OCTUBRE 2021

JESUÏTES Lleida
Col·legi Claver - Raimat

Més Enllà de l'Atzar

Estudi matemàtic de l'estratègia bàsica del BlackJack a partir dels mètodes de Montecarlo i un procés d'inducció cap enrere

LAPLACE

2n de batxillerat B

Col·legi Claver

Abstract

En este trabajo se abordan dos temas, la probabilidad y el juego del Blackjack. Ambos se estudian en un principio por separado, para luego ser utilizados de forma complementaria con el objetivo de deducir la estrategia óptima de juego en el propio Blackjack. A través de un enfoque matemático, inspirado en el libro *Beat the dealer* de Edward O. Thorp, se intenta encontrar la decisión idónea para cada uno de los posibles casos en el juego. Así, se estructura un estudio que, basándose en un proceso de inducción hacia atrás, resulta en la determinación de dicha estrategia, la cual se acaba mostrando en unas tablas resumen. Por último, se describe el desarrollo y la creación de un algoritmo computacional que, gracias a los métodos de Montecarlo, simula millones de manos de Blackjack; suficientes para tratar los resultados obtenidos experimentalmente como si fueran teóricos, y trabajar a partir de ellos. De esta manera, se definen las probabilidades del crupier, claves para calcular la esperanza matemática del jugador, la cual, aun siendo ideal, sigue resultando negativa.

In this project, two topics are addressed, probability and the game of Blackjack. Both are studied separately at the beginning, in order to use them in a complementary way later on, with the objective of deducing the optimal strategy to play Blackjack. By using a mathematical standpoint, inspired in the book *Beat The Dealer* from Edward O. Thorp, this study attempts to find the ideal decision for each of the possible scenarios in the game. Therefore, through the usage of a backwards induction process, this strategy is established, and consequently summarized in a group of recap tables. Lastly, this project describes the development process of a computational algorithm, which is able to simulate millions of Blackjack hands thanks to the Montecarlo methods. This high quantity of reiterations allows the experimental results to be treated as if they were theoretical, and work as of them. Thus, a key item for the study can be found: croupier's probabilities, which allow the expected value for the player to be calculated. An expected value which, although being ideal, happens to still remain negative.

Abans que res, m'agradaria agrair al meu tutor d'aquest treball, Josep Mallol, la seva implicació, flexibilitat i ajuda en tot moment. Tenir un guia com ell ha estat essencial per poder tirar endavant aquest projecte.

Vull agrair també a la meva família. A la meva tieta Txaro, que em va donar un bon cop de mà a l'hora de triar el tema; i sobretot als de casa pel seu recolzament constant. Al meu pare, que és amb qui més comparteixo el meu interès per les matemàtiques. A la meva germana, per voler dedicar part del seu temps lliure a ajudar-me a introduir les dades a l'*Excel*. I en especial a la meva mare, per aconsellar-me sempre que ho he necessitat, per llegir-se amb mi el treball i per animar-me en els moments en què he vist la cosa costa amunt.

Sense aquestes persones, l'elaboració d'aquest treball no hagués estat possible, així que gran part del mèrit és també seu.

Índex

Introducció

TDR. Treball de Recerca. Tres paraules, unes simples sigles que porto sentint des de fa anys. Havia arribat el moment. El moment de decidir un tema, del fet que m'assignessin un tutor, i no estava preparat. Tots volem aparentar que ens coneixem perfectament a nosaltres mateixos. Ara bé, quan ens pregunten què ens agrada, sobre què voldríem investigar, ens quedem en blanc.

Explicaré una breu història. A casa meva sempre ens ha agradat jugar a jocs de taula; la societat d'avui en dia ens diria antiquats. Així és com un dia, mentre jugàvem al *Catan*, joc d'estratègia que es juga amb 2 daus, em vaig plantejar una qüestió. Anem una mica enrere: la partida anterior havia sortit de manera exagerada el 8, mentre que el 6, una opció igualment probable, havia brillat per la seva absència. Jo, que recordava això, vaig córrer a posar totes les meves forces en el 6. En veure-ho, mon pare em va preguntar què feia. Li vaig explicar (en acabar la partida, no abans, és clar) que el sis havia de sortir sí o sí, i que per això apostava per ell, i vam iniciar una discussió. La pregunta que em vaig acabar fent és la següent: si, de dos nombres amb la mateixa probabilitat, un ha tocat exageradament i l'altre no ha ni aparegut, és més favorable apostar pel segon? Aquesta va ser la meva estratègia, i em va servir per guanyar. Però, va ser aquesta correlació casualitat, o es basava en alguna cosa demostrable?

Tot això va tenir lloc mesos abans que em comencés ni tan sols a plantejar sobre què faria el meu TDR, però ja em va crear un dubte. Mesos més tard, en una d'aquestes tardes d'hivern amb boira, em va tornar a la ment: i si centrés el treball en aquella pregunta que fa temps em va quedar sense resposta? Va ser en aquell moment que vaig decidir que estudiaria la probabilitat.

Sempre m'han agradat els números, les dades. Les estadístiques amaguen coses que a simple vista no podem captar, patrons amb un significat ocult. Són una mena de mapa del tresor, o de mirall màgic, si ho mirem així. El cas de la probabilitat, tanmateix, és el més impressionant de tots. Qui s'ha fet expert en aquest camp és capaç de transformar els nombres en una bola per preveure el futur. Sembla de pel·lícula de ficció, veritat? En canvi, la realitat és que utilitzem aquesta bola màgica que és la probabilitat en infinitat d'ocasions cada dia. Per començar, la meteorologia n'és un clar exemple: "fem aquella excursió, o l'ajornem perquè al temps hi diu que plourà?". Però no tan sols això. Decisions tan quotidianes com pujar a un cotxe, sortir al carrer o fins i tot parlar amb una persona es fan, de manera inconscient, mogudes per la probabilitat. Ningú demanarà un favor a algú quan estigui de mal humor, pel simple motiu que sap que la probabilitat d'obtenir un no per resposta seria molt més alta.

Però tornem als jocs. En ells, també s'han de prendre decisions constants basades en la probabilitat. D'entre tots, em vaig decantar pel Blackjack per la seva fama de "joc de pura sort". M'intrigava la següent qüestió: serà possible demostrar que es pot tenir una estratègia guanyadora en aquell joc en què tot sembla aleatori? Demòcrit[1] deia que en el món tot es mou per l'atzar. Però, i si existís una manera d'eludir aquesta aleatorietat total? De decantar la balança a favor nostre?

La probabilitat i els jocs d'atzar han estat, des dels seus orígens, cosins germans. Podríem dir, fins i tot, que un va néixer arran de l'altre. Curiosament, són els jocs d'atzar els que tenen més anys d'història, i els que van impulsar la creació d'una nova branca de les matemàtiques en tota regla, com és la probabilitat. Però d'això ja en parlarem més endavant. Com tots, aquest és un tema sobre el qual ja s'han fet estudis i s'han escrit llibres. Una gran limitació que se'm va presentar en fer-ho com a TDR és el fet de no poder provar els avenços que fes a través d'apostes reals, com sí que van fer altres matemàtics, com Edward O. Thorp[2] per corroborar les conclusions del seu llibre *Beat the dealer*[3]. Això no obstant, en la vida tota contrarietat té una part bona. Així és que, davant la impossibilitat de jugar partides de Blackjack en un casino, va néixer la meva part pràctica.

Per desenvolupar-la, vaig haver de triar les eines informàtiques adequades. D'una banda, i després d'una recerca en profunditat, vaig decantar-me per l'*Excel* perquè em permetia fer els càlculs complexes que necessitava, i alhora estava al meu abast. Per traslladar aquest càlculs al treball, però, necessitava un programa capaç de compaginar el llenguatge verbal i el matemàtic. Així és com vaig descobrir un sistema nou per mi: el LaTeX, i, de la seva mà, l'*Overleaf*, l'eina que m'ha servit per redactar aquest projecte.

Aquest treball pretén endinsar-se en el món de la probabilitat, i descobrir les eines que aquesta ens dona amb l'objectiu final d'utilitzar-les per trobar una estratègia de joc òptima pel Blackjack. També coneixerem el que són els mètodes de Montecarlo, sense els quals no hauria pogut assolir el que ha acabat sent aquest treball. Per últim, descriuré la meva experiència personal en la creació de la part pràctica, l'algorisme computacional gràcies al qual vaig poder simular més de deu milions de partides de Blackjack sense tocar un sol naip.

[1]**Demòcrit** va ser un filòsof (per aquell llavors, físic) presocràtic grec, que va introduir per primer cop la idea que l'univers és format per àtoms.

[2]**Edward Oakley Thorp** és un doctor en matemàtiques en la universitat de UCLA i té un mestratge en física. És conegut per ser el primer en proposar i, posteriorment, demostrar que el Blackjack no és un joc completament d'atzar. Se'l considera el pare del comptatge de cartes.

[3]**Beat the dealer** és un llibre escrit l'any 1962 per Edward O. Thorp, en el que es parla d'una estratègia idònia (deduïda pel mateix autor) per guanyar al Blackjack, i de com el comptatge de cartes pot ajudar a fer-ho.

Capítol 1

Probabilitat

"En el fons, la teoria de probabilitats és només sentit comú expressat amb números"

- Pierre Simon Laplace (1749 - 1827)

En aquest capítol, es farà una **definició àmplia del terme probabilitat**, abordant la clàssica i l'axiomàtica de Kolmogórov. Així mateix, es parlarà de la seva **història**, començant pels seus orígens en el segle XVII amb Blaise Pascal i Pierre de Fermat, i acabant en el segle XX amb Andrei Kolmogórov. Per últim, es farà una aproximació a certs conceptes de probabilitat importants en el projecte, com **valor esperat i variància**, així com s'explicarà **la llei dels grans nombres**, clau en el treball.

1.1 Definició de probabilitat

1.1.1 Definició clàssica

Segons el llibre *Estadística básica para estudiantes de ciencias*[1] publicat per la Universitat Complutense de Madrid, "el concepte probabilitat sorgeix per mesurar la certesa o incertesa que ocorri un succés concret en un experiment[2] aleatori". Segons *diccionari.cat*[3], la probabilitat és el "concepte que permet d'expressar quantitativament el caràcter aleatori d'un esdeveniment o fenomen que hom creu que pot succeir."

El sistema clàssic i més lògic per mesurar aquesta probabilitat és el **mètode de freqüència**, que consisteix a repetir un experiment un nombre gran (a més gran més exactitud) de vegades i analitzar-ne els resultats. D'aquesta manera, se suposa n com el nombre total de cops que s'ha realitzat l'assaig, i n_A com les ocasions dins d'aquest total en què s'ha donat el succés favorable o el que s'estudia. Imaginant el cas ideal, que és aquell en què és possible reiterar l'experiment infinitament, es pot definir P(A)[4] amb l'expressió matemàtica:

$$P(A) = \lim_{x \to \infty} \frac{n_A}{n} = \frac{\text{Freqüència absoluta de A}}{\text{Nombre de vegades que es realitza l'experiment}} \tag{1.1}$$

La freqüència absoluta de "A" és el nombre de cops que es repeteix el cas "A" al llarg de l'experiment. Així doncs, si l'esdeveniment és impossible: $n_A = 0$, i $P(A) = 0$. D'altra banda, si aquest es dona sempre que es faci l'experiment, $n_A = n$, i $P(A) = 1$. Així, queda fàcilment demostrat que la probabilitat és un nombre que oscil·la sempre entre 0 i 1, o cosa que és el mateix:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{1.2}$$

No obstant això, assolir el límit mostrat a dalt en sentit literal és impossible, i repetir la prova la quantitat suficientment gran de vegades per a obtenir resultats fiables requereix molt de temps (almenys manualment, i considerant que l'origen de la probabilitat se situa en una època en què ningú s'havia

[1]Veure bibliografia [1]

[2]En probabilitat el concepte **experiment** té un significat lleugerament diferent del que acostumem a donar-li. Es defineix com qualsevol cosa o acció, amb una sèrie de resultats possibles, que es pot repetir infinitament.

[3]**Diccionari.cat** és un diccionari en línia de la llengua catalana, proporcionat per Enciclopèdia Catalana.

[4]**P(A)** refereix a la "freqüència relativa de A", que és el quocient entre la freqüència absoluta de A i el nombre total de repeticions de l'experiment.

ni tan sols imaginat un ordinador, no existia cap altre mètode). És per això que, amb el temps, s'han inventat mètodes diferents del de freqüència. Un d'ells és el **mètode clàssic**, introduït per Pierre-Simon Laplace[5], que simplifica enormement la complexitat del càlcul **sempre que tots els casos siguin equiprobables[6]**, i que l'espai mostral[7] (Ω) sigui finit. Si s'agafa m com el nombre de casos favorables, i n com el nombre de casos totals, la **regla de Laplace** s'enuncia com:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totals}} \tag{1.3}$$

1.1.2 Definició axiomàtica

Les definicions clàssiques mostrades anteriorment, o bé suposen massa dificultats (mètode de freqüència) o bé són molt circumstancials (regla de Laplace). Aquest és el motiu per què, contemporàniament, s'utilitza la definició axiomàtica, més general, més correcta.

Aquesta concepció va ser introduïda pel matemàtic rus **Andrei Kolmogórov**, qui l'any 1933 parlava per primer cop, en el seu llibre *Fonaments de la teoria de la probabilitat*, d'allò que encara es coneix com els tres axiomes[8] de la probabilitat. Aquests són, per definició, les condicions mínimes que ha de complir una funció definida sobre un conjunt de successos per tal de determinar les seves probabilitats. Són els següents:

Primer axioma: La probabilitat de qualsevol esdeveniment és un nombre real positiu:

$$P(A) \in \mathbb{R}, \quad P(A) \geq 0 \tag{1.4}$$

Segon axioma: La probabilitat que, en realitzar un experiment, ocorri algun dels casos continguts en l'espai mostral (Ω) és 1:

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.5}$$

Tercer axioma: En el cas que dos successos siguin incompatibles[9] ($A \cap B = \varnothing$)[10], es compleix sempre la condició:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.6}$$

---

[5] **Pierre Simon Laplace** fou un cèlebre matemàtic, astrònom i físic francès. És especialment conegut per la seva obra *Traité de Mécanique Céleste* (Tractat de mecànica celestial), en què ofereix una explicació al funcionament del Sistema Solar. Paral·lelament a això, va estudiar la teoria de probabilitats, sent el primer en determinar el valor de la integral de Gauss (àrea que cobreix una campana de Gauss), que és 1.

[6] Dos o més successos són **equiprobables** quan tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer.

[7] L'**espai mostral** en càlcul de probabilitats és el conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment. En el cas d'un dau, per exemple, l'espai mostral seria 1,2,3,4,5,6, un total de 6 successos, i per tant $\Omega = 6$

[8] Es considera un **axioma** aquella proposició tan evident que s'interpreta que no requereix demostració.

[9] Dos successos són **incompatibles** en cas que, si es dona un, sigui impossible que es doni l'altre.

[10] El símbol $\cap$ significa **intersecció de dos elements**, és a dir, que els dos es donin simultàniament. Per exemple: En un dau, la intersecció entre $A = 2, 3$, i $B = nombres\, parells$, és $A \cap B = 2$, atès que és l'únic cas comú entre tots dos elements.

Això es pot ampliar a qualsevol quantitat de casos incompatibles:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \tag{1.7}$$

Quan dos successos siguin compatibles[11] ($A \cap B \neq \varnothing$), es compleix sempre la condició:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.8}$$

El diagrama de Venn[12] de la figura 1.1 és una il·lustració gràfica de la prèvia equació.

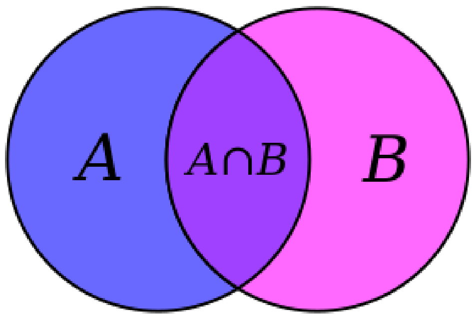

Figura 1.1: Diagrama de Venn de la intersecció de dos conjunts

Font: Wikipedia

1.2 Història de la probabilitat

1.2.1 Orígens

Els inicis del concepte de probabilitat es remunten a milers d'anys enrere, però, en la pràctica, els historiadors marquen els seus inicis fa poc més de quatre-cents cinquanta anys, atès que tots els avanços que s'han fet han estat en aquests darrers cinc segles. La primera menció escrita sobre el terme data de 1564, quan el físic, metge i astrònom italià **Girolamo Cardano**[13] hi va fer referència en el seu llibre *Liber de ludo aleae*[14]. Així i tot, per raons que encara es desconeixen, l'obra no va ser publicada fins més de cent anys després de la seva escriptura, l'any 1663.

En aquesta primera referència al concepte, Cardano va utilitzar experiments senzills, com el llançament d'un dau, per descobrir i comprendre algunes de les bases de la teoria de probabilitats. El polifacètic

[11] Dos successos són **compatibles** en cas que, si es dona un, es pugui donar l'altre.

[12] Un **diagrama de Venn** és una representació gràfica de l'agrupació de dos o més elements, representant cadascuna com un cercle o oval.

[13] **Girolamo Cardano** fou un intel·lectual renaixentista italià. Cardano fou una de les peces clau en la fundació de la teoria de probabilitats, així com el descobridor dels nombres complexos o imaginaris.

[14] Títol en llatí, que es tradueix al català com *Llibre dels jocs d'atzar*.

científic va arribar des d'un primer moment a la conclusió que era eficaç tractar la probabilitat com una raó entre successos favorables i totals. Va plantejar també altres idees, que no va ser capaç de demostrar al complet. Moltes d'aquestes s'han acabat comprovant i convertint en regles legítimes de la teoria de probabilitats, com la llei dels grans nombres (vegeu la secció 1.3.2).

1.2.2 Inicis de la història documentada

Ens remuntem ara a l'any 1654. Antoine Gombaud, més conegut com el **Cavaller de Méré**[15], era un home de classe alta, escriptor i pensador i, a més, un expert jugador. Aquest, que també era aficionat a les matemàtiques, es va interessar per alguns problemes relacionats amb els jocs d'atzar, els quals, per la seva escassetat de coneixement sobre la matèria, no era capaç de resoldre. Un enigma es va plantejar consistia a determinar si era o no profitós apostar regularment una certa quantitat de diners al fet que, al llarg de 24 tirades d'una parella de daus, sortiria almenys una vegada un doble sis. Un altre dels dilemes que es qüestionava és aquell conegut com **el problema del repartiment de diners**, al qual precisament es dedica una secció en aquest treball (3.1).

Figura 1.2: Antoine Gombaud

Font: Pinterest

Els seus dubtes i mancances el van portar a iniciar un intercanvi epistolar amb **Blaise Pascal**[16], un dels matemàtics més brillants de l'època. Aquest, pel seu compte, va escriure a **Pierre de Fermat**[17], també un gran expert matemàtic francès i amic seu, i entre tots tres van discutir els temes que el Cavaller de Méré proposava. Es diu que va ser en aquesta llarga correspondència on els principis fonamentals de la teoria de probabilitats es van formular per primer cop. Tot i que moltes de les cartes que es van enviar s'han perdut, amb el transcurs del temps la història ha atorgat a Pascal i Fermat el títol de **pares de la probabilitat**.

[15] El **Cavaller de Méré** fou un home que, tot i no pertànyer a la noblesa, va adoptar el títol de cavaller per assignar-se'l al personatge que representava les seves pròpies opinions en les seves escriptures. Desconfiava de la democràcia i del poder, i creia que la millor manera de resoldre els dilemes que es plantejaven era en discussions obertes amb gent intel·ligent i moderna.

[16] **Blaise Pascal** fou matemàtic francès del segle XVII. Des de nen fou un prodigi, escrivint un tractat sobre geometria projectiva als 16 anys. Als seus 19 anys, va començar un treball pioner sobre les màquines calculadores, que el va establir com un dels dos inventors de la calculadora mecànica, que ha derivat en l'actual que tots coneixem.

[17] **Pierre de Fermat** fou un jurista i matemàtic francès (occità). Entre els seus treballs, sobresurten l'aplicació de l'àlgebra a la geometria que va fer juntament amb René Descartes, així com els seus avanços en el càlcul de límits, continuïtat, màxims i mínims i construcció de tangents.

1.2.3 Expansió de la teoria en segles posteriors

A les publicacions de Pascal, Fermat i Gombaud es van succeir nombroses obres d'altres científics i savis, que estendrien i formalitzarien la teoria en temps posteriors. Un dels primers en fer-ho va ser **Christiaan Huygens**[18], un físic i matemàtic neerlandès, qui va estudiar la correspondència entre els intel·lectuals francesos. Poc temps després (1657), va publicar el llibre *De ratiociniis in ludo aleae*[19], tractant alguns dels temes que es comentaven en les cartes. En aquest, va introduir alguns conceptes com l'esperança matemàtica[20]. Gràcies a l'important paper que jugaven els jocs d'atzar (entreteniment preferit de molts dels homes de classe alta de l'època) en l'obra, aquesta es va popularitzar ràpidament (i amb ella la teoria de probabilitats).

Després d'això, durant el **segle XVIII**, l'expansió s'accelerà, moguda per la fama que tenien els jocs d'atzar en l'alta societat. El seu major promotor en aquest període va ser **Jakob Bernoulli**[21] (vegeu la figura 1.5) a través del seu reconegut *Ars conjectandi*[22] (1713). El llibre es divideix en dues parts: la primera, que és bàsicament un estudi de l'obra de Huygens, conclou amb la distribució de Bernoulli[23]; la segona, que se centra més en temes de combinatòria, culmina amb allò que es coneix actualment com els nombres de Bernoulli. Quan aquest va morir, a mitjans del segle XVIII, un altre científic, Abraham de Moivre, va ocupar el seu lloc. Veritablement, va ser ell qui va donar el nom als nombres de Bernoulli, en honor al primer matemàtic que els va estudiar.

