}$, ho faré amb la fórmula de Stirling[7]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \quad \text{o també} \quad n! \approx \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{3.6}$$

Com hem vist, el coeficient de la part lineal és $k = \frac{2n-1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}$, aplicant la fórmula 3.6

$$k \approx \frac{2n-1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(2n-2)}\left(\frac{2n-2}{e}\right)^{2n-2}}{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \cdot \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}$$

---

[6] Aquesta afirmació la fa el mateix text (Haigh, 2003) p. 185 però no ho justifica. D'altra banda també ho hem comprovat amb Màxima per la fórmula amb 11, 2 i 3 punts.

[7] http://es.wikipedia.org/wiki/Fórmula_de_Stirling. (consultat 3/XI/2104)

Simplificant resulta:

$$\begin{aligned} k &\approx \frac{(2n-1)\sqrt{2\pi(2n-2)}}{2\pi(n-1)} = \sqrt{\frac{(2n-1)^2 2\pi(2n-2)}{4\pi^2(n-1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(2n-1)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\left(4n+\frac{1}{n-1}\right)} \approx \sqrt{\frac{4n}{\pi}} \end{aligned}$$

la qual cosa vol dir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{\frac{4n}{\pi}}} = 1$$

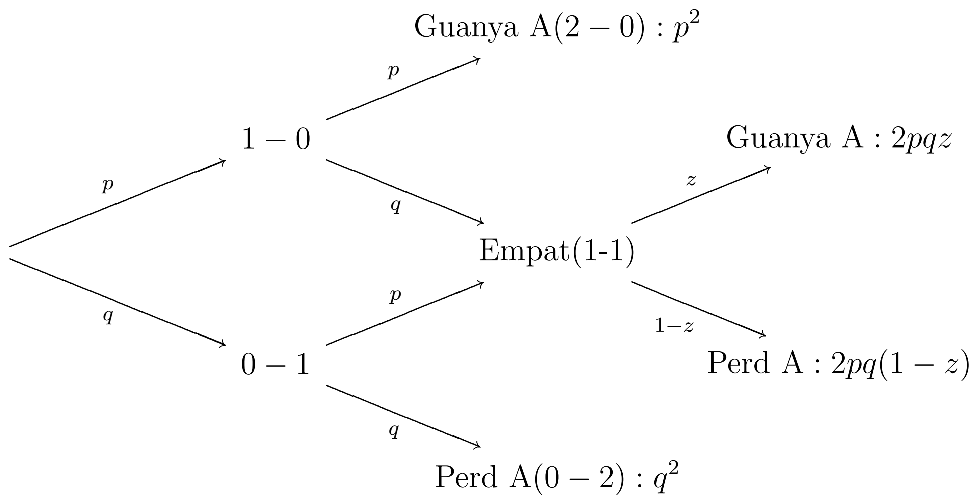
3.5 Partit amb dos punts de diferència

Un altre problema interessant relacionat amb el Tennis Taula — i també amb tots els jocs amb puntuacions— són les situacions de desempat:

> Si A té una probabilitat $p = 1/2+x$ de guanyar cada punt respecte B, quina probabilitat té de guanyar una partida a diferència de dos?

Aquest problema té una solució molt bonica. La gràcia es troba en què es una situació la qual podria arribar a ser infinita. M'explico, si A i B guanyessin la mateixa quantitat de punts amb el mateix ordre el partit no acabaria. Em refereixo al cas de quedar empatats 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3... Primer resoldré el problema mitjançant un diagrama d'arbre.

El diagrama constarà només de dos punts, és a dir, veurem quins són els possibles resultats i a partir d'allà la solució serà més fàcil. Abans de començar hem de tenir clar que quan ens trobem en empat direm que tenim una probabilitat z de guanyar la partida i una probabilitat $1 - z$ de perdre. A la probabilitat de guanyar un punt li direm $p = 1/2 + x$ i a la probabilitat de perdre'l $q = 1/2 - x$). L'objectiu serà combinar una funció que introdueixi les dos variables de tal manera que puguem aïllar la z, aquest és el diagrama:



Podem observar que per tal que guanyi el jugador A tenim dues possibilitats:p^2 i també $2pqz$:

$$z = p^2 + 2pqz \;\Rightarrow\; z = \frac{p^2}{1-2pq} = \frac{p^2}{p^2+q^2}$$

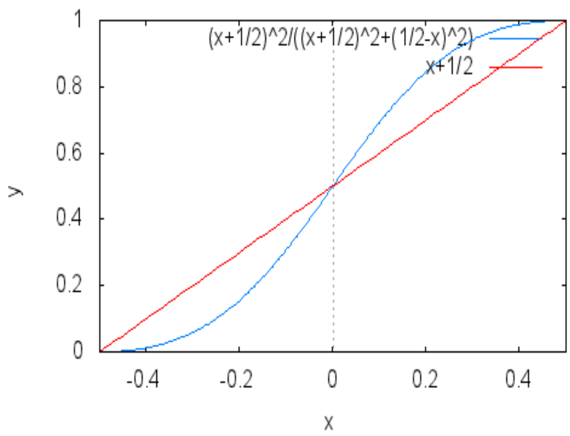


Figura 3.4: Probabilitat de guanyar amb diferència de 2 punts

Substituint els valors de $p = 1/2 + x$ i $q = 1 - p$, i fent el desenvolupament de Taylor amb *Maxima* resulta:

$$P(A) = \frac{1}{2} + 2\,x - 8\,x^3 + 32\,x^5 - 128\,x^7 + ...$$

```
p:x+1/2;
q:1-p;
d2:p^2/(p^2+q^2);
taylor(d2,x,0,7);
wxplot2d([d2,p], [x,-0.5,0.5],[y,0,1])$
```

3.5.1 Una altra manera d'arribar al resultat

Ara veuré una manera diferent d'arribar al càlcul de la probabilitat de guanyar el jugador A que com hem vist és $\frac{p^2}{p^2+q^2}$. En efecte, considerarem totes les possibilitats de guanyar i farem la suma de totes aquestes. D'aquesta manera, el jugador pot guanyar 2-0 amb probabilitat p^2; 3-1 amb probabilitat $2pqp^2$ (ja que primer cal arribar a 1-1 amb probabilitat $2pq$ i després fer 2 punts seguits amb probabilitat p^2), també pot guanyar 4-2, primer cal arribar al 2 -2 amb probabilitat $(2pq)^2$ i després fer dos punts per tant la probabilitat de guanyar 4-2 és $(2pq)^2p^2$ i així fins l'infinit:

$$P(A) = p^2 + (2pq)p^2 + (2pq)^2p^2 + (2pq)^3p^2 + \cdots = p^2\sum_{n=0}^{\infty}(2pq)^n = \frac{p^2}{1-2pq}$$

on em aplicat la fórmula de la suma d'una progressió geomètrica indefinida: $\sum_0^\infty r^n = \frac{1}{1-r}$ quan $|r| < 1$. (Observem que si $0 \leq p \leq 1$, llavors $0 \leq 2pq \leq 1/2$)

3.6 Partits amb diferència de 3, 4, n punts

En aquest apartat, generalitzarem la situació anterior d'una diferència de dos punts a una diferència de 3, 4 o n punts. Començarem pel cas de diferència de 3 i després analitzarem el cas general n. Suposem, doncs, com l'apartat anterior que un jugador té una probabilitat p de guanyar cada punt i per tant, la probabilitat de perdre serà $q = 1-p$, també considerarem que $p = 1/2+x$ i $q = 1/2 - x$.

Pel cas de diferència de 3, durant el partit es poden donar les situacions següents:

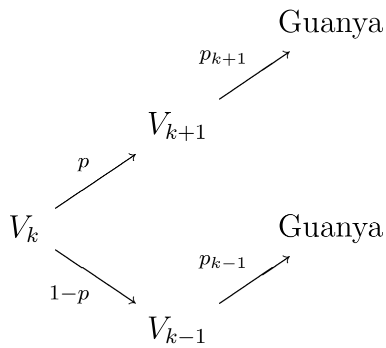
a) Guanyar per diferència de 2, que anomenarem V_2, sent p_2 la probabilitat de guanyar.

b) Guanyar per diferència de 1, que anomenarem V_1, sent p_1 la probabilitat de guanyar.

c) Empat que anomenarem V_0, sent p_0 la probabilitat de guanyar.

d) Perdre per diferència d'1 punt que anomenarem V_{-1}, sent p_{-1} la probabilitat de guanyar.

e) Perdre per diferència de 2 punts que anomenarem V_{-2}, sent p_{-2} la probabilitat de guanyar.



Per tant, obtenim:

$$p_k = pp_{k+1} + (1-p)p_{k-1} \tag{3.7}$$

on suposem $p_3 = 1$ i $p_{-3} = 0$, ja que quan la diferència de punts és 3, ja hem guanyat i quan perdrem de 3, ja hem perdut.

Per tal que els subíndexs no siguin negatius, prendrem $x_0 = p_{-3}$, $x_1 = p_{-2}$, $x_2 = p_{-1}$, $x_3 = p_0$, $x_4 = p_1$, $x_5 = p_2$ i $x_6 = p_3$, on $x_0 = 0$ i $x_6 = 1$

L'equació 3.7 es pot escriure ara:[8]

$$x_k = px_{k+1} + qx_{k-1}$$

Aïllant x_{k+1}, obtenim:

$$x_{k+1} = \frac{-q}{p}x_{k-1} + \frac{1}{p}x_k$$

i per tant:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{-q}{p}x_{k-1} + \frac{1}{p}x_k - x_k = \frac{-q}{p}x_{k-1} + \frac{q}{p}x_k = \frac{q}{p}(x_k - x_{k-1})$$

[8]Aquesta fórmula és recurrent, atès que per calcular el terme x_{k+1} n'hi ha prou en saber els termes x_k i x_{k-1}, coneguts p i q.

Aplicant la fórmula reiteradament obtenim:

$$x_{k+1}-x_k = \frac{q}{p}(x_k-x_{k-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^2(x_{k-1}-x_{k-2}) = \cdots = \left(\frac{q}{p}\right)^k(x_1-x_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^k x_1$$

A partir de la igualtat:

$$1 = x_6-x_0 = (x_6-x_5)+(x_5-x_4)+(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)+(x_1-x_0)$$

substituint $q/p = t$ obtenim:

$$1 = x_1(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5) = x_1\frac{t^6-1}{t-1} \Rightarrow x_1 = \frac{t-1}{t^6-1}$$

i per tant la probabilitat de guanyar p_0 que volíem calcular és:

$$p_0 = x_3 = (x_3-x_2)+(x_2-x_1)+(x_1-x_0) = (t^2+t+1)x_1 = \frac{t^3-1}{t-1}\cdot\frac{t-1}{t^6-1} = \frac{t^3-1}{t^6-1}$$

També es pot deduir la fórmula de la probabilitat de $p_{k-n} = x_k$ que és:

$$x_k = (t^{k-1}+t^{k-2}+\cdots+t+1)x_1 = \frac{t^k-1}{t-1}x_1 = \frac{t^k-1}{t-1}\cdot\frac{t-1}{t^{2n}-1} = \frac{t^k-1}{t^{2n}-1}$$

Simplificant, obtenim:

$$p_0 = \frac{1}{t^3+1} = \frac{p^3}{p^3+q^3}$$

Aquest resultat és fàcilment generalitzable al cas general de diferència de n punts, on la probabilitat de guanyar és $\dfrac{p^n}{p^n+q^n}$

Substituint $p = 1/2+x$ i fent el desenvolupament de Taylor pel cas $n = 4$ obtenim[9]:

$$p_0 = \frac{p^4}{p^4+q^4} = \frac{1}{2} + 4\,x - 80\,x^3 + 1856\,x^5 - 43264\,x^7 + \cdots \tag{3.8}$$

[9] Aquest desenvolupament l'hem fet amb *Maxima*

3.7 El cas real de partit a 11 amb diferència de 2 punts

En aquesta secció calcularé la probabilitat que tenim nosaltres, els jugadors de Tennis Taula, de guanyar un set. És diferent a la probabilitat de guanyar un partit a 11 punts perquè, un cop s'ha arribat al 10 a 10 es comença una partida a diferència de 2. Per tant, relacionaré la probabilitat de guanyar un partit a 11 punts amb el cas d'un partit a diferència de 2, sempre i quan s'arribi al 10 a 10.

Un jugador té les següents maneres de guanyar: 11-0, 11-1, 11-2, ..., 11-9, 12-10, 13-11 Com podem veure hem d'ignorar la última possibilitat de guanyar per 11-10 i substituir-la per 10-10 i diferència de 2. Llavors, la fórmula romandrà intacta fins al resultat 11-9. Després, en lloc de buscar les diferents maneres d'arribar a 11-10, buscarem les maneres d'arribar a 10-10 i les multiplicarem per la probabilitat de guanyar una partida a diferència de 2, fórmula que ja hem trobat anteriorment:

$$\frac{p^2}{p^2+q^2} \tag{3.9}$$

Les diferents maneres d'arribar a 10 a 10 són $\binom{20}{10}$ i els punts que ha de fer cada jugador són, evidentment, 10. Un cop arribats al 10 a 10 comença el partit a diferència de 2, el que significa que s'ha de multiplicar per la fórmula 3.9. L'últim sumand serà: $\binom{20}{10}q^{10}p^{10}\frac{p^2}{p^2+q^2}$

Per altra banda, els demés sumands són els mateixos i la fórmula equival llavors a:

$$P(G) = p^{11} + \binom{11}{1}p^{11}q + \binom{12}{2}p^{11}q^2 + \cdots + \binom{19}{9}p^{11}q^9 + \binom{20}{10}q^{10}p^{10}\frac{p^2}{p^2+q^2}$$

Prenent $p = 1/2 + x$ i fent el desenvolupament de Taylor amb *Maxima* de P(G) obtenim:

```
n:11;
p:1/2+x$
q:1-p$
f:p^n*sum(binomial(n-1+i,i)*q^i,i,0,n-1)$
f1:binomial(2*n-2,n-1)*p^(n-1)*q^(n-1)*p^2/(p^2+q^2)+
p^n*sum(binomial(n-1+i,i)*q^i,i,0,n-2)$
expand(f);
expand(f1)$
taylor(f,x,0,7);
```

```
float(%);
taylor(f1,x,0,7);
float(%);
f3:p^4/(p^4+q^4)$
taylor(f3,x,0,7);
float(%);
wxplot2d([f,f1,f3], [x,-0.5,0.5],[y,0,1])$
```

$$P(G) = \frac{1}{2} + \frac{508079\,x}{131072} - \frac{1893749\,x^3}{32768} + \frac{46189\,x^5}{64} - \frac{1708993\,x^7}{256} + ...$$

$$P(G) = 0.5 + 3.9\,x - 57.79\,x^3 + \cdots$$

La qual cosa indica que un joc a 11 amb diferència de 2 punts en el empat, és gairebé equivalent a un joc on es comença empatat i guanya el primer que té una diferència de quatre, com es pot veure comparant aquesta fórmula amb la de l'equació 3.8. Aquesta conclusió la faig perquè la part lineal del desenvolupament del Taylor és gairebé la mateixa, i per tant, en el cas de jugadors amb nivell semblant, les diferència de nivell que tenen es multiplica pel mateix factor.

