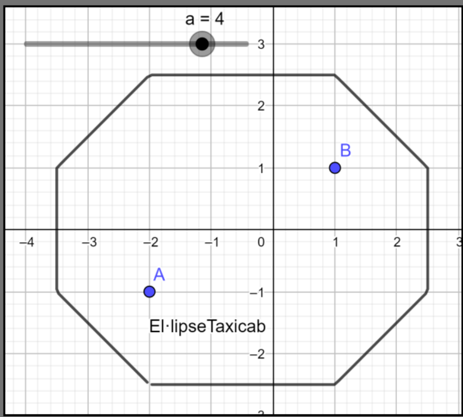
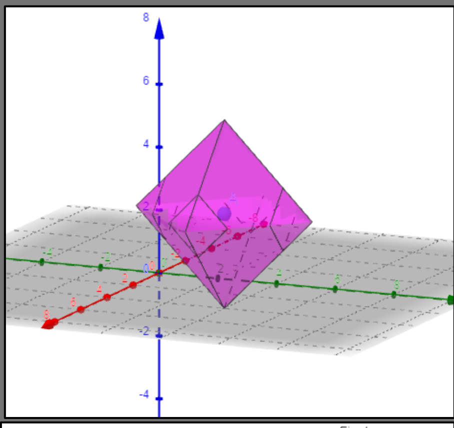
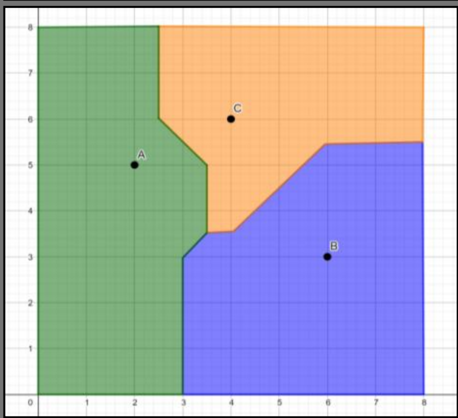
Curs 20-21

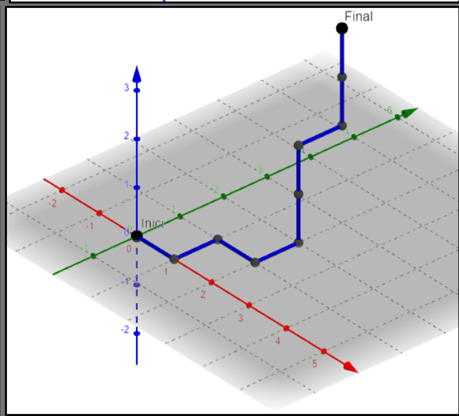
La geometria Taxicab

Un món on els cercles són quadrats









Neumann

“Que no entri ningú que no sàpiga geometria”

Plató

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

1.1 MOTIVACIÓ

La manera en què les matemàtiques, a través de números i fórmules, descriuen la realitat m'ha fascinat des de ben petit. Em sembla sorprenent que darrera de qualsevol fet quotidià s'amaguin teories matemàtiques que ho descriguin.

Des de bon començament, tenia clar que faria el treball de recerca sobre matemàtiques i quan em van suggerir fer-ho sobre una geometria que no és l'habitual, ho vaig tenir clar. El camp de la geometria, en principi, sembla la disciplina més tangible de les matemàtiques ja que tracta de la mesura dels objectes que podem veure i tocar. La intuïció ens porta a mesurar segons la geometria euclidiana, ja que respon al que veiem i, per tant, sembla la més senzilla i eficaç. Tanmateix, hi ha molts casos en què aquesta geometria ja no és la més òptima o, fins i tot, pot no reflectir la realitat, com passa amb la cosmologia moderna.

La geometria Taxicab és una d'aquestes geometries que s'adapta més fidelment a certes situacions de la vida quotidiana, per exemple en l'àmbit urbà. Tot i això, no hi ha una bibliografia extensa i ben estructurada que la tracti i aquest era un dels al·licients del treball, triar i estructurar què estudiar.