Fins al **segle XIX**, per tant, l'estudi de la teoria de probabilitats s'havia centrat gairebé exclusivament en donar solucions matemàtiques als jocs d'atzar. No va ser fins l'any 1812 que **Pierre Simon Laplace**, un altre brillant matemàtic i físic francès, va traslladar per primer cop les seves pròpies idees i les dels seus predecessors a camps que no fossin les apostes. En la seva obra *Theorié analytique des probabilités*[24], Laplace va utilitzar la probabilitat per resoldre problemes científics i pràctics. Alguns exemples en són la teoria d'errors, les matemàtiques actuàries[25] o l'estadística mecànica. Així i tot, Laplace no va ser només un innovador donant noves aplicacions a la teoria de probabilitats; també va fer contribucions a

[18]**Christiaan Huygens** fou un matemàtic, físic i astrònom neerlandès. Va ser el primer en utilitzar els coneixements matemàtics per descriure fenòmens físics, i per això és considerat el primer físic teòric.

[19]Títol en llatí, que es tradueix al català com *Raonaments sobre els jocs d'atzar*.

[20]L'**esperança matemàtica** es defineix com "la mitjana dels valors que pot prendre una variable aleatòria, ponderats per la probabilitat de cadascun d'aquests valors. Representa el valor mitjà que un espera de la variable després d'un nombre elevat de repeticions de l'experiment", segons la definició donada per *Wikipedia*.

[21]**Jakob Bernoulli** fou un matemàtic suís, conegut especialment pels seus treballs en teoria de probabilitats i càlcul diferencial i derivades.

[22]Títol en llatí, que significa *l'Art de conjecturar*

[23]La **distribució de Bernoulli**, que adopta el nom del seu inventor Jakob Bernoulli, és la més bàsica de les distribucions de probabilitat. Consisteix en una variable aleatòria (X) amb dos possibles resultats: 1 (èxit) i 0 (fracàs), on $P(X = 1) = p$ i $P(X = 0) = q = 1 - p$ (ja que, si no ocorre un, ocorre l'altre). El valor esperat de la distribució és la mitjana total dels resultats, és a dir, p.

[24]Títol en francès, que es tradueix com *Teoria analítica de la probabilitat*.

[25]Les **matemàtiques actuàries** són una aplicació de les matemàtiques per tal de resoldre problemes financers i econòmics sota un cert grau d'incertesa, risc o aleatorietat.

aquesta. Una d'elles la famosa Regla de Laplace, esmentada anteriorment (vegeu la secció 1.1.1).

Amb tot, els usos que Laplace va donar a la probabilitat, encara i havent-se allunyat del joc, pertanyien als camps de les matemàtiques i la física. No obstant això, la seva aplicació de la probabilitat en nous àmbits va ser el primer pas per a la seva expansió. En conseqüència, avui en dia aquesta té aplicacions en camps tan dispars com la genètica, l'economia, la psicologia i la meteorologia.

Figura 1.3: Pierre Simon Laplace

Font: Wikipedia

Després de Laplace, **a finals del segle XIX i al llarg del XX**, matemàtics com Chebysev, Markov i von Mises van ser alguns dels contribuïdors més importants. Així i tot, sens dubte, el més rellevant de tots fou **Andrei Kolmogórov** (1903 - 1987), un matemàtic rus que va realitzar grans aportacions a la teoria de la probabilitat i a altres branques com la topologia[26]. Sota la supervisió del matemàtic Nikolái Luzin, es va doctorar a la Universitat de Moscú l'any 1929. Kolmogórov va estructurar el sistema axiomàtic de la probabilitat, mitjançant la teoria de conjunts[27]. També va fundar la teoria de la complexitat algorítmica[28], entre molts altres descobriments i avanços que el van fer rebre gran quantitat d'honors en molts països. Entre aquests, es destaquen el premi Lenin[29] (1965) i la medalla Lobachevski[30] (1987), així com el seu nomenament com a membre de l'Acadèmia Russa de Ciències (1939).

Kolmogórov es va interessar per la matèria des de jove. L'any 1933, a l'edat de 30, va publicar en alemany *Els fonaments de la teoria de probabilitat*, el llibre que va impulsar la seva reputació i el va col·locar com un dels majors experts matemàtics del moment. En aquest, va estructurar el sistema axiomàtic (vegeu la secció 1.1.2), que gairebé un segle després encara no s'ha refutat ni canviat, i defineix les bases de la teoria moderna.

[26]La **topologia** és la part de la matemàtica que estudia aquelles propietats dels conjunts de punts de la recta, del pla, de l'espai o d'espais de dimensions superiors que no són alterades per les transformacions contínues, segons la definició donada per *Diccionari.cat*.

[27]La **teoria de conjunts** és una branca de la lògica matemàtica que estudia les relacions entre conjunts. Va ser fundada pel rus-alemany matemàtic George Cantor. Vegeu la figura 1.1, que és un diagrama de Venn de la intersecció entre dos conjunts.

[28]La **complexitat de Kolmogórov** d'un objecte, com pot ser un conjunt de text, és la mida o quantitat d'informació que ocupa el programa informàtic més petit capaç de produir tal objecte.

[29]El **premi Lenin** fou un dels màxims premis de la Unió Soviètica, que s'atorgava cada 22 d'abril (data d'aniversari de Vladimir Lenin) a aquells que haguessin sobresortit en camps com la ciència o la literatura.

[30]La **medalla Lobachevski** era un premi matemàtic que s'entregava cada 5 anys per l'Acadèmia Russa de Ciències. Avui dia, però, l'entrega la Universitat de Kazan.

1.3 Conceptes essencials de probabilitat

1.3.1 Valor esperat (o esperança matemàtica) i variància

El **valor esperat**, també conegut com **esperança matemàtica**, i la **variància**, són dos conceptes clau que cal conèixer per tal de comprendre el treball a partir d'aquest punt. És per això que s'expliquen aquí i no en el posterior capítol sobre, precisament, conceptes clau. Per entendre què significa cadascun, ens hem d'imaginar una campana de Gauss com la següent:

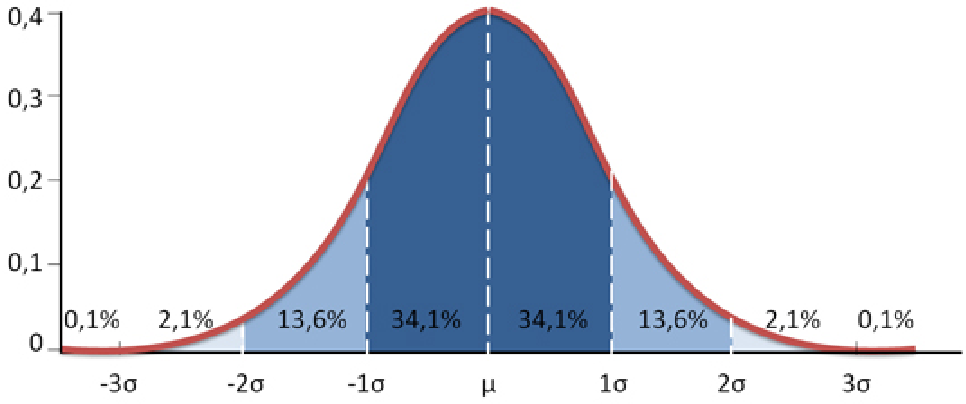

Figura 1.4: Campana de Gauss

Font: *Máster MBA Málaga*

Una propietat de totes les campanes de Gauss és la següent: l'àrea total que cobreixen sempre suma 1. Això implica que l'amplitud i l'altura són directament dependents l'una de l'altra. En el gràfic, l'eix de les abscisses o eix X representa la variància. Com més baixa i ampla és la campana, més gran és aquesta variància. Així doncs, la variància és "la mesura de la dispersió d'una variable aleatòria X respecte al seu valor esperat $\mathbb{E}[X] = \mu$". Es defineix com $(X - \mathbb{E}[X])^2$, i es representa amb la lletra grega sigma al quadrat (σ^2).

D'altra banda, el valor esperat és el punt més alt de la campana. El centre. El resultat que, després de les suficients repeticions, serà més comú en l'experiment. Depèn directament de la variància atès que, si aquesta és àmplia, el pic de la campana de Gauss serà més baix (recordem que l'àrea sempre és 1). Es representa amb la lletra grega mu (μ).

1.3.2 Llei dels grans nombres

La **llei dels grans nombres** és un teorema que enuncia que, si es repeteix un experiment una certa quantitat de vegades, independents les unes de les altres, i es fa la mitjana dels resultats, el valor obtingut s'aproparà més i més a l'esperat a mesura que la quantitat de repeticions augmenti. La primera persona a demostrar-la va ser Jakob Bernoulli, a principis del segle XVIII, mentre estudiava els jocs d'atzar. La primera menció que se'n coneix es troba en la seva famosa obra *Ars conjectandi*. N'existeixen dues versions: la feble i la forta. **La llei forta dels grans nombres** és la versió més completa de les dues, i conté la feble dins. Aquesta enuncia que, si $X_1, X_2, X_3, \ldots$ és una successió infinita de variables aleatòries independents amb el mateix valor esperat (μ) i la mateixa variància (σ^2), amb mitjana $\overline{X}_n$, que compleix que $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$, es verifica:

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{X}_n = \mu) = 1 \tag{1.9}$$

Dit d'una altra manera, la llei demostra que, en el cas hipotètic en què es repetís un experiment infinitament, el valor esperat seria igual a la mitjana dels resultats obtinguts. Per conseqüent a mesura que el nombre de reiteracions s'apropa al límit, la mitjana convergeix a μ.

Figura 1.5: Jacob Bernoulli

Font: Buscabiografias

1.3.3 Probabilitat condicionada

La **probabilitat condicionada** és la probabilitat que ocorri un succés A donat que ocorri un altre succés B, sempre que $P(B) > 0$. S'escriu com $P(A|B)$ o $P(A/B)$, es llegeix com "probabilitat de A donat B" i es defineix:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.10}$$

La probabilitat condicionada sovint porta a una equivocació, que pel fet de ser tan comú ha rebut el nom de **la fal·làcia[31] de la probabilitat condicionada**. Aquesta consisteix en l'assumpció errònia que $P(A|B) = P(B|A)$.

Exemple de probabilitat condicionada

Un exemple d'això, a més molt actual, és la **paradoxa del fals positiu**. Suposem un grup de persones de les quals un 1% pateix una malaltia. Si escollim un individu a l'atzar:

$$P(\text{malalt}) = 0,01 \qquad \text{i} \qquad P(\text{sa}) = 0,99 \tag{1.11}$$

Ara, suposem que apliquem a aquest grup d'individus una prova. Aquesta té un 1% de donar positiu en persones que no pateixin la malaltia, és a dir:

$$P(\text{positiu}|\text{sa}) = 0,01 \qquad \text{i} \qquad P(\text{negatiu}|\text{sa}) = 0,99 \tag{1.12}$$

Darrerament, la prova té també un 1% de probabilitat de fals negatiu:

$$P(\text{positiu}|\text{malalt}) = 0,99 \qquad \text{i} \qquad P(\text{negatiu}|\text{malalt}) = 0,01 \tag{1.13}$$

[31]Una **fal·làcia** es defineix, segons *Diccionari.cat*, com un "conjunt de paraules o qualsevol altra cosa disposada per a enganyar."

Un cop vistes aquestes probabilitats, un diria que el marge d'error de la prova és molt petit i que es pot assumir. Ara bé, a partir d'aquests càlculs es pot trobar el següent:

La fracció d'individus que estan malalts i donen positiu és (fent servir l'equació 1.10):

$$P(\text{positiu} \cap \text{malalt}) = P(\text{malalt}) \cdot P(\text{positiu}|\text{malalt}) = 0,01 \cdot 0,99 = 0,0099 \tag{1.14}$$

D'altra banda, la fracció d'individus sans que donen positiu és:

$$P(\text{positiu} \cap \text{sa}) = P(\text{sa}) \cdot P(\text{positiu}|\text{sa}) = 0,99 \cdot 0,01 = 0,0099 \tag{1.15}$$

Així doncs, la probabilitat que un individu que ha donat positiu estigui realment malalt, és a dir, la fiabilitat de la prova, és:

$$P(\text{malalt}|\text{positiu}) = \frac{P(\text{malalt} \cap \text{positiu})}{P(\text{positiu})} = \frac{0,0099}{0,0198} = 0,5 \tag{1.16}$$

En resum, aquella prova que aparentava tenir un error del 1%, realment en té un del 50%. És aquesta comú equivocació intuïtiva el que conforma la fal·làcia de la probabilitat condicionada. Ara bé, existeix una formula que reuneix tot el procediment anterior, i que relaciona $P(A|B)$ amb $P(B|A)$ de manera directa. Aquesta és la formula o teorema de Bayes[32].

1.3.4 Teorema de les probabilitats totals

El **teorema de les probabilitats totals** permet calcular la probabilitat que ocorri un succés que pot ser realitzat per diferents camins (per exemple, la probabilitat que un producte que fabriquen tres màquines diferents sigui defectuós). Per tal de comprendre aquest teorema, cal definir primer el concepte de partició.

Partició

Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ successos d'un mateix espai mostral (Ω), aquests formen una **partició** de Ω si es verifiquen les següents condicions:

- Els successos són mútuament excloents, o independents ($A_i \cap A_j = \varnothing$)
- Els successos són col·lectivament exhaustius ($A_i \cup A_j \cup \ldots \cup A_n = \Omega$)
- Cap dels successos és el conjunt buit ($A_1, A_2, \ldots, A_n \neq \varnothing$)

[32]Vegeu 1.3.5 Teorema de Bayes (pàg. 18)

Teorema de les probabilitats totals

El teorema de les probabilitats totals estableix que: siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elements d'una partició de l'espai mostral (Ω), i sigui B un altre element qualsevol de Ω, la probabilitat que ocorri B es defineix de la manera següent:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i) \tag{1.17}$$

Exemple del teorema de les probabilitats totals

Una empresa disposa de tres màquines que fabriquen el mateix producte. La màquina A produeix un 40% del total, la B un 30% i la C un altre 30%. Aquestes, però, de tant en tant creen productes defectuosos. La màquina A en fabrica un 2% de defectuosos sobre la seva producció total, la B un 3% i la C un 5%. Quina és la probabilitat que un envàs fabricat per aquesta empresa sigui defectuós?

Les dades donades són les següents:

$$P(A) = 0,40 \qquad P(D|A) = 0,02 \tag{1.18}$$

$$P(B) = 0,30 \qquad P(D|B) = 0,03 \tag{1.19}$$

$$P(C) = 0,30 \qquad P(D|C) = 0,05 \tag{1.20}$$

Així doncs, la resolució del problema, mitjançant el teorema de les probabilitats totals, és:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) = 0,032 \tag{1.21}$$

Les probabilitats que un producte d'aquesta empresa surti defectuós són del $3,2\%$.

1.3.5 Teorema de Bayes

El **teorema de Bayes** va ser plantejat per primer cop pel matemàtic Thomas Bayes[33] i publicat dos anys després de la seva mort, l'any 1763. Aquest determina la probabilitat d'un element A donat B [$P(A|B)$] en funció de la probabilitat d'aquest mateix element donat A [$P(B|A)$]. El teorema enuncia: siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elements d'una partició de l'espai mostral (Ω), i sigui B un element qualsevol del qual es coneix la probabilitat condicional [$P(B|A_i)$], llavors $P(A_i|B)$ ve donada per la següent expressió:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} \tag{1.22}$$

[33]**Thomas Bayes** (1701 - 1761) fou un matemàtic i filòsof britànic, conegut pel fet de ser l'inventor del teorema de Bayes.

Exemple del teorema de Bayes

Continuant amb l'exemple donat en l'apartat anterior; si s'obté un producte defectuós, quines son les probabilitats que l'hagi fabricat la màquina A? I la B? I la C?

En aquest cas apliquem el teorema de Bayes, atès que tenim informació prèvia (sabem que el producte és defectuós). D'aquesta manera, i recordant que $P(D) = 0,032$, la resolució del problema és la següent:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = 0,25 \tag{1.23}$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = 0,28 \tag{1.24}$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = 0,47 \tag{1.25}$$

Resumint, si un producte és defectuós, la màquina C és la més propensa a haver-lo fabricat.

Capítol 2

Conceptes clau per comprendre el treball realitzat:

“Un jugador no és més que un home que es guanya la vida a partir de falses esperances”

- William Bolitho

L'objectiu d'aquest capítol és definir i explicar alguns dels termes clau que apareixen durant el treball, a fi que el lector els pugui consultar sempre que li sigui necessari. Es farà una explicació del que és un **procés d'inducció cap enrere**, i seguidament s'il·lustrarà amb un exemple (la paradoxa del centpeus). D'altra banda, s'exposarà què són els **mètodes de Montecarlo**, i es recolzarà l'explicació també amb exemples. En els posteriors capítols, quedarà indicat per mitjà de peus de pàgina el número de la secció en què s'explica el concepte utilitzat en cada moment.

2.1 Procés d'inducció cap enrere

El **procés d'inducció cap enrere** en teoria de jocs és, segons la definició donada per *Wikipedia*, un procés iteratiu[1] que "consisteix a raonar enrere en el temps, començant pel final d'un problema o situació, per tal de determinar una seqüència d'accions òptimes". Aquesta tècnica s'utilitza per resoldre jocs que siguin seqüencials[2] i finits, amb l'objectiu d'extreure conclusions sobre les accions òptimes en cada moment del joc.

2.1.1 Exemple d'inducció cap enrere: la paradoxa del centpeus

Suposem dos amics, A i B, jugant a un joc que consisteix en el següent:

Hi ha 2 munts de diners. En el primer hi ha 2 monedes d'1 €, i en el segon n'hi ha 0. Els munts són posats davant del jugador A, que té dues opcions:

1. Quedar-se el munt gran i donar el petit a l'altre jugador (en aquest cas s'acabaria el joc i cadascú es quedaria la quantitat que ha guanyat).
2. Cedir la decisió al jugador B i que comenci una nova ronda. En aquest cas, s'afegiria un euro a cada munt.

Així doncs, **cada vegada que s'escull l'opció 2, ambdós munts creixen 1 €**. El màxim de cops que es pot fer això són 100; si, arribat aquest punt, ningú ha triat l'opció 1, s'acaba el joc i no s'emporten res.

La solució teòrica a aquest problema es troba per inducció cap enrere. Suposem que s'arriba a la tirada núm. 100, l'última possible. En aquest torn, els munts sumen 101 i 99 euros, i li toca a l'amic B. Si decideix 2, els munts desapareixen i es queda amb 0 monedes, així que sabem amb certesa que elegirà 1. Per consegüent, A es quedarà 99 € i B 101 €.

[1]Un **procés iteratiu** és un mètode de recerca que es basa en la repetició de seqüències o fórmules per obtenir un resultat concret.

[2]En teoria de jocs, un **joc seqüencial** és aquell on les accions es donen en un ordre definit, talment que les accions passades tenen un efecte sobre les futures.

Però és clar, abans del torn 100 s'ha jugat el 99, on era A qui decidia. Ara els munts disposen de 100 i 98 euros. Si el jugador A decideix quedar-se amb l'opció 1, obtindrà 100 €. En canvi, si tria l'opció 2, s'arribarà a la tirada núm. 100. Però A ja sap que en aquest cas B triarà l'opció 1, i ell rebrà 99 €. Així doncs, mai elegirà 2, perquè prefereix guanyar 100 € a 99.

Però, abans del 99, s'ha jugat el torn 98. I així successivament, fins a arribar a la tirada 1, on A decidiria quedar-se amb els 2 € inicials. Tot i que aquesta solució, empíricament parlant, no té ni cap ni peus (al cap i a la fi, els 99 € finals són molt més valuosos que el premi inicial), la resolució teòrica del problema és aquesta. Per això es tracta d'una paradoxa. Com a curiositat, és interessant apuntar que, quan s'ha proposat aquest joc a persones reals, ningú s'ha quedat amb els 2 €. La majoria, però, tampoc ha arribat al final (que seria on més es lucrarien tots dos). El gruix més gran de gent atura el joc en un punt mitjà, moguda per una barreja d'anhel pel premi i desconfiança en el que el seu oponent pugui decidir.

Resumint, en això consisteix la inducció cap enrere: anticipar-se als esdeveniments futurs dels quals es té una certesa, per tal d'actuar de manera idònia en cada situació present.

2.2 Mètodes de Montecarlo

Els **mètodes de Montecarlo** o **simulacions de Montecarlo** són un ampli conjunt d'algorismes[3] computacionals que fan servir el mostreig aleatori per obtenir resultats. S'utilitzen especialment per problemes físics o matemàtics que són extremadament tediosos o directament impossibles de resoldre mitjançant altres mètodes (teòrics i més exactes). Així i tot, el camp on segurament més s'utilitzen és en el càlcul de riscos i pressupostos en empreses.

El que fa una d'aquestes simulacions computacionals és agafar un experiment que conté una o més variables aleatòries, assignar-li un valor a l'atzar a cadascuna d'elles, i repetir la prova un gran nombre de vegades (posem 10.000 com el mínim perquè tingui un percentatge alt de fiabilitat, tot i que el recomanable són 100.000 o fins i tot un milió). El seu rerefons matemàtic no és especialment complex. Tot gira al voltant de la llei dels grans nombres[4]. La precisió d'aquests mètodes es basa en el fet que, tal com enuncia el teorema esmentat, la mitjana dels resultats obtinguts en n reiteracions convergirà[5], quasi segurament[6], en el valor esperat a mesura que n s'aproxima a infinit.

[3] Es defineix **algorisme** com un "procés o conjunt de regles que cal seguir a l'hora de fer càlculs o altres operacions de resolució de problemes, especialment per ordinador", segons *Oxford Languages*.

[4] Vegeu 1.3.2 La llei dels grans nombres (pàg. 15).

[5] El verb **convergir** significa "unir-se en un mateix punt", segons *Oxford Languages*

[6] En teoria de probabilitats, es diu que un succés passa **quasi segurament** quan la seva probabilitat és 1 El conjunt d'excepcions a l'esdeveniment pot no ser el conjunt vuit ($\varnothing$), però la seva probabilitat d'ocórrer és 0.

2.2.1 Exemples de simulacions de Montecarlo

Comprendre un concepte desconegut a partir d'una definició tan teòrica pot ser realment difícil. És per això que val la pena acompanyar cadascuna d'aquestes explicacions amb exemples pràctics. Se'n mostraran 2.