Capítol 4

Probabilitat i jocs d'atzar

En aquest capítol, calcularé les probabilitats de cada esdeveniment elemental dels jocs d'atzar del casino i mostraré de quina forma la banca augmenta en petites quantitats la seva probabilitat respecte a la del jugador i, a la llarga, guanya més diners que els participants. Hi ha altres jocs com és el cas del Texas Hold'em Póker o on la banca no intervé i d'altres que, tot i l'avantatge de la banca, el jugador pot tenir la capacitat de comptar cartes i augmentar així la seva probabilitat. Doncs ara qui jugarà amb desavantatge serà la banca.[1] També estudiaré la probabilitat i esperança del guany de jocs molt populars com són les loteries nacionals.

4.1 Esperança matemàtica

El concepte d'esperança matemàtica aproxima al valor mitjà d'una característica numèrica associada a una experiment aleatori, aquesta característica numèrica podria ser el guany d'un jugador o de la banca en els jocs d'atzar i per tant és un concepte clau si volem esbrinar si els jocs són equitatius o bé si algú té avantatge i per tant a la llarga acabarà guanyant.

Primer introduiré el concepte de variable aleatòria i després la mitjana d'una variable aleatòria per fer com hem dit una mitjana. Fixant un experiment aleatori amb espai mostral Ω, qualsevol característica numèrica associada al resultat de l'experiment es pot considerar una funció

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

i s'anomena variable aleatòria. Per exemple, si considerem l'experiment aleatori del llançament de dos daus amb $\Omega = (1,1), (1,2)...(6,6)$, podem construir

[1] *Beat the dealer: A winning strategy for the game of twenty-one.* Thorp, Eduard O. New York, Vintage Books, 1996

una funció que assigni a cada resultat la suma de les puntuacions, és a dir: $(5,4) \to 9$. La representació de la funció seria la següent $X : \Omega \to \mathbf{R}$, amb

$$X(1,1) = 2,\ X(1,2) = 3,\ X(1,3) = 4, \ldots X(6,5) = 11,\ X(6,6) = 12$$

Si X és una variable aleatòria, podem descompondre l'espai mostral de la forma:

$$\Omega = [X = x_1] \cup [X = x_2] \cup \ldots \cup [X = x_n]$$

on x_i són els valors que pot prendre la variable aleatòria X i:

$$[X = x_i] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} \tag{4.1}$$

Per exemple:

$$[X = 4] = \{(2,2), (1,3), (3,1)\}$$

$P[X = 4] = \frac{3}{36}$
Si definim p_i com a la probabilitat $p_i = P[X = x_i]$, el valor $\bar{X}$ i mitjana de X es defineix com:

$$\bar{X} = \sum x_i \cdot p_i$$

i correspon com he dit a la idea de mitjana.

Desenvoluparé un exemple per així aclarir el concepte d'esperança matemàtica. En el joc de la moneda, si ens posem d'acord que quan surti cara guanyo 3 € i si surt creu en perdo 2, tirem la moneda 200 vegades i cau 115 cops cara i 85 creu, el meu guany és $3 \cdot 115 - 2 \cdot 85$. Si es juga un gran nombre de partides $2n$, haurà caigut aproximadament n cops cara i n cops creu llavors el guany serà $n \cdot 3 - n \cdot 2$ i el guany mitjà serà:

$$\frac{n}{2n}3 - \frac{n}{2n}2 = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

Vist així sembla natural nomenar-li guany mitjà. En realitat, el guany és una variable aleatòria de valors 3 i -2 amb probabilitats $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$

Recordar que $p_i = P(X = x_i)$ on x_i és el resultat al que hem apostat del experiment aleatori. Llavors direm que p_i és la probabilitat que tenim de que l'experiment aleatori X s'esdevingui el succés x_i.

Resulta que $\bar{X} = E(X) = \sum x_i \cdot p_i = \dfrac{1}{2} \cdot 3 + \dfrac{1}{2} \cdot (-2) = \dfrac{1}{2}$

4.1.1 Paradoxa de San Petersburg

La loteria de Sant Petersburg[2] és una paradoxa relacionada amb la teoria de la probabilitat. Es basa en un joc de casino que presenta una variable aleatòria amb un valor esperat infinit (és a dir, pagament esperat infinit), quelcom paradoxal per als participants.

La paradoxa la va presentar Daniel Bernoulli i fou publicada en 1738 en els comentaris de l'Acadèmia Imperial de Ciències de Sant Petersburg. No obstant això, el problema va ser inventat pel cosí de Daniel Nicolás Bernoulli que el va plantejar en una carta a Pierre Raymond de Montmort en 9 setembre 1713.

> Un casino ofereix un joc d'atzar per a un sol jugador, en el qual una moneda es va llançant fins que surti cara. El pot comença amb 2 € i es duplica cada vegada que apareix una creu. La primera vegada que apareix una cara, el joc acaba i el jugador guanya el que està en el pot. Així, el jugador guanya 2 € si apareix una cara en el primer llançament, 4 € si apareix una creu en el primer llançament i una cara en el segon, 8 € si surten dos creus en els dos primers llançaments i una cara en el tercer, 16 € si apareixen tres creus ens els tres primers llançaments i una cara en el quart, i així successivament. En resum, el jugador guanya 2^k € , on k és igual al nombre de llançaments. Quin seria un preu just per pagar al casino per entrar en el joc?

En efecte el valor esperat d'aquesta variable és:

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots = +\infty$$

Per tant en teoria, si ens fan pagar qualsevol quantitat de diners per participar, hauríem d'acceptar perquè el guany esperat és infinit, en canvi, si plantegem la situació a qualsevol persona, és difícil trobar-ne alguna que pagui més de 50 € per jugar-hi. El problema pràctic rau en que és molt inversemblant que algú pugui pagar quantitats de l'ordre de 2^k € amb k igual a 30 per exemple. Llavors si ens quedem amb $k = 30$ tirades, l'esperança és de 30 € , quantitat molt més factible de pagar.

4.1.2 Ruleta europea

A continuació analitzaré el guany esperat per un jugador en diversos tipus d'apostes. Primer de tot cal dir que hi ha dos tipus de ruletes als casinos, de

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

les quals n'estudiarem una, la ruleta europea. La diferència entre la ruleta europea i la ruleta americana és que a la ruleta europea només existeix un 0 mentre que a la ruleta americana té un nombre afegit, el 00. Es tracta d'un experiment aleatori amb 37 esdeveniments equiprobables ($\Omega = 0, 1, 2...36$) en la qual es poden fer diferents apostes però de tal manera que sempre tindràs una esperança guanyadora de $f(n) = \frac{-1}{37}n$ on n és la quantitat de diners apostats. Hi ha diferents tipus d'apostes:

a) Número simple. Apostar a un dels 37 nombres possibles. En aquest cas, si encertes al nombre guanyaràs $35n$ i si perds obtindràs $-n$. Apliquem la fórmula de la esperança matemàtica per a demostrar aquest $\frac{-1}{37}n$ del que he parlat anteriorment:

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1}{37} \cdot 35n + (-1)\frac{36}{37}n = \frac{-1}{37}n$$

b) Dos números. Apostar a dos dels 37 nombres possibles. En aquest cas es paga 17 a 1, és a dir, $17n$ i si perds obtindràs $-n$:

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{2}{37} \cdot 17n + (-1)\frac{35}{37}n = \frac{34}{37}n - \frac{35}{37}n = \frac{-1}{37}n$$

Com podem veure l'esperança guanyadora $\frac{-1}{37}n$ es manté. Hi ha més exemples per a 3,4,6 nombres, però es fa molt repetitiu i prefereixo passar a apostar columna, dotzena, apostar vermell o negre, a parell o a imparell, a *passe* o a *manque*...

c) Apostar a columna significa apostar a una tercera part dels nombres, sense tenir en compte, naturalment, el 0. Doncs apostar a columna significa apostar a 12 nombres i es paga 2 a 1. Fem el càlcul.

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{12}{37} \cdot 2n + (-1)\frac{25}{37}n = \frac{24}{37}n - \frac{25}{37}n = \frac{-1}{37}n$$

d) Apostar a una dotzena és quelcom semblant a la columna. S'aposta a 12 nombres però la única diferència es que varien els 12 nombres als que s'aposten. Ara s'aposta a la primera dotzena (del 1 al 12), a la segona (del 13 al 24) o a la tercera (del 25 al 36). Com que se segueix apostant a la mateixa quantitat de nombres que a la columna i el premi segueix essent 2 a 1, no hi ha necessitat de tornar a fer el càlcul.

e) Apostar a vermell o a negre significa apostar a la meitat dels nombres. No obstant el 0 no pertany ni al grup de nombres vermells ni al grup de nombres negres. Aquesta aposta es paga 1 a 1.

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{18}{37}n + (-1)\frac{19}{37}n = \frac{-1}{37}n$$

f) Apostar a parell o a imparell és igual que apostar a vermell o negre amb la diferència que varien els nombres. Doncs el 0 se segueix considerant un nombre a part, cosa que segueix donant aquesta petita avantatge a la banca. El càlcul és el mateix.

g) L'aposta a *manque* o a *passe* segueix la mateixa constant. A *manque* s'aposta per als nombres del 1 al 17 i a *passe* del 18 al 36. Torna a ser apreciable la independència del 0 en aquests casos.

Pe tant, la banca juga a donar diferents possibilitats, però amb constant esperança mitjana guanyadora (sempre negativa des del punt de vista del jugador) per tal de picar la curiositat del jugador i que aquest es llenci un altre cop a apostar, és a dir, incrementar les ganes de joc o 'ludopatia'. Ara veurem un exemple que tracta sobre quina és la millor estratègia per assolir una quantitat de diners exacta davant les diferents maneres de les que es poden apostar.

> En Pau necessita 216 € per a comprar un bitllet d'avió que el permeti assistir a la final de la copa de Europa de Tennis Taula. Només disposa de la meitat d'aquesta quantitat, 108 € , però està disposat a quedar-se completament sense res de diners. Per ell, 216 € és tot el que necessita mentre que 215 no li servirien. Quina és la forma més intel·ligent que Pau pot jugar?

El millor consell que pot seguir Pau és el següent:

> Davant un joc desfavorable des del punt de vista de la probabilitat: jugar audaç és bó, i amb timidesa dolent.[3]

Una aposta atrevida seria jugar's-ho tot al vermell o al negre on en Pau tindrà un 48,6% de guanyar (doncs, $\frac{18}{37} = 0,486$) i, si guanya, com que el pagament és 1 a 1, ja disposaria del 216 € .

Existeixen altres punts de vista audaços. Es podria dividir els seus diners en 18 parts iguals de 6 € y apostar successivament a un únic número ja que el pagament és 35 a 1 i tindria prou diners per a comprar el bitllet també ($6 \cdot 35 + 6 = 210 + 6 = 216$). En aquest cas, la probabilitat de que en Pau es quedi sense diners la calcularem de la següent forma: $(\frac{36}{37})^{18} = 0,61$. Això significa que té un 61% de quedar-se sense bitllet i, al seu torn, té un 39% d'aconseguir-lo, una probabilitat bastant inferior a l'aposta atrevida de jugar al vermell o al negre.

[3]Haigh, John, *Matemáticas i juegos de azar.* Editorial Tusquets, Barcelona 2003. p. 229.

També es podrien repartir les apostes de la següent manera. Sempre i quan en Pau tingui 76 € o més i aposti 4 € a una casella tindrà diners suficients per al bitllet ($4 \cdot 35 + 76 = 140 + 76 = 216$). No obstant, si durant aquestes 9 tirades no assoleix encertar el nombre, encara podrà apostar 5 € a un nombre fins arribar als 41 € ($5 \cdot 35 + 41 = 175 + 41 = 216$). Un total de 7 tirades apostant 5 € . Fins i tot, encara tindrà una últimes tirades abans de quedar-se a 1 apostant en aquest cas 6 € ($6 \cdot 35 + 6 = 210 + 6 = 216$). Aquestes últimes tirades en seran sis. Tot i haver perdut totes les tirades encara tindrà una última oportunitat apostant l'euro restant 5 a 1, guanyant així fins a 6 € i fent una vint-i-tresena aposta. La probabilitat total de que algun d'aquests esdeveniments s'esdevinguin és del 45,7%. Mitjançant una taula, explicaré aquesta última estratègia i veurem d'on surt aquest 45,7%.

Número aposta	Diners apostats	Diners perdent	Probabilitat d'encert	Diners guanyant	Probabilitat de pèrdua
1	4	104	2,70%	248	97,30%
2	4	100	5,33%	244	94,67%
3	4	96	7,89%	240	92,11%
4	4	92	10,38%	236	89,62%
5	4	88	12,80%	232	87,20%
6	4	84	15,16%	228	84,84%
7	4	80	17,45%	224	82,55%
8	4	76	19,68%	220	80,32%
9	4	72	21,85%	216	78,15%
10	5	67	23,97%	247	76,03%
11	5	62	26,02%	242	73,98%
12	5	57	28,02%	237	71,98%
13	5	52	29,97%	232	70,03%
14	5	47	31,86%	227	68,14%
15	5	42	33,70%	222	66,30%
16	5	37	35,49%	217	64,51%
17	6	31	37,24%	247	62,76%
18	6	25	38,93%	241	61,07%
19	6	19	40,58%	235	59,42%
20	6	13	42,19%	229	57,81%
21	6	7	43,75%	223	56,25%
22	6	1	45,27%	217	54,73%
23	1	0		6	
24	6	0	45,71%	216	54,29%

Com s'aprecia a la taula, la probabilitat d'encert augmenta segons el número de la tirada i, tenint en compte aquesta vint-i-tresena tirada, la probabilitat assoleix el 45,71%. De totes formes, aquesta estratègia no mostra una probabilitat més gran que la abans calculada jugant-s'ho tot al vermell o al negre, que és d'un 48,6%. En aquesta taula també es pot veure que segons quina fos la aposta que hipotèticament encertés, els diners d'en Pau serien més que 216.

En conclusió, un joc audaç implica fer poques apostes, les menys possibles. El motiu està en qué la banca sempre et treu una mica d'avantatge, i no hi ha forma de reduir aquest avantatge.

Quelcom similar passa amb el black-jack, encara que en aquest cas, hi ha una tècnica per augmentar l'esperança de guanyar respecte de la banca comptant les cartes amb una certa tècnica. Si el compte és alt, hi ha més probabilitat de que toquin figures, i has d'aprofitar aquest moment apostant més fort, que és quan et pot sortir un black-jack (parella d'as i 10,J,Q o K) i les apostes es paguen 3 a 2 (guanyes tants diners com els que t'has jugat més la meitat dels diners que t'has jugat). Aquí és on està l'avantatge que tens respecte a la banca que pots aprofitar[4].