D'altra banda, té una definició força entenedora que permet modelitzar-la amb relativa facilitat mitjançant el programa GeoGebra. Aquest fet em va semblar un altre punt a favor per dur a terme aquest treball, ja que comportava un punt d'originalitat a l'hora de dissenyar les construccions per anar exemplificant la teoria.

Estudiar una geometria no euclidiana on el camí més curt ja no és recte, ni únic i, entre moltes altres coses, les circumferències són quadrades, em va semblar un repte apassionant i m'hi vaig llençar de cap.

1.2 OBJECTIUS

Durant la realització del treball de recerca intentaré assolir els següents objectius:

- Tenir una visió global de com ha evolucionat la geometria des dels seus inicis.
- Entendre el concepte de geometria des d'un punt de vista abstracte, així com el seu desenvolupament històric que ha comportat l'aparició de diferents tipus de geometries.
- Ampliar coneixements teòrics de geometria i aprendre a treballar i resoldre problemes amb una nova geometria.
- Dominar el programa GeoGebra i fer-lo servir en la creació d'eines per entendre i generalitzar nous conceptes geomètrics.
- Contextualitzar i buscar exemples pràctics de geometria.
- Ser capaç d'escriure un treball matemàtic formalment correcte però alhora entenedor.

1.3 METODOLOGIA

Podríem dir que la metodologia emprada en aquest treball té dues vessants diferenciades.

Per una banda hi ha la recerca bibliogràfica que és bàsica, tant per estructurar el treball com per dur-lo a terme. S'han consultat llibres, articles i webs diverses. Pel que fa a la història i evolució de les geometries euclidiana i no euclidianes hi ha molts llibres i webs que en parlen, però quan ens centrem en la geometria Taxicab ja no és així. De fet, pràcticament només hi ha el llibre de Krause que està dedicat específicament a ella. Es tracta d'un llibre molt original ja que estudia la geometria Taxicab exclusivament a partir d'exercicis que proposa (amb algunes respostes al final del llibre). A part del llibre, també hi ha diversos articles que parlen de qüestions concretes, de manera que segons els temes estudiats es poden trobar orientacions per tractar-los en diferents llocs.

Per una altra banda, com a eina essencial per a la realització del treball de recerca s'ha fet ús de l'aplicació GeoGebra. Aquest programa és de gran ajuda per a explicar conceptes, resoldre problemes i exemplificar casos pràctics. GeoGebra ens proporciona eines per estudiar de manera interactiva el comportament de figures geomètriques amb diferents geometries. No serveix per demostrar teoremes matemàtics, però sí que és molt útil per mostrar i entendre molts conceptes.

Podríem resumir la metodologia dient que a partir de la recerca bibliogràfica s'ha estructurat i dissenyat l'esquelet del treball i que amb l'aplicació GeoGebra s'ha vestit i exemplificat els diferents conceptes.

1.4 ESTRUCTURA

El treball s'ha estructurat, sense tenir en compte la introducció i conclusions, en cinc apartats.

El primer es dedica a estudiar els inicis de la geometria i el seu desenvolupament formal provocat per l'aparició de les geometries no euclidianes. Veurem que no hi ha una única geometria. Es defineix també què és una mètrica, i s'estudien diversos exemples de mètriques.

El següent apartat el dedicarem a l'estudi en concret de la mètrica de Manhattan. Analitzarem el seu origen i la seva definició, demostrarem les seves propietats i acabarem explicant una anècdota curiosa i sorprenent.

En el tercer apartat estudiarem, fent ús de la mètrica de Manhattan, diferents elements geomètrics que es defineixen a partir del concepte de distància. Això ens permetrà veure com són de diferents la geometria Taxicab i la euclidiana. Finalitzarem aquest apartat amb una comparació dels axiomes de les geometries euclidiana i Taxicab.