El primer d'ells és un simple estudi d'un pressupost, segurament encarregat per una empresa. Els resultats es resumeixen en el gràfic de la figura 2.1, on la línia discontínua simbolitza el valor esperat i la vermella la mitjana de les simulacions. Es pot apreciar que, a mesura que la quantitat de proves augmenta, la variància[7] es fa cada cop més petita i arriba un moment en què les dues línies són coincidents. Dit d'una altra manera, quan s'han fet suficients reiteracions la mitjana dels resultats és fiable perquè, com s'observa en la figura 2.1, s'acaba aproximant escrupolosament a la solució exacta.

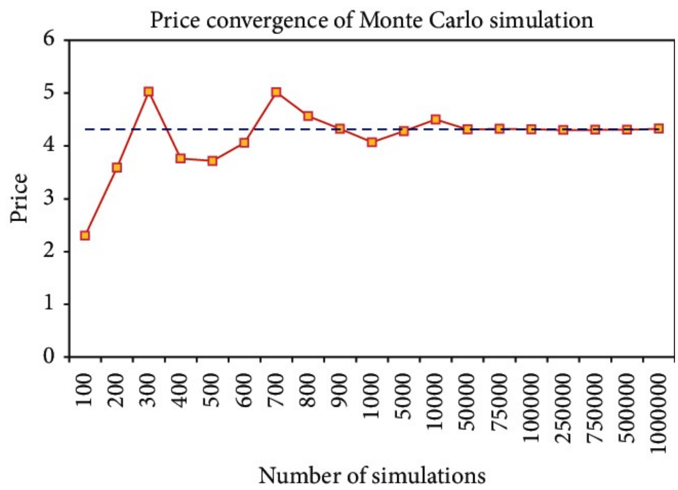

Figura 2.1: Exemple d'una simulació de Montecarlo

Font: *Researchgate*

Pel segon exemple, s'agafarà el més clàssic de tots els jocs d'atzar: el llançament d'una moneda. Com no hi ha cap raó per pensar el contrari, s'assumeix que és una moneda "justa", és a dir, un cantó no és més propens a sortir que l'altre. L'objectiu de l'estudi fet en aquest exemple és provar que si es llença una moneda un nombre n de cops, tal que $n \to \infty$, les possibilitats que surtin cares i creus respectivament convergiran en 50%, que és el resultat teòric.

Per portar-ho a la pràctica, es demana a l'ordinador que processi una gran quantitat de nombres aleatoris dins l'interval [0,1]. Un cop fet això, se li diu que retorni tots els valors menors o iguals que 0,5 com "CARA", i els majors que 0,5 com "CREU". Fent això, es fixen les probabilitats que cadascun d'ells surti (la meitat dels números s'assignen a cara i l'altra meitat a creu). Al principi de la prova, és possible que la mitjana dels resultats es desviï d'aquest 50%, però a mesura que el nombre de reiteracions es fa

[7]En teoria de probabilitat, la **variància** d'una variable aleatòria és la mesura de dispersió d'aquesta sobre la seva mitjana $\mathbb{E}[X]$.

gran, quasi segurament, s’hi anirà apropant, fins a acabar per convergir.

2.2.2 Executar una simulació amb Microsoft Excel

S’ha vist en l’exemple anterior que el fet que l’ordinador produeixi nombres a l’atzar dins un interval és clau pel funcionament de la simulació. *Excel* fa això amb la funció “RAND()”, que retorna un nombre aleatori entre 0 i 1, com s’aprecia en la figura 2.2. També es fa servir “RANDBETWEEN()” en certes ocasions, que fa el mateix en l’interval que l’usuari determini. Prenent aquests dos comandaments com a base, es pot dur a terme qualsevol simulació relativament bàsica o intermèdia.

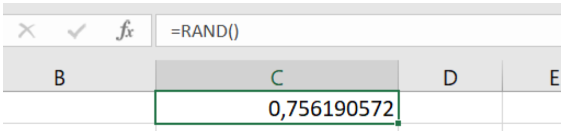

Figura 2.2: Funció RAND()

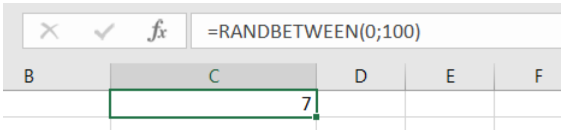

Figura 2.3: Funció RANDBETWEEN()

Si bé la figura 2.1 expressa els resultats en forma de gràfic, una simulació de Montecarlo en *Excel* s’ha de programar com a taula, i retornarà la informació en aquest mateix format.
Un altre comandament important a conèixer és “IF()”. Aquest avalua una condició concreta, i retorna un valor (especificat prèviament per l’usuari) si la condició és verdadera, i un altre (també especificat) si aquesta és falsa. Un model de tot el que s’ha explicat fins ara és la figura 2.4, una petita taula il·lustrativa fabricada a partir de les funcions “RAND()” i “IF()”.

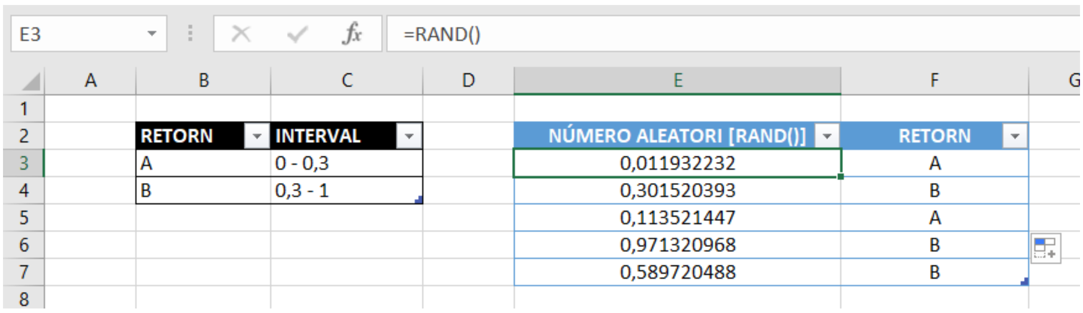

Figura 2.4: Exemple creat amb les funcions RAND() i IF

Font: Imatge de l’autor

Per programar la columna E, s’ha fet servir la funció “RAND()”, i per la columna F el comandament utilitzat és el següent: “$=$ IF$(E < 0,3;$ “A”; “B”$)$”. “IF()” requereix 3 paràmetres, separats per un punt i coma (;). El primer d’ells ($E < 0,3$ en l’exemple) és la condició; el segon i el tercer (“A” i “B” en l’exemple) són el valor retornat si es compleix i si no es compleix aquesta propietat, respectivament.

2.2.3 Resum: simulacions de Montecarlo

En síntesi, es fa una simulació de Montecarlo quan es vol resoldre un problema davant el qual tots els altres mètodes són insuficients. Funciona per mitjà d'altes quantitats de repeticions d'un experiment, que sovint conté una o més variables aleatòries. En cadascuna de les reiteracions, l'algorisme substitueix aquest factor, immesurable teòricament, per un nombre a l'atzar. L'aleatorietat que aportaria a la simulació fer això queda anul·lada a causa de les vegades que es reprodueix la prova.

Capítol 3

Concepcions errònies de la probabilitat

“No pots beneficiar-te d’una taula de ruleta a no ser que en robis diners.”

- Albert Einstein

En aquest capítol es tractaran tres problemes matemàtics sobre probabilitat, els quals porten sovint a confusions i resolucions errònies. Al llarg del capítol s'estudiarà cadascun d'ells a fons, mencionant les equivocacions més comunes, i s'acabarà cadascuna de les seccions donant-ne la solució correcta. Aquests seran: **el problema del repartiment de diners**, **el problema de Monty Hall** i **la fal·làcia de l'apostador**.

La probabilitat és una de les branques més lògiques i intuïtives de les matemàtiques. Malgrat això, per a resoldre problemes d'un relatiu nivell de complexitat es necessita un gruix molt gran de fórmules i càlculs exhaustius, que no es poden fer mentalment. És per aquest motiu que, quan alguns d'aquests problemes se'ns presenten, el nostre cervell i la nostra lògica ens poden jugar una mala passada. Amb alguns enigmes, és possible que la nostra ment ens porti a negar rotundament la realitat que tenim davant els nostres ulls. Aquí teniu uns exemples de tres famoses qüestions matemàtiques, algunes de les quals s'han tardat segles a resoldre i que han portat a molta gent a la cega equivocació.

3.1 El problema del repartiment de diners:

El problema del repartiment de diners o problema de la partida interrompuda és un dilema plantejat pel francès Antoine Gombaud, més conegut com el Cavaller de Méré. Gombaud tenia un ampli coneixement en allò que als jocs d'atzar es referia, però hi havia algunes coses en concret que no era capaç de comprendre (recordem que no era matemàtic sinó escriptor), així que se les va proposar a algú que sí que era expert en l'àmbit: Blaise Pascal. Ell les va compartir amb Pierre de Fermat. Una de les situacions que li va presentar és la següent:

Imaginem dos amics, A i B, jugant amb una moneda. Sempre que surt cara, el jugador A acumula 1 punt, mentre que si surt creu ho fa el jugador B. Cadascun d'ells ha apostat 32 €, i guanya qui arribi abans a 5 punts. Per motius que no venen al cas, el joc s'interromp abans que ningú hagi sortit victoriós. La puntuació està 4 a 3. La qüestió és: **com es reparteixen els diners?**

Per alguns, la resposta pot semblar aclaparadorament òbvia. És tan fàcil com distribuir el premi total, 64 €, en funció dels punts que té cadascú, donant $4/7$ del pot (37 €) al jugador A i $3/7$ (27 €) al B. Qui digui això no està completament equivocat, almenys des d'un punt de vista exclusivament numèric. El problema que té aquesta resolució, però, és que no dona un resultat just.

L'objectiu del joc, recordem, és assolir 5 punts. La resta de factors són negligibles. Vegeu que el premi pel guanyador serà sempre el mateix, hagin quedat 5 a 4 o 5 a 0. Per aquest motiu, la tècnica correcta i més justa per repartir els diners és calcular la probabilitat que tenia cada jugador de guanyar abans que s'aturés el joc, i repartir-se els diners en conseqüència.

És una assumpció universal que, en llençar una moneda a l'aire, la probabilitat que surti cara és $\frac{1}{2}$ i la que surti creu és també $\frac{1}{2}$. En la situació que es planteja, el màxim de tirades que poden ocórrer fins que es determini un guanyador són 2. Per una sola cara que surti en qualsevol d'aquestes dues tirades, el jugador A serà el guanyador. Agafant com a espai mostral tots els casos disponibles [CC, CX, XC, XX], la probabilitat que això passi és la següent:

$$P(C) = P(\overline{XX}) = 1 - P(XX) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \tag{3.1}$$

Sent C el cas en què surti almenys una cara i XX el cas en què en totes dues tirades surti creu. La probabilitat que surti creu tant en la primera com en la segona tirada és $\frac{1}{4}$ (o cosa que és el mateix, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$). Així doncs, el repartiment final dels diners seria 3 a 1, donant $3/4$ del pot (48 €) al jugador A i $1/4$ (16 €) al B.

Aquesta és la resposta que Blaise Pascal va donar al Cavaller de Méré, i que és històricament acceptada com a correcta. Tots els intents fracassats de resoldre aquest enigma per part de famosos matemàtics com Pacioli o Tartaglia mostren com a vegades el nostre cervell ens enganya i ens fa treure conclusions incorrectes. Tot i que ara que és resolt pot semblar senzill, aquest va estar un problema molt discutit entre els segles XV i XVII, i no va ser fins a finals d'aquest últim que Pascal va trobar-ne una resposta convincent.

3.2 El problema de Monty Hall:

El problema de Monty Hall és segurament el que més gent coneixerà, gràcies a la seva aparició en la pel·lícula *21: Blackjack*[1]. Aquesta paradoxa té el seu origen al programa televisiu americà *Let's make a deal*, i deu el seu nom al presentador de l'esmentat concurs: Monty Hall. La situació que presenta el problema és la següent:

Suposem un concursant, a qui se li ofereix elegir entre 3 portes tancades. Darrere una d'elles hi ha un cotxe, mentre que les altres dues amaguen cabres. El jugador n'escull una, posem la número 1, i **després que ho faci**, el presentador, qui coneix què hi ha en cada porta, obre una altra, posem la número 3, que conté una cabra. Un cop fet tot això, el presentador pregunta al concursant: **vols canviar la teva elecció?**

[1] **21: Blackjack** és una pel·lícula basada en fets reals en què sis alumnes del MIT (Massachusetts Institute of Technology) són entrenats per un professor per tal de tornar-se experts en el comptatge de cartes. Posteriorment, viatgen a Las Vegas amb l'objectiu d'utilitzar les seves habilitats per fer-se rics als casinos.

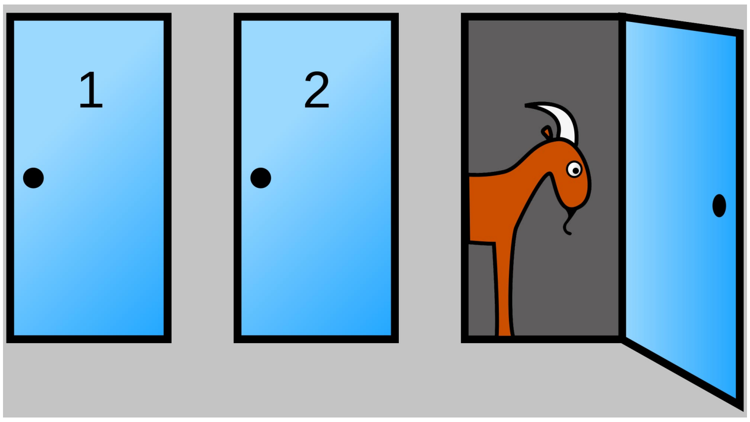

Figura 3.1: Problema de Monty Hall

Font: *Clevertree*

Abans que res d'això passi, en un principi, les possibilitats que el jugador encerti on és el cotxe són $\frac{1}{3}$. Quan el presentador destapa una porta, en canvi, la probabilitat ha quedat reduïda a un 50% per cada una de les dues restants. Així doncs, sembla obvi que la decisió que prengui el jugador de canviar o no la seva elecció és irrellevant. Això és el que ens diu la nostra lògica, però, una vegada més, torna a estar equivocada.

3.2.1 Resolució intuïtiva:

Com hem vist abans, la porta triada inicialment pel concursant té un 33% de possibilitats de contenir el cotxe, mentre que les altres dues en conjunt reuneixen l'altre 67%. Quan el presentador obre una de les portes descartades (a consciència que oculta una cabra), la probabilitat que aquesta contingui el cotxe, òbviament, passa a ser 0. D'aquesta manera, tota la probabilitat que tenien les dues portes en conjunt s'acumula a la que no s'ha obert. Per conseqüent, si decidim **no canviar**, ens quedarem amb el nostre 33% inicial, mentre que si **canviem**, tindrem un 67% de possibilitats de guanyar.

Si això es classifica segons els casos possibles:

- Si el jugador elegeix una porta amb cabra i canvia, GUANYA.
- Si el jugador elegeix la porta amb el cotxe i canvia, PERD.

Donat que hi ha dues cabres i un cotxe, la probabilitat de guanyar si canvia és $\frac{2}{3}$.

3.2.2 Resolució matemàtica:

Un cop feta l'explicació anterior, ara es demostrarà mitjançant càlculs matemàtics. Per a fer-ho de la manera més entenedora possible, es posa P(G) com la probabilitat de guanyar, P(A) com la probabilitat que inicialment elegim el cotxe i P(B) com la que en un principi escollim una cabra. Això s'enuncia:

$$P(G) = P(A \cap G) \cup P(B \cap G) \tag{3.2}$$

Tenint en compte que $A \cap B = \varnothing$, ho simplifiquem:

$$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) = P(G|A) \cdot P(A) + P(G|B) \cdot P(B) \tag{3.3}$$

Un cop enunciada aquesta equació, podem analitzar la probabilitat de guanyar si canviem i si no canviem:

No canviar:

En el cas que el jugador no canviï, la probabilitat de sortir vencedor si inicialment ha triat el cotxe és 1 ($P(G|A) = 1$). Si des d'un principi ha escollit una cabra, aquesta és 0 ($P(G|B) = 0$). Amb l'equació exposada anteriorment, i tenint en compte que $P(A) = \frac{1}{3}$, la probabilitat que té de guanyar és $\frac{1}{3}$.

Canviar:

Si el jugador decideix canviar la seva elecció original, la seva probabilitat de victòria si havia escollit el cotxe és 0 ($P(G|A) = 0$), ja que si canvia el perdrà. Altrament, si havia triat una cabra, aquesta és 1 ($P(G|B) = 1$), ja que la porta que ha obert el presentador contenia la segona cabra, i en canviar segur que li tocarà el cotxe. Amb l'equació, i recordant que $P(B) = \frac{2}{3}$, és a dir, hi ha 2 cabres, la probabilitat de guanyar és $\frac{2}{3}$.

Aquesta és una comprovació matemàtica molt bàsica del que diu la resolució del problema publicada pel prodigi Marilyn vos Savant[2] l'any 1990. Tanmateix, queda demostrada la diferència entre canviar de porta i no fer-ho. Així doncs, una decisió que aparenta ser irrellevant i portar a solucions equiprobables, com s'ha vist, no ho és en absolut.

3.3 La fal·làcia de l'apostador:

He deixat per l'última la concepció errònia que té més relació amb el tema d'aquest treball. Així i tot, l'he relegada fins el final perquè, personalment, més m'ha costat d'acceptar; amb la qual m'ha estat més difícil admetre que la meva idea inicial estava equivocada, i que la solució correcta era una altra.

La **fal·làcia de l'apostador** o **fal·làcia de Montecarlo** és la creença errònia dels éssers humans del fet que, en un procés aleatori, els successos passats tenen influència en els futurs. Això es resumeix amb les següents dues intuïcions equivocades:

[2] **Marilyn vos Savant** és coneguda per ser la persona amb el coeficient intel·lectual més alt del planeta (228). El seu CI és 68 punts més alt que el d'Albert Einstein.

- Si un succés ha ocorregut recentment de manera reiterada, és menys probable que es doni de nou.
- Si fa molt temps que no ocorre un succés, és més probable que es doni en les properes tirades.

De la mateixa manera que ho fa en els jocs d'atzar, aquesta fal·làcia pot aparèixer en altres situacions quotidianes. Algunes de les errades més comunes són:

- Una parella que ha tingut dues filles és més propensa a tenir un fill.
- Un llampec no cau mai dues vegades al mateix lloc.
- No pot tocar la loteria dos cops al mateix número.

En fer aquestes afirmacions, un està caient en la fal·làcia de l'apostador, que per intuïció ens indueix a creure que el fet que una cosa hagi passat anteriorment disminueix les possibilitats que es repeteixi.

La fal·làcia de Montecarlo deu el seu nom a allò que va passar una nit a un dels famosos casinos del popular barri de la ciutat de Mònaco, l'agost de 1913. Aquell dia, a la ruleta, la bola va caure 26 cops consecutius al negre. Quan ja havia passat uns quants cops, tots els jugadors van començar a apostar al roig, fent el que semblava ser òbviament el moviment encertat, després que hagués sortit el negre de manera aclaparadora en les tirades prèvies. Cada cop que tornava a succeir, semblava més impossible que la ratxa es prolongués gaire més, fins que va ocórrer 26 vegades seguides, arruïnant a tothom qui jugava i fent rics als propietaris del casino.

Però, era apostar al roig realment la jugada correcta, i tot plegat va ser una gran topada de **mala sort**? O la probabilitat que passés el que va passar continuava sent, fins i tot a la tirada 26, un 50%? De segur que això és el que es van preguntar durant molt de temps els que van apostar aquella nit, i és aquesta qüestió la que s'abordarà a continuació.

Cal analitzar primer quines són les possibilitats que es doni una anomalia com la d'aquella nit a Montecarlo. Que el color negre, el qual te $P(N) = \dfrac{1}{2}$ de sortir en cada tirada, aparegués 26 cops consecutius a la ruleta, té una probabilitat tan inesperada com:

$$P(N_1, N_2, \ldots, N_{26}) = \Big[P(N)\Big]^{26} = \left(\frac{1}{2}\right)^{26} = 1,49 \cdot 10^{-8} = 0,0000000149 \tag{3.4}$$

Com demostren les matemàtiques, una possibilitat ínfima, gairebé inexistent. El que va passar és tan improbable que segurament transcorreran segles fins que es repeteixi; i, malgrat això, la lògica dels apostadors estava completament equivocada. L'explicació és la següent: tots els successos que s'han donat fins a un moment concret no tenen un efecte en els que estan per venir. A la tirada 26, la ruleta continua tenint un 50% de caure al roig i un 50% de fer-ho al negre. Cal adonar-se que les probabilitats que surti 25 cops consecutius el negre, i en el següent intent surti 1 roig, són:

$$P(N_1, N_2, \ldots, N_{25}, R_1) = \Big[P(N)\Big]^{25} \cdot P(R) = \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \cdot \frac{1}{2} = 0,0000000149 \tag{3.5}$$

Exactament les mateixes que s'han calculat abans. És a dir, en cada tirada individual, les possibilitats romanen en el 50%, i el que hagi passat en les anteriors és totalment irrellevant. Queda demostrat així que el pensament que roig és més probable que negre, després que hagi sortit repetidament negre, és una fal·làcia. És cert que el fet que toqui el mateix color en 26 partides seguides és una anomalia de característiques estratosfèriques. Ara bé, per als jugadors, que aposten tirada a tirada, això no té cap efecte, i a l'únic a qui, en tot cas, ajuda que canviïn la seva estratègia, és al casino.

Aquest, el mateix cas que li dona nom, és un clar exemple de quin error pot provocar la fal·làcia de l'apostador, i de com el nostre propi sentit comú pot enganyar-nos i seduir-nos per apostar cada cop més diners a una ganga que, en realitat, no existeix.

Capítol 4

Blackjack

"Si tens pensat jugar, planteja't tres coses abans: quines són les regles del joc, quina serà la inversió de diners, i a quina hora sortiràs del casino."

- Proverbi xinès

Aquest capítol es dedicarà a explicar des de zero el funcionament del joc del Blackjack. Per començar, s'explicarà una mica de la seva **història**. Seguidament, es farà un repàs a fons de totes les seves regles. Per continuar, s'aclarirà què és el **crupier**, i es parlarà de les **accions** que poden fer tant aquest com el jugador. Per últim, s'aprofundirà en què és l'**avantatge de la casa**.