4.2 Probabilitat en jocs de daus

Els daus han format part dels jocs d'entreteniment des d'èpoques molt antigues. Ja s'hi jugava a l'antic Egipte. Un arqueòleg descobrí un dau de vint cares (icosàedre) perfectament regular, que segurament s'utilitzava per a jugar o apostar. Durant la guerra de Troia, els soldats hi jugaven per a distreure's, també hi ha testimonis a l'imperi Romà, així, l'emperador Claudi guardava en el seu carruatge un taulell per a jugar-hi al llarg del viatge. No es consideraven jocs d'atzar sinó que es creia que estaven manipulats pels déus i, en alguns casos, els daus s'utilitzaven com a mitjà per a fer predicció del futur[5].

En un altre ordre de coses, des de fa 2500 anys se sap que només existeixen cinc figures sòlides completament simètriques, els anomenats sòlids platònics o políedres regulars:

a) El tetràedre, amb quatre cares triangulars.

b) El hexàedre (cub), amb sis cares quadrangulars.

[4] Thorp. Eduard O. *Beat the dealer: A winning strategy for the game of twenty-one.* New York. 1966

[5] (Haigh, 2003, p. 95)

c) El octàedre, amb vuit cares triangulars.

d) El dodecàedre, amb dotze cares pentagonals

e) El icosàedre, amb vint cares triangulars.

Amb aquests políedres es pot jugar a jocs d'atzar de forma que tots els seus esdeveniments són equiprobables. Hi ha una demostració de per què són els únics políedres regulars, però no ens afecta en aquesta qüestió.

Hi ha molts jocs que es relacionin amb els daus com a estri d'atzar (parxís, oca...), però en la majoria d'aquests no hi ha una estratègia on es pugui marcar la diferència sobre el contrincant. De la modesta minoria de jocs on això passa, el més conegut és el Monopoly, però trobo més interessant d'estudiar o almenys referir el Blackgammon. Aquest joc, a diferència del Monopoly, comporta una variable d'apostes que també en parlaré.

4.2.1 Backgammon

El Blackgammon és un joc que relaciona les apostes amb la sort i l'estratègia (ara més endavant n'explicaré les regles). Es creu que ja s'hi jugava una variant similar fa 5000 anys, però van ser transformats l'any 1925. Precisament, el canvi més important que es va produir al joc a principis del S.XX va ser la introducció d'un dau de doblatge. Es tracta d'un dau que té escrites a les cares els nombres 2,4,8,16,32 i 64. Explicaré la seva funció extrapolant un exemple.

Imaginem que estem jugant una partida d'escacs en la que cadascú ha apostat 5 € , si disposéssim d'aquest dau, en el meu torn podria plantejar al meu contrincant doblar l'aposta, és a dir, jugar-nos 10 € cadascú. El nostre contrincant tindria la possibilitat de refusar l'oferta, perdent així la partida i els 5 € inicialment apostats o jugar ara amb 10. Podem fer un càlcul mitjançant l'esperança matemàtica que ens ajudi a prendre la decisió correcta segons la probabilitat que tenim de guanyar el joc. Suposem que tenim una probabilitat x de guanyar el joc i, és clar, una probabilitat $1-x$ de perdre el joc. Si acceptem, guanyarem 10 € amb probabilitat x o bé perdrem 10 € amb probabilitat $1-x$, per tant, la quantitat mitja guanyada és:

$$E(X) = \sum p_i x_i = x \cdot 10 + (-10) \cdot (1-x) = 10x - 10 + 10x = 20x - 10$$

Llavors, $20x-10$ és la esperança que tenim de guanyar, però, per a saber triar la decisió correcta aquesta expressió s'ha d'igualar als diners que perdríem si refuséssim l'oferta:

$$\begin{aligned} 20x - 10 &= -5 \\ 20x &= 5 \\ x &= \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Si estimem la probabilitat de guanyar, ja sigui per instint o matemàticament, que és menys d'un quart, ha de renunciar, si es més gran, ha d'acceptar.[6] De totes formes, encara que hagi utilitzat l'exemple d'una partida d'escacs amb apostes no és així. És a dir, de natural, al Backgammon no hi ha apostes, sinó que hi ha punts. Un jugador pot guanyar al seu contrincant i pot puntuar 1,2 o 3 punts segons hagi jugat bé o la sort que hagi tingut. Ara, amb l'explicació de les regles ho concretaré.

Regles Backgammon

El taulell de Backgammon consta de quatre parts cadascuna formada per 6 caselles amb forma de pic anomenades punts. El taulell té un total de 24 punts. El taulell conté una franja que divideix horitzontalment dues parts. Per una banda la zona de l'esquerra se l'anomena zona exterior i la zona de la dreta, si és tracta de la franja superior, zona interior de les fitxes blanques i si és tracta de la franja inferior, zona interior de les fitxes negres. Es disposen un total de 30 fitxes al taulell (15 de blanques i 15 de negres) de la següent manera:

Figura 4.1: Taulell de Backgammon

6 (Haigh, 2003, p. 98)

Per a guanyar una partida de Backgammon, si jugues amb les fitxes blanques, has d'importar totes les teves fitxes a la zona interior blanca i, llavors, guardar-les a la casella.

4.3 Loteries

Una loteria és una forma de joc d'atzar que ofereix, a través del sorteig, un premi atractiu per tal de fer participar el màxim de públic a través de la venda de bitllets. Algunes loteries funcionen al marge de la llei (de forma alegal, sense regulació o infringint directament la legalitat), mentre que d'altres sorgeixen precisament de l'organització d'una loteria nacional per part del govern i de l'estructura pública. En aquest apartat, estudiarem les loteries nacionals. L'atractiu de la loteria és la quantitat de diners que pot guanyar el qui hi juga. No obstant, vist des d'un punt de vista racional, en lloc de fixar-se amb la quantitat de diners que pot guanyar, hauria de fer un estudi de la probabilitat o de l esperança matemàtica del guany[7].

Ara farem un estudi de la esperança matemàtica guanyadora que té un jugador que compra un dècim de loteria de Nadal comparant el preu del dècim amb la quantitat de diners que pot guanyar i la probabilitat d'encert.

4.3.1 Sorteig extraordinari de Nadal

El Sorteig Extraordinari de Nadal, també conegut com sorteig o loteria de Nadal, és un dels sorteigs de loteria més populars que se celebra a Espanya cada 22 de desembre, i que té lloc, generalment, al saló de sorteigs de Loteries i Apostes de l'Estat, a Madrid. Forma part dels sorteigs de la Loteria Nacional. El premi màxim rep el nom de la Grossa, que des de 2011 té un valor de 4 milions d'€ al bitllet, 400 000 € al dècim. El període de venda d'aquest sorteig és el més llarg de l'any, ja que les administracions reben els números les primeres setmanes de juliol.

Els bitllets reben el nom de dècims perquè es juga la "desena"part de l'import del bitllet (un bitllet = 10 dècims). De cada nombre s'emeten sèries, és a dir, cada bitllet té el seu número de sèrie. Des dels anys 2005 a 2010, participaven 85.000 números: des del número 00000 al 84999. El 2009 i el 2010 s'han emès 195 sèries de cada número. Ja que el preu de cada dècim és de 20 € (200 € per bitllet), el preu d'un número complet és de 39.000 € , que és el preu de 1950 dècims. És a dir, una sèrie és un bitllet que està dividit en 10 dècims. Des de 2011, participen 100.000 números: des del número 00000 al 99999 amb les mateixes sèries i preus. Aquest petit càlcul sobre la

[7](Haigh, 2003, p. 32).

esperança el realitzarem suposant que comprem un dècim de loteria, que es el que sol comprar la majoria de la gent. Però haurem de tenir en compte que només hi ha 100.000 números dins la gran bola on es fa el sorteig. Ara només cal saber les dades de quants són els diners que se't reparteixen per dècim depenent del premi, i són els següents:

a) Primer premi (conegut com "el Gordo"). 400000 € el dècim.

b) Segon premi. 125.000 € el dècim.

c) Tercer premi. 50.000 € el dècim.

d) 2 quarts premis. 20.000 € el dècim.

e) 8 cinquens premis. 6.000 € el dècim.

f) 1794 premis de mil € (coneguts com la "pedrea"). 100 € el dècim.

g) 2 premis al número anterior i posterior del primer premi. 2000 € el dècim. A la taula, el simbolitzarem amb la lletra x.

h) 2 premis al número anterior i posterior del segon premi. 1250 € el dècim. A la taula, el simbolitzarem amb la lletra y.

i) 2 premis al número anterior i posterior del tercer premi. 960 € el dècim. A la taula, el simbolitzarem amb la lletra z.

j) 297 premis a la centena (tres primeres xifres) del primer, segon i tercer premi. 100 € el dècim. A la taula, el simbolitzarem amb la lletra x'.

k) 198 premis a la centena dels dos quarts premis. 100 € el dècim. A la taula, el simbolitzarem amb la lletra y'.

l) 9.999 reintegraments. 20 € el dècim. A la taula, el simbolitzarem amb la lletra z'.

Premi	Premis	Prob (p_i)	Guany (x_i)	$x_i \cdot p_i$
1er premi	1	0,001%	399.980	4,00
2on premi	1	0,001%	124.980	1,25
3er premi	1	0,001%	49.980	0,50
4t premi	2	0,002%	19.980	0,40
5è premi	8	0,008%	5.980	0,48
La "Pedrea"	1.794	1,794%	80	1,44
x	2	0,002%	1.980	0,04
y	2	0,002%	1.230	0,02
z	2	0,002%	940	0,02
x'	297	0,297%	80	0,24
y'	198	0,198%	80	0,16
z'	2.997	2,997%	80	2,40
Reintegaments	9.999	9,999%	0	0,00
No premi	84.696	84,696%	-20	-16,94
Total	100.000			
			Mitjana:	-6,00 €
Premis	15.304			-30,00%
			Retorn	70,0%
			Banca	30,0%

Si calculem probabilitats, podem veure que tenim un 84,696% de perdre els diners invertits en loteria, un $9,99\% \simeq 10\%$ de recuperar els diners invertits en loteria i només un 5,32% de guanyar diners. A la taula també hi surt expressada la esperança matemàtica guanyadora de la banca que és d'un 70% mentre que la nostra esperança és d'un -30%. Això ens mostra molt clarament que no és recomanable jugar a aquesta loteria nacional. Llavors, com és que la gent segueix comprant? Els espanyols s'impliquen en la loteria nadalenca per tradició, "més que pel simple ànim de lucre"[8], motiu que explica la popularitat d'aquest joc, que supera altres sorteigs com la Primitiva o la Bonoloto, tot i que aquests reparteixen premis "més alts"[9]. Altres jocs d'atzar com la ruleta tenen una esperança matemàtica de guanyar més alta, però són més populars segurament perquè estan més mal considerants des del punt de vista social.

[8]Miguel Córdoba Bueno, professor de Matemàtiques aplicades.

[9]http://www.elmundo.es/elmundo/2008/12/20/espana/1229796563.html, (consultat 30/VII/2014).

loteria els anys 2013-2014

No contents amb totes els desavantatges cap als participants, els premis de Loteria, fins ara exempts d'impostos, s'han vist i veuran reduït el seu import tal com va anunciar el ministre d'Hisenda, Cristobal Montoro, a finals del Setembre de 2012. L'aplicació d'un gravamen del 20% a favor de les arques de l'Estat repercutirà en uns guanys menors per als agraciats amb algun bitllet premiat. Així, si el primer premi consta de 400.000 € com aquest any, es rebaixarà a 320.000 € previ cobrament de 80.000 € per part del fisc. El mateix passarà amb la resta de guanyadors, que patiran una «retallada» del 20% del seu valor total si superen la quantitat de 2.500 € . D'aquesta manera, els premis menors (1.000 € a 100 € el dècim) quedaran lliures de càrregues.

No obstant això, el límit de 2.500 es rebaixarà de manera proporcional quan el bitllet de loteria o de l'aposta tingui un valor d'adquisició o joc menor a 1 € [10], doncs hi ha cases d'apostes o organitzacions que reparteixen el dècim de forma oficial en 10 tiquets de 2 € , per exemple. És el clàssic cas de quan els nens o els adolescents surten al carrer a vendre participacions.

Per tant, aquest any i els dos anteriors, gràcies a aquest percentatge que cobrarà Hisenda, l'esperança de guanyar es reduirà. Utilitzant l'anterior full *Excel* podem calcular el percentatge total d'Hisenda. Recordem, que del 30% que no eren pels premis els anys anteriors al 2013, Hisenda recaptava aproximadament un 22% d'aquest. Del 8% eren hi ha un 3.70% de comissió pel punt de venda i i la resta per les despeses d'administració. Aquí adjunto l'*Excel* en el que he tingut en compte el cobrament extra del Tresor Públic en els grans premis (a partir d'un major a 2.500 €)

[10] http://www.abc.es/loteria_de_navidad/20121127/abci_impuestos_loteria_201211261228.html, (consultat 30/VII/2014).

Premi	Premis	Prob (p_i)	Guany (x_i)	($x_i \cdot p_i$)
1er premi	1	0,001%	319.984	3,20
2on premi	1	0,001%	99.984	1,00
3er premi	1	0,001%	39.984	0,40
4t premi	2	0,002%	15.984	0,32
5è premi	8	0,008%	4.784	0,38
La "Pedrea"	1.794	1,794%	80	1,44
x	2	0,002%	1.980	0,04
y	2	0,002%	1.230	0,02
z	2	0,002%	940	0,02
x'	297	0,297%	80	0,24
y'	198	0,198%	80	0,16
z'	2.997	2,997%	80	2,40
Reintegraments	9.999	9,999%	0	0,00
No premi	84.696	84,696%	-20	-16,94
Total números	100.000	100%		
			Mitjana:	-7,33
Número premis	15.304			-36,63%
			% que torna	63,67%
			% d'Hisenda	28,63%

Loteries dels anys 2005 a 2010

Les loteries durant aquests anys eren de 85000 números i, en conseqüència també van variaven els seus premis, però es van quedar de la mateixa manera amb un -30% d'esperança guanyadora dels participants. Després d'haver estat observant la pàgina oficial i d'altres, no he aconseguit trobar cap mostra oficial dels premis excepte en el revers d'un dècim. Un es pot demanar el perquè d'aquesta certa opacitat.