A continuació ens plantejarem dues aplicacions pràctiques de la geometria Taxicab a problemes de geometria urbana. De fet, es tracta de dos problemes clàssics de gran aplicació pràctica: el punt de Fermat (el lloc que fa que la suma de les distàncies a tres vèrtexs sigui mínima) i els diagrames de Voronoi (com dividir el pla segons les regions més properes a un certs punts).

Finalment, en l'últim apartat, estudiarem algunes generalitzacions que es poden fer de la mètrica de Manhattan. La primera correspon a considerar aquesta mètrica a l'espai enlloc del pla. La segona consisteix a canviar els moviments perpendiculars als eixos propis de la geometria Taxicab per uns altres que permetin també desplaçaments diagonals, com seria el cas dels moviments de les dames xineses. Per acabar, examinarem el cas de moviments per un enreixat amb angles de 60º i veurem la generalització a enreixats triangulars de qualsevol angle.

Adjuntem en un annex les captures de les construccions dinàmiques (applets) que s'han dissenyat al llarg del treball per investigar els diversos elements així com els enllaços als arxius *ggb* i *html*. També s'han fet diferents construccions fixes amb GeoGebra per il·lustrar alguns conceptes, però aquests arxius no els incloem ja que no s'han dissenyat per moure objectes o estudiar diferents casuístiques, sinó per mostrar alguna situació i, per tant, amb una captura de pantalla ja acompleixen el seu objectiu.

2. GEOMETRIA I MÈTRICA

En aquest apartat farem un recorregut històric des dels inicis de la geometria fins al seu desenvolupament formal provocat per l'aparició de les geometries no euclidianes. Veurem també què és una mètrica (o distància), diversos exemples i com el fet de triar-ne una o altra, condiciona la geometria que implica.

2.1 HISTÒRIA DE LA GEOMETRIA

2.1.1 INICIS DE LA GEOMETRIA

Etimològicament, geometria (del grec γεωμετρία) vol dir mesura de la terra i és una ciència que va néixer precisament per això, per a mesurar la terra. Va començar a desenvolupar-se des de ja fa molt de temps a Egipte amb els primers agrimensors. Aquests eren els encarregats de mesurar les finques amb exactitud després de les inundacions del riu Nil, i ja feien servir el Teorema de Pitàgores. Als papirs de Rhind i de Moscú (aprox. 2000 aC) ja es troben càlculs d'àrees i volums de figures.

En aquella mateixa època, a l'antiga Babilònia (Mesopotàmia) es varen desenvolupar coneixements geomètrics que, fins i tot, superaven als egipcis: es mesuraven angles i es coneixien relacions trigonomètriques, a part de calcular volums i àrees de moltes figures. Curiosament, aquests càlculs els realitzaven amb un sistema de numeració de base 60.

La matemàtica grega va suposar un canvi important en la forma de plantejar les matemàtiques. Els babilònics i els egipcis feien càlculs concrets com són la mesura de les àrees de terrenys o altures de piràmides. En canvi els grecs van ser capaços de generar conceptes i idees abstractes, i a més a més, van introduir la demostració dins les matemàtiques, amb la qual podien construir cadenes lògiques partint de conceptes elementals i arribar a conceptes més complexes.

Ja a l'època hel·lenística, a la ciutat egípcia d'Alexandria, els matemàtics grecs van aconseguir resultats sorprenents, com el d'Eratòstenes (s. III aC) que va mesurar el diàmetre de la Terra amb un error de només 80 km. Per a fer-ho va utilitzar la semblança de triangles. Va mesurar la distància entre dos ciutats egípcies que es troben en el mateix meridià, Assuan i Alexandria. Després, a través d'angles i relacions de triangles, va poder determinar el diàmetre de la Terra.