El **Blackjack** és possiblement el més gran de tots els jocs d'atzar de l'actualitat. Famós a tot el món i senzill i divertit de jugar, atreu milions de jugadors diàriament, tant presencialment com en línia. La seva dinàmica és tan fàcil d'entendre com un simple compte fins a 21. Si et passes, perds. Així i tot, el Blackjack és més complex del que sembla, i consta d'una estructura matemàtica molt estudiada, que dóna avantatges al casino. En contrapartida, els grans jugadors han hagut de crear una sèrie d'estratègies per intentar anul·lar-la.

4.1 Una mica d'història

L'origen del Blackjack encara es debat avui en dia. Alguns advoquen perquè va ser inventat pels romans, que el jugaven amb blocs de fusta en lloc de cartes. No és cap secret que als romans els encantava apostar, però de totes formes no hi ha cap prova concloent que demostri aquesta hipòtesi. La teoria més acceptada, en canvi, és que el seu origen es remunta a una època entre finals del segle XVII i principis del XVIII, i es localitza a França. Tanmateix, la seva primera referència escrita la conté el llibre *Rinconete y Cortadillo*, de Miguel de Cervantes[1], datat de 1613, gairebé un segle abans. A aquesta novel·la picaresca es parla de dos joves pobres de Sevilla que juguen a la "vint-i-una"per entretenir-se. Segons això, ja es jugava al Blackjack a Castella a finals del segle XVI, però només com a un mer entreteniment del poble. Van ser els francesos qui el van portar per primer cop als casinos, un segle més tard. En aquella època, se l'anomenava "Vingt-et-un", vint-i-u en francès.

Amb el temps, la seva popularitat va anar creixent i va arribar a les corts. Es creu fins i tot que tant els soldats de l'emperador Bonaparte[2] com el mateix Napoleó hi jugaven freqüentment. Més tard, al segle XVIII, va ser portat als Estats Units pels colonitzadors francesos. Va ser a Amèrica on realment es va estendre, i en poques dècades molts casinos i cases de joc ja el tenien a les seves taules. La febre de l'or[3] va jugar un paper important en aquesta expansió. La migració massiva de gent de la costa est a l'oest va suposar que gran part de la seva cultura, incloent-hi el 21, arribés a tot el país.

Com es pot deduir de la informació donada fins ara, el nom de Blackjack és posterior. L'objectiu de tots els casinos, i en general de qualsevol negoci, és atreure clientela. És per això que van començar a oferir

[1]**Miguel de Cervantes** fou un novelista, poeta i dramaturg espanyol dels segles XVI i XVII

[2]**Napoleó Bonaparte** va ser general de l'exèrcit durant la Revolució Francesa, primer cònsol de la Primera República Francesa i autoproclamat emperador d'aquesta.

[3]La **febre de l'or** va ser un fenomen social que es va donar als Estats Units entre 1848 i 1860, en què molts treballadors van migrar a l'oest del país, especialment a Califòrnia, a causa d'un enorme descobriment d'or en la dita zona.

premis extres, sent un d'ells un pagament de 9 a 1[4] a qui aconseguia un Jack[5] (J) de qualsevol dels dos pals negres (és a dir, piques i trèvols) juntament amb un As. Aquesta era la mà més beneficiosa i, per tant, desitjada pel jugador. D'aquí ve el nom *Blackjack*.

4.2 Regles del Blackjack

4.2.1 Regles bàsiques

- El Blackjack es pot jugar amb fins a vuit baralles franceses, de 52 cartes cadascuna. Normalment les taules són d'entre quatre i set jugadors, tot i que també existeixen les individuals.
- Les cartes del 2 al 9 valen el que indica el seu número, mentre que tant el 10 com la jota (J), dama (Q) i rei (K) tenen un valor de 10. L'As (A) és l'única carta que varia la seva puntuació, que pot ser 1 o 11, segons la seva conveniència pel jugador. El seu valor serà el més gran sempre que la suma de les cartes sigui menor o igual que 21.
- L'**objectiu** del jugador és arribar el més a prop possible de 21 punts sense passar-se, però guanyarà sempre que superi allò que hagi obtingut la banca.
- La jugada màxima és el Blackjack: sumar 21 amb les dues primeres cartes repartides. Això es dona aconseguint un As i qualsevol de les cartes de valor de 10, i es paga (habitualment) 3 a 2[6]. Cal apuntar que es poden aconseguir 21 punts amb 3 cartes o més, però això no es considera un Blackjack. En cas que coincideixin un Blackjack amb un 21 normal, sempre guanya el Blackjack.

4.2.2 Dinàmica de joc:

En una taula s'asseuen un nombre determinat de jugadors cara a cara amb el crupier[7]. Al Blackjack, els jugadors no competeixen entre si, sinó contra aquest, que representa la banca. Quan comença una ronda, abans que es reparteixin les cartes, cada jugador ha de mostrar la seva aposta. El crupier comença a repartir per la seva esquerra, i dona dues cartes a cadascun dels participants, ell mateix inclòs.

[4] **9 a 1**, en aquest cas, és un mitjà de pagament al Blackjack basat en la proporció, en què el jugador que guanya rep 9 € per cada euro apostat.

[5] Un **Jack** és la carta de la baralla francesa representada amb una jota. En una baralla n'hi ha 4, un en cada pal.

[6] **3 a 2**, en aquest cas, és un mitjà de pagament al Blackjack basat en la proporció, en què el jugador que guanya rep 3 € per cada 2 € apostats.

[7] El **Crupier** és la persona designada per un casino per a conduir el joc en una taula. Aquest normalment només fa labors com repartir cartes o girar la ruleta, però en casos com el del Blackjack, en què és participant del joc, ha d'actuar sempre de manera objectiva. És per això que existeixen unes normes que dirigeixen les seves accions. Vegeu 4.2.3 Normes del crupier (pàg. 36)

Totes les cartes són visibles excepte una de la banca (que ni ell mateix pot veure), coneguda en anglès com a "Hole Card" (carta tapada). La mà del crupier és essencial a l'hora de determinar si els jugadors guanyen o perden, i les seves decisions dependran de quina és la carta visible d'aquest. Quan tots els naips han estat repartits, és el moment dels jugadors per fer les accions que trobin convenients[8].

4.2.3 Normes del crupier

Un cop els jugadors han pres les seves decisions, la banca desvela la "Hole Card". Si la puntuació d'aquesta sumada a la que ja era visible és **menor de 17**, el crupier està obligat a demanar carta, i a continuar fent-ho fins que la seva suma sigui major a 17 o es passi de 21. Quan s'assoleix aquest límit, està obligat a plantar-se.

Aquestes normes tan concretes són el que fan que la condició humana del crupier no afecti la professionalitat de la partida, ja que aquest sempre actuarà de la mateixa manera, objectivament, com si fos una màquina.

Cal apuntar que, en cas d'empat per sota de 21, l'aposta del jugador li serà retornada, sense benefici ni pèrdua. No obstant això, si el jugador es passa de 21, el crupier serà qui guanyi la mà, tingui la puntuació que tingui.

4.3 Accions del jugador

Quan rep les cartes, el jugador té diferents opcions que li donen el poder de decidir què fer amb elles d'una manera flexible. Per consegüent, si aquest domina l'estratègia bàsica i juga bé la seva mà, pot reduir al màxim l'avantatge de la casa[9], i tenir l'atzar com el seu gran aliat.
Les accions que pot fer un jugador són:

- **Demanar carta:**

  En primer lloc, pot demanar carta. A diferència del crupier, no hi ha un límit de punts per realitzar aquesta acció, però cal que avaluï les seves possibilitats abans de fer-ho perquè si es passa de 21 perdrà l'aposta immediatament, independentment del que faci la banca.

- **Plantar-se:**

  Pel contrari, també disposa de l'opció de plantar-se, el que implica que no rebrà més cartes i es quedarà amb la puntuació que té en aquell moment.

- **Doblar l'aposta:**

[8] Vegeu 4.3 Accions del jugador (pàg. 36)
[9] Vegeu 4.4 L'avantatge de la casa (pàg. 37)

El jugador també pot duplicar la seva aposta inicial **després d'haver vist les seves 2 primeres cartes i la del crupier**. En cas de fer-ho, només pot rebre una carta més, per la qual cosa no és recomanable doblar amb jugades que no sumin 9, 10 o 11 (alguns casinos ni tan sols ho permeten). Cal tenir en compte que quan un es dobla guanya dos cops més, però també es perd per partida doble.

- **Separar:**

  Quan les dues primeres cartes són del mateix número, existeix la possibilitat de separar-les. Per fer-ho, caldrà afegir una nova aposta igual a la inicial, ja que ara es jugarà amb dues mans.

- **Altres accions secundàries:**

  Assegurança: En cas que la carta visible del crupier sigui un As, se li ofereix al jugador l'opció de comprar una assegurança. Això es fa mitjançant l'addició del 50 % de l'aposta inicial al total d'aquesta. Posem un exemple: si l'aposta inicial són 10 €, i un es vol assegurar, cal que afegeixi 5 € més (el 50 %), i el total seran 15 €. El que fa aquesta acció és que el jugador guanyi si i només si la banca treu Blackjack. En aquest cas, el pagament és 2 a 1. Així doncs, al cas de l'exemple, el jugador guanyaria 30 € si el crupier treu Blackjack, i perdria els 15 € en qualsevol altre cas.

  Rendir-se: Si un jugador ho desitja, pot deixar anar la seva mà després de veure la carta del crupier. En realitzar aquesta acció, perdrà la meitat de la seva aposta inicial.

4.4 L'avantatge de "la casa"

Tot i la fama que té de ser el joc de pura sort per excel·lència, el Blackjack no seria tan popular en els casinos si aquests no es poguessin assegurar obtenir-ne beneficis. La frase "la banca sempre guanya" l'hem sentit tots, però pocs s'han parat a plantejar-se què hi ha darrere. Com és possible que, en un joc on aparentment regna l'atzar, el guanyador acabi essent sempre el mateix?

Els casinos no deixen de ser un negoci, i el seu objectiu és lucratiu. Així mateix, cap dels seus jocs es basa cegament en la sort. La casa té les seves normes, creades de manera que permetin que un individu amb sort pugui guanyar altes quantitats de diners, però perquè a llarg termini els beneficis sempre siguin pel casino.

Anteriorment en aquest treball s'ha vist i demostrat com la intuïció sovint ens pot enganyar i portar-nos a l'equivocació. El Blackjack, certament, no n'és una excepció. Estratègies aparentment molt enginyoses, com **jugar amb les normes del crupier i plantar-se només en superar els 17**, resulten ser poc útils. La raó d'això és una sola norma: en cas que tant el crupier com el jugador es passin de 21, sempre és la banca qui es queda els diners. D'aquesta manera, el casino desencoratja les persones a fer servir aquesta tècnica, ja que resulta perdedora.

En el Blackjack, gairebé tot l'avantatge de la casa recau en el fet que l'apostador juga primer. Aquest petit detall, que per alguns pot semblar fins i tot una simple formalitat, té una enorme rellevància. Quan un jugador es passa, immediatament perd la seva aposta, sigui el que sigui el que succeeixi després amb les cartes del crupier. Posat que el crupier també s'excedeixi, això serà indiferent, ja que les apostes dels qui han superat 21 ja les ha cobrat prèviament. D'aquesta manera, el casino es declara vencedor quan es dona una situació que és, teòricament, d'empat.

Tant jugadors com crupier sobrepassen el límit el $28,18\%$ de les seves partides, respectivament. El mètode per trobar aquesta dada és, bàsicament, una mitjana ponderada. Es multiplica la probabilitat d'obtenir una carta entre 1 i 9 (1/13) per la suma de les probabilitats de passar-se amb cadascuna d'aquestes cartes. Es fa el mateix amb les cartes de valor 10, però amb les seves corresponents possibilitats de sortir (4/13), i s'obté aquest nombre: 28,18%[10].

La probabilitat que tant la banca com el jugador es passin (en la mateixa partida) s'obté del producte de la probabilitat que es passi cadascun d'ells independentment. Això s'expressa:

$$P(A \cup B) = (0,2818)^2 = 0,0794 \tag{4.1}$$

Així doncs, la norma que determina que si tots dos es passen guanya la banca afavoreix al casino en un $7,94\%$.

Aquesta exagerada superioritat inicial de la casa queda reduïda pel fet que el Blackjack del jugador es paga 3 a 2[11]. La probabilitat que el jugador aconsegueixi Blackjack és la següent:

$$\frac{Conjunts\ de\ 2\ cartes\ que\ sumin\ Blackjack}{Total\ de\ conjunts\ de\ 2\ cartes\ en\ la\ baralla} = \frac{4 \cdot 16}{\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!(52-2)!}} = 0,0483 \tag{4.2}$$

Tenint en compte que, quan té aquesta jugada, el jugador rep un 50% més del que havia apostat (pagament 3 a 2), l'avantatge del casino es redueix de la següent manera

$$0,0794 - \frac{0,0483}{2} = 0,056 \tag{4.3}$$

Fins aquest punt, s'ha analitzat l'avantatge de la casa "sobre el paper", o cosa equivalent, ometent el factor humà del jugador, qui té la capacitat de pensar i decidir, i no tria les seves accions aleatòriament. Quan es pren en compte aquesta variable, s'obre la porta a un món de possibilitats. Aquí és on entra en joc **l'estratègia bàsica**.

[10]Dada calculada mitjançant els càlculs fets en l'apartat 5.4, posteriorment en aquest treball (és recomanable donar un cop d'ull a aquesta secció si es vol comprendre com s'ha obtingut aquesta dada).

[11]En algunes taules es fa 6 a 5, però aquest pagament és perjudicial per al jugador i els experts recomanen no jugar-hi.

Capítol 5

Estratègia bàsica del Blackjack

"El problema amb guanyar al Blackjack i als jocs d'apostes és que, més aviat o més tard, un home gros amb americana et convida a marxar"

- William Poundstone (1955)

En aquest capítol es farà un estudi per tal de trobar l'**estratègia bàsica del Blackjack**. Es dividirà aquest en dues parts essencials. Cadascuna d'elles analitzarà una branca de mans possibles: les "dures" i les "toves". En l'estudi de les "mans dures", s'inclourà la possibilitat de doblar-se, per la qual també es buscarà l'estratègia òptima. Finalment, es farà una anàlisi independent de l'acció de separar-se.

5.1 Introducció a l'estratègia bàsica:

Roger Baldwin, Wilbert Cantey, Herbert Maisel i James McDermott, més coneguts com els 4 genets d'Aberdeen, van publicar el 1956 el que seria el primer treball mai fet sobre l'estratègia bàsica del Blackjack. Cal apuntar que la van desenvolupar manualment, i que, amb l'aparició d'ordinadors al llarg de les següents dècades, aquesta es va poder anar perfeccionant.

L'objectiu de l'estratègia bàsica és trobar la manera idònia d'actuar davant qualsevol de les situacions possibles, tenint en compte les cartes del jugador i la carta visible de les dues del crupier. Així doncs, una estratègia perfecta és aquella que proporciona al jugador **al guany més gran possible** en cada jugada, en funció de les probabilitats que té de sortir vencedor segons cadascuna de les accions al seu abast.

5.2 Metodologia d'estudi

1) Com s'ha mencionat prèviament, en aquest capítol es farà l'estudi sota una assumpció o hipòtesi:

- La probabilitat d'obtenir una carta de valor c queda definida per:

$$P_c(1,\ldots,9) = 1/13 \tag{5.1}$$

$$P_c(10) = 4/13 \tag{5.2}$$

Aquesta hipòtesi és una simplificació necessària per poder dur a terme els càlculs procedents de manera teòrica[1]. Així i tot, es pot apropar molt a la realitat si el nombre de baralles amb què es juga augmenta, i el crupier les barreja cada cert temps. Barrjant-les s'aconsegueix que les cartes que han sortit prèviament no siguin un factor determinant.

2) Serà necessari distingir entre **"mans dures"** (que no contenen d'un as) i **"mans toves"** (que contenen d'un as), ja que l'estratègia presenta variacions entre les unes i les altres. En el primer tipus esmentat, les cartes tenen una única suma X. En el segon, la presència d'un o més asos fa que la

[1] Una estratègia més complexa inclou, com a variable, les cartes que s'han jugat anteriorment. Aquesta és el **comptatge de cartes**. Per més informació, és molt recomanable llegir el llibre *Beat The Dealer*, d'Edward O. Thorp.

mà disposi de dos valors X, dels que es té en compte el més alt (per exemple, en (A,6), les possibles puntuacions són 17 i 7). En el moment en què un d'aquests valors sobrepassa 21, perquè s'ha demanat una altra carta, es passa a jugar amb el més petit dels dos, i la mà es converteix en dura, doncs l'as ja no pot tenir més que un únic valor, 1.

3) S'estudiarà el joc com a un conjunt de decisions seqüencials i, conseqüentment, l'anàlisi s'elaborarà mitjançant un procés d'inducció cap enrere. Els resultats es donaran per a cada carta visible del crupier (b), en forma de límit o parada òptima, que se simbolitzarà $L(b)$, tal que si $X < L(b)$ la decisió òptima és demanar, mentre que si $X \geq L(b)$ l'ideal és plantar-se.

4) Es mostraran els mètodes implementats i les conclusions extretes, juntament amb un exemple en cada cas, però no s'adjuntaran tots els càlculs, realitzats a part en un document d'*Excel*, per tal de mantenir el dinamisme del treball. Tot i així, aquests es poden consultar als annexos del treball.

5.3 Bases de l'estudi

En el moment en què s'han acabat de repartir les cartes, l'apostador disposa de dues informacions, a partir de les quals ha de decidir quina serà la seva jugada. Aquestes són:

- La seva pròpia parella de cartes, que se simbolitzarà "(a,a)", amb el seu respectiu valor: $a + a = X \geq 4$, atès que la mínima combinació possible[2] és $2 + 2$.
- La carta visible del crupier, simbolitzada per "b", de manera que $b = A, 2, \ldots, 10$.

Així doncs, al principi de cada partida el jugador es trobarà davant una situació (X,b), la qual haurà d'analitzar. Li serà necessari avaluar, d'entre les accions de què disposa, quina li proporcionarà el guany més gran: plantar-se o demanar. Abans de començar aquests càlculs, però, cal conèixer la següent notació:

- Es defineix G^* com el màxim guany esperat si es juga de manera òptima.
- Es defineix G_0 com el guany esperat si el jugador es planta amb la seva mà inicial.
- Es defineix G' com el guany esperat si es demana carta i es continua jugant de manera idònia.
- Es defineix c com el valor de la carta que rep el jugador quan demana.

Així doncs, es pot trobar quina és la **decisió òptima** en cada situació mitjançant l'expressió:

$$G^*(X, b) = MAX\Big[G_0(X, b) \quad , \quad G'(X, b)\Big] \tag{5.3}$$

[2]Recordem que una combinació com (A,2) sumaria 13 i no 3.

On el guany més gros esperat (G^*) per una situació (X, b) és el **màxim** entre G_0 i G'. La decisió convenient serà, doncs, la que correspongui al resultat més alt en cada moment.

5.3.1 Guany esperat en plantar-se

Per resoldre l'equació 5.3, el primer que es necessita conèixer és $G_0(X, b)$ per cada $X \geq 12$ i cada $b = A, 2, \ldots, 10$. No es tenen en compte els valors de X entre 4 i 11, donat que és impossible passar-se demanant una altra carta. Es prendrà $G_0(X, b)$ com un número entre 0 i 1, i es quantificarà sumant la probabilitat que ocorri cada cas en què el jugador surt guanyador:

$$G_0 = P(X > B) + P(B > 21) \tag{5.4}$$

És a dir, quan el total del jugador és major que el del crupier, o quan aquest últim es passa de 21. "B" és la suma final de la banca suposant que s'ha començat per una carta b. Donat que existeix l'opció d'empat, que no és favorable ni perjudicial per a l'apostador, es fa necessari quantificar-la d'alguna manera. Per fer-ho, s'ha ideat un mètode senzill que consisteix a sumar la probabilitat d'empat dividida per 2 a l'equació 5.4. En conjunt, l'expressió final queda:

$$G_0(X, b) = P(X > B) + P(B > 21) + \frac{1}{2}P(X = B) \tag{5.5}$$

Així doncs, $G_0(X, b)$ depèn directament de les probabilitats que té el crupier d'assolir cada valor B a partir cada carta inicial b respectivament. Aquesta informació es dona en la secció 5.4.
A banda d'això, pot ser útil per l'apostador saber si és ell qui més possibilitats té de guanyar, o si per contra és la banca qui reté l'avantatge en la ronda. Per saber-ho, cal comparar el guany esperat de cadascun d'ells. Les possibilitats que el jugador **perdi** són el complementari de l'expressió 5.5, és a dir:

$$\overline{G_0(X, b)} = 1 - G_0(X, b) \tag{5.6}$$

En resum, si l'equació 5.5 retorna un valor major que la 5.6, el jugador que es planta parteix amb l'avantatge matemàtic. Dit d'una altra manera, aquest és més propens a guanyar que el crupier sempre que el benefici esperat superi el 50%. Cal dir, però, i es veurà més endavant, que aquesta situació no es dona sovint. Tanmateix, la decisió òptima no requereix que el jugador parteixi amb avantatge. El que fa l'estratègia és determinar, d'entre plantar-se i demanar, la millor opció disponible.

Per comprendre les expressions anteriors, pot ser d'ajuda posar una situació d'exemple: la carta visible del crupier és un 3, i el jugador compta amb una puntuació de 17. És més beneficiós per ell plantar-se o demanar?
Totes les preguntes com aquesta, sobre qualsevol X i qualsevol b, es resolen en l'apartat 5.5. Això no obstant, amb la informació donada en aquesta part del treball es pot calcular el percentatge d'èxit si es planta. Donat que el jugador suma 17, empatarà si el crupier aconsegueix la mateixa quantitat, i només guanyarà si aquest es passa (recordem que amb sumes menors a 17 està obligat a demanar). Això s'expressa:

$$G_0(17, 3) = P(B > 21) + \frac{1}{2} \cdot P(17 = B) = 0,4417 \tag{5.7}$$

Per obtenir el resultat, s'ha substituït cada probabilitat pel seu respectiu valor calculat en la taula de la secció 5.4. En efecte, si l'apostador es plantés en aquesta situació, tindria una esperança negativa (el valor final és menor a 50%, per tant el complementari el supera). Això no implica, però, que la decisió de plantar-se sigui equivocada o errònia. Per determinar-ho, cal conèixer el guany esperat en el cas contrari: demanar carta, i comparar-los.