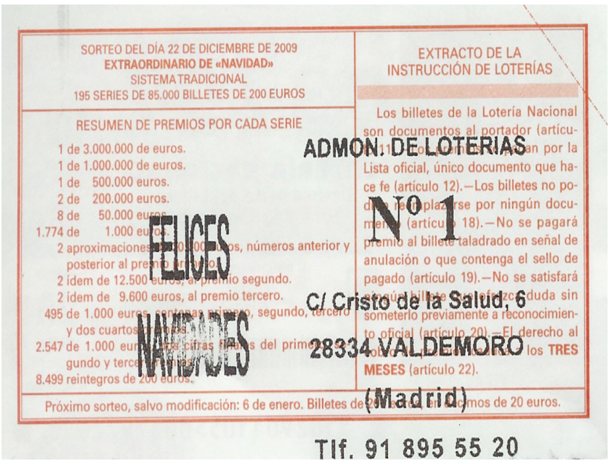


Figura 4.2: Revers d'un dècim de loteria

Al disposar de tota la informació sobre la distribució dels premis, l'he traslladat a l'*Excel* i he arribat a aquest full de càlcul:

Premi	Premis	Prob (p_i)	Guany (x_i)	($x_i \cdot p_i$)
1er premi	1	0,001%	299.980	3,53
2on premi	1	0,001%	99.980	1,18
3er premi	1	0,001%	49.980	0,59
4t premi	2	0,002%	19.980	0,47
5è premi	8	0,009%	4.980	0,47
La "pedrea"	1.774	2,087%	80	1,67
x	2	0,002%	1.980	0,05
y	2	0,002%	1.230	0,03
z	2	0,002%	940	0,02
x'	495	0,582%	80	0,47
z'	2.547	2,996%	80	2,40
Reintegraments	8.499	9,999%	0	0,00
No premi	71.666	84,313%	-20	-16,86
Total números	85.000	100%		
			Mitjana:	-6,00
Número premis	13.334			-30,00%
			Retorn Premis	70,0%

Estudiaré ara un altre sorteig extraordinari de loteria i bastant similar al anterior en quant a organització. El sorteig extraordinari del Nen.

4.3.2 Sorteig extraordinari del Nen

El Sorteig Extraordinari del Nen, també conegut com Sorteig o Loteria del Nen, és un dels sorteigs de loteria més populars que se celebra a Espanya. Es du a terme cada 6 de gener, coincidint amb la festivitat dels Reis Mags, i té lloc, generalment, al saló de sorteigs de Loteries i Apostes de l'Estat, a Madrid. El primer premi rep el nom del Gros (encara que de forma menys popular que en el Sorteig de Nadal) i té un valor de 2 milions d'€ al bitllet (200.000 € per dècim). El període de venda d'aquest sorteig s'estén des de començaments de novembre fins al dia previ al sorteig. És tradició canviar els dècims premiats amb el reintegrament de la Loteria de Nadal per nous dècims per "el Nen".

Les seves característiques principals són força semblants a les de el sorteig extraordinari de Nadal amb la diferència que no és tan popular i per tant el número de dècims venuts és inferior. L'emissió és de 50 sèries de 100.000 bitllets cadascuna (del 00000 al 99999), al preu de 200 € el bitllet, dividit en dècims de 20 € . O dit d'una altra manera, cada número (00000, 00001, 00002, ..., 99.998, 99.999) obté 50 sèries, formada cadascuna d'un bitllet (10 dècims).

El total de l'emissió ascendeix a 1.000 milions d'€ , dels quals es destina a premis el 70% de l'emissió (700 milions d'€), amb un atractiu conjunt de premis, ja que reparteix un total de 37.812 premis. El 30% restant es destina al pagament de comissions als punts de venda (3,70%), a despeses d'administració i al Tresor Públic (aproximadament el 22%).

A continuació mostraré els diferents premis:

a) Primer premi. 200000 € el dècim.

b) Segon premi. 100000 € el dècim.

c) Dotze tercers premis. 1400 € el dècim.

d) 1400 premis les 3 últimes xifres coincideixin amb qualsevol de les 12 extraccions especials de 3 xifres. 100 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra x.

e) 5000 premis les 2 últimes xifres coincideixin amb qualsevol les de les 6 extraccions de 2 xifres. 40 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra y.

f) 2 premis als números anterior i posterior del primer premi. 1260 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra z.

g) 2 premis als números anterior i posterior del segon premi. 600 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra x'.

h) 99 premis als 99 números restants de la centena del primer premi. 100 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra y'.

i) 99 premis als 99 números restants de la centena del segon premi. 100 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra z'.

j) 99 premis als números que les seves últimes tres xifres coincideixin amb les del primer premi. 100 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra X.

k) 99 premis als números que les seves últimes tres xifres coincideixin amb les del primer premi. 100 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra Y.

l) 999 premis als números que les seves últimes dos xifres coincideixin amb les del primer premi. 100 € el dècim. El simbolitzarem amb la lletra Z.

m) 2999 reintegres. 20 € el dècim.

Premi	Premis	Prob (p_i)	Guany (x_i)	($x_i \cdot p_i$)
1er premi	1	0,001%	199.980	2,00
2on premi	1	0,001%	99.980	1,00
3er premi	12	0,012%	1.380	0,17
x	1.400	1,400%	80	1,12
y	5.000	5,000%	20	1,00
z	2	0,002%	1.240	0,02
x'	2	0,002%	580	0,01
y'	99	0,099%	80	0,08
z'	99	0,099%	80	0,08
X	99	0,099%	80	0,08
Y	99	0,099%	80	0,08
Z	999	0,999%	80	0,80
Reintegraments	29.999	29,999%	0	0,00
No premi	62.188	62,188%	-20	-12,44
Total números	100.000	100,000%		
			Mitjana:	-6,00
Número premis	37.812			-30,00%
			Retorn Premis	70,0%

Observem que l'administració varia el número de premis atorgats i la quantitat de cada premi, però la esperança matemàtica és manté ja que segueix tornant només un 70% dels premis. He seguit amb la meva recerca i he trobat d'altres loteries nacionals (però no tradicionals, com ho serien les anteriors estudiades) en les que l'esperança matemàtica pot variar gràcies a l'existència d'un BOTE molt gran, per a bé del participant aquest cop. És el cas de la Primitiva o de la Bonoloto.

4.3.3 Loteria Primitiva

La Loteria Primitiva és un joc d'atzar regulat per l'empresa Loteries i Apostes de l'Estat (LAE) que consisteix a triar 6 números diferents entre 1 i 49, amb l'objectiu d'encertar la combinació guanyadora en el sorteig corresponent, formada per 6 boles de les 49 que s'extreuen del bombo (modalitat comunament coneguda com la 6/49). També, s'extreu una bola extra com nombre complementari, i una altra bola d'un bombo a part, entre el 0 i el 9, que fa de nombre de «reintegrament».

Cal destacar que, des del passat 8/XI/2012, per guanyar el major premi (BOTE) cal encertar els 6 números més el reintegrament, de manera que les possibilitats de guanyar s'han reduït a $\frac{1}{139.838.160}$. D'aquí l'existència d'acumulació de BOTE ja que ara és 10 vegades més difícil que surti un guanyador.

Es denomina participació a la realització d'una aposta basada en 6 números d'entre els 49 possibles, als quals s'afegeix un setè número de reintegrament del 0 al 9 triat aleatòriament pel terminal electrònic al validar l'aposta. El preu de la participació és fix per a un sorteig determinat i ha anat evolucionant al llarg del temps, que des del gener de 2010 és d'un € . Es poden realitzar apostes més complexes, com a més de 6 números per exemple, que sempre es redueixen a un conjunt de participacions que es consideren independents de cara al sorteig. A l'hora d'apostar es poden escollir dos tipus de bitllet: el verd, per participar en un únic sorteig, el de dijous o el de dissabte, i el marró, que permet participar amb la mateixa aposta (i preu doble) en els dos sorteigs de la setmana.

En el sorteig s'extreuen els 6 números que formaran la combinació guanyadora, i addicionalment s'extreu un setè número denominat complementari. Després, d'un bombo a part s'extreu una altra bola corresponent al reintegrament. Existeix un escalat de premis depenent del nombre d'encerts pel que fa a les boles principals i la complementària que coincideixin amb els 6 números de cada participació, i / o la de reintegrament. Els premis que es reparteixen corresponen al 55% de la recaptació del sorteig, més possibles pots acumulats de setmanes anteriors, quan alguna categoria queda deserta per falta d'encertants. Existeixen diverses categories d'encerts depenent dels números que s'encerten:

a) Categoria Especial: Encertar els sis números de la combinació guanyadora i el reintegrament (des del passat 8/XI/2012).

b) Primera Categoria: Encertar els sis números de la combinació guanyadora.

c) Segona Categoria: Encertar cinc números de la combinació i el número complementari.

d) Tercera Categoria: Encertar cinc números de la combinació.

e) Quarta Categoria: Encertar quatre números de la combinació.

f) Cinquena Categoria: Encertar tres números de la combinació.

g) Reintegrament: Encertar el número del reintegrament. Aquest premi no representa ni guany ni pèrdua.

El preu de cada aposta és d'1 € . Com hem dit, es destina a premis el 55% de la recaptació. Un 10% s'assigna al fons de premis per reintegrament. El 45% restant es destina a les 5 categories de premis i es dedueix l'import que resulti de multiplicar el nombre d'apostes encertades de la cinquena categoria pel seu premi fix de 8 € , i la resta es distribueix de la manera següent: a la primera categoria li pertoca un 52%, a la segona un 8%, a la tercera un 16% i a la quarta un 24%.

Si no hi hagués encertants de primera categoria, els diners recaptats incrementaran l'import de la 1a categoria del concurs o concursos que designi la LAE. Aquests pots seran anunciats al BOE o en els mitjans de comunicació per a general coneixement, indicant el seu import, el nombre i la data del concurs o concursos als quals s'agregui.

He mirat els últims sorteigs que s'han celebrat de la Primitiva el passat dijous 4 de setembre i el passat dissabte 6 de setembre per a comprovar així la nostra estimació, calcular la diferència i valorar si ha sigut un bon mètode el càlcul de l'estimació. En aquest cas ens ha donat els resultats següents del passat dijous 4:

a) Categoria especial. 0 encerts.

b) Primera categoria. 0 encerts.

c) Segona categoria. 2 encerts 131.424,08 € .

d) Tercera categoria. 241 encerts. 1.730,96 € .

e) Quarta categoria. 12511 encerts. 63,28 € .

f) Cinquena categoria. 227816 encerts. 8 € .

g) Sisena categoria o Reintegre. 1377113 encerts. 1 € .

Aquests resultats són els del passat dissabte 6:

a) Categoria especial. 1 encert. Premi: 16.102.766 € (Això simbolitzaria el Bote.)

b) Primera categoria. 3 encerts. 541.479,14 € .

c) Segona categoria. 4 encerts 60.916,40 € .

d) Tercera categoria. 305 encerts. 1.730,96 € .

e) Quarta categoria. 13477 encerts. 63,28 € .

f) Cinquena categoria. 236013 encerts. 8 € .

g) Sisena categoria o Reintegre. 1325401 encerts. 1 € [11]

Hi ha una altra variable que també hem de tenir en compte, el número de participants a cada sorteig. Sabem que al nostre sorteig hi participen un total aproximat de 10.000.000 de participants. La deducció del número de participants la fem a partir de la recaptació, en el cas del dissabte dia 6, és d'uns 13.220.439 € que, al seu torn, significa que hi van participar 13.220.439 apostes. El BOTE, d'altra banda, és d'uns 17.500.000 € .[12]. Ara, l'únic que hem de fer per a saber si ens hem desviat molt o no de la part experimental és comprovar el número d'encerts d'aquest dia 6 comparat amb el número d'encerts que ens dóna al full de càlcul, sempre i quan, substituint els primers 10 milions de participants que havíem suposat primerament, pels 13.220.439 participants d'aquest sorteig. Comparem els resultats del número d'encertants:

[11] http://especiales.elperiodico.com/sorteos/primitiva.asp. (consultada 6/IX/2014).
[12] http://primitiva.combinacionganadora.com/ (consultada 6/IX/2014).

Premis	Possibilitats	Probabilitat (p_i)	$p_i \cdot 13.220.439$
	Total combinacions:	13.983.816	
	Número apostes	13.220.439	
Premis	Possibilitats	Probabilitat (p_i)	$p_i \cdot 13.220.439$
Premi espec	0,1	7,15112E-09	0
6	1	6,43601E-08	1
5+c	6	4,29067E-07	6
5	252	0,000018	238
4	13.545	0,000969	12806
3	246.820	0,017650	233346
2	1.851.150	0,132378	1750096
1	5.775.588	0,413019	5460298
0	6.096.454	0,435965	5763648
Total	13.983.816	1,000000	

Premi	Dissabte 6	Full de càlcul
Categoria especial	1	0
Primera categoria	3	1
Segona categoria	4	6
Tercera categoria	305	238
Quarta categoria	13477	12806
Cinquena categoria	236013	233346
Reintegre	1325401	1322044

Observem que és una bona aproximació, sabem que, segons la Llei dels Grans Nombres i com podem apreciar amb aquest exemple, la probabilitat tendeix a la freqüència relativa de l'esdeveniment sempre i quan el número d'experiments tendeixi a infinit. Amb això, em refereixo que l'error que he pogut fer amb el càlcul és petit, ja que el nombre d'apostes és molt gran (més de 13 milions).

Respecte l'esperança matemàtica del guanya la loteria primitiva, el resultat és $-0,45$ € per cada aposta d'1 € , atès que només el 55% dels diners van destinats a premis.

Capítol 5

Creació d'una app per mòbil

En aquest capítol explicaré de què tracta l'aplicació que he dissenyat per a telèfons mòbil *Android*, quina és la seva finalitat i quins recursos he utilitzat.

Un cop vaig acabar el darrer capítol, vaig tenir la idea de crear una aplicació que permetés als usuaris tenir una aproximació de les seves probabilitats de guanyar un partit en funció de la probabilitat de guanyar un punt. Volia que l'aplicació fos específica per a Tennis Taula i per això la vaig anomenar *TTProbabilitats*[1].

El programa demana la introducció de diverses dades inicials(probabilitat de guanyar un punt, número de punts dels partits, diferències de 2,3 o 4 punts...) que, un cop aplicades a les fórmules que hem definit al capítol anterior (apartats 1,2,3 i 6), en resulta les probabilitats de guanyar i, lògicament, les de perdre per a la situació.

He utilitzat un entorn anomenat *eclipse* que combina el llenguatge java amb els elements principals d'una aplicació per *android* `(SeekBar, RadioGroup, RadioButton, TextView, EditText...)` de manera que s'hi veuen diferenciades dos parts:

a) El programa, en el qual hem escrit les fórmules i hem fet els càlculs.

b) La pantalla, on hem introduït els elements principals d'*Android* i els hem anomenat mitjançant els `strings`. La pantalla està composta per l'aspecte gràfic, on es mostren com surten els objectes, i l'aspecte en format text, on hi ha les propietats dels objectes.

Faré una definició més acurada de cada objecte mentre vaig explicant el funcionament de tot el programa amb l'ajut de recursos gràfics.

[1] L'aplicació és adaptable a tot tipus de joc que sigui per punts.

```
package com.example.probabilitats;

import android.app.Activity;


public class Segona extends Activity{
    private final static int MAXPUNTS = 50;

    long numeroCombinatori[][]=new long[2*MAXPUNTS][2*MAXPUNTS];
    double gSet;
    double probP;
    double gSet00;
    int nPunts;
    int nPunts2=0;
    int valorx,valory;
    int valora=0;
    int valorb=0;
    int exponent;
    int nSets;
```

Figura 5.1: Programa

Figura 5.2: Aspecte gràfic

La imatge 5 és la finestra que obre el mòbil un cop has clicat a l'aplicació. Podem veure un primer títol *TTProbabilitats*. Tot seguit, hem introduït un `LinearLayout` vertical que afegeix els elements verticalment. En aquest cas hem afegit un `TextView` i un `EditText`. El `TextView` és un element que et permet escriure textos i que així es mostrin a la pantalla principal. Hem escrit `guanyar 1 punt` a aquest TextView. No obstant no ha sigut tan fàcil. Amb la finalitat de crear una aplicació traduïda a l'anglès, ho hem fet mitjançant els `strings`.