Així, cap a mitjans del primer mil·lenni aC, les tradicions matemàtiques del Mitjà Orient es varen estendre a la conca del Mediterrani i es varen donar les condicions perquè la matemàtica, i en particular la geometria, es pogués interpretar com a una ciència autònoma. I va ser en aquest període que es varen establir les bases de la geometria formal. Amb l'aparició dels Elements d'Euclides d'Alexandria aquesta disciplina va començar a desenvolupar-se amb rigor.

2.1.2 EUCLIDES I EL CINQUÈ POSTULAT

Euclides (s. III aC) fou un gran matemàtic de l'antiga Grècia que va tractar de recopilar i ordenar lògicament tots els resultats de geometria que eren coneguts en el seu temps. Va fer una de les aportacions més importants en aquest camp amb l'obra dels *Elements*. Aquesta obra és un tractat matemàtic format per tretze llibres. Cadascun d'aquests consta d'una successió de teoremes que parlen de geometria, aritmètica i àlgebra. Contenen un total de 131 definicions (per exemple, la famosa "*un punt és allò que no té parts*") i 465 proposicions.

Una de les aportacions més importants de la seva obra és la axiomatització de la geometria. És a dir, introdueix una sèrie de conceptes bàsics com són els punts, les rectes, les circumferències i, sobretot, els axiomes (que són veritats absolutes que no necessiten demostració). Aquests axiomes són la base de tota teoria ja que qualsevol altre resultat que s'obtingui s'ha de demostrar a partir d'aquests.

Els cinc axiomes de la geometria d'Euclides són els següents:

- **Axioma I:** Dos punts determinen una única recta.
- **Axioma II:** Qualsevol segment es pot prolongar indefinidament.
- **Axioma III:** Amb qualsevol centre i qualsevol radi es pot traçar una circumferència.
- **Axioma IV:** Tots els angles rectes són iguals entre sí.
- **Axioma V:** Si una recta talla a dues altres de manera que els angles interiors del mateix costat sumen menys de dos angles rectes, al prolongar indefinidament aquestes dues rectes, es tallaran en aquest mateix costat.
  Històricament, s'han donat altres versions equivalents d'aquest postulat com la següent (**V'**): per un punt exterior a una recta existeix una sola paral·lela a la recta donada.

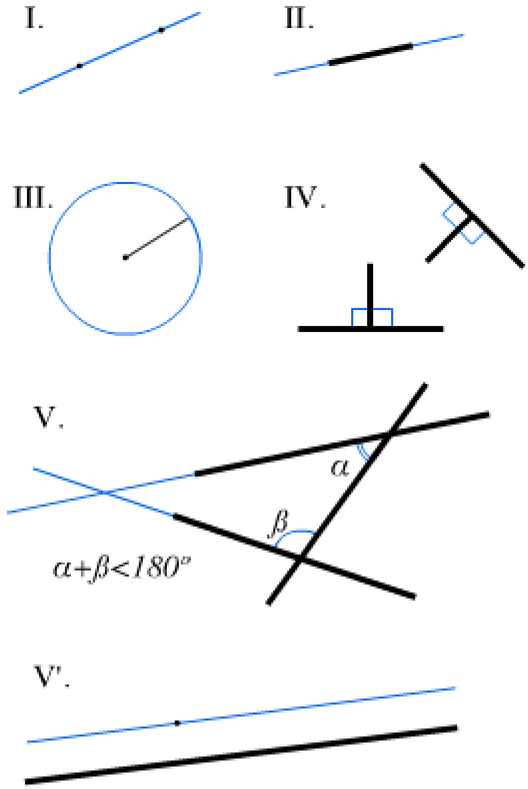


Figura 1. Els axiomes d'Euclides
[Font: Viquipèdia]

Els quatre primers axiomes varen ser acceptats per tots els matemàtics de la història. Però pel que fa al cinquè axioma (conegut també com a cinquè postulat) hi va haver molta polèmica ja que es creia que es podia demostrar a partir dels altres axiomes. Per això va a passar de dir-se axioma a postulat. Fins el s. XVIII, molts matemàtics com Ptolomeu (s. II dC), Omar Khayyam (s. XII), Nàssir-ad-Din at-Tussí (s. XIII), John Wallis (1616 – 1703), Girolame Saccheri (1667 – 1733), Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) varen intentar demostrar-ho sense èxit.