5.3.2 Guany esperat en demanar carta

L'altra part de l'equació 5.3 és el benefici esperat si es demana carta. La resolució s'enuncia de la següent manera:

$$G' = \sum_{c=1}^{10} P(c) \cdot G^*(X + c, b) \tag{5.8}$$

Dit d'una altra manera, per saber què pot passar si demanem carta, cal multiplicar el màxim guany esperat en la situació $(X + c, b)$ per la probabilitat de rebre cada carta c, i sumar tots els resultats. És interessant apuntar que, quan el fet de rebre una carta impliqui que el jugador es passi, G' per aquella carta serà 0, ja que portarà a la derrota instantàniament.

Si no utilitza la metodologia adequada, un es pot trobar amb el fet que aquesta expressió és un peix que es mossega la cua. Vegeu que, per conèixer $(G^*(X + c, b))$ (que és part de l'equació 5.8), és necessari haver calculat prèviament l'expressió 5.3 per $X + c$. El problema recau en el fet que, per resoldre l'equació 5.3, es necessita saber el guany esperat en demanar carta (G') per $X + c$, però aquest es troba per mitjà de l'expressió 5.8. La contradicció és clara.

Si un fa el que és més intuïtiu, i comença pel nombre més petit (12), arribarà a un punt en què donarà voltes sense parar i no trobarà la manera d'avançar. Així doncs, per solucionar aquest dilema, cal fer servir la inducció cap enrere, i iniciar el procés pel número més gran (21). D'aquesta manera, quan es requereixi el resultat de $G^*(X + c, b)$, aquest ja es coneixerà, perquè s'haurà calculat prèviament. La demostració d'això és tan simple com:

$$X + c > X \qquad si \quad c \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$

És a dir, $X + c$ serà més gran que X sempre que c pertanyi als nombres naturals[3]. Com en la situació que s'està estudiant, que és una partida de Blackjack, c simbolitza el valor d'una carta, aquesta condició sempre es complirà.

[3]Un **nombre natural** és qualsevol dels nombres 1, 2, 3, ... que es poden utilitzar per a comptar els elements d'un conjunt finit. Són els enters positius. Els nombres decimals, fraccions i negatius no formen part d'aquest grup. El 0 no es considera un nombre natural.

Aplicació de la inducció cap enrere:

L'aplicació de la inducció cap enrere no té cap misteri ni complexitat. El primer pas és conèixer $G^*(21, b)$, per una b aleatòria, ja que el procés és el mateix per totes elles. Es dedueix ràpidament que, com demanar carta portaria inevitablement a passar-se, la decisió correcta és plantar-se. Amb la metodologia explicada en l'apartat 5.3.1, es calcula $G_0(21, b)$. El resultat obtingut és el benefici més alt possible pel cas (21,b) perquè, com s'ha dit, demanar carta implica una probabilitat de victòria de 0.

Un cop se sap el màxim guany esperat per $X = 21$ i una b qualsevol, es pot calcular G' si $X = 20$ per la mateixa b. El que fa això possible és que ara ja es coneix $G^*(X + c, b)$[4] **per tots els valors de c que no impliquin passar-se**, en aquest cas, $c = 1$.
Per consegüent, és possible esbrinar $G'(20, b)$, simplement seguint la fórmula 5.8, i consecutivament es pot trobar $G^*(20, b)$ aplicant l'equació 5.3. Un cop se sap això, es pot calcular G' si $X = 19$ per la mateixa b, i així successivament fins arribar a 12.

5.4 Probabilitats del crupier: simulació de Montecarlo

Mesurar l'eventualitat amb què s'arriba a un resultat concret de B, d'entre $B = 17, \ldots, 21, > 21$, a partir de la visualització d'una única carta b, és tan tediós que s'ocuparien pàgines senceres només per definir l'arbre de possibilitats quan $b = 2$. Com l'exactitud és, en aquest cas, inaccessible, s'ha utilitzat la **simulació de Montecarlo**[5] per obtenir-ne una aproximació minuciosa.

S'ha creat, mitjançant *Microsoft Excel*, **un algorisme que ha simulat 1.000.000 de mans de Blackjack per cada possible valor inicial de b**. Per tal de fer-ho, s'ha donat a l'ordinador tota la informació procedent perquè recreï, a través de cel·les, números i percentatges, el que seria una partida de Blackjack des del punt de vista del crupier. Els resultats finals obtinguts després dels càlculs computacionals són els següents:

[4]Vegeu que aquesta afirmació serà sempre certa, perquè la inducció cap enrere implica per definició que tots els valors més grans que X ja hagin estat estudiats prèviament.

[5]Vegeu 2.2 Mètodes de Montecarlo (pàg. 22).

Valor final (B)

	17	18	19	20	21	Blackjack	ES PASSA
2	.139660	.134970	.129260	.124120	.117400	.000000	.354260
3	.135320	.130250	.124860	.120670	.114870	.000000	.374020
4	.130690	.126060	.121420	.117080	.110710	.000000	.394040
5	.122520	.122000	.117380	.112880	.108250	.000000	.416370
6	.165480	.106110	.106130	.102210	.096840	.000000	.423280
7	.368478	.137300	.078645	.078670	.074140	.000000	.262560
8	.128550	.359340	.128130	.069110	.069860	.000000	.245050
9	.119940	.119050	.351040	.120170	.060820	.000000	.229030
10	.111510	.111710	.111480	.341630	.034330	.077188	.212030
A	.130380	.130260	.130660	.131050	.053960	.307690	.116060

Taula 5.1: Probabilitats del crupier segons cada carta visible inicial b

Font: Figura de l'autor

Tota la construcció de l'algorisme i el funcionament d'aquest s'expliquen de forma detallada en el capítol 6, dedicat específicament a aquest tema.

5.5 "Mans dures"

En aquesta secció s'utilitzaran les dades i els conceptes descrits en els apartats anteriors per determinar l'estratègia òptima pel jugador en una partida de Blackjack. Com s'especifica en la metodologia[6], no es mostrarà el procés complet de càlculs que s'ha realitzat per tal d'arribar a l'estratègia bàsica. Això no obstant, s'exemplificarà cada part de la deducció de la manera més entenedora possible, i s'explicaran els comandaments d'*Excel* utilitzats.

Per començar, l'estudi s'ha estructurat en petits algorismes, en forma de taules creades a partir de *Microsoft Excel*, que comparen G_0 i G' per cada possible combinació (X, b), i en retornen la decisió òptima. Per organitzar les dades talment que siguin senzilles d'analitzar, s'han classificat totes aquestes combinacions segons b, o cosa que és equivalent, s'ha fet una taula diferent per cada possible valor de la carta visible del crupier. Per un exemple, vegeu la figura 5.1.

[6]Vegeu 5.2 Metodologia (pàg. 40).

=SUM(J11;J5:J8)+1/2*J9

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
2	21	94,10%	0,00%	PLANTAR-SE	13
	20	82,02%	7,24%	PLANTAR-SE	
	19	69,35%	13,55%	PLANTAR-SE	
	18	56,14%	18,88%	PLANTAR-SE	
	17	42,41%	23,20%	PLANTAR-SE	
	16	35,43%	26,46%	PLANTAR-SE	
	15	35,43%	29,19%	PLANTAR-SE	
	14	35,43%	31,91%	PLANTAR-SE	
	13	35,43%	34,64%	PLANTAR-SE	
	12	35,43%	37,36%	DEMANAR	

17	13,9660%
18	13,4970%
19	12,9260%
20	12,4120%
21	11,7400%
Blackjack	0,0000%
>21	35,4260%

Figura 5.1: Estudi de l'estratègia quan la carta del crupier val 2

Font: Imatge de l'autor

La figura 5.1 mostra una de les taules que s'han creat, concretament la que estudia l'estratègia quan $b = 2$. Aquest petit algorisme funciona mitjançant 2 tipus d'operacions: les que troben G_0 i les que troben G', i després analitza i compara el resultat d'aquestes per retornar la **decisió òptima** (en la columna *F* del document). El registre de la dreta de la imatge són les probabilitats de la banca quan $b = 2$, extretes de la taula 5.1.

5.5.1 Càlcul del benefici esperat en plantar-se

En la part superior esquerra de la fotografia es pot apreciar la funció que *Excel* utilitza per a la cel·la D3 (sel·leccionada en la imatge):

$$= \text{SUM}\ (J11, J5 : J8) + \frac{1}{2} \cdot J9 \tag{5.10}$$

Aquesta és l'equivalent, en llenguatge de programació bàsic d'*Excel*, a l'equació 5.5, que serveix per trobar el màxim guany esperat en plantar-se (G_0). Si un té present l'expressió mencionada, s'adonarà que el sumatori (SUM) representa $P(B > 21)$ i $P(X > B)$, les dues situacions en què el jugador prevaldria. L'última part de la funció quantifica el cas d'empat.

Essencialment, els valors posteriors d'aquesta columna s'han trobat amb el mateix mètode. Per exemple, el resultat quan $X = 18$ (és a dir, el jugador té 18 punts) es calcula agafant la probabilitat que el crupier sumi 17 o es passi de 21 (els casos on el jugador venceria), i afegint-hi la meitat de la probabilitat que el crupier sumi 18 punts (és a dir, que empatin).

5.5.2 Càlcul del benefici esperat en demanar

Per desxifrar la columna G', les operacions són quelcom més complicades, atès que depenen de valors calculats prèviament amb altres funcions. Recordem que l'equació 5.8 s'enuncia:

$$G' = \sum_{c=1}^{10} P(c) \cdot G^*(X + c, b) \tag{5.11}$$

Això significa que, per trobar G', s'ha de conèixer $G^*(X+c,b)$; un valor que, en les taules com la de la figura 5.1, no està especificat en cap cel·la independent. Malgrat això, G^* es pot trobar fàcilment, donat que és el valor màxim entre dues cel·les (G_0 i G').

Trobar G^*:

Per aquesta part, es fa necessari fer servir "IF()", un comandament que serà de vital importància en fases posteriors del treball. En aquest cas, el petit algorisme de les taules ha d'agafar el número més alt entre dues opcions, perquè faci la funció de G^*. El comandament escrit al document d'*Excel* és el següent:

$$= \text{IF}\ (A_1 > B_1; A_1; B_1) \tag{5.12}$$

A_1 i B_1 simbolitzen dues cel·les de la mateixa fila, de les quals una representa G_0 i l'altra G' (en la pràctica, se substitueixen per la lletra i el nombre corresponents a cada cas) Gràcies a l'expressió mostrada, l'ordinador pot utilitzar G^* com un nombre amb el qual operar, malgrat no tenir-lo explícitament.

Prenent com a base l'expressió 5.12, es pot enunciar la funció que determinarà el benefici esperat en demanar:

$$= 1/13 \cdot [\text{IF}(A_1 > B_1; A_1; B_1) + \ldots + \text{IF}(A_{n-1} > B_{n-1}; A_{n-1}; B_{n-1})] \tag{5.13}$$

Com a aclariment: es multiplica tota l'expressió per $1/13$ perquè aquesta és la probabilitat de rebre cada carta (encara que obtenir un 10 representi $4/13$, fer-ho sempre implicarà passar-se i, per tant, el producte final de G' sempre serà 0, així que es pot negligir). Per factor comú[7], s'agrupa tot el sumatori de $P(c)$ en un únic producte.

Amb l'objectiu d'entendre aquest segon punt, s'adjunta una il·lustració en les figures 5.2 i 5.3. Per tal d'entendre la nomenclatura de la figura 5.3, cal apuntar que la primera fila de la imatge 5.2 és la número 2 del document *Excel*, i que les columnes que es mostren en aquesta són les C, D i E.

VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'
21	94,10%	0,00%
20	82,02%	7,24%
19	69,35%	13,55%
18	56,14%	18,88%
17	42,41%	23,20%
16	35,43%	26,46%

Figura 5.2: Entorn on s'aplica la funció 5.13

[7]Si un grup d'elements que se sumen tenen un **factor comú**, es pot transformar la suma en un producte extraient aquest factor, segons el diccionari de matemàtiques *Superprof*.

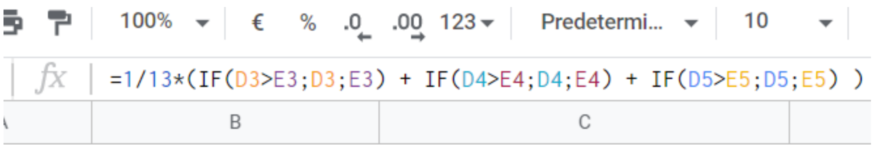

Figura 5.3: Funció 5.13 aplicada

Font: Imatges de l'autor

Com es pot apreciar, hi ha tantes expressions "IF()" com possibles puntuacions de la mà del jugador majors que X i que no superin 21. En el cas de l'exemple, X és igual a 18, i hi ha tres valors de $X + c$ que no es passen: $X + c = 19, 20, 21$, als que es pot arribar obtenint $c = 1, 2, 3$ respectivament. El que fa cadascuna d'aquestes funcions "IF()" és determinar el nombre més gran de cada parella de G_0 i G'. Perquè el lector ho vegi d'una manera més clara i pràctica, podem substituir cada funció de la figura 5.3 pel valor que retorna, i l'expressió quedaria així:

$$G' = \frac{1}{13} \cdot (0,9410 + 0,8202 + 0,6935) = 0,1888 \tag{5.14}$$

5.5.3 Retorn de la decisió òptima

Per últim, cal explicar la columna "decisió òptima", que determina si la decisió adequada és plantar-se o demanar carta. Per dissenyar la funció d'aquest apartat, s'ha fet servir una altra vegada el comandament "IF()"; en aquest cas, d'una manera més senzilla, atès que no forma part de cap operació (com succeeix en la funció 5.13), sinó que simplement retorna una paraula seguint una condició. L'expressió model introduïda és la següent:

$$= \text{IF}(A_1 > A_2;\ \text{“PLANTAR-SE”};\ \text{“DEMANAR”}) \tag{5.15}$$

La condició determina que, si G_0 és més gran que G', s'indiqui "PLANTAR-SE"i, si no ho és, "DEMANAR".

5.6 Doblar-se

Com ja s'ha comentat en l'apartat 4.3, si el jugador disposa d'una puntuació inicial de 9, 10 o 11, se li dona la possibilitat de doblar-se, és a dir, duplicar els diners de la seva aposta. Si aquest decideix fer-ho, però, només podrà rebre 1 carta més. Per tal de determinar si és o no beneficiós prendre aquesta decisió, cal comparar:

$$2 \cdot \sum_{c=1}^{10} P(c) \cdot G_0(X + c, b) \qquad \text{amb} \qquad G^*(X, b) \tag{5.16}$$

Posem un exemple: El jugador té una puntuació $X = 9$, i el crupier mostra un 4. Si es dobla, rebrà una carta més i s'haurà de plantar. Si no ho fa, seguirà jugant de manera normal. Per valorar si val la pena duplicar l'aposta, ha de comparar

$$2 \cdot \sum_{c=1}^{10} P(c) \cdot G_0(9 + c, 4) \qquad \text{amb} \qquad G^*(9, 4) \tag{5.17}$$

Si la primera expressió dona un resultat més gran que la segona, doblar-se és beneficiós.

Amb tot, es presenta un problema: al doblar l'aposta, una persona potencialment guanyarà el doble, però d'altra banda, si perd, ho farà per duplicat, i això s'ha de quantificar d'alguna manera. Així doncs, el que es fa és multiplicar per dos, no el percentatge al complet, sinó solament la diferència entre la probabilitat inicial i 0,5 (o 50%). Escrit en llenguatge matemàtic:

$$2 \cdot [P(c) \cdot G_0(X + c, b) - 0,5] \tag{5.18}$$

Amb aquesta subtracció de 0,5, s'aconsegueix que una probabilitat favorable pel jugador (superior al 50%) s'incrementi, però que una desfavorable (inferior al 50%) decreixi. Dit de manera col·loquial, es programa l'algorisme de la taula perquè tingui en compte el risc econòmic que suposa exercir l'acció de doblar-se.

Aquest ha estat el procediment utilitzat per esbrinar quan és una bona idea doblar-se. Com en l'anterior part del treball, en la figura 5.4 s'adjunta un exemple per facilitar la comprensió del que s'ha explicat. Vegeu que la taula és pràcticament idèntica a la de la figura 5.1, però se li ha afegit un petit desplegable que recull aquest apartat de la investigació. Les cel·les en lila contenen el guany esperat al doblar-se.

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	SUM G_0	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
2	21	94,10%	0,00%		PLANTAR-SE	13
	20	82,02%	7,24%		PLANTAR-SE	
	19	69,35%	13,55%		PLANTAR-SE	
	18	56,14%	18,88%		PLANTAR-SE	
	17	42,41%	23,20%		PLANTAR-SE	
	16	35,43%	26,46%		PLANTAR-SE	
	15	35,43%	29,19%		PLANTAR-SE	
	14	35,43%	31,91%		PLANTAR-SE	
	13	35,43%	34,64%		PLANTAR-SE	
	12	35,43%	37,36%		DEMANAR	
	11	35,43%	61,95%	73,61%		
	10	35,43%	59,17%	68,03%		
	9	35,43%	53,77%	58,61%		

17	13,9660%
18	13,4970%
19	12,9260%
20	12,4120%
21	11,7400%
Blackjack	0,0000%
>21	35,4260%

Figura 5.4: Taula exemple (doblar-se)

Font: Imatge de l'autor

5.7 Resultats ("mans dures")

En les anteriors seccions s'han mostrat, explicat i exemplificat tots els passos que s'han seguit per fer aquesta primera meitat de l'anàlisi de l'estratègia bàsica del Blackjack. Utilitzant els mètodes ensenyats, s'ha completat l'estudi per totes les combinacions dures[8] de (X, b) que conté el joc. No es podran trobar totes les taules en aquest capítol, però s'adjuntaran als annexos d'aquest treball.

No obstant això, gràcies al procés realitzat, ha estat possible reunir tots els resultats en una única taula-resum, que assegura matemàticament quina és la decisió oportuna en cada cas. D'aquesta manera, el jugador pot ser coneixedor de l'acció més beneficiosa per a ell davant qualsevol agrupació dura (X, b):

		CARTA DEL CRUPIER									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	A
MÀ DEL JUGADOR	4 - 8	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	9	DEM	2x	2x	2x	2x	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	10	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	DEM	DEM
	11	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	DEM	DEM
	12	DEM	DEM	PLA	PLA	PLA	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	13	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	14	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	15	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	16	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	17 - 20	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA

2x	DOBLAR-SE
DEM	DEMANAR
PLA	PLANTAR-SE

Figura 5.5: Resum de l'estratègia bàsica per les "mans dures"

Font: Imatge de l'autor

La figura 5.5 és el resultat final dels càlculs realitzats durant aquesta primera meitat de la investigació. La solució, paral·lelament a la taula, es pot expressar també mitjançant un límit [L(b)] segons cada possible b del crupier, tal com es defineix en la metodologia (secció 5.2). Si $X <$ L(b), és preferible demanar carta i, si $X \geq$ L(b), el millor és plantar-se. Amb aquest mètode, es pot simplificar l'estratègia en un petit esquema, amb l'inconvenient, però, de no quantificar la possibilitat de doblar-se:

b:	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**A**
L(b):	13	13	12	12	12	17	17	17	17	17

Taula 5.2: Límit per cada b ("mans dures")

[8] Al parlar de combinacions dures, ens referim a combinacions quan el jugador té una "mà dura".

5.8 "Mans toves"

5.8.1 Hipòtesi inicial

La figura 5.5 recull l'estratègia bàsica del Blackjack per a "mans dures". Això no obstant, pel que fa a les toves (recordem, que contenen d'un as), la cosa canvia. Aquest tipus de mans són conegudes per ser més beneficioses pel jugador, atès que li donen, per dir-ho d'alguna manera, dues oportunitats (si l'apostador es passa, l'as deixa de valdre 11 i val 1, i es continua el joc). Per aquest motiu, demanar carta hauria de suposar un risc inferior, i el límit en què es recomana deixar de fer-ho hauria de ser, teòricament, més alt que els mostrats en la taula 5.2.
Aquesta hipòtesi inicial és bastant intuïtiva i relativament senzilla de deduir per qualsevol persona. Ara bé, per comprovar que això és realment així, cal trobar-ne una demostració matemàtica.

5.8.2 Demostració de la hipòtesi i exemplificació

La fórmula general per calcular el **màxim guany esperat** continua sent la mateixa que fins ara: l'equació 5.3.

$$G^*(X,b) = MAX\Big[G_0(X,b) \quad , \quad G'(X,b)\Big]$$

A més a més, el benefici de plantar-se es calcula d'igual manera: amb l'expressió 5.4, donat que, si el jugador es planta, el fet que disposés o no d'un as deixa de ser rellevant.

$$G_0 = P(X > B) + P(B > 21)$$

Així doncs, la diferència recau en el guany esperat en demanar carta. En les seccions anteriors, s'ha afirmat que aquells valors de c que portin a superar 21 són negligibles en l'operació, donat que el guany esperat si surt alguna d'aquestes cartes és 0. En les "mans toves", en canvi, aquesta assumpció és incorrecta. En les "mans toves", si $X + c > 21$, se li ha de restar 10 al total obtingut (perquè l'as passa de valdre 11 a valdre 1). A partir de llavors, **es tracta la puntuació com una "mà dura"**.