5.1 *Strings*

Els *strings* consisteixen en etiquetar cada element perquè mostri el que hi ha redactat. És a dir, tenim una finestra diferent per als *strings* en català i per als *strings* en anglès. El nom de cadascun dels *strings* és el mateix, però en els string-en, allò que significa l'string està en anglès. Ara bé, la gràcia dels *strings* és que si l'aplicació s'obre des d'un smartphone amb l'idioma anglès, s'utilitzaran els *strings* en anglès.

```
<string name="boto1">Calcular</string>
<string name="triopen">Triopen</string>
<string name="onze">Partit a 11 punts</string>
<string name="dos">Partit a 2 punts</string>
<string name="set">Número de jocs</string>
<string name="espais">__</string>
<string name="puntuacio">Marcador</string>
<string name="guionet">----</string>
<string name="diferencies">Diferència de:</string>
<string name="dospunts">2 punts</string>
<string name="trespunts">3 punts</string>
<string name="quatrepunts">4 punts</string>
<string name="resultat">Probabilitat resultant</string>
<string name="dosjocs">2 jocs</string>
<string name="tresjocs">3 jocs</string>
<string name="unjoc">1 joc</string>
<string name="boto2">Tornar a començar</string>
<string name="guanyem">Probabilitat de guanyar un partit a</string>
<string name="punts">punts</string>
<string name="numero">Número de</string>
```

Figura 5.3: Strings en català

```
<string name="onze">First to win 11 points</string>
<string name="dos">First to win 2 points</string>
<string name="set">Number of games</string>
<string name="espais">__</string>
<string name="puntuacio">Score</string>
<string name="guionet">----</string>
<string name="diferencies">Lead of</string>
<string name="dospunts">2 points</string>
<string name="trespunts">3 points</string>
<string name="quatrepunts">4 points</string>
<string name="resultat">Resultant probability</string>
<string name="dosjocs">2 games</string>
<string name="tresjocs">3 games</string>
<string name="unjoc">1 game</string>
<string name="boto2">Next</string>
<string name="guanyem">Win:</string>
<string name="punts">Points</string>
<string name="numero">Number of</string>
```

Figura 5.4: Strings en anglès

5.2 EditText

Com he dit abans, el primer `LinearLayout` està format per un `TextView` i un `EditText`. Aquest és l'objecte que necessita el programa per a captar la dada *probabilitatP*, que significa la probabilitat que tens de guanyar 1 punt. Aquest `EditText` té la característica que es pot manipular. És a dir, un cop hi has clicat damunt, s'obre el teclat de les xifres i et permet escriure-hi una.

És possible que us esteu preguntant quina és la manera que té el programa d'obtenir la dada de la pantalla principal. Doncs bé, cadascun dels objectes del programa està identificat amb un nom. En aquest cas, l'*eclipse* (programa amb el què construeixo la aplicació). El programa reconeix l'`EditText`, fent-li un reconeixement per la seva identificació, això ho fem amb la instrucció en llenguatge de *Java* que ara escriuré:

```
probabilitatP = (EditText) findViewById(R.id.editText1);
```

D'aquesta manera *Principal* entèn per a què serveix la dada del `EditText` identificat amb `editText1`. Bé, ara hem de declarar una variable a la *Principal* que porti assignada aquesta dada. Li hem anomenat `probP`, i es fa de la següent manera:

```
double probP;
```

Ara només cal relacionar la *probabilitatP* que ja hem recollit amb la variable *probP* tornant a fer servir el llenguatge especial de programació:

```
probP=Double.parseDouble(\textbf{probabilitatP}.getText().toString());
```

Encara que sembli que ja hem acabat aquesta tasca, no és així. És necessari dir que si no s'introdueix cap número, assigni un número de totes maneres. Li hem assignat el número 50 en cas que no s'escriugui res de la següent forma:

```
if(probabilitatP.getText().toString().equals(""))probabilitatP.setText("50");
```

Podem observar que entre les cometes de després de ***equals*** no hi ha res dins ja que ens estem referint a aquesta situació. A diferència de les cometes de després de *setText*, que hi ha escrit un 50, xifra que li hem ordenat que prengui com a percentatge.

5.3 Radio Group i Radio Button

Tot seguit es mostra 3 botons que es poden clicar i que a cadascun d'ells hi ha un text diferent, és a dir, tres `strings` diferents anomenats `dos, triopen i onze`. L'string dos es refereix al text "partit a 2 punts"o "first to win 2 points"; l'string tres al text "triopen"o "first to win 3 pointsï l'string onze a "partit a 11 punts"o "first to win 11 points".

El `RadioGroup` és un grup de tres `RadioButtons` ordenats verticalment amb la característica que sempre n'hi ha un de clicat. Aquesta és la principal diferència entre un `RadioGroup` i tres `RadioButtons` no units per un `RadioGroup`. Per a indicar quin és el botó dels 3 que surti marcat un cop s'inicia l'aplicació es pot fer des de l'aspecte en format text de la pantalla principal. Llavors, s'afegeix una frase en llenguatge de java a les propietats del botó:

```
android:checked="true"
```

Amb aquest text serà suficient per a que marqui l'opció d'11 punts un cop cliquem a iniciar l'app.

Aquest `RadioGroup`, junt amb l'element `SeekBar`, que explicaré al següent apartat, ens servirà per a determinar el número de punts al que es juguen els jocs. Primer de tot, hem de crear una variable al programa per al número de punts que li hem anomenat nPunts:

```
int nPunts=11;
```

I hem de relacionar els diferents RadioButtons, que aquest cop s'identifiquen com a *radio0*,*radio1* i *radio2*, amb aquests *nPunts*. Per això, crearem els elements *n2*,*n3* i *n11* i li direm al programa que *n2* correspon a *radio0*; *n3* a *radio1* i *n11* a *radio2* com hem fet abans:

```
n2=(RadioButton)findViewById(R.id.radio0);
n3=(RadioButton)findViewById(R.id.radio1);
n11=(RadioButton)findViewById(R.id.radio2);
```

Ara, per a dir-li que sempre que n2 sigui clicat prengui nPunts=2; n3 nPunts=3 i n11 nPunts=11 es torna a utilitzar el llenguatge *Java*:

```
if(n2.isChecked()){nPunts=2;}
if(n3.isChecked()){nPunts=3;}
if(n11.isChecked()){nPunts=11;}
```

5.4 SeekBar

La `SeekBar` és la barra que surt a continuació del `RadioGroup` i estan relacionats, doncs aquest element també serveix per a determinar la variable *nPunts*. L'avantatge del `SeekBar` és que dòna més llibertat a l'hora d'escollir el número de punts. En l'aplicació pots escollir d'1 fins a 30 punts mentre que amb el `RadioGroup` només tens 3 opcions. Per altra banda, el `RadioGroup` ajuda a definir quines són les opcions que més s'utilitzen per a jugar i, per tant, les que més s'utilitzen a l'aplicació.

Per a relacionar la variable *nPunts* amb la `SeekBar`, primer s'ha d'identificar el nom al programa amb el nom a l'aspecte (com ja ho hem les dues últimes vegades). Aquest cop li hem anomenat *escollirPunts*. Ara a continuació, hem de fer funcionar la `SeekBar`. Això es fa mitjançant una instrucció:

```
public void onStartTrackingTouch(SeekBar seekBar) { }
public void onStopTrackingTouch(SeekBar seekBar) {}
```

Ara crearem el programa amb un altre estat i entre les claus escriurem el que li volem dir en llenguatge de programació. Li hem de fer saber que agafi com a dada el número on està situada la barra, que indiqui de quin número és tracta (utilitzant un string i un `TextView`) i que coordini la `SeekBar` amb el `RadioGroup`. És a dir, si deixem lliscar el punt fins a arribar a 11 punts, el `RadioButton` *n11* haurà de sortir clicat. De la mateixa manera, si cliquem el RadioButton *n3*, el punt haurà de lliscar fins al número 3. Aquesta coordinació serà, evidentment, amb el tres `RadioButton`.

```
public void onCheckedChanged(RadioGroup group, int checkedId)
{if(n2.isChecked()){escollirPunts.setProgress(2);}
 if(n3.isChecked()){escollirPunts.setProgress(3);}
 if(n11.isChecked()){escollirPunts.setProgress(11);}}
```

I també:

```
public void onProgressChanged(SeekBar seekBar, int progress,
boolean fromUser) {
int n=escollirPunts.getProgress();
numeroPunts.setText(getText(R.string.numero).toString()
+" "+getText(R.string.punts).toString()
+"="+n);
if (n!=2) n2.setChecked(false); else n2.setChecked(true);
if (n!=3) n3.setChecked(false); else n3.setChecked(true);
if (n!=11) n11.setChecked(false); else n11.setChecked(true);
```

Com es pot veure utilitzem els *sytrings* numero i punt (estan situats davant de `R.string.`) que signifiquen respectivament "número de" i "punts". A continuació hi ha escrita la lletra n, variable local del programa que és igual a *escollirPunts*. Aquest element és el que escolta la `SeekBar`, d'acord amb el que hem escrit:

```
escollirPunts.setOnSeekBarChangeListener(new SeekBar.
OnSeekBarChangeListener()
```

Pot ser que dubteu de per què utilitzo "escollirPunts"que és diferent a "nPunts". Però és completament el mateix per al programa, com li he dit en aquest text:

```
nPunts=escollirPunts.getProgress();
```

Llavors, amb aquest mètode a l'aplicació es mostrarà: número de punts=6 (per exemple). I en anglès: number of points=6.

5.5 Marcador

Tot seguit, ens trobem amb el marcador. El marcador es fa servir quan volem saber les probabilitats de guanyar una vegada hagi començat el set, de manera que no ens trobem en 0-0. Després del `TextView` *Marcador* (introduït per l'*string* puntuació). Afegim un `LinearLayout` vertical, un `EditText`, un `TextView` i un `EditText`. El `TextView` situat entre els dos `EditText` no és res més que el guionet que separa el marcador. El seu *string* és guionet i la seva expressió -—". El primer `EditText` és la teva puntuació i el segon `EditText` la del teu contrincant. Per tant si anem perdent 4 a 3, haurem d'escriure 3 al primer casiller i 4 al segon.

Bé, utilitzarem el mateix mètode que al primer `EditText` per a recollir les dades. Primer identifiquem els `EditText` del aspecte al programa amb els noms *punts1* i *punts2*:

```
EditText punts1=null;
EditText punts2=null;
```

i

```
punts1 = (EditText) findViewById(R.id.editText2);
punts2 = (EditText) findViewById(R.id.editText3);
```

Ara creem les variables locals *valorx* i *valory* corresponents a *punts1* i *punts2*:

```
int valorx,valory;
valorx=Integer.parseInt(punts1.getText().toString());
valory=Integer.parseInt(punts2.getText().toString());
```

Es pot observar que enlloc de *parseDouble* utilitzem *parseInt* perquè es tracta de variables locals (int). Amb aquesta frase el programa ja capta les dades, però no és suficient. Cal preveure els casos que no poden ser possibles i evitar-los d'alguna forma perquè l'aplicació no col·lapsi o, simplement, no doni uns resultats erronis. Seria el cas, per exemple, que es juga un partit a 4 punts i anem 8 punts a 3. Com és evident, aquesta situació és impossible. Per aquests casos, li direm que prengui un valor *nPunts-1* sempre que *valorx¿nPunts* o *valory¿nPunts*. En llenguatge de Java:

```
if(valorx>nPunts-1)valorx=nPunts-1;
if(valory>nPunts-1)valory=nPunts-1;
```

Ara, com hem fet abans amb probP, cal dir-li que si no s'hi anota cap dada al marcador, prengui un valor concret. Aquest valor concret serà el 0. Llavors:

```
if(punts1.getText().toString().equals(""))punts1.setText("0");
if(punts2.getText().toString().equals(""))punts2.setText("0");
```

5.6 RelativeLayout, diferències i número de sets

Sota el marcador, trobem 2 `TextView` i 2 `RadioGroup` disposats horitzontalment que baixen verticalment. Aquesta col·locació no era possible amb un `LinearLayout` i per això hem utilitzat un `RelativeLayout`, que permet ordenar en dues dimensions, vertical i horitzontalment. Per a alinear-los d'aquesta manera, hem hagut d'anar a les propietats dels `TextView` i dels `RadioGroup` i escriure el següent:

```
<TextView
            android:id="@+id/textView5"
            android:layout_width="wrap_content"
            android:layout_height="wrap_content"
            android:layout_alignParentStart="true"
            android:layout_alignParentLeft="true"
            android:layout_alignParentTop="true"
            android:text="@string/set"
```

Això és per al `TextView` "número de sets". Es pot veure l'*string* set que s'expressa com a "número de sets".

5.7 Programa

Una vegada entrades les dades a l'aplicació, aquesta està programada per fer els càlculs establertes en el treball, que no són més que les probabilitats de guanyar un joc o set en les condicions entrades per l'aplicació. Un part important de la progrmació ha sigut la creació d'una classe de ja va que he anomenat *PartitTT*, que té els elements i mètodes principals d'un partit de tennis taula com són el marcador, la probabilitat de gunayar un punt, el número de punts del set, la diferència per guanyar... i també els mètodes fonamentals: mostar el marcador, jugar un punt, jugar un set, saber si el set està acabat.... He posat el codi en l'apèndix A del treball.

El programa també permet fer una simulació de la situació de forma que es pot comprovar si els càlculs estan fets de forma correcta. La simulació es fa a través de la creació de números aleatoris amb la funció:

`Math.random()`

Com ja he comentat, aquest simulació m'ha permès corregir alguns errors que havia comès en les fórmules. El programa combina les estructures fonamentals de la programació: seqüencial, condicional i iterativa.

L'aplicació està penjada en el web:

`https://sites.google.com/site/albertmasipbonet/treballderecerca`

Capítol 6

Conclusions i resultats

En aquest apartat explicaré el que més m'ha agradat d'aquest treball i escriuré les conclusions i resultats finals.