Sembla ser que Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) va ser el primer (com en tantes ocasions) en concloure que a partir dels quatre primers axiomes i negant el cinquè, no s'arribava a cap contradicció. No ho va publicar per temor a les crítiques dels seus contemporanis.

Finalment varen ser Nikolai Lobatxevski (1792 – 1856) i János Bolyai (1802 – 1860) qui demostraren que el cinquè axioma d'Euclides no mereixia aquesta categoria i va passar-se a dir-se el cinquè postulat. No es tractava d'un teorema que es pogués demostrar, però tampoc es podia demostrar que fos falsa la seva negació. D'aquesta manera, canviant aquest postulat per d'altres varen sorgir noves geometries: les geometries no euclidianes.

2.1.3 GEOMETRIES NO EUCLIDIANES

Les geometries no euclidianes són aquelles que no compleixen algun dels postulats establerts per Euclides. Les primeres que es varen estudiar, varen sorgir canviant el famós cinquè postulat. Els resultats de geometria que es dedueixen de només els quatre primers postulats varen ser anomenats per Bolyai com *Geometria Absoluta.* Es diu que aquests resultats són absoluts perquè han de ser certs tant per la geometria euclidiana (cinquè postulat) com en la no euclidiana (negació del cinquè postulat).

Geometria hiperbòlica

La primera de les geometries no euclidianes que es va desenvolupar va ser la geometria hiperbòlica. Ho varen fer, independentment, Bolyai i Lobatxevski, demostrant que era una construcció lògicament coherent. Lobatxevski el primer que es va atrevir a publicar els resultats tot i que això li va costar la seva feina. El seu col·lega matemàtic Mikhaïl Ostrogradski (1801 – 1862) no acceptava el qüestionament d'Euclides que proposava Lobatxevski i va aconseguir que l'acomiadessin.

La geometria que varen estudiar és la resultant de substituir el cinquè postulat per el següent, conegut com a "postulat de Lobatxevski":

"Per un punt P exterior a una recta donada, passa més d'una recta paral·lela a la donada". (Figura 2)

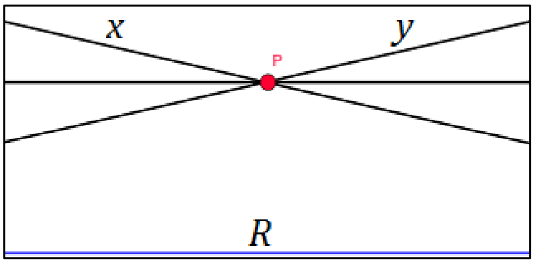


Figura 2. Postulat de Lobatxevski
[Font: matesfacil.com]

Aquest postulat condueix a resultats sorprenents.

El primer d'ells és que la suma d'angles interiors d'un triangle hiperbòlic (figura 3) és menor que 180º:

$$\alpha + \beta + \gamma < 180º.$$

D'altra banda, l'àrea d'un triangle hiperbòlic depèn dels angles i no dels costats:

$$\text{Àrea} = (\pi - \alpha - \beta - \gamma)\cdot R^2,$$

on R és una constant que depèn de la curvatura del pla hiperbòlic sobre el qual estiguem.