Per aquest fet, la funció utilitzada per trobar G' (5.8) es divideix, en aquest casos, en dues: una per tots els valors de $X + c$ menors o iguals a 21, i una altra per aquells que superen aquesta puntuació. Recordem que l'equació 5.8 s'enuncia:

$$G' = \sum_{c=1}^{10} P(c) \cdot G^*(X+c,b)$$

Introduïm a la nomenclatura: $\overline{G^*}$ com **el màxim guany esperat en el cas d'una "mà tova"** (es diferencia de G^* en que, si $X + c$ sobrepassa 21, el resultat no és 0), i n com aquella carta c que compleix que: $X + n = 21$. Amb això, les dues equacions s'enuncien:

$$G' = \begin{cases} \displaystyle\sum_{c=1}^{n} P(c) \cdot \overline{G^*}(X+c,b) & \text{si} \quad X+c \leq 21 \\ \displaystyle\sum_{c=n+1}^{10} P(c) \cdot G^*(X+c-10,b) & \text{si} \quad X+c > 21 \end{cases} \tag{5.19}$$

L'aparició de n en els sumatoris es deu a que, per cadascun d'ells, no es poden utilitzar tots els valors de c, sinó només els que corresponen a l'interval de cada expressió. És per això que es limita l'equació de dalt amb l'últim valor de c que compleix la condició requerida (és a dir, n, ja que $X + n + 1 > 21$), i el segon sumatori es comença per la carta c consecutiva a n.

D'altra banda, de la mateixa manera que s'ha fet en les "mans dures", es calcula $\overline{G^*}$ quan $X = 21$, i successivament es troba la resta per inducció cap enrere. Per tal de demostrar que aquesta assumpció és factible, en el següent paràgraf es demostra que és possible trobar aquest primer valor:

Donat que $X = 21$, qualsevol carta que es rebi implicarà el fet de passar-se, així que, segons els intervals, cal aplicar sempre la segona de les expressions 5.19. Així doncs, si la carta obtinguda és un as, el jugador tindrà una "mà dura" de 12. Si aquesta és un 2, la suma serà 13, i així successivament. Atès que l'estratègia per les "mans dures" ja ha estat estudiada, es coneix el guany esperat (G^*) per totes aquestes puntuacions i per tota b. Així mateix, aplicant l'equació mencionada, es pot trobar el màxim guany esperat al demanar carta amb un 21 tou i, conseqüentment, $\overline{G^*}(21, b)$.

Per acabar, s'annexa un exemple. A l'estudi de l'estratègia bàsica per les "mans dures", s'ha posat com a mostra la taula que estudia la decisió òptima quan el crupier disposa d'un 2 (figura 5.1). Així mateix, per fer les coses més fàcils, el prototip que s'adjunta per les "mans toves" és també aquell en què $b = 2$. Es pot veure en la figura 5.6:

Q11 fx =1/13*(SUM(P3:P6;Q7:Q10;E12))+4/13*D11

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
2	21	94,10%	61,95%	PLANTAR-SE	18
	20	82,02%	59,17%	PLANTAR-SE	
	19	69,35%	56,24%	PLANTAR-SE	
	18	56,14%	53,19%	PLANTAR-SE	
	17	42,41%	50,02%	DEMANAR	
	16	35,43%	49,00%	DEMANAR	
	15	35,43%	50,04%	DEMANAR	
	14	35,43%	51,17%	DEMANAR	
	13	35,43%	52,38%	DEMANAR	
	12	35,43%	54,13%	DEMANAR	

17	13,9660%
18	13,4970%
19	12,9260%
20	12,4120%
21	11,7400%
Blackjack	0,0000%
>21	35,4260%

Figura 5.6: Estudi de l'estratègia de les "mans toves" quan el crupier té un 2

Font: Imatge de l'autor

Cadascun dels percentatges de la columna G' s'obté fent el sumatori del màxim guany esperat després d'obtenir cada carta, i multiplicant-lo per $P(c)$. Dit d'una altra manera, transportant les equacions 5.19 al llenguatge d'*Excel*. A banda d'això, com ha estat concretat prèviament, G_0 no canvia respecte l'estudi de les "mans dures".

Per tal que s'entengui, mostrem com es calcularia una de les cel·les, la Q8, per exemple. Assumim que, degut a la utilització de la inducció cap enrere, els valor superiors (Q7, Q6, etc.) ja es coneixen, i els inferiors no. D'altra banda, es disposa també de les dades de la columna P, que es van trobar ja en el seu moment (secció 5.5).

El jugador ha obtingut de 16 punts. Així doncs, si rep una carta de valor entre 1 i 5 no es passarà, seguirà tenint una "mà tova" i el seu guany esperat serà $\overline{G^*}$ (vegeu-lo en les cel·les P3-P6 i Q7, en verd a la imatge 5.6). D'altra banda, si la carta que rep puntua 6 o més, l'apostador serà posseïdor, d'ara en endavant, d'una "mà dura" de valor $16+c-10$. En aquesta situació, el seu màxim guany esperat serà G^*, calculat prèviament en la primera meitat de l'estudi. Fent la mitjana ponderada segons la probabilitat d'obtenir cadascuna de les cartes ($\frac{1}{13}$ o $\frac{4}{13}$), s'obté el percentatge de la cel·la Q8.

5.9 Resultats ("mans toves")

L'estructura d'aquesta segona meitat de l'estudi ha estat idèntica a la de la primera, explicant el procés de forma més simplificada. Això s'ha fet senzillament amb l'objectiu de no repetir tota l'explicació de les seccions anteriors, la qual hauria servit només per distingir-ne petites variacions. En definitiva, igual que en l'anàlisi de les "mans dures" (secció 5.7 els resultats s'han reunit en una taula resum:

		CARTA DEL CRUPIER									
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**A**
MÀ DEL JUGADOR	**A,A**	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	A,2	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	A,3	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	A,4	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	A,5	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	A,6	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	A,7	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	DEM	DEM	DEM
	A,8	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA
	A,9	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA
	A,10	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA

DEM	DEMANAR
PLA	PLANTAR-SE

Figura 5.7: Resum de l'estratègia bàsica per les "mans toves"

Font: Imatge de l'autor

Ara sí, el format del límit [L(b)] té utilitat real, atès que només hi ha dues possibles accions pel jugador. Aquesta forma d'esquematitzar els resultats abreuja enormement la representació de l'estratègia, i facilita molt la seva memorització en cas que es vulgui aplicar als casinos. La simplificació seria la següent:

b:	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**A**
L(b):	18	18	18	18	18	18	18	19	19	19

Taula 5.3: Límit per cada b ("mans toves")

És interessant apuntar que aquesta taula s'ha comparat amb la deduïda pel Departament d'Estadística i Investigació Operativa de la Universitat Complutense de Madrid, i s'ha observat una única discrepància. Aquesta es localitza en la columna $b = 8$, on la seva solució posa com a límit 16, mentre que l'òptim segons aquest estudi és plantar-se a partir de 18.

Així i tot, personalment, m'he pres el luxe d'assumir que aquest va estar un simple error d'escriptura per part dels autors del document. M'explico: durant l'estudi, he descobert que 16 és la puntuació menys beneficiosa pel jugador. En les figures 5.1, 5.4 i 5.6 es pot apreciar que, a mesura que el valor de la mà del jugador disminueix, G_0 és decreixent. Oposadament, G' augmenta a partir de la puntuació 16. Aquestes característiques es compleixen en totes les taules. Així doncs, si demanar carta en 16 fos la decisió correcta, també ho seria fer-ho en 15, 14 i tots els valors anteriors. És per això que posar el límit en aquest punt mancaria de sentit.

5.10 Separar-se

Hi ha una de les accions del jugador que encara no s'ha analitzat: separar-se. L'estratègia en els anteriors apartats s'ha pogut estudiar sense tenir en compte aquesta acció, ja que només es troba disponible quan es dona una condició concreta: que les dues cartes del jugador siguin iguals.

Com s'ha explicat prèviament, aquesta regla permet al jugador dividir la seva mà en dues diferents, perquè juguin independentment l'una de l'altra. Per exemple, si una persona compta amb dos sisos, pot decidir sumar-los i jugar una partida normal amb puntuació 12, o separar-los i jugar dues mans de puntuació 6 a la vegada.

Així doncs, tenint en compte que cadascuna de les dues cartes tenen un valor a, separar-se serà l'ideal sempre que es compleixi la següent desigualtat:

$$2 \cdot G^*(a, b) \quad > \quad G^*(2a, b) \tag{5.20}$$

Dit d'una altra manera, cal exercir aquesta acció sempre que el guany esperat a l'executar dos cops la mà (a, b) sigui més alt que l'esperat al jugar una sola vegada la combinació $(2a, b)$. Un cas pràctic és aquell en què l'apostador ha rebut dos asos, i el crupier té un 2. En la figura 5.8 s'estudia aquesta situació, entre d'altres.

=AP14+AP14-0,5

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
2	21	94,10%	0,00%	PLANTAR-SE	13
	20	82,02%	7,24%	PLANTAR-SE	
	19	69,35%	13,55%	PLANTAR-SE	
	18	56,14%	18,88%	PLANTAR-SE	
	17	42,41%	23,20%	PLANTAR-SE	
	16	35,43%	26,46%	PLANTAR-SE	
	15	35,43%	29,19%	PLANTAR-SE	
	14	35,43%	31,91%	PLANTAR-SE	
	13	35,43%	34,64%	PLANTAR-SE	
	12	35,43%	37,36%	DEMANAR	
		SEPARAR-SE	**NO SEPARAR-SE**	**G* nombres inferiors**	
	A-A	73,90%	37,36%	**61,95%**	
	10-10	68,33%	82,02%	**59,17%**	
	9-9	57,54%	56,14%	**53,77%**	
	8-8	47,92%	35,43%	**48,96%**	
	7-7	39,19%	35,43%	**44,59%**	
	6-6	34,86%	37,36%	**42,43%**	
	5-5	35,20%	59,17%	**42,60%**	
	4-4	36,28%	48,96%	**43,14%**	
	3-3	37,38%	42,43%	**43,69%**	
	2-2	39,46%	43,14%	**44,73%**	

17	13,9660%
18	13,4970%
19	12,9260%
20	12,4120%
21	11,7400%
Blackjack	0,0000%
>21	35,4260%

Figura 5.8: Estudi del benefici de separar-se quan el crupier té un 2

Font: Imatge de l'autor

Vegeu en la part superior esquerra de la imatge que, per fer la corresponent multiplicació per dos, es fa servir el mateix mètode que en la secció 5.6, sostraient 0,5 al total. Els resultats es resumeixen en la següent taula:

		CARTA DEL CRUPIER									
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**A**
MÀ DEL JUGADOR	**A,A**	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP
	10,10	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA	PLA
	9,9	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	PLA	SEP	SEP	PLA	PLA
	8,8	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	DEM	DEM
	7,7	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	SEP	DEM	DEM	DEM	DEM
	6,6	DEM	DEM	SEP	SEP	SEP	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	5,5	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	DEM	DEM
	4,4	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	3,3	DEM	DEM	DEM	DEM	SEP	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM
	2,2	DEM	DEM	DEM	SEP	SEP	DEM	DEM	DEM	DEM	DEM

DEM	DEMANAR
PLA	PLANTAR-SE
2x	DOBLAR-SE
SEP	SEPARAR-SE

Figura 5.9: Resum separar-se

Font: Imatge de l'autor

5.11 Anàlisi dels resultats

De l'estudi realitzat al llarg d'aquest capítol es poden extreure certes conclusions, i fer una anàlisi general dels resultats obtinguts. Per tal de fer-ho, s'ha elaborat un segon algorisme que simuli mans del jugador, en què aquest segueixi l'estratègia bàsica trobada. L'algorisme es descriu més a fons en la secció 6.4. En termes bàsics, aquest funciona de la manera següent: es compara el valor en què es planta una mà del jugador amb el valor en què es planta una mà del crupier. Es repeteix el procés 10^6 vegades i se'n registren els resultats. Suposant que s'aposta una unitat monetària per partida, es troba el guany total esperat pel jugador segons cada carta visible del crupier. Aquest s'ha escrit en la taula de la figura 5.10.

	GUANY TOTAL
A	-32,4707
10	-18,2391
10	-18,2391
10	-18,2391
10	-18,2391
9	-5,4862
8	4,1998
7	12,3959
6	20,0632
5	16,7885
4	13,2082
3	10,0416
2	6,7494
MITJANA	-2,1128

Figura 5.10: Guany total esperat per cada b, segons la simulació Font: Imatge de l'autor

Com s'aprecia en la figura 5.10, les cartes més altes i més favorables al crupier (A, 10, 9) donen un guany esperat negatiu, o cosa equivalent, avantatge a la banca. Les altres cartes inicials del crupier donen avantatge al jugador. La raó per què el guany total amb un 10 es repeteixi quatre cops és que aquest té el quàdruple de probabilitat d'aparèixer. D'aquests números s'ha fet la mitjana, i s'ha obtingut aquest $-2,11\%$, que és l'avantatge de la casa si es fa servir l'estratègia.

Tanmateix, i per raons que s'expliquen posteriorment en la secció 6.4, aquest avantatge no és representatiu de l'estratègia en la seva totalitat, atès que l'algorisme no té en compte les "mans toves" ni l'acció de separar-se. Amb tot, sí que expressa una reducció del $3,5\%$ respecte l'avantatge inicial de la "casa". Un valor que, de segur, augmentaria si es quantifiquessin les parts de l'estratègia que falten.

Capítol 6

Desenvolupament d'un algorisme computacional

"Juga al JOC amb més diners dels que et pots permetre perdre. Només llavors hi aprendràs a jugar."

- Winston Churchill (1874 - 1965)

En aquest capítol s'explicarà el procés de desenvolupament i el funcionament d'un **algorisme** capaç de calcular les probabilitats que té el crupier d'obtenir cada puntuació B a partir de tots els possibles valors inicials b. Es mostrarà el codi utilitzat per programar cada funció de l'algorisme. Alhora, s'exemplificarà l'explicació a través d'imatges.

Després de tot un treball escrit majoritàriament des d'un punt de vista objectiu i tècnic, considero que en aquest capítol val la pena emprendre l'explicació en primera persona, descrivint els fets de manera subjectiva talment com jo, l'autor, els he anat vivint durant la creació d'aquesta part pràctica.

6.1 Introducció i raons per fer l'algorisme

Una mà de Blackjack és un arbre de possibilitats amb milions de ramificacions, que no es pot resumir amb cap expressió matemàtica. Pel crupier, tots els camins porten a Roma, en el sentit que sempre obtindrà un nombre entre 17 i 21 o es passarà. Tot i així, la quantitat de vies possibles per assolir aquest mateix resultat final és pràcticament infinita. En resum, mesurar les probabilitats del crupier de manera teòrica és, podem dir, inabastable. És per això que he decidit utilitzar els mètodes de Montecarlo[1], que, per definició, són la solució quan totes les altres maneres d'enfocar el problema no serveixen.

En el capítol 5, es torna necessari el fet de conèixer les probabilitats del crupier, ja que suposen un factor essencial per esbrinar l'estratègia bàsica, concretament per calcular el guany esperat si el jugador es planta (G_0). Em vaig trobar en la situació que no podia continuar el meu estudi sense aquesta informació, així que vaig haver de parar, deixar en suspensió el capítol en què estava treballant i començar a investigar maneres de dur a terme els càlculs amb ordinador. Va ser arrel de la recerca que vaig descobrir la simulació de Montecarlo, de la qual no havia sentit a parlar mai abans.

Després d'hores d'investigació i de comprendre què eren aquests mètodes exactament, vaig concloure que amb ells tindria les eines necessàries per solucionar el meu problema. Malgrat això, en el moment en què vaig prendre la decisió d'aprendre sobre ells i utilitzar-los, els meus coneixements sobre programació eren gairebé inexistents. És més, si ens referim concretament a les simulacions, aquests eren nuls. En resum, no tenia idea de com desenvoluparia la meva part pràctica. No obstant això, sabia una cosa: sense descobrir les probabilitats del crupier, el meu treball es quedava estancat en un punt sense sortida. Així doncs, no hi havia altra que aconseguir-ho.

6.2 Què fa l'algorisme?

L'algorisme que he creat simula rondes de Blackjack i mostra el valor en què el crupier s'ha plantat al final de cadascuna d'elles. Concretament, ho fa 1.000.000 de cops per cada valor de b, és a dir, deu

[1]Vegeu 2.2 Mètodes de Montecarlo (pàg. 22).

milions en total. Cal aclarir que quan parlem de simulació no ens referim a una imatge en alta definició d'un tapet[2] sobre el que que van apareixent cartes, amb gent al voltant i monedes de casino. No té res a veure amb això; l'algorisme treballa únicament amb cel·les d'*Excel*. El que mostra, doncs, i el que l'investigador ha d'interpretar, són columnes i files de números en un document de càlcul.

De la mateixa manera, la computadora no coneix les normes del joc. És més, realment, aquesta ni tan sols sap que està executant partides de Blackjack. Així doncs, abans d'aspirar a obtenir resultats, hi ha d'haver tot un procés de programació i optimització de les funcions de l'algorisme, per tal de fer una rèplica exacta d'una partida real de Blackjack.

6.3 Funcions de l'algorisme i el seu codi respectiu

Una partida de Blackjack, tot i ser un joc amb fama de senzill, té una base complexa amb molts matisos. Si no es programa cada detall al peu de la lletra, la simulació no replicarà el joc amb exactitud. Cal tenir en compte que algunes de les coses que per un ésser humà són intuïtives i s'assumeixen ràpidament, per l'ordinador no ho són. És per aquest motiu que és necessari definir cada etapa de la partida, per petita o circumstancial que sigui, amb una funció.

Durant el desenvolupament, se'm van presentar diversos problemes. En la seva majoria, característiques del joc que, per la meva condició d'inexpert en el camp de la programació, no sabia traslladar a l'algorisme. Fer que el 10 tingués més probabilitat de sortir que la resta de cartes, o aconseguir que el crupier es plantés amb puntuacions de 17 o més, són alguns exemples de les dificultats que van sorgir. Això sí, el temps invertit a solucionar-les queda lluny de les hores de recerca emprades a trobar una manera de fer que l'as variés el seu valor en els moments en què ho havia de fer.

6.3.1 Repartiment de cartes: ponderació de les probabilitats amb la funció RAND()

El primer pas va ser programar l'algorisme perquè repartís les cartes al crupier de manera aleatòria. Com en qualsevol simulació de Montecarlo, totes les funcions que requereixin el factor de l'atzar han de contenir el comandament *RAND()* (recordem que el que fa aquest és generar un nombre aleatori major que 0 i menor que 1[3]). Com s'ha explicat ja en múltiples ocasions, no totes les c són equiprobables: el 10 disposa de 4/13, mentre que la resta tenen 1/13, així que la funció no depèn al 100% de l'aleatorietat. És necessari ponderar les probabilitats, i això es pot fer de la manera següent:

$$= MATCH(RAND(), probabilitat\_acumulada) \tag{6.1}$$

Vegeu que la fórmula, enlloc de treballar amb la probabilitat individual de cada carta, fa servir l'acumulada (és a dir, la probabilitat que s'obtingui aquell valor o un inferior). Aquest és un detall de

[2]El **tapet** és una peça de tela, sovint de color verd, sobre la qual es juga a jocs com el Blackjack o el Poker.

[3]Per una explicació més extensa sobre aquest comandament, vegeu la secció 2.2.

programació perquè la formula funcioni, que no suposa cap canvi en els resultats. D'altra banda, això sí, per tal de generar un nombre aleatori ponderat és necessària la creació una taula d'ajuda, en la qual es determini la probabilitat de cada element, juntament amb l'acumulada. La següent imatge n'és una il·lustració:

	A	B	C	D	E	F
1						
2		VALOR	PROBABILITAT	PROBABILITAT ACUMULADA		RESULTATS
3		1	7,69%	0,00%		10
4		2	7,69%	7,69%		6
5		3	7,69%	15,38%		9
6		4	7,69%	23,08%		7
7		5	7,69%	30,77%		9
8		6	7,69%	38,46%		10
9		7	7,69%	46,15%		6
10		8	7,69%	53,85%		3
11		9	7,69%	61,54%		9
12		10	30,77%	69,23%		7
13						6
14						10
15						4
16						10
17						10

Figura 6.1: Valors aleatoris amb probabilitat ponderada

Font: Imatge de l'autor, inspirada en una publicació d'EXCELJET

En particular, a l'exemple mostrat a la figura 6.1, la fórmula de les cel·les de la columna F és:

$$= MATCH(RAND(), D\$3 : D\$12) \tag{6.2}$$

Malgrat que tots provinguin del mateix comandament, però, els resultats no són iguals entre ells, ja que la funció RAND() no és constant. Perquè ens entenguem, si es tornés a executar la columna "RESULTATS" sense canviar-ne absolutament res, les cel·les mostrarien números diferents als de la imatge.

La característica mostrada a la figura 6.1 es traslllada a l'algorisme real, on cada cop que es fa una execució els nombres canvien. Per culpa d'això, no és possible treballar amb cel·les individuals, o posar comandaments especials en algunes files i en altres no, ja que quan es torni a executar l'algorisme els valors d'aquestes hauran canviat. El que sí afavoreix això, per contra, és el fet que es pugui executar la mateixa simulació múltiples vegades amb la tecla F9[4], sense necessitat de canviar-ne res. Gràcies a això, és possible multiplicar en poc temps el nombre de repeticions, superant les que l'ordinador pot abastar d'una sola vegada.

6.3.2 Sumatori de les cartes i estructura de la simulació

Un cop l'ordinador és capaç de repartir naips tal com ho faria una persona amb una baralla, cal programar-lo perquè faci el sumatori del que té el crupier en un principi junt amb les cartes que puguin

[4]En *Excel*, s'utilitza la **tecla F9** per tornar a calcular el resultat de totes les formules del document.

sortir després. Per tal de simplificar-ho al màxim, vaig estructurar la simulació en 2 tipus de columnes: "CARTA" i "SUMA", que es van alternant, talment que quedi de la següent manera:

K	L	M	N	O	P
2a CARTA	SUMA 2	3a CARTA	SUMA 3	4a CARTA	SUMA 4
7	**9**	3	**12**	6	**18**

Figura 6.2: Estructura de la simulació Font: Imatge de l'autor

En el cas mostrat, la banca té un 2 de partida, i se li van sumant els valors de les cartes a mesura que les rep. Es comença a comptar per la segona d'elles, perquè s'entén que la primera és aquella que la banca té inicialment (b). El comandament utilitzat per fer això és un simple "SUM()"[5].