Per començar, el que he trobat més interessant del treball ha estat la recerca de fórmules relacionades amb la probabilitat i la construcció d'una aplicació pràctica i actual d'aquestes. La part inicial del treball (història i teoria de la probabilitat) m'ha ajudat a ubicar-me en el complicat camp de la probabilitat i a entendre'l. La teoria de la probabilitat és tan important per l'estudi probabilístic dels jocs que precisament els inicis de l'estudi matemàtic de la probabilitat va començar a partir d'una sèrie de problemes referents als jocs. Per exemple, hem referit el problema del joc de *la divisió de les apostes* com un dels iniciadors dels estudis de probabilitat. De forma significativa, el nostre cas d'estudi, és a dir el relatiu a guanyar una partida de Tennis Taula a partir d'un cert resultat, comparteix part del problema. Coincideixen en què els dos plantegen saber una certa probabilitat quan s'ha començat a jugar (2 a 1 en el cas de Pascal) i s'ha d'arribar a un número concret de punts (3 punts en el cas de Pascal). Hi ha dues diferències principals: el cas de Blaise Pascal es basa en un resultat específic i el nostre estudi és el cas general del mateix problema. A més a més, el joc de Tennis Taula permet introduir una probabilitat qualsevol mentre que en el de Pascal els dos jugadors tenen la mateixa probabilitat.

Una de les regles més transcendents en la probabilitat dels jocs és la coneguda regla de Laplace. Com s'ha vist, es pot aplicar en l'estudi de jocs com la loteria i els casinos. Aquestes preocupacions històriques van culminar al segle XX en els axiomes formulats per Andrei Kolmogoróv. Aquests axiomes són les bases de l'anàlisi de la probabilitat, que hem utilitzat implícitament. Per exemple, en el càlcul de la probabilitat de guanyar un partit s'han sumat les probabilitats de guanyar-lo pels diferents resultats possibles de guanyar (11-0, 11-1, 11-2, ...).

Per tal d'aproximar millor el nostre objecte d'estudi, la probabilitat dels jocs, hem estudiat amb cert deteniment els casos de la loteria i el casino. En aquests, l'estat i la banca surten sempre amb benefici, que sol ser d'un 30% a la loteria, 45% en la loteria primitiva i un $\frac{1}{37} = 2,7\%$.

Les conclusions i resultats del treball referents al joc del Tennis Taula són:

a) Sempre que juguem un partit a més de un punt (partit a 2 punts, partit a 3 punts,. . .) la probabilitat de guanyar el partit disminueix si la teva probabilitat de guanyar un punt és menor al 50% i augmenten si la teva probabilitat és major al 50% de forma polinòmica. Vam poder confirmar aquesta conclusió gràcies a *Maxima* i a les gràfiques representades amb el *Geogebra*. A mesura que augmenta el número de punts al que es jugava el set, la corba presenta un pendent més pronunciat. La gràfica gairebé té forma d'escala quan el nombre de punts és gran: amb un augment petit respecte el 50%, la probabilitat de guanyar el partit gairebé és el 100%.

b) He comparat dos models de joc partint de 0-0: arribar a una diferència de 4 i arribar a 11 punts amb diferència de 2 punts. Els resultats han sigut que els models són molt semblants, que és força sorprenent perquè en el primer model els jocs poden acabar molt ràpidament (4-0, 5-1...). Expressant la probabilitat de guanyar un punt com $\frac{1}{2} + x$ i fent el desenvolupament de Taylor de la probabilitat de guanyar el joc d'ambdós casos, resulta que els factors que multipliquen la x són semblants. És a dir, el factor per al cas diferència de 4 és 4 i el factor per al cas 11 amb diferència de 2 és 3,87 i $4 \simeq 3,87$. Llavors, com que les probabilitats de guanyar un joc a diferència de 4 i les probabilitats de guanyar un joc a 11 amb diferència de 2 són molt semblants, podem dir que jugar un joc a diferència de 4 o a 11 amb diferència de 2 és molt semblant. En altres paraules, en els partits entre dos jugadors qualsevol, estadísticament, s'obtindrien la mateixa proporció de victòries en els dos models de joc.

c) Les simulacions serveixen per a comprovar si s'han fet bé o no els càlculs. Un cop vaig acabar l'aplicació, vaig voler comprovar si, tal i com diu la Llei dels Grans Nombres, la freqüència del número de jocs guanyats tendia a la probabilitat estimada quan el número de jocs jugats tendia a infinit. La llei es complia per a la diferència de 2, però si provava amb diferència de 3 o de 4 hi havia un error considerable. Llavors, el primer que vaig pensar que la simulació estava mal feta, però realment l'error es trobava en el meu plantejament. El meu plantejament era que en la diferència de 3 o més punts, la diferència no començava fins que els dos jugadors es trobaven empatats tots dos a un punt de guanyar el set (en el cas del Tennis Taula la diferència comença al 10-10 si el partit és a 11 i al 20-20 si és a 21). La cosa no funciona així. En realitat, en el cas de Tennis Taula la diferència comença en el 9-9 o 19-19, perquè ja comences a jugar la diferència de 2 i no el partit a 11. De la mateixa manera, amb diferència de tres, es comença a jugar la diferència al 8-8, al 9-8, al 8-9, al 10-8 i al 8-10 i en cada situació tens una probabilitat diferent de guanyar el set, lògicament. Un cop vist el problema, va ser ràpid de solucionar gràcies a la manera que vaig utilitzar de arribar a la fórmula de diferència a n punts.

d) Amb la fórmula de Stirling he justificat que en partit al primer que arriba a n punts, si un jugador té una probabilitat $p = 1/2 + x$ de guanyar cada punt, la probabilitat de guanyar el partit augmenta en un factor kx on k és aproximadament $\sqrt{\dfrac{4n}{\pi}}$

e) Si anomenem p la probabilitat que té un jugador de guanyar un punt $p = 1/2+x$, i la probabilitat de guanyar el partit és $P(G) = 1/2+f(x)$, llavors f és una funció imparell o sigui $f(-x) = -f(x)$.

En relació als mètodes utilitzats he arribat a la conclusió que:

a) Treballar amb *Maxima* et permet fer càlculs de forma ràpida i precisa. Sense aquest programa, aquests càlculs haguessin estat molt costosos de fer-los manualment.

b) Redactar amb LaTeX és molt pràctic a l'hora d'escriure fórmules i la presentació és molt acurada i no cal estar pendent de la forma del treball i concentrar-se així en el contingut.

c) El treball amb *Geogebra* permet fer una visualització dels gràfics de les funcions i interpretar el creixement i decreixement en termes del problema que s'està estudiant.

Per acabar la construcció de l'aplicació per smartphone m'ha permès introduir les fórmules obtingudes en el treball i calcular els resultats de forma ràpida, així com fer simulacions per comprovar si els càlculs teòrics són certs per aplicació de la Llei dels Grans Nombres. Vull agrair la tasca del meu tutor sense l'ajuda del qual no hagués pogut arribar a tots aquests resultats.

Apèndix A: Classe PartitTT

```
public class PartitTT {
int marcadorx;
int marcadory;
int setsx;
int setsy;
int maxPunts;
int maxSets;
int diferencia;
double probG;
int setEnJoc;
int finalSetx[],finalSety[];
int setsGuanyats;
int setsJugats;
int puntsJugats;
int puntsGuanyats;
int partitsGuanyats;
int partitsJugats;
//---------------------------------------------------------------------------
PartitTT(){
marcadorx=0;
puntsJugats=0;
puntsGuanyats=0;
    marcadory=0;
    setsx=0;
    setsy=0;
    setEnJoc=1;
    maxPunts=11;
    diferencia=2;
    maxSets=3;
    finalSetx=new int[2*maxSets];
    finalSety=new int[2*maxSets];
```

```
    for(int i=1;i<2*maxSets;i++){
     finalSetx[i]=0;
     finalSety[i]=0;
    }
    setsGuanyats=0;
    setsJugats=0;
}
//-----------------------------------------------------------------------
PartitTT(int x, int y, int sx, int sy, int mp, int ms, int d, double p){
marcadorx=x;
marcadory=y;
puntsJugats=x+y;
puntsGuanyats=x;
maxPunts=mp;
maxSets=ms;
diferencia=d;
probG=p;
setsx=sx;
setsy=sy;
setEnJoc=sx+sy+1;
finalSetx=new int[2*maxSets];
    finalSety=new int[2*maxSets];
    for(int i=1;i<2*maxSets;i++){
     finalSetx[i]=0;
     finalSety[i]=0;
    }
    setsGuanyats=0;
    setsJugats=0;
}

//--------------------------------------------------------------------
void jugarPunt(){
if(partitAcabat())iniciarPartit();
if(setAcabat())iniciarSet();
if (Math.random()<=probG){ marcadorx++;
puntsGuanyats++;} else marcadory++;
puntsJugats++;


}
//--------------------------------------------------------------------
```

```
boolean setAcabat(){
if (marcadorx>=maxPunts && marcadorx-marcadory>=diferencia) return true;
if (marcadory>=maxPunts && marcadory-marcadorx>=diferencia) return true;
return false;
}
//-----------------------------------------------------------------------
void iniciarSet(){
if (setAcabat()){
if (marcadorx>marcadory){setsx++;setsGuanyats++;}else setsy++;
finalSetx[setEnJoc]=marcadorx;
finalSety[setEnJoc]=marcadory;
marcadorx=0;
marcadory=0;
setEnJoc++;
setsJugats++;
}
}
//-----------------------------------------------------------------------
void iniciarPartit(){
marcadorx=0;
marcadory=0;
setsx=0;
setsy=0;
setEnJoc=1;
iniciarSet();

}
//-----------------------------------------------------------------------
void jugarSet(){
if(setAcabat())iniciarSet();
do{
jugarPunt();
}while(!setAcabat());
}
//-----------------------------------------------------------------------
void jugarPartit(){
do{
jugarPunt();
}while(!partitAcabat());
}
//-----------------------------------------------------------------------
```

```
boolean partitAcabat(){
if (setAcabat()&&setsx==maxSets-1&&marcadorx>marcadory) return true;
if (setAcabat()&&setsy==maxSets-1&&marcadory>marcadorx) return true;
if (setsx>maxSets-1) return true;
if (setsy>maxSets-1) return true;
else return false;
}
//-----------------------------------------------------------------------
void mostrarMarcador(TextView t){
double pro;
t.setText("");
for(int i=1;i<setEnJoc;i++){
t.append("Set "+i+":"+finalSetx[i]+"---"+finalSety[i]+"\n");
}
t.append("Set "+setEnJoc+":"+marcadorx+"---"+marcadory);
if(partitAcabat()){
t.append("\nGuanyador:");
if(marcadorx>marcadory)t.append("x");else t.append("y");
}
t.append("\nPunts jugats:"+puntsJugats+
"\nPunts guanyats x:"+puntsGuanyats);
t.append("\nSets jugats:"+setsJugats+
"\nSets guanyats x:"+setsGuanyats);
if(puntsJugats>0){
pro=Integer.valueOf(puntsGuanyats).doubleValue()/puntsJugats;
t.append("\nProporció punts guanyats="+Double.toString(pro));
}
if(setsJugats>0){
pro=Integer.valueOf(setsGuanyats).doubleValue()/setsJugats;
t.append("\nProporció sets guanyats="+Double.toString(pro));
}

}
//.......................................................................



}
```

Apèndix B: Axiomàtica i propietats de la probabilitat

6.1 Models matemàtics

El procés dut a terme per crear un model matemàtic en general és important per a la comprensió dels axiomes de la probabilitat i ara s'explicarà. Un axioma és un resultat que s'accepta sense necessitat de demostració. La construcció axiomàtica d'una branca de la matemàtica es caracteritza pels fets següents:

a) S'introdueixen elements fonamentals, mitjançant els axiomes. Els elements es relacionen i defineixen el que s'anomena estructura.

b) El conjunt de teoremes (propietats) d'una mateixa branca que es deriven de raonaments lògics dels axiomes constitueixen la *ciència matemàtica*[1].

Evidentment, els axiomes no es poden contradir entre ells i han de ser independents, és a dir, cap axioma no pot ser conseqüència lògica de cap altre. Com a exemple curiós i significatiu de les discussions entre els matemàtics sobre les construccions axiomàtiques referim els "4+1"postulats d'Euclides. S'anomenen així perquè el cinquè postulat ("per un punt exterior a una recta hi passa exactament una i només una paral·lela") es va pensar que podia deduir-se dels altres 4. Després de molts intents durant segles, es va demostrar la independència del cinquè postulat respecte els altres. Aquesta proposició va donar lloc a tres teories geomètriques: es pot suposar que no hi ha cap paral·lela que passi per un punt exterior a una recta, que n'hi ha exactament una, o que n'hi ha una quantitat infinita. Llavors, si es suposa que n'hi passa més d'una, seria possible construir triangles que els seus angles sumin menys que 180° o més[2].

[1] Rios Sixto, *Métodos estadísticos* Madrid, Ediciones del Castillo, 1985, pp. 2-3.
[2] Wiquipèdia, http://ca.wikipedia.org/wiki/Axioma (consultada 22/VII/2014)

El camí que es recorre per a formular un model matemàtic és aquest:

$$\begin{tikzcd}
\text{Realitat} \arrow[r, "\text{Conceptualització}"] & \text{Axiòmatica} \arrow[d, "\text{Desenvolupament matemàtic}"] \\
\text{Aplicacions} \arrow[u] & \text{Teoría matemàtica} \arrow[l, "\text{Desconceptualització}"']
\end{tikzcd}$$

Aquest procés de conceptualització i desconceptualització es fa per tal de poder construir teories amb llenguatge matemàtic. Ja definit el procés de modelització matemàtica i els axiomes, ara aclarirem els conceptes bàsics de la probabilitat partint de la realitat. Si ens fixem en l'esquema anterior, s'observa que abans d'establir els axiomes és necessari definir els conceptes bàsics de la branca matemàtica que es vol estudiar. Per això, faré esment dels conceptes bàsics de la probabilitat i més tard enunciaré els axiomes d'Andrei Kolmogórov, que són els que actualment configuren la teoría de la probabilitat.

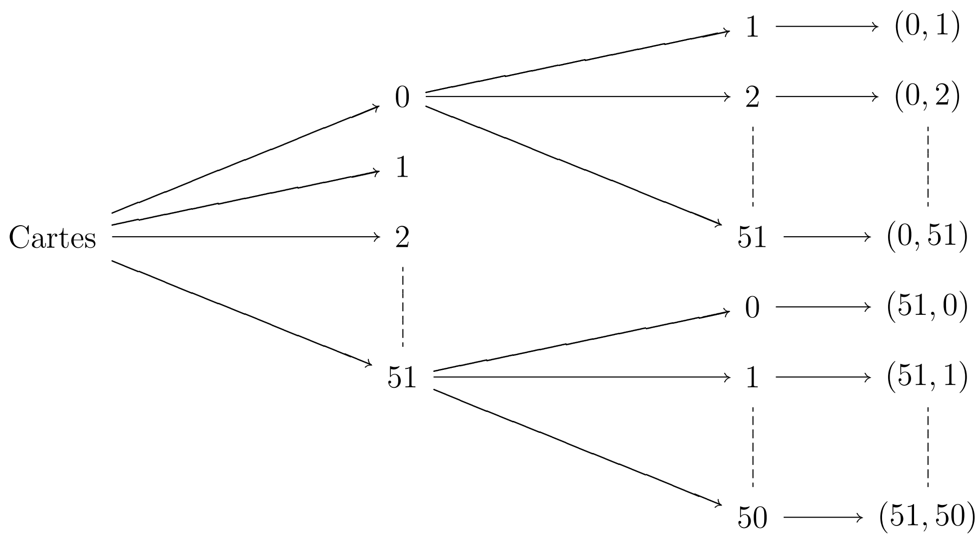
6.2 Experiments aleatoris i esdeveniments

És necessari esmentar que el model de probabilitat que estudiaré en aquest treball es basa en experiments amb un nombre finit o numerable[3] de resultats. Un experiment aleatori és un procés del qual el resultat és incert. El conjunt de tots aquest resultats s'anomena espai mostral i s'indica amb el signe Ω, per exemple:

- En el llançament d'un dau, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- En el llançament de dos daus $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3) \ldots\}$ Amb un total de 36 resultats possibles
- En el joc Texas Hold'em Póker, primer es reparteixen dues cartes per jugador les quals es relacionen amb les cinc cartes comunitàries següents. L'espai mostral de les dues primeres cartes del pòquer és el següent (numeraré les cartes de la 0 a la 51). $\Omega = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3) \ldots\}$ Amb un total de 1326 resultats possibles.