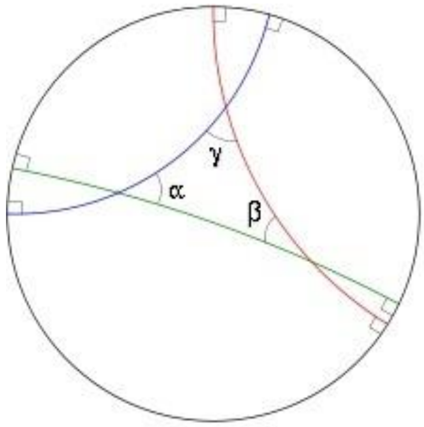


Figura 3. Triangle hiperbòlic
[Font: Viquipèdia]

A la següent figura de "sella de muntar" tenim una representació gràfica de la geometria hiperbòlica que ens ajuda a imaginar com funciona. Veiem que qualsevol triangle que hi dibuixem tindrà angles que sumen menys de 180º i veiem que les rectes paral·leles no romanen a una distància constant sinó que divergeixen progressivament entre sí.

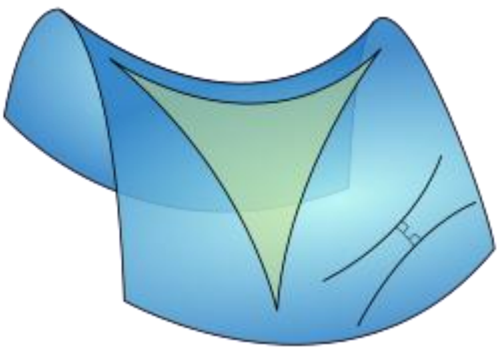


Figura 4. Superfície hiperbòlica
[Font: Viquipèdia]

Geometria el·líptica

Poc després de que la geometria hiperbòlica s'hagués demostrat, en va sorgir una altra molt important anomenada geometria el·líptica. Aquesta va ser obra del matemàtic Bernhard Riemann (1826-1866) que va substituir el cinquè postulat d'Euclides per el següent:

> *"Donada una recta r i un punt P no pertanyent a ella, no existeixen rectes que passin per P i siguin paral·leles a la recta r." (Figura 5)*

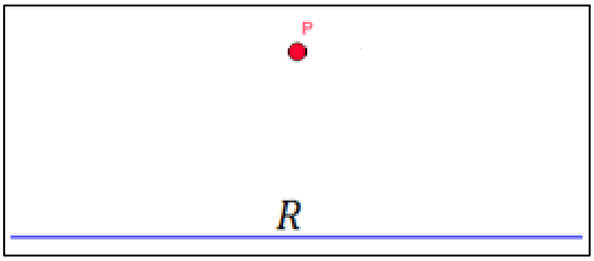


Figura 5. Postulat de Riemann *[Font: pròpia]*

De la mateixa manera en que a la geometria hiperbòlica obtenim resultats sorprenents, aquí també en trobem.
En aquesta geometria veiem que la suma d'angles interiors d'un triangle és major a 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^{\circ}$$

En el cas particular de la geometria esfèrica l'àrea d'un triangle ve donada per la fórmula següent:

$$\text{Àrea} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\cdot R^2$$

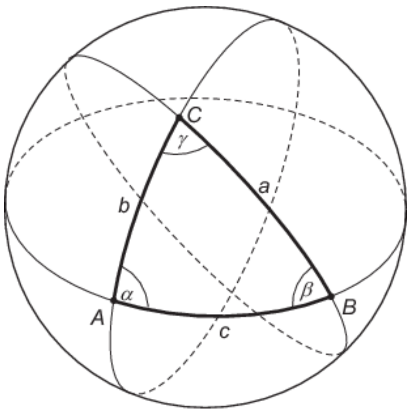


Figura 6. Triangle esfèric
[Font: wikiwand.com]

En la següent imatge (figura 7) veiem un model de geometria el·líptica bidimensional, l'esfera. Aquesta està composta per meridians que resulten ser línies geodèsiques[1], mentre que les paral·leles són línies de curvatura no mínima.

És curiós el fet que per dos punts (per exemple el Pol Nord i el Pol Sud) passen infinites rectes.