Tot i que no es veu a la il·lustració, **es quantifica fins la 7a carta**. Amb aquesta mesura, s'estudien més del $99,99\%$ de les mans possibles. Com a curiositat, i perquè el lector es faci una idea de la magnitud d'aquesta dada, si es deixés de comptar a la 5a, només es tindria en compte aproximadament un $88,3\%$.

En quant a l'organització a gran escala, **cadascuna de les deu simulacions** (recordem, una per cada b) **compta amb 100.000 files o partides** (per raons de memòria RAM[6] de l'ordinador, no és bona idea augmentar aquest nombre). Per tal d'assolir el nombre suficient de repeticions (el qual, després d'escoltar les recomanacions d'experts en la matèria, vaig fixar en un milió), s'executa cada simulació deu vegades.

6.3.3 Detalls de format

Per tal de facilitar la visualització del document, vaig crear un *conditional formatting*[7] que pintés d'un color grisenc el fons de totes aquelles cel·les que valguessin 17 o més (vegeu les figures 6.2 i 6.3). D'aquesta manera, es ressalta el moment en què la banca es planta o, en el seu defecte, es passa, i la puntuació amb què ho ha fet. Aquesta mesura es va prendre amb l'objectiu de tenir una millor organització, i evitar veure un gran seguit de números sense cap diferenciació de format. Ara bé, no té cap altra aplicació que aquesta perquè, al cap i a la fi, no és factible dedicar-se a revisar *de visu* quan s'ha plantat la banca en cadascuna de les 10.000.000 de repeticions.

[5]En *Excel*, el **comandament SUM()** s'utilitza per sumar valors, tant individualment com en conjunts grans.

[6]La **memòria RAM** (*Random Access Memory*) d'un ordinador o dispositiu és la seva memòria principal, on s'emmagatzemen de forma temporal les dades dels programes que s'estan utilitzant en aquell moment.

[7]**Conditional formatting** és una eina d'*Excel* que s'utiliza per donar un format en concret a aquelles cel·les que compleixin una condició determinada; pintar-les d'un color, o posar-les en negreta, per exemple

6.3.4 Normes del crupier: plantar-se amb 17 o més

A diferència dels jugadors, que tenen llibertat de decisió, el crupier està lligat a unes normes, que l'obliguen a demanar amb 16 o menys i plantar-se amb puntuacions superiors a aquesta. Així doncs, cal programar l'ordinador perquè, quan se sobrepassi aquest límit, es deixin de tenir en compte les cartes que la banca rep. Perquè ens entenem: si una de les files assoleix 17 punts en la quarta suma, les següents cartes són insignificants per la jugada i no han de ser comptabilitzades.

Així mateix, i no sense molta recerca i experimentació, vaig trobar una formula capaç de donar les jugades per acabades. Tot i que en la pràctica n'he acabat fent infinitat de variacions, el model inicial de la funció és el que es mostra a continuació:

$$= \text{IF}\ (A1 < 17; A1 + B1; \text{“}-\text{”}) \tag{6.3}$$

La manera com aquesta funciona és irònicament simple: si la suma prèvia no supera 17, es continua la partida i s'hi afegeix la carta que s'ha rebut; si, per contra, l'anterior suma sobrepassa aquest nombre, la cel·la no mostrarà cap valor, sinó un guió, simbolitzant i quantificant que la partida s'ha acabat. Com els guions no són "un número més petit que 17" (és a dir, no compleixen la condició del comandament "IF()"), aquests es prolongaran fins el final de la fila, com ha de ser. Vegeu-ne un exemple gràfic en la figura 6.3.

=IF(P2<17;P2+Q2;"-")

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
2a CARTA	SUMA 2	3a CARTA	SUMA 3	4a CARTA	SUMA 4	5a CARTA	SUMA 5	6a CARTA	SUMA 6	7a CARTA	SUMA 7
7	**9**	7	**16**	1	**17**	9	-	5	-	7	-
10	**12**	10	**22**	7	-	5	-	10	-	5	-
10	**12**	9	**21**	10	-	4	-	5	-	8	-
9	**11**	5	**16**	10	**26**	2	-	10	-	7	-
4	**6**	8	**14**	2	**16**	1	17	4	-	2	-

Figura 6.3: Mostra d'una petita part de la simulació que estudia $b = 2$ Font: Imatge de l'autor

6.3.5 Registre dels resultats

Degut a l'alta quantitat de repeticions, l'única manera de fer un recull efectiu de les solucions és que ho realitzi la computadora. Per aconseguir això, la vaig programar per calcular quin percentatge de cada resultat hi havia en cada columna "SUMA". Per exemple, a la "SUMA 3", d'entre 100.000 valors 5.000 són el nombre 18; un 5%. Es fa el mateix recompte pels altres possibles valors finals i la resta de columnes, i se sumen respectivament. En la figura 6.4 es mostra un prototip d'això. En aquest cas particular, el crupier parteix d'un 3.

		3a	4a	5a	6a	7a	TOTAL
19							
20		3a	4a	5a	6a	7a	TOTAL
21	17	8,90%	3,77%	0,76%	0,10%	0,01%	**13,54%**
22	18	8,49%	4,00%	0,76%	0,07%	0,01%	**13,32%**
23	19	7,53%	4,05%	0,76%	0,07%	0,01%	**12,42%**
24	20	7,21%	3,97%	0,78%	0,09%	0,01%	**12,07%**
25	21	6,44%	3,99%	0,82%	0,09%	0,01%	**11,34%**
26	Blackjack	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	**0,00%**
27	>21	14,29%	17,64%	4,75%	0,58%	0,05%	**37,31%**
28							
29							**99,997000%**

Figura 6.4: Recull dels resultats de la simulació

Font: Imatge de l'autor

És interessant apuntar que no es fa registre de la 2a suma perquè, amb la puntuació inicial que té el crupier, un 3, és impossible arribar a plantar-se amb la recepció d'una única carta. Cal aclarir, però, que a mesura que b es fa més gran (6 o més) es torna necessari quantificar aquesta 2a suma, perquè sí que és factible que el crupier es planti amb dues cartes.

Vegeu també que, si es comparen els totals d'aquesta figura amb les probabilitats del crupier donades a la secció 5.4, es pot notar que no són les mateixes; sí que són similars, però. Això és perquè, tal com s'ha dit prèviament, cadascuna de les execucions reuneix només una desena part de les partides totals que s'han de simular. Així mateix, l'algorisme s'executa nou vegades més, obtenint cada cop una taula semblant a la de la figura 6.4, amb uns valors lleugerament diferents. Un cop s'ha fet això, es calcula la mitjana de les 10 execucions, i s'obté la probabilitat que el crupier es planti amb cada puntuació, respectivament.

6.3.6 Quantificació de les variacions de valor dels asos

L'as en el Blackjack és l'única carta amb una peculiaritat: el seu valor és variable. I, el que és més important, **aquesta variabilitat es manté al llarg de les jugades**. Un ésser humà entén i automatitza aquesta condició ràpidament: si l'as puntua 11 i se supera 21, passa a tenir un valor d'1. Ara bé, quan qui juga és un ordinador, la situació és molt més complexa.

Ja s'ha explicat prèviament que, degut a la variació dels resultats cada cop que es fa una execució, no és possible treballar amb files concretes. Això significa que no es poden delimitar aquelles mans que contenen un as i tractar-les de manera especial, perquè en el moment en què es torni a executar la simulació aquestes files ja no contindran el mateix valor (l'ordinador les canvia aleatòriament amb la funció RAND()). En conseqüència, qualsevol detall que s'hagi d'especificar en programar les "mans toves", s'haurà de determinar en totes les cel·les de la columna, tot i que moltes d'elles acabin sent simples "mans dures". Aquest handicap em va portar a haver d'implementar de funcions com la que es mostra a continuació:

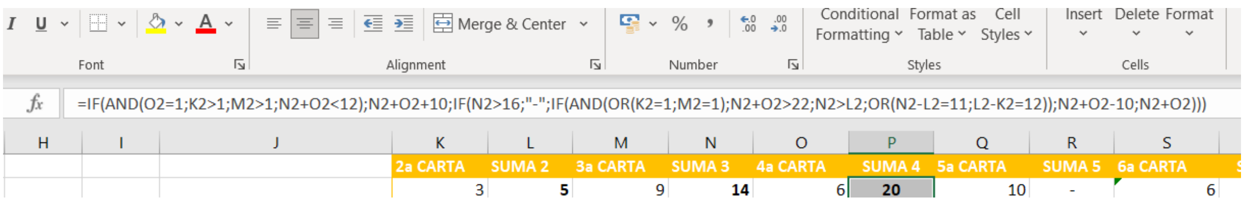

Figura 6.5: Formula en la columna "SUMA 4" de la simulació que estudia $b = 2$ Font: Imatge de l'autor

Tot i que la formula anterior sembli monstruosament complicada, realment l'únic que fa és reunir totes les condicions que es podrien donar (en termes de "mans toves" i de quan plantar-se), i indicar què fer en el cas de cadascuna d'elles. Com es pot veure al final de la funció $(N2 + O2)$, si cap d'aquestes circumstàncies extraordinàries succeeix, es continua de manera normal, afegint la darrera carta repartida a la puntuació anterior i mostrant el resultat.

Vaig haver de crear comandaments similars al d'aquesta columna per la resta de sumes 2, 3 i 4. A partir de la cinquena, es deixen de posar condicions en referencia als asos, atès que és pràcticament impossible que en una mà s'arribi a demanar 5 cartes tenint encara un as de valor 11. Prendre aquesta mesura sacrifica una ínfima part de la precisió de l'algorisme (inferior al $0,01\%$, gairebé inexistent).

Nota: El lector pot anar seguint la figura 6.5 per entendre el seu significat a través de la següent explicació. És important recalcar que l'algorisme representa els asos com un 1, i que per augmentar el seu valor s'ha d'afegir 10 a la suma corresponent.
La primera part d'aquest tipus de funcions defineix que: si l'última carta obtinguda és un as $(O2 = 1)$; i la puntuació anterior $(N2)$ és 10 o menys $(N2+O2 < 12)$; aquest tingui un valor d'11 $(N2+O2+10)$.
La segona meitat compleix justament la tasca oposada: fer que l'as torni a valdre 1 quan sigui necessari.
Es programa que: si almenys una de les dues primeres cartes ha estat un as $(OR(K2 = 1; M2 = 1))$; la suma actual supera 21 $(N2 + O2 > 22)$; i l'as encara val 11 (això es programa amb un seguit de desigualtats que asseguren que en cap moment s'ha reduït el seu valor); aquest passi a comptar 1 $(N2 + O2 - 10)$. Si res d'això ocorre, com ja s'ha dit, es fa el sumatori normal.

6.4 La guinda del pastís: provar l'estratègia en una simulació

L'únic objectiu amb el qual vaig crear aquestes simulacions era calcular les probabilitats del crupier. I, tal com s'ha explicat en aquest últim capítol, ha estat possible complir aquesta meta; l'algorisme ha estat un èxit. Tanmateix, una nova idea m'havia estat rondant el cap: i si, tal com ja he fet amb el crupier, simulés mans del jugador de tal manera que seguissin la meva estratègia bàsica?

Hi ha una raó per la qual des d'un principi havia descartat aquesta opció, i és que, mentre que el crupier ha de seguir unes regles molt concretes, els apostadors disposen d'un ventall de possibilitats extremadament ampli. Fins i tot eliminant el factor aleatori que representarien la personalitat i intuïció d'un jugador, programar una simulació com aquesta estaria, en termes de complexitat, nombrosos esglaons per sobre de l'altra. Tot i així, marxar sense intentar-ho m'hauria fet mal a l'orgull, així que vaig decidir donar a aquest últim projecte una oportunitat, més en qualitat de prova per curiositat personal que amb aspiracions a cap conclusió sòlida.

Amb tots els caps per lligar que tenia, vaig començar pel que sí sabia fer. Vaig fer una còpia de la simulació del crupier per $b = 2$, i vaig canviar els paràmetres necessaris perquè deixés de plantar-se als 17 punts, i ho fes obeint l'estratègia per les "mans dures". A continuació, vaig crear dues columnes, una per la banca i una pel jugador, que determinessin la puntuació final de cadascuna de les mans, per així poder-les comparar. El següent que vaig fer va ser programar aquesta comparació, tenint en compte que no guanya sempre el nombre més alt (si aquest s'ha passat de 21, per exemple). La combinació d'aquestes primeres funcions va quedar com es veu a la figura 6.6.

U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN
RTA	SUMA 7		MAX		1a CARTA	SUMA 1	2a CARTA	SUMA 2	3a CARTA	SUMA 3	4a CARTA	SUMA 4	5a CARTA	SUMA 5	6a CARTA	SUMA 6		MAX	GUANYADOR
9	-		22		7	7	7	14	10	-	10	-	5	-	6	-		14	JUGADOR
6	-		19		10	10	3	13	10	-	8	-	10	-	4	-		13	CRUPIER
2	-		20		1	11	1	12	10	22	9	-	9	-	10	-		22	CRUPIER
10	-		20		5	5	6	11	5	16	8	-	7	-	7	-		16	CRUPIER
4	-		20		5	5	10	15	10	-	2	-	6	-	9	-		15	CRUPIER
3	-		26		2	2	6	8	6	14	6	-	6	-	7	-		14	JUGADOR
2	-		21		2	2	7	9	7	16	7	-	9	-	2	-		16	CRUPIER
10	-		19		9	9	8	17	10	-	10	-	10	-	8	-		17	CRUPIER
10	-		22		5	5	10	15	3	-	10	-	1	-	10	-		15	JUGADOR
9	-		20		10	10	9	19	5	-	2	-	6	-	6	-		19	CRUPIER
10	-		20		3	3	1	14	6	-	6	-	9	-	7	-		14	CRUPIER
9	-		19		10	10	9	19	9	-	4	-	10	-	7	-		19	EMPAT
9	-		22		7	7	10	17	10	-	3	-	4	-	7	-		17	JUGADOR
10	-		21		9	9	10	19	10	-	1	-	10	-	8	-		19	CRUPIER
10	-		24		5	5	7	12	3	15	10	-	9	-	10	-		15	JUGADOR
2	-		23		10	10	10	20	7	-	10	-	10	-	10	-		20	JUGADOR
6	-		24		10	10	5	15	10	-	3	-	4	-	4	-		15	JUGADOR
5	-		22		1	11	10	21	10	-	2	-	1	-	10	-		21	JUGADOR
6	-		18		9	9	10	19	6	-	10	-	10	-	10	-		19	JUGADOR
9	-		19		10	10	1	21	3	-	5	-	5	-	7	-		21	JUGADOR
7	-		19		4	4	9	13	10	-	10	-	4	-	5	-		13	CRUPIER
10	-		21		8	8	9	17	8	-	4	-	2	-	7	-		17	CRUPIER
10	-		17		5	5	1	16	9	-	4	-	1	-	4	-		16	CRUPIER
5	-		20		8	8	10	18	9	-	5	-	2	-	9	-		18	CRUPIER
4	-		26		7	7	1	18	10	-	10	-	3	-	9	-		18	JUGADOR

Figura 6.6: Primera part de la simulació pilot Font: Imatge de l'autor

El següent obstacle que vaig afrontar un cop fetes les bases del nou algorisme va ser quantificar l'acció de doblar-se. Recordem que el jugador només pot fer ús d'aquesta opció **quan disposa d'una puntuació de 9, 10 o 11 amb les seves dues primeres cartes**. Si elegeix fer-ho, apostarà el doble i sols podrà rebre una carta més.

Per tant, ara entrava en joc una variable que no havia aparegut fins el moment: els diners, el risc econòmic. El primer que vaig fer va ser fixar la unitat monetària com a la quantitat constant de diners jugats per ronda: 1 €. D'aquesta manera, en una mà normal, el **benefici** és $+1$ si es guanya i -1 si es perd. Quan el jugador es dobla, els beneficis passen a ser $+2$ i -2 respectivament. Seguidament, vaig programar una funció "IF()", que posés com a condició que la SUMA 2 valgués 10 o 11. Segons l'estratègia citada a la secció 5.6, aquests són els valors en què compensa doblar-se si $b = 2$. Si aquesta condició es compleix, s'utilitza el segon sistema de beneficis ($+2$ i -2) i, enlloc d'agafar el màxim sumatori de la ronda, es limita la puntuació del jugador a la SUMA 3, (doncs doblar-se implica la premissa de poder demanar tan sols una carta més). D'altra banda, un Blackjack guanyat pel jugador valdria $1,5$ € (recordem que es paguen 3 a 2), i això també es té en compte. Els resultats s'expressen de la següent manera:

AM	AN	AO
MAX	GUANYADOR	BENEFICI
14	JUGADOR	1
16	CRUPIER	-1
19	JUGADOR	1
22	CRUPIER	-1
16	CRUPIER	-1
16	CRUPIER	-1
15	CRUPIER	-2
17	CRUPIER	-1

Figura 6.7: Beneficis del jugador per partida Font: Imatge de l'autor

Una altra part important de la "relació" entre el jugador i el crupier és l'empat. Recordem que, passant-se tots dos, és el casino qui guanya. Sí que es poden donar les taules, però, quan cap de les puntuacions supera 21. Cal dir que l'única dificultat que va portar aquest cas van ser les situacions en què dues mateixes puntuacions no equivalen a un empat entre la banca i el jugador. Això succeeix en 2 casos: quan tots dos es passen (guanya la banca), i quan tots dos treuen 21 però un dels dos treu Blackjack i l'altre no (guanya qui l'ha tret). Un cop marcades les excepcions, la resta és senzill: quan tots dos es planten amb el mateix nombre, el benefici retornat és 0.

Lamentablement, aquesta va ser l'última funció que vaig poder programar. Tant el canvi d'estratègia en les "mans toves" com l'acció de separar-se no es van poder desenvolupar en aquesta simulació per limitacions de temps i medis.

Pel cas de la separació, la programació es torna directament impossible, perquè la manera en què està estructurada la meva simulació no permet que una única mà es transformi en dues. Caldria buscar una solució alternativa o una estructuració diferent. Pel que fa a les "mans toves", tots els intents que vaig fer per crear condicions que tractessin diferent les "mans dures" i les "toves" en referència a quan plantar-se van resultar en que, o bé totes les partides seguien l'estratègia de les "dures", o bé totes seguien la de les "toves". Estic segur que, a diferència del cas de separar-se, sí que existeix una manera de programar aquesta situació sense sortir de l'estructura de l'algorisme, però no vaig tenir èxit trobant-la.

En resum, aquesta última prova no ha estat suficient per extreure conclusions sobre si funciona o no l'estratègia plantejada. La manca de comptabilització de certes branques del joc fa que el resultat d'aquesta darrera simulació no sigui representatiu de l'estratègia en la seva totalitat. Només s'ha pogut tenir en compte una part de l'avantatge que proporciona l'estratègia al jugador, que s'estima com quelcom proper a dos terços (les "mans toves" i l'acció de separar-se, tot i que representen menys d'un terç dels casos que es podrien donar, suposen cadascun un benefici molt gran pel jugador en proporció als altres casos). De la simulació realitzada es conclou que, si s'utilitza l'estratègia, el guany esperat del jugador disminueix fins a un $-2,11\%$[8]. Partint del $-5,6\%$ inicial, la reducció de l'avantatge de la "casa" en un $3,5\%$ és notable, però no ideal. Si assumim, però, que s'han comptabilitzat exactament dues terceres parts d'aquest, es pot fer una estimació hipotètica de l'avantatge real, el qual es calcularia de la següent manera:

$$\text{Avantatge inicial} + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \text{Reducció de l'avantatge} = \text{Estimació avantatge real} \tag{6.4}$$

Per tant:

$$\text{Estimació avantatge real} = -0,056 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 0,035 = -0,0035 \tag{6.5}$$

És a dir, un $-0,35\%$. Una proporció més que òptima, si partim de la premissa que la banca sempre guanya[9]. Recordem, però, que aquest darrer càlcul no ve donat arran de la simulació, sinó que és una mera conjectura.

[8] Vegeu la secció 5.11 per comprendre l'origen d'aquesta dada

[9] Vegeu 4.4 L'avantatge de la casa (pàg. 37).

Conclusions

Al llarg d'aquest treball he explorat dos mons, la probabilitat i el Blackjack, i utilitzar un per comprendre l'altre amb la màxima profunditat que m'ha estat possible. La meva recerca ha estat orientada, de principi a fi, a una meta fonamental: la troballa de l'estratègia òptima per jugar al Blackjack. Des de l'estudi de la probabilitat i de la seva història en l'apartat més teòric, fins a la meva primera presa de contacte amb el que són els algorismes computacionals en la part pràctica, totes i cadascuna de les seccions d'aquest projecte han estat peces essencials per l'assoliment final d'aquesta estratègia.

Després de l'estudi realitzat, puc concloure diverses coses. La primera és que els jocs que vulgarment s'anomenen d'atzar no són purament d'atzar. Que, si bé és cert que l'aleatorietat juga un paper essencial en cada partida individual, a gran escala una bona estratègia de joc pot donar al jugador un avantatge considerable sobre aquells qui juguin basant-se sols en la sort o la intuïció.

L'ús d'una estratègia matemàtica, basada en la probabilitat, té una aplicabilitat en la nostra vida ordinària, en aquest cas en el Blackjack. Un coneixement en profunditat de la teoria de la probabilitat es pot emprar per tal de generar un benefici superior del que s'aconseguiria deixant-se portar pels propis instints i l'atzar.

En segon lloc, puc concloure que, en el Blackjack, la banca sempre guanya. Que, fins i tot si es fa servir l'estratègia òptima de joc, l'avantatge continuarà essent per la "casa". Mitjançant les simulacions fetes, s'ha demostrat que l'ús d'una estratègia matemàtica redueix el benefici de la banca, però no l'elimina. El sistema està ideat a consciència perquè, tot i jugar òptimament, a la llarga el jugador perdi.

La tercera conclusió que he extret és que la concepció humana, intuïtiva i inconscient, de com funciona la probabilitat, ens pot portar sovint a resolucions errònies. Aquest fenomen es dona perquè els humans no som capaços de concebre la probabilitat correctament si no hem après a fer-ho. Tenim predilecció cap a l'especulació, cap a jugar-nos-la a l'atzar sense contemplar les nostres opcions reals, ja que inconscientment ens inclinem a imaginar la realitat que ens serà favorable. Ens agrada molt arriscar-nos i molt poc conformar-nos. En contraposició, he observat que un ordinador, que no disposa d'aquest sentiment visceral, decreta en moltes ocasions que plantar-se i "esperar l'error rival" és el millor enfocament al problema.