Els 1326 resultats surten d'aquest diagrama d'arbre:

[3] Tots els resultats es poden numerar amb números naturals



A la primera columna hi ha 52 possibilitats i a la segona columna 51 degut a que és impossible que et reparteixin la mateixa carta (el mateix número i pal) dues vegades. Llavors, el càlcul pot ser $52 \cdot 51$ o $\frac{52 \cdot 51}{2}$ (variacions sense repetició o combinacions) ja que Ω es pot considerar amb importància de l'ordre amb el que et donin les cartes (en aquest cas es contaria, per exemple, (0,51) i (51,0)) o sense (en aquest cas la combinació de cartes (0,51) o (51,0) només es contaria un cop). Ho he considerat d'aquesta darrera forma ja que no importa si es reparteix primer una carta o l'altra, degut a que no hi ha una ronda d'apostes entre una i l'altra. La primera ronda d'apostes es realitza després d'haver-se repartit les 2 primeres cartes a cada jugador (*pre-flop*, anomenat en anglès) i abans de ser destapades les 3 següents (*flop*). A continuació, torna a haver-hi una ronda d'apostes, quan es destapa la següent (*turn*) una altre ronda d'apostes i, finalment, una ronda més aixecada la última carta[4] (*river*).

Un succés o esdeveniment és qualsevol possibilitat enunciada en el llenguatge habitual de la que es pugui verificar si s'ha produït o no al realitzar l'experiment. Un esdeveniment es representa per un subconjunt de l'espai mostral Ω format per tots els resultats elementals que són favorables a que el resultat es produeixi[5]. En el cas de l'experiment aleatori que consisteix en observar les primeres dues cartes que reps en una partida de pòquer, un succés pot ser, per exemple, que se't reparteixin dues cartes del mateix número formant així una parella. Per a calcular la *probabilitat* d'aquest esdeveniment,

[4]Gordó, Fernando et alii. *Texas Hold'em Póker. Una guía completa para perfeccionar su juego.* Barcelona, 2011.

[5](Rios, 1985, p. 4).

caldrà fer un recompte de tots els resultats favorables. Numeraré les cartes de la 0 a la 51 i les classificaré de la següent manera. Faré 4 columnes amb 13 cartes cadascuna. Cada columna representarà un color i cada fila un número.

Piques	Cors	Trèvols	Diamants
0	13	26	39
1	14	27	40
2	15	28	41
3	16	29	42
4	17	30	43
5	18	31	44
6	19	32	45
7	20	33	46
8	21	34	47
9	22	35	48
10	23	36	49
11	24	37	50
12	25	38	51

D'aquesta manera, els números $0, 13, 26, 39$ representen els reis (K), els números $1, 14, 27, 40$ els asos (A) i així successivament fins arribar als nombres $12, 25, 38, 51$ que són les reines (Q). Llavors, el número 12 és la reina de piques ($\spadesuit$), el número 25 la reina de cors ($\heartsuit$)... De totes maneres, sense tenir aquesta taula també podríem saber a quin número i pal correspon a cada nombre. Per exemple, si volem saber el número i el pal del nombre 22 és suficient amb dividir-lo per 13 i veure quin és el quocient i el residu. En aquest cas, el quocient és 1, el que significa que el nombre és de la segona columna (la segona, ja que les de quocient 0 pertanyen als de la primera, doncs cap nombre és més gran que 13). La segona columna representa el pal de cors. Si ens fixem amb el residu, és 9, el que ens diu que el número és 9. Finalment, podem dir que el nombre 22 representa el 9 de cors. De la mateixa manera, encara que no és tan útil, si sabem el pal i el número, podríem saber el seu lloc a la taula. Per començar, si el pal és piques, 13 es multiplicarà per 0, si és cors per 1, si és trèvols ($\clubsuit$) per 2 i si és diamants ($\diamondsuit$) per 3. A aquest nombre se li sumarà el número de la carta i ja ho tindríem (compte que la primera fila pertany als reis i no als asos). Exemplificant, si tenim el 7 de trèvols i volem saber quin lloc ocupa, com hem dit, haurem de multiplicar 13 per 2 i sumar-li 7. Fem el càlcul:

$$2 \cdot 13 + 7 = 33 \tag{6.1}$$

Ocupa el lloc 33 a la taula. Cal dir que la taula és un simple sistema de referència i que podria ser útil en el cas d'escriure una aplicació o simulació informàtica, però de moment no l'utilitzaré. No obstant, sí numeraré les cartes de la 0 a la 51 com he fet anteriorment i identificaré les cartes amb les operacions esmentades.

6.2.1 Operacions amb esdeveniments

Suposem un experiment aleatori γ amb una sèrie de successos $A, B, C...$ i Ω l'espai mostral. Fixat un succés A, al realitzar la prova podem veure el resultat i si s'ha verificat o no A. Diem que A implica B sempre que quan es verifiqui A també es verifiqui B. S'escriu $A \subseteq B$ o bé $B \supseteq A$. Per exemple, en una baralla de pòquer si A significa treure el 4 de trèvols i B significa treure trèvols, sempre que aparegui el 4 de trèbols haurà aparegut trèvols. Llavors $A \subseteq B$. Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, llavors direm que els successos són iguals, és a dir, $A = B$ [6].

Esdeveniment contrari

Es diu $\bar{A}$ al succés contrari a A, si es realitza quan no es verifica A. Per exemple, si $A = (J, Q, K, A)$, llavors $\bar{A} = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.

Unió

La unió de dos successos A, B es defineix com el succés C que es verifica sempre i quan es verifiqui A o es verifiqui B i s'expressa mitjançant $C = A \cup B$. Com es el cas de si $A = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ de tots els colors) i $B = (J, Q, K, A$ de tots els colors) $C =$ (Totes les cartes de la baralla). Per a tal d'aclarir el concepte, afegiré la representació gràfica de la unió.

[6](Rios, 1985, pp. 1-4). Sucesos y operaciones.

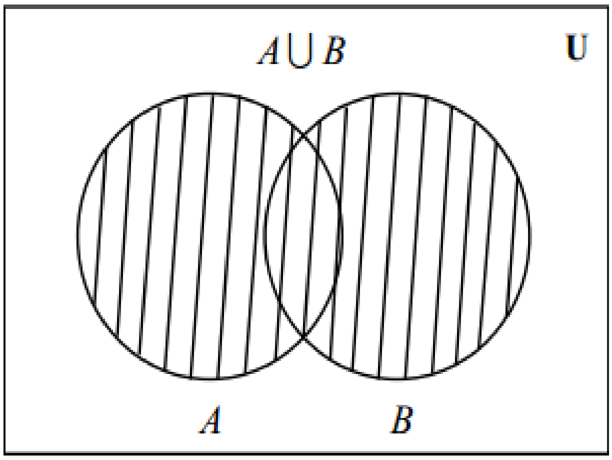


Figura 6.1: Representació de la unió

Intersecció

Es representa la intersecció dels successos A i B com a $A \cap B$ i es produeix sempre i quan es verifiqui A i es verifiqui també B.

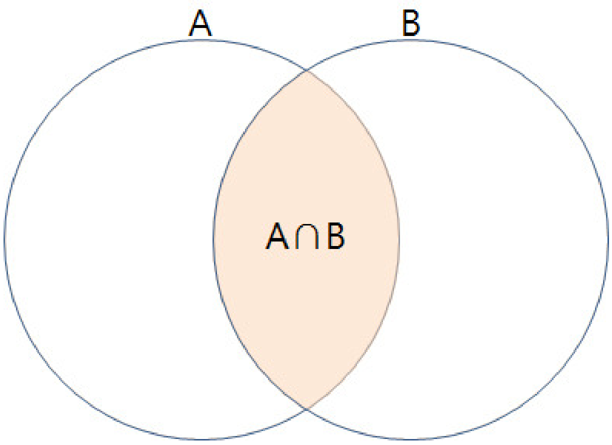


Figura 6.2: Representació de la intersecció

Propietats de les operacions amb esdeveniments

a) Commutativitat
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

b) Associativitat
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \cup \bar{A} = \Omega$

d) $A \cap \Omega = A$

e) $A \cup \Omega = \Omega$

f) $A \cup A = A$

g) $A \cap A = A$

h) $A \cup \emptyset = A$

i) $A \cap \emptyset = \emptyset$

6.3 Axiomàtica de la probabilitat i les seves principals propietats

Ara ja podem citar els tres axiomes fonamentals de la probabilitat.

Els axiomes van ser definits per un matemàtic rus anomenat Andrei Kolmogórov [7].

a) La probabilitat de qualsevol succés A és positiva o zero. És a dir, $P(A) \geq 0$. La probabilitat mesura, en certa manera, com és de difícil que passi un succés A: com menor sigui la probabilitat, més difícil és que passi.

b) La probabilitat del succés segur és 1. És a dir, $P(\Omega) = 1$. Així doncs, la probabilitat sempre és més gran que 0 i menor que 1. Probabilitat zero vol dir que no hi ha cap possibilitat que passi (és un succés impossible), i probabilitat 1, que sempre passa (és un succés segur). Això és sovint passat per alt en alguns càlculs de probabilitat errònies, però si no pots especificar exactament el succés segur, llavors la probabilitat de qualsevol altre succés tampoc pot ser definida. Es va fixar el número 1 ja que la freqüència relativa, en el cas de l'esdeveniment segur era del 100%

[7] Tambov, (25 d'abril de 1903 - Moscou, 20 d'octubre de 1987)

c) La probabilitat de la unió d'un conjunt qualsevol de successos incompatibles dos a dos és la suma de les probabilitats dels successos. $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.
És a dir, si tenim, per exemple, els successos A,B,C, i són incompatibles dos a dos, aleshores $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.[8]

A partir dels axiomes, se'n deriven les principals propietats:

a) $P(\overline{A}) = 1 - p(A)$

b) $P(\o) = 0$

c) $A \subset B) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ i $P(B-A) = P(B)-P(A)$ on $B-A = B\cap\overline{A}$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6.4 Regla de Laplace i probabilitat condicionada

La regla de Laplace és una formula ideada pel matemàtic francès de nom Pierre-Simon Laplace (1749-1827). És molt important ja que ens permet calcular la probabilitat d'un esdeveniment, sempre i quan els successos elementals siguin equiprobables. És a dir, que tots els successos tinguin la mateixa probabilitat. Si entenem que els resultats d'A són els casos favorables a A, llavors podem escriure la regla de Laplace[9] com:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables a A}}{\text{Casos possibles}} \tag{6.2}$$

La regla de Laplace ens servirà per a calcular la probabilitat de tenir una parella i una parella d'asos a la mà en el joc Texas Hold'em Poker:

La probabilitat es pot calcular amb combinatòria i aplicant la regla de Laplace. Es tracta de veure quantes maneres hi ha de que es produeixi una parella amb un mateix nombre (As de cors i As de piques, com per exemple) i aquest nombre multiplicar-lo per 13 (ja que hi ha 13 nombres diferents). Això ens donarà els casos favorables i es dividirà pel nombre de casos possibles, que, com ja hem calculat abans, és 1326.

Fem el càlcul;

[8] http://www.sangakoo.com/ca/temes/definicio-axiomatica-de-la-probabilitat-i-les-seves-propietats (consultada 23/VII/2014)

[9] http://www.sangakoo.com/ca/temes/regla-de-laplace (consultada 23/VII/2014).

$$C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Observem que hi ha 6 parelles diferents de cada nombre. El multipliquem per 13 (els 13 nombres)

$$6 \cdot 13 = 78$$

hi ha 78 parelles diferents que hem de dividir entre les 1326 mans diferents que et poden donar

$$\frac{78}{1326} = 0,058$$

El que significa que la probabilitat de que et sigui lliurada una parella és del 5,8%. Gràcies a aquests càlculs també podem calcular la probabilitat de tindré una parella d'asos a la mà, que és molt menor, del 0,4%. Una altra manera de dir-ho és, que aproximadament, una de cada 20 mans serà una parella i que, una de cada 260 mans serà una parella d'asos.

Ara, comentaré un altre exemple i seguiré amb l'explicació de les normes d'aquest joc d'apostes. En el Texas, per començar, et lliuren dues cartes que només pots mirar tu i en disposen cinc boca avall, que es destaparan de la següent manera: primer tres, després una i una altra. L'exemple és el següent:

> Quina és la probabilitat d'obtenir color amb les cinc primeres cartes (les 2 cartes que t'han donat i les 3 cartes boca avall i comunitàries que es destaparan)?

Abans de tot, per a poder utilitzar correctament la regla de Laplace, observem que els successos són equiprobables. Degut a que color són 5 cartes del mateix pal, no sobraran cartes. És a dir, les 5 cartes que seran repartides hauran de ser del mateix pal.

Per a calcular aquesta probabilitat, primer calcularé quants colors diferents hi ha en un mateix pal (per exemple, en un pal un color seria el 2 de trèvols, el 3 de trèvols, el 7 de trèvols, la reina de trèvols i l'as de trèvols, mentre que un altre seria el 4 de trèvols, el 5 de trèvols, el 8 de trèvols, el 9 de trèvols i el rei de trèvols). Llavors, ho multiplicaré pels quatre pals i això donarà el nombre de casos favorables a la regla de Laplace. Per a calcular el nombre de colors possibles que hi ha en un mateix pal utilitzaré combinatòria.

En aquest cas, es tracta d'una variació sense repetició. Una variació sense repetició d'un conjunt de n elements és tota col·lecció ordenada formada per r dels n elements i el seu nombre és:

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)........(n-r+1). \tag{6.3}$$

On n és el nombre total d'elements i r el nombre d'elements de la mostra. Al tractar-se d'un sol pal i color, n engloba totes les cartes del mateix pal que són 13 i r les cartes que es necessiten per a fer color, que són 5. Apliquem la fórmula:

$$V_{13}^5 = \frac{13!}{(13-5)!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 154\,440. \tag{6.4}$$

Hi ha 154.440 possibilitats de formar color amb un pal, ara bé, la baralla té quatre pals, doncs s'haurà de multiplicar per 4.