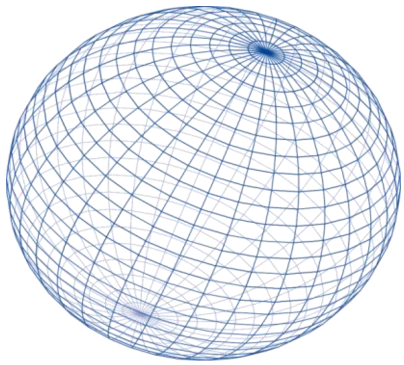


Figura 7. Geometria el·líptica
[Font: openclipart.org]

[1] Les línies geodèsiques es defineixen com les línies de mínima longitud que uneixen dos punts en una superfície donada, en aquest cas l'esfera, i que estan contingudes en aquesta superfície.

Podem resumir en l'esquema següent (figura 8) com són de diferents els angles en els tres tipus de geometries que acabem de veure. Per exemple, els angles rectes no sempre són de 90º i els angles interiors d'un triangle no sempre sumen 180º.

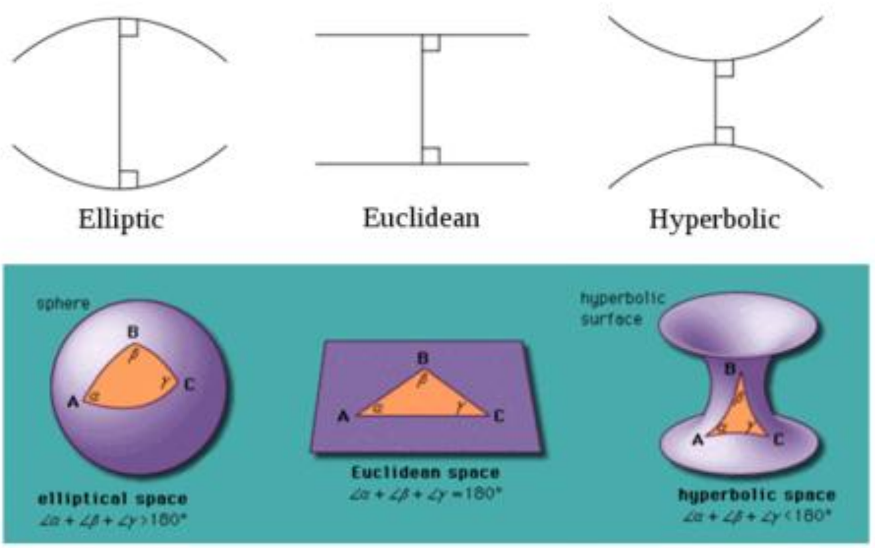


Figura 8. Geometries el·líptica, euclidiana i hiperbòlica *[Font: ibmathsresources.com]*

2.1.4 FONAMENTS DE LA GEOMETRIA

Amb el gran desenvolupament de la geometria que va suposar l'aparició de les geometries no euclidianes es va fer necessària donar una definició formal de la geometria, més enllà de la idea intuïtiva que es pogués tenir d'aquesta. Es varen succeir diferents aproximacions per intentar formular rigorosament la Geometria, que varen culminar bàsicament amb dues visions diferents.

El programa de Erlangen

Va ser una aproximació a la Geometria a partir de la teoria de grups i va ser proposada el 1872 per Felix Klein (1849 – 1925), aprofitant els treballs, entre d'altres, d'Arthur Caley (1821 – 1895).

Van plantejar que cada geometria és en realitat l'estudi de certes propietats que es mantenen invariants quan se'ls apliquen certes transformacions. Aquestes propietats que no canvien van ser anomenades *invariants* i es va observar que les operacions que mantenen sense canvis un invariant tenen estructura de *grup*[2] .

Per exemple, segons Klein la geometria euclidiana és l'estudi dels invariants mitjançant el grup de les simetries, girs i translacions (el grup dels moviments rígids); la geometria afí[3] es limita a les translacions; i així amb totes les geometries. Fins i tot, Klein afirma que no és la geometria la que indueix el grup, sinó que a partir d'un grup de transformacions admissible es construeix una geometria.