La part pràctica d'aquest projecte, basada en la simulació de milers de decisions fetes per una computadora, i la necessitat d'expressar els resultats matemàtics de forma redactada, em van obligar a situar-me davant de sistemes informàtics com l'*Excel* o el LaTeX, poc coneguts per a mi. L'aprenentatge de l'ús d'aquestes eines a l'abast de tothom m'ha aportat un maneig que em serà de gran utilitat en els meus estudis universitaris.

Tanmateix aquest treball, té unes certes limitacions. Recordem que l'estudi s'ha fet sota l'assumpció que les cartes repartides prèviament no afecten les futures. Així doncs, la porta queda oberta a la investigació d'una estratègia que no seguís aquesta hipòtesi, la qual seria més realista i podria resultar, perquè no, guanyadora pel jugador. De la mateixa manera, queda en l'aire la consolidació del darrer algorisme que defineix el guany total esperat pel jugador, de manera que abastés les accions del jugador al complet. Així, es podria trobar la reducció de l'avantatge de la "casa" amb més exactitud i sense necessitat de fer-ne una aproximació.

Ben mirat, però, potser tot això no és tan negatiu com sembla. Adonar-me que el meu treball té encara alguns caps sense lligar em deixa una espineta clavada i m'obliga a voler investigar més. Si alguna cosa m'ha ensenyat tot aquest procés de recerca és que hi ha dubtes que es resolen, i d'altres que no. I, el que és més important, que aquesta privació de totes les respostes no significa haver fracassat, sinó tenir un fil a què agafar-se per començar investigacions en el futur.

Bibliografia

[1] CARDIEL LÓPEZ, Nicolás; GORGAS GARCÍA, Javier; ZAMORANO CALVO, Jaime. Estadística básica para estudiantes de ciencias. Lloc d'edició: Espanya. Editor: Univesidad Complutense de Madrid. Any de publicació: 2009 [llibre]. [Data de consulta: juny - juliol 2021]

<https://web.iit.edu/sites/web/files/departments/academic-affairs/graduate-academic-affairs/pdfs/biblio-help2.pdf>

[2] TEJADA CAZORLA, Juan; YAÑEZ GESTOSO, Javier. Estudio de la estrategia óptima del Blackjack (Estadística Española, pág 95 - 110). Lloc d'edició: Espanya. Editor: Universidad Complutense de Madrid. Any de publicació: 1985 [part de llibre]. [Data de consulta: juny - setembre 2021]

<https://eprints.ucm.es/id/eprint/16268/1/Tejada18.pdf>

[3] THORP, Edward O. . *Beat The Dealer*. Lloc d'edició: Estats Units. Editorial: Vintage Books. Any de publicació: 1962 [llibre]. [Data de consulta: juliol - octubre 2021]

[4] ATWOOD, Jeff; SPOLSKY, Joël. *StackExchange*. Pregunta sobre el llenguatge LaTeX: *Add vertical space between equations* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://tex.stackexchange.com/questions/223994/add-vertical-space-between-equations>

[5] ATWOOD, Jeff; SPOLSKY, Joël. *StackExchange*. Pregunta sobre el llenguatge LaTeX: *Big parenthesis in an equation* [article en línia]. [Data de consulta: octubre 2021]

<https://tex.stackexchange.com/questions/38868/big-parenthesis-in-an-equation>

[6] ATWOOD, Jeff; SPOLSKY, Joël. *StackExchange*. Pregunta sobre el llenguatge LaTeX: *How to insert an image in the front cover of a report* [article en línia]. [Data de consulta: octubre 2021]

<https://tex.stackexchange.com/questions/13912/how-to-insert-an-image-in-the-front-cover-of-a-report>

[7] ATWOOD, Jeff; SPOLSKY, Joël. *StackExchange*. Pregunta sobre el llenguatge LaTeX: *Multiple lines one side of equation with a curly bracket* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://tex.stackexchange.com/questions/337351/multiple-lines-one-side-of-equation-with-a-curly-bracket>

[8] ATWOOD, Jeff; SPOLSKY, Joël. *StackExchange*. Pregunta sobre el llenguatge LaTeX: *Numbers in bold inside a table* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://tex.stackexchange.com/questions/336906/numbers-in-bold-inside-a-table>

[9] ATWOOD, Jeff; SPOLSKY, Joël. *StackExchange*. Fòrum de qüestions sobre el llenguatge LaTeX [fòrum en línia]. [Data de consulta: juny - agost 2021]

<https://tex.stackexchange.com/>

[10] BARRAL, Miguel. *BBVA Open Mind*. Pascal, el niño prodigio de las matemáticas que descubrió un nuevo mundo de probabilidades [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://www.bbvaopenmind.com/tecnologia/visionarios/pascal-el-nino-prodigio-de-las-matematicas-que-descubrio-un-nuevo-mundo-de-probabilidades/>

[11] BARZANALLANA, Rafael. Biografia de Pierre Laplace, una vida dedicada a la ciencia [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://www.um.es/docencia/barzana/BIOGRAFIAS/Laplace_Pierre.html>

[12] *Betsson*. Reglas del Blackjack [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.betsson.es/blog/casino-online/Blackjack/tutoriales-Blackjack/reglas-del-Blackjack/>

[13] BRUNS, Dave. *ExcelJet*. *Random number weigthed probability* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://exceljet.net/formula/random-number-weighted-probability>

[14] BYRNE, Donal. *Towards data science*. Learning to win Blackjack with Monte Carlo methods [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://towardsdatascience.com/learning-to-win-Blackjack-with-monte-carlo-methods-61c90a52d53e>

[15] CHEUSHEVA, Svetlana. *Ablebits*. *COUNTIF in Excel* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://www.ablebits.com/office-addins-blog/2014/07/02/excel-countif-examples/comment-page-3/>

[16] CHEUSHEVA, Svetlana. *Ablebits*. *Excel IF statement with multiple AND/OR conditions, nested IF formulas, and more* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://www.ablebits.com/office-addins-blog/2014/12/03/excel-if-function-iferrror-ifna/

[17] *Counting Edge Accountants*. Manos duras y suaves en Blackjack [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.countingedge.com/es/manos-duras-y-suaves-en-Blackjack/ >

[18] *Crescent*. *The history of Blackjack* [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://crescent.edu/post/the-history-of-Blackjack>

[19] Enciclopèdia Catalana. *Diccionari.cat*. Diccionari de la llengua catalana [diccionari en línia]. [Data de consulta: juny - setembre 2021]

<http://www.diccionari.cat/>

[20] *ExtendOffice*. *How To Fill Series Or Formula To A Specific Row Without Dragging In Excel?* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://www.extendoffice.com/documents/excel/4448-fill-to-specific-row-without-dragging.html>

[21] FARAONE, Giuseppe. *Corrector.co*. Corrector en llengua anglesa [corrector en línia]. [Data de consulta: octubre 2021]

<https://www.corrector.co/>

[22] FERNÁNDEZ, Yúbal. *Xataka*. Memória RAM (*Random Access Memory*) [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.xataka.com/basics/memoria-ram-que-sirve-como-mirar-cuanta-tiene-tu-ordenador-movil>

[23] GAMBINO, Nick. *NewsWatch*. *The history of Blackjack* [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://newswatchtv.com/2018/10/09/the-history-of-Blackjack/>

[24] GARCÍA CRUZ, Juan Antonio. Historia de un problema: el reparto de la apuesta (problema del repartiment de diners) [document PDF]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://amatema.webs.ull.es/anamat_p0304/Matematicas/Didactica%20de%20las%20Matematicas%20II/historia_problema.pdf>

[25] Generalitat de Catalunya. *Redacció en català: mots connectors* [document PDF]. [Data de consulta: juny - setembre 2021]

<http://justicia.gencat.cat/web/.content/home/serveis/llenguatge_juridic/de_quines_eines_disposo/criteris_linguistics_gene/mots_connectors.pdf>

[26] GUTTAG, John (canal: *MIT OpenCourseWare*). *6.Monte Carlo Simulation*. Durada: 50:04 minuts. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://www.youtube.com/watch?v=OgO1gpXSUzU>

[27] HAMMERSLEY, John. *Overleaf*. Aprenentatge del llenguatge LATEX, general [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.Overleaf.com/learn/latex/Learn_LaTeX_in_30_minutes>

[28] HAMMERSLEY, John. *Overleaf*. Programa informàtic utilitzat per la creació del treball [aplicació en línia]. [Data d'utilització: juny - octubre 2021]

<https://www.overleaf.com/>

[29] HAMMERSLEY, John. *Overleaf*. Aprenentatge del llenguatge LATEX sobre les notes al peu [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://manualdelatex.com/tutoriales/notas-al-pie >

[30] HAMMERSLEY, John. *Overleaf*. Aprenentatge del llenguatge LATEX sobre les referències creuades [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.Overleaf.com/learn/latex/Cross_referencing_sections,_equations_and_floats#Referencing_the_page_of_an_element>

[31] *Justexv*. La función ALEATORIO (RAND()) [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://es.justexw.com/funciones/aleatorio>

[32] KENTON, Will. *Investopedia*. *Backward induction* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://www.investopedia.com/terms/b/backward-induction.asp >

[33] KENTON, Will. *Investopedia*. *Monte Carlo simulation* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://www.investopedia.com/terms/m/montecarlosimulation.asp>

[34] KOPKA, Helmut. *Creating a bibliography with LATEX* [document PDF]. [Data de consulta: setembre 2021]

<https://web.iit.edu/sites/web/files/departments/academic-affairs/graduate-academic-affairs/pdfs/biblio-help2.pdf>

[35] LÓPEZ, José Francisco. *Economipedia*. Esperanza matemática [article en línia]. [Data de consulta: juny - juliol 2021]

<https://economipedia.com/definiciones/esperanza-matematica.html>

[36] *Maestros online*. ¿Qué es la inducción hacia atrás en teoria de juegos? [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://eldiadelmaestro.com/induccion-hacia-atras-en-la-teoria-de-juegos/>

[37] MAS i HERNÀNDEZ, Jordi. *Softcatalà*. Corrector ortogràfic en català [corrector en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.softcatala.org/corrector/>

[38] MAS i HERNÀNDEZ, Jordi. *Softcatalà*. Diccionari de sinònims en català [diccionari en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.softcatala.org/diccionari-de-sinonims/ >

[39] *Math4all*. Las matemáticas del Blackjack [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.math4all.es/las-matematicas-del-Blackjack/ >

[40] *Microsoft Support. IF Function In Excel* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://support.microsoft.com/en-us/office/if-function-69aed7c9-4e8a-4755-a9bc-aa8f73be2>

[41] MORALES, Miguel Ángel. *El País*. Fermat, Pascal y los inicios de la probabilidad moderna [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://elpais.com/elpais/2017/04/26/el_aleph/1493220185_791291.html>

[42] MORENO, Víctor. *Busca Biografías*. Biografia de Jakob Bernoulli [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/8929/Jacob%20Bernoulli%20o%20Jacques%20Bernoulli>

[43] O'HARA, John. *ResearchGate*. *Price convergence of Monte Carlo simulation* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://ca.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Laplace>

[44] PACHECO, Juan Manuel Fernández. Diccionario de la RAE (Real Academia Española). [diccionari en línia]. [Data de consulta: juny - setembre 2021]

<https://dle.rae.es/diccionario>

[45] *Palisade*. Simulación de Monte Carlo [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://www.palisade-lta.com/risk/simulacion_monte_carlo.asp>

[46] *Rainbow Casino. The history of Blackjack* [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://rainbowcasino.co.uk/blog/history-Blackjack>

[47] ROUTLEDGE, Richard. *Britannica*. *Law of large numbers* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://www.britannica.com/science/law-of-large-numbers>

[48] SINHARAY, Sandip. *ScienceDirect*. *Bernoulli Distribution* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://www.sciencedirect.com/topics/agricultural-and-biological-sciences/bernoulli-distribution>

[49] TAMBURIN, Henry. *888casino*. La guía definitiva de Blackjack [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.888casino.es/blog/guias-de-casino/Blackjack/historia-del-Blackjack-capitulo-1_1>

[50] *TioPetrus*. Una vuelta de tuerca al problema de Monty Hall. [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://tiopetrus.blogia.com/2003/121201-una-vuelta-de-tuerca-al-problema-de-monty-hall.php>

[51] VALDÉS GÓMEZ, Javier. Toda la combinatoria en 9 minutos. Durada: 9:16 minuts. [vídeo]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://www.youtube.com/watch?v=g843LMUY5H0>

[52] WEISSTEIN, Eric W.. *Wolfram Math World*. *Strong law of large numbers* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://mathworld.wolfram.com/StrongLawofLargeNumbers.html>

[53] *Wikipedia*. *Almost surely* [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://en.wikipedia.org/wiki/Almost_surely>

[54] *Wikipedia*. Antoine Gombaud (Cavaller de Méré) [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Antoine_Gombaud>

[55] *Wikipedia*. Axiomes de la probabilitat [article en línia]. [Data de consulta: juny, agost 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_probabilidad>

[56] *Wikipedia*. Blackjack [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Blackjack#cite_note-2>

[57] *Wikipedia*. Christiaan Huygens [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens>

[58] *Wikipedia*. Esperanza matemática [article en línia]. [Data de consulta: juny - juliol 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Esperanza_matem%C3%A1tica>

[59] *Wikipedia*. Fiebre del oro [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Fiebre_del_oro>

[60] *Wikipedia*. Fiebre del oro en California [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]

<https://es.wikipedia.org/wiki/Fiebre_del_oro_de_California>

[61] *Wikipedia*. Gerolamo Cardano [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]

<https://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano#Mathematics>

[62] *Wikipedia*. *Law of large numbers* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]
<https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_large_numbers#Limitation>

[63] *Wikipedia*. *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]
<https://ca.wikipedia.org/wiki/Massachusetts_Institute_of_Technology>

[64] *Wikipedia*. *Monte Carlo method* [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]
<https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method#Simulation_and_optimization>

[65] *Wikipedia*. Napoleón Bonaparte [article en línia]. [Data de consulta: juliol 2021]
<https://es.wikipedia.org/wiki/Napole%C3%B3n_Bonaparte>

[66] *Wikipedia*. Número de Bernoulli [article en línia]. [Data de consulta: agost 2021]
<https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Bernoulli>

[67] *Wikipedia*. Problema de Monty Hall [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]
<https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall>

[68] *Wikipedia*. Regla de Laplace [article en línia]. [Data de consulta: juny 2021]
<https://ca.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Laplace>

Annexos

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
2	21	94,10%	0,00%	PLANTAR-SE	13
	20	82,02%	7,24%	PLANTAR-SE	
	19	69,35%	13,55%	PLANTAR-SE	
	18	56,14%	18,88%	PLANTAR-SE	
	17	42,41%	23,20%	PLANTAR-SE	
	16	35,43%	26,46%	PLANTAR-SE	
	15	35,43%	29,19%	PLANTAR-SE	
	14	35,43%	31,91%	PLANTAR-SE	
	13	35,43%	34,64%	PLANTAR-SE	
	12	35,43%	37,36%	DEMANAR	

17	13,9660%
18	13,4970%
19	12,9260%
20	12,4120%
21	11,7400%
Blackjack	0,0000%
>21	35,4260%

Figura 6.8: Taula resum ($b = 2$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
3	21	94,26%	0,00%	PLANTAR-SE	13
	20	82,48%	7,25%	PLANTAR-SE	
	19	70,20%	13,59%	PLANTAR-SE	
	18	57,45%	19,00%	PLANTAR-SE	
	17	44,17%	23,41%	PLANTAR-SE	
	16	37,40%	26,81%	PLANTAR-SE	
	15	37,40%	29,69%	PLANTAR-SE	
	14	37,40%	32,57%	PLANTAR-SE	
	13	37,40%	35,44%	PLANTAR-SE	
	12	37,40%	38,32%	DEMANAR	

17	13,5320%
18	13,0250%
19	12,4860%
20	12,0670%
21	11,4870%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	37,4020%

Figura 6.9: Taula resum ($b = 3$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
4	21	94,46%	0,00%	PLANTAR-SE	12
	20	83,08%	7,27%	PLANTAR-SE	
	19	71,15%	13,66%	PLANTAR-SE	
	18	58,78%	19,13%	PLANTAR-SE	
	17	45,94%	23,65%	PLANTAR-SE	
	16	39,40%	27,18%	PLANTAR-SE	
	15	39,40%	30,22%	PLANTAR-SE	
	14	39,40%	33,25%	PLANTAR-SE	
	13	39,40%	36,28%	PLANTAR-SE	
	12	39,40%	39,31%	PLANTAR-SE	

17	13,0690%
18	12,6060%
19	12,1420%
20	11,7080%
21	11,0710%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	39,4040%

Figura 6.10: Taula resum ($b = 4$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
5	21	94,53%	0,00%	PLANTAR-SE	12
	20	83,47%	7,27%	PLANTAR-SE	
	19	71,96%	13,69%	PLANTAR-SE	
	18	59,99%	19,23%	PLANTAR-SE	
	17	47,76%	23,84%	PLANTAR-SE	
	16	41,64%	27,52%	PLANTAR-SE	
	15	41,64%	30,72%	PLANTAR-SE	
	14	41,64%	33,92%	PLANTAR-SE	
	13	41,64%	37,12%	PLANTAR-SE	
	12	41,64%	40,33%	PLANTAR-SE	

17	12,2520%
18	12,2000%
19	11,7380%
20	11,2880%
21	10,8250%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	41,6370%

Figura 6.11: Taula resum ($b = 5$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
6	21	95,16%	0,00%	PLANTAR-SE	12
	20	85,21%	7,32%	PLANTAR-SE	
	19	74,79%	13,87%	PLANTAR-SE	
	18	64,18%	19,63%	PLANTAR-SE	
	17	50,60%	24,57%	PLANTAR-SE	
	16	42,33%	28,46%	PLANTAR-SE	
	15	42,33%	31,71%	PLANTAR-SE	
	14	42,33%	34,97%	PLANTAR-SE	
	13	42,33%	38,23%	PLANTAR-SE	
	12	42,33%	41,48%	PLANTAR-SE	

17	16,5480%
18	10,6110%
19	10,6130%
20	10,2210%
21	9,6840%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	42,3280%

Figura 6.12: Taula resum ($b = 6$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
7	21	96,27%	0,00%	PLANTAR-SE	17
	20	88,63%	7,41%	PLANTAR-SE	
	19	80,77%	14,22%	PLANTAR-SE	
	18	69,97%	20,44%	PLANTAR-SE	
	17	44,68%	25,82%	PLANTAR-SE	
	16	26,26%	29,26%	DEMANAR	
	15	26,26%	31,51%	DEMANAR	
	14	26,26%	33,93%	DEMANAR	
	13	26,26%	36,54%	DEMANAR	
	12	26,26%	39,35%	DEMANAR	

17	36,8478%
18	13,7300%
19	7,8645%
20	7,8670%
21	7,4140%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	26,2560%

Figura 6.13: Taula resum ($b = 7$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
8	21	96,51%	0,00%	PLANTAR-SE	17
	20	89,56%	7,42%	PLANTAR-SE	
	19	79,70%	14,31%	PLANTAR-SE	
	18	55,33%	20,44%	PLANTAR-SE	
	17	30,93%	24,70%	PLANTAR-SE	
	16	24,51%	27,08%	DEMANAR	
	15	24,51%	29,16%	DEMANAR	
	14	24,51%	31,41%	DEMANAR	
	13	24,51%	33,82%	DEMANAR	
	12	24,51%	36,42%	DEMANAR	

17	12,8550%
18	35,9340%
19	12,8130%
20	6,9110%
21	6,9860%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	24,5050%

Figura 6.14: Taula resum ($b = 8$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
9	21	96,96%	0,00%	PLANTAR-SE	17
	20	87,91%	7,46%	PLANTAR-SE	
	19	64,35%	14,22%	PLANTAR-SE	
	18	40,85%	19,17%	PLANTAR-SE	
	17	28,90%	22,31%	PLANTAR-SE	
	16	22,90%	24,54%	DEMANAR	
	15	22,90%	26,42%	DEMANAR	
	14	22,90%	28,46%	DEMANAR	
	13	22,90%	30,65%	DEMANAR	
	12	22,90%	33,00%	DEMANAR	

17	11,9940%
18	11,9050%
19	35,1040%
20	12,0170%
21	6,0820%
BLACKJACK	0,0000%
PASSA	22,9030%

Figura 6.15: Taula resum ($b = 9$)

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
10	21	90,55%	0,00%	PLANTAR-SE	17
	20	71,75%	6,97%	PLANTAR-SE	
	19	49,10%	12,49%	PLANTAR-SE	
	18	37,94%	16,26%	PLANTAR-SE	
	17	26,78%	19,18%	PLANTAR-SE	
	16	21,20%	21,24%	DEMANAR	
	15	21,20%	22,87%	DEMANAR	
	14	21,20%	24,63%	DEMANAR	
	13	21,20%	26,53%	DEMANAR	
	12	21,20%	28,57%	DEMANAR	

17	11,1510%
18	11,1710%
19	11,1480%
20	34,1630%
21	3,4330%
BLACKJACK	7,7188%
PASSA	21,2030%

Figura 6.16: Taula resum $(b = 10)$

CARTA DEL CRUPIER	VALOR DE LA MÀ DEL JUGADOR	G_0	G'	DECISIÓ ÒPTIMA	LÍMIT
A	21	66,54%	0,00%	PLANTAR-SE	17
	20	57,29%	5,12%	PLANTAR-SE	
	19	44,20%	9,53%	PLANTAR-SE	
	18	31,16%	12,93%	PLANTAR-SE	
	17	18,13%	15,32%	PLANTAR-SE	
	16	11,61%	16,72%	DEMANAR	
	15	11,61%	18,00%	DEMANAR	
	14	11,61%	19,39%	DEMANAR	
	13	11,61%	20,88%	DEMANAR	
	12	11,61%	22,48%	DEMANAR	

17	13,0380%
18	13,0260%
19	13,0660%
20	13,1050%
21	5,3960%
BLACKJACK	30,7690%
PASSA	11,6060%

Figura 6.17: Taula resum $(b = A)$