$154\,440 \cdot 4 = 617\,760$

El casos favorables per a obtenir color són 617 760. Ara per acabar el problema hem de calcular el nombre de casos possibles, cosa que és bastant senzilla ja que anteriorment en aquest treball ja he calculat quantes combinacions possibles hi havia amb 2 cartes. Amb 5 cartes les cartes no es poden repetir i el ordre segueix sense tenir importància, com passa amb 2 cartes. Doncs

$$V_{52}^5 = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200 \tag{6.5}$$

Ja calculats els casos possibles, s'aplica la regla de Laplace:

$$P(color) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{617\,760}{311\,875\,200} = 0,00198 = 0,198\% \tag{6.6}$$

La probabilitat té una estreta relació amb la freqüència relativa (F_r) perquè, bàsicament, el que intentem fer quan calculem probabilitats és ajustar els percentatges a aquells que serien calculats a la F_r. Sempre i quan, aquesta estadística s'hagi construït amb un gran nombre d'esdeveniments. La Llei dels Grans Nombres, estableix que la freqüència relativa d'un esdeveniment al llarg de n temptatives elementals independents tendeix a la probabilitat de l'esdeveniment. Sempre i quan n tendeixi a infinit.[10]

Un altre apartat interessant de la probabilitat és la probabilitat condicionada.[11] Aquesta es defineix com la probabilitat de que es compleixi un esdeveniment B sempre i quan se suposi que s'ha complert un altre esdeveniment A prèviament. La probabilitat d'un succés B condicionat a un altre succés A significa que el succés B i A s'han produït, però aquesta mesura

[10]ww.enciclopedia.cat/enciclopèdies/gran-enciclopèdia-catalana/EC-GEC-0235246.xml (consultat 2/I/2015).

[11](Rios, 1985, pp. 22-27).

ha de ser relativa a la probabilitat d'A. Si en N proves resulta N_A cops s'ha produït el succés A i entre aquestes resulta N_{AB} cops el B, tindrem:

$$fr(A) = \frac{N_A}{N}, fr(B|A) = \frac{N_{AB}}{N_A} \tag{6.7}$$

a) Com $N_{AB}/N = (N_A/N) \cdot (N_{AB}/N_A)$

b) Resulta $fr(A \cap B) = fr(A) \cdot fr(B|A)$

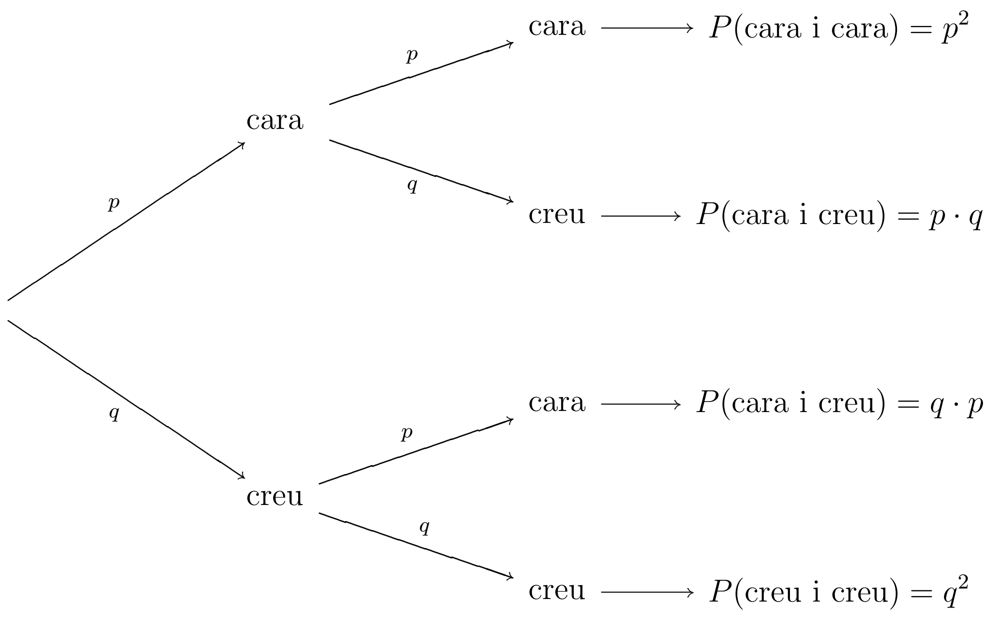
c) O sigui $fr(B|A) = \dfrac{fr(A \cap B}{fr(A)}$

Ja definida la probabilitat condicionada, mostraré un exemple força curiós.[12]

> Suposem que tenim una moneda la qual no sabem amb exactitud si l'esdeveniment cara i l'esdeveniment creu succeiran amb la mateixa freqüència. És a dir, no sabem si els esdeveniments 'sortir cara' i 'sortir creu' són equiprobables. Mitjançant la probabilitat condicionada, es demostra de quina manera, encara que els esdeveniments no siguin equiprobables, com podem convertir-los en equiprobables.

Per a resoldre el problema, utilitzarem una estratègia que pot semblar sorprenent. Es tractarà de tirar la moneda dues vegades per tal de diferenciar dos tipus de successos. Quan es tracti de 'cara i creu' o 'creu i cara' l'anomenarem l'esdeveniment 'diferent' i quan es tracti de 'cara i cara' o 'creu i creu' ignorarem el resultat. Adjunto un diagrama d'arbre per a il·lustrar i detallar l'explicació:

[12] Haigh, John. *Matemàticas y juegos de azar.* Editorial Tusquets, Barcelona, 2003.



El primer i el quart resultat els ignorarem i ens fixarem en el segon i el tercer. La probabilitat de que els dos successos siguin diferents és:

$$P(\text{Dif}) = pq + qp = 2pq \tag{6.8}$$

Ara ens hem de fixar quina probabilitat té "sortir cara i creu" i quina probabilitat té "sortir creu i cara" (Amb importància de l'ordre aquest cop), sempre i quan els dos esdeveniments hagin estat diferents. Així:

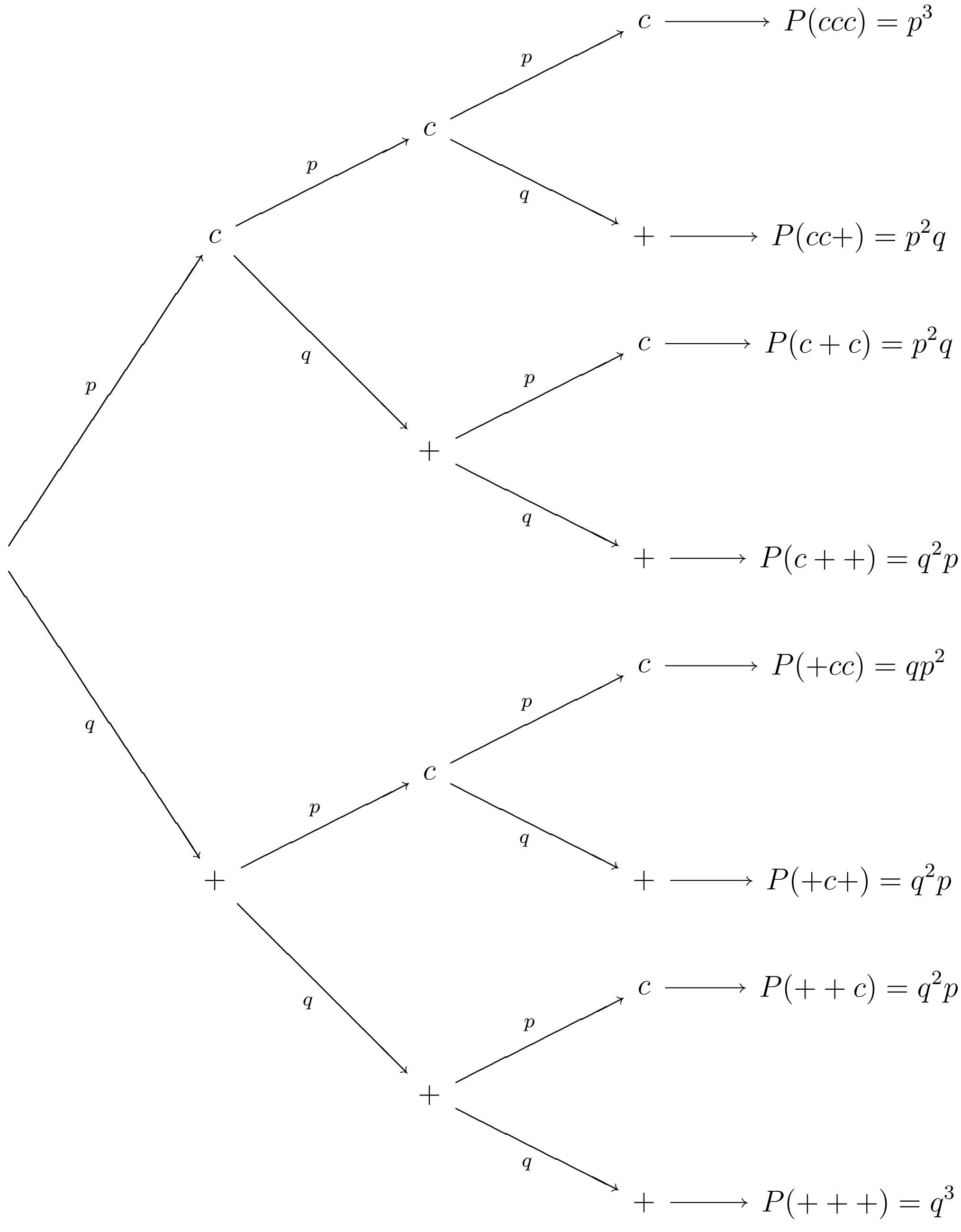
$$P(c+|\text{Dif}) = \frac{P(c+\cap\text{Dif})}{P(\text{Dif})} = \frac{P(c+)}{P(Dif)} = \frac{pq}{2pq} = \frac{1}{2} \tag{6.9}$$

i

$$P(+c|\text{Dif}) = \frac{P(+c\cap\text{Dif})}{P(\text{Dif})} = \frac{P(+c)}{P(Dif)} = \frac{qp}{2pq} = \frac{1}{2} \tag{6.10}$$

Com podem veure, els successos "cara i creu" i "creu i cara" són equiprobables.

A més a més d'establir dos successos equiprobables també en podem establir 3 i fins i tot més de la següent manera.



Si descartem els successos 'cara, cara, cara' i 'creu, creu, creu' podem contar un total de 6 esdeveniments ($2^3 - 2 = 6$) que podem classificar de la següent manera. Aquests 6 esdeveniments els classifiquem en 3 grups que es diferencien per l'ordre de les cares i les creus.

Un grup englobaria els esdeveniments que acaben amb creu cara (c+c , ++c), un altre els esdeveniments que acaben amb cara creu (cc+, +c+) i el tercer grup agruparia els dos esdeveniments restants dels quals un acaba amb creu creu (c++) i l'altre amb cara cara (+cc).

Ja definits els grups, ara hem de calcular la probabilitat de que els 3 successos siguin diferents, és a dir, que no surti ni ccc ni +++. Lògicament, aquesta probabilitat és la suma de les probabilitats dels esdeveniments restants. Fem la suma:

$$P(\text{Diferent}) = p^2q+p^2q+q^2p+p^2q+q^2p+q^2p = 3p^2q+3q^2p = 3(p^2q+q^2p)$$

Apliquem la fórmula de la probabilitat condicionada als diferents grups

$$P(c{+}{+},+cc|\text{Dif}) = \frac{P(c++,+cc \cap \text{Dif})}{P(\text{Dif})} = \frac{P(c++,+cc)}{P(Dif)} = \frac{p^2q+q^2p}{3(p^2q+q^2p)} = \frac{1}{3}$$

$$P(c{+}c,+c{+}|\text{Dif}) = \frac{P(c+c,+c+\cap\text{Dif})}{P(\text{Dif})} = \frac{P(c+c,+c+)}{P(Dif)} = \frac{p^2q+q^2p}{3(p^2q+q^2p)} = \frac{1}{3}$$

$$P(cc{+},{+}{+}c|\text{Dif}) = \frac{P(cc+,+c+\cap\text{Dif})}{P(\text{Dif})} = \frac{P(cc+,+c+)}{P(Dif)} = \frac{p^2q+q^2p}{3(p^2q+q^2p)} = \frac{1}{3}$$

Podríem seguir construint per a 4,5,6... successos equiproblables de la mateixa manera.

Bibliografia

Boyer, C. B. (2011). *Historia de la matemática*. Allianza Editorial, Maddrid.

Eclipse (7/I/2015). `http://en.wikipedia.org/wiki/Eclipse_software`.

Excel (7/I/2015). `http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel`.

Fermat, P. (2008). *Obra matemàtica vària*. IEC Secció de ciències i tecnologia, Barcelona.

Fernando Gordó, Guillermo Silvestris, N. J. M. D. E. P. (2011). *Texas Hold'em Póker*. Limpergraf, Barberá del Vallès.

GEC (2/I/2015). `www.enciclopedia.cat/enciclopèdies/gran-enciclopèdia-catalana/EC-GEC-0235246.xml`.

Geogebra (7/I/2015). `http://www.geogebra.org/about`.

Haigh, J. (2003). *Matemáticas y Juegos de Azar*. Tusquets, Barcelona.

Katz, V. J. (1993). *A History of Matemathics*. Addison Wesley, Boston.

Lequerica, J. R. (2011). *Desarrollo de aplicacions para Android*. Anaya, Madrid.

Maxima (7/I/2015). `http://maxima.sourceforge.net/es/`.

Periódico, E. (31/VIII/2014). `http://especiales.elperiodico.com/sorteos/primitiva.asp`.

Primitiva (31/VIII/2014). `http://primitiva.combinacionganadora.com/`.

Rios, S. (1985). *Métodos Estadísticos*. Ediciones del Castillo, Madrid.

Sangakoo (23/VII/2014a). `http://www.sangakoo.com/ca/temes/definicio-axiomatica-de-la-probabilitat-i-les-seves-propietats`.

Sangakoo (23/VII/2014b). `http://www.sangakoo.com/ca/temes/regla-de-laplace`.

Shafer, G. (20/IX/2014). *The Early Development of Mathematical Probability*. http://www.glennshafer.com/assets/downloads/articles/article50.pdf.

Thorp, E. O. (1966). *Beat the dealer: A winning strategy for the game of twenty-one*. Vintage Books, New York.

Valiente, G. (1996). *Composició de textos científics amb LaTeX*. Edicions UPC, Barcelona.

Wikipedia (23/VIII/2014d). http://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox.

Wikipedia (24/VII/2014a). http://ca.wikipedia.org/wiki/El_problema_dels_punts.

Wikipedia (25/VII/2014c). http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_points.

Wikipedia (28/VIII/2014b). http://de.wikipedia.org/wiki/Teilungsproblem.

Wikipedia (7/1/2015). http://ca.wikipedia.org/wiki/LaTeX.