Geometria axiomàtica

El primer sistema axiomàtic el va establir Euclides, però era incomplert, és a dir, existien proposicions que no es podien derivar dels axiomes (per exemple, l'axioma de Pasch que afirma que una recta en el pla que interseca amb una aresta d'un triangle i evita els tres vèrtexs ha d'intersecar amb una de les altres dues arestes). David Hilbert (1862 – 1943) va proposar el 1899 un sistema axiomàtic complert per a la geometria euclidiana. A diferència d'Euclides, a l'obra de Hilbert no hi ha cap definició d'objectes geomètrics.

Hilbert va dur a terme una construcció lògica de la geometria eliminant qualsevol lligam amb la clara evidència i va determinar el canvi cap al sistema axiomàtic modern, en el qual el que es discuteix i desenvolupa són les relacions definides entre els elements. Hilbert comença enumerant els conceptes sense definició (tres sistemes diferents d'objectes: *punts*, *rectes* i *plans*), i descriu tres relacions entre ells: *pertànyer a*, *estar entre* i *ésser congruent amb*. Aquestes relacions tampoc no es defineixen, sinó que han de complir una llista de 20 axiomes (originàriament 21). La descripció exacta i les propietats vénen donades així per 20 axiomes: set d'incidència, quatre d'ordre, el postulat de la única paral·lela, sis axiomes de congruència, l'axioma de continuïtat (o d'Arquimedes), i un metaaxioma de completitud

Hilbert va ser el precursor del formalisme matemàtic, despullant els objectes matemàtics de tot tipus de característica natural o intuïtiva. Va expressar molt gràficament el caràcter abstracte de la Geometria amb la frase: "*enlloc de punts, rectes i plans en qualsevol moment s'hauria de poder parlar de taules, cadires i gerres de cervesa*".

[2] Un grup és un conjunt $\mathcal{G}$ on hi ha definida una operació binària que té tres propietats: *i)* existència d'element neutre, *ii)* existència d'element invers i *iii)* associativitat.

[3] Sense entrar en tecnicismes, la geometria afí és el que queda de la geometria euclidiana si no es fa ús de les nocions mètriques de distància i angle.

2.2 QUÈ ÉS UNA MÈTRICA

Apart de les aproximacions formals comentades abans, posteriorment a l'axiomatització de Hilbert va aparèixer el que anomenem geometria mètrica. Aquesta formulació de la geometria es deu al matemàtic americà George David Birkhoff (1884-1944) en la seva obra "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor" (1932). En aquesta aproximació, el concepte de distància o mètrica, juntament amb una mesura d'angles, són les claus per estudiar els diferents elements, permet utilitzar menys axiomes i introdueix de manera natural eines analítiques com ara la continuïtat.

Aquesta és la visió més adient pel nostre treball ja que estudiarem la geometria que es deriva d'una mètrica concreta: la de Manhattan.

Una mètrica és el concepte matemàtic que correspon a la idea tan comuna i intuïtiva de distància. En aquest apartat veurem la definició i exemples de mètriques diferents que ens mostraran com canviant la manera de mesurar distàncies es construeixen geometries molt diferents.

2.2.1 *DEFINICIÓ DE MÈTRICA*

Una mètrica sobre un conjunt S és una funció **distància**, $d: S \times S \to \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ és el conjunt de nombres reals) que satisfà les següents condicions:

- $d(P,Q) \geq 0 \qquad \forall\, P,Q \in S$
- $d(P,Q) = 0$ *si i només si* $P = Q \quad \forall\, P,Q \in S$
- $d(P,Q) = d(Q,P) \qquad \forall\, P,Q \in S$
- $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R) \quad \forall\, P,Q,R \in S$ *("desigualtat triangular")*.

Hi ha moltes funcions que satisfan aquestes propietats i qualsevol que ho faci serà una mètrica, per estranya que pugui semblar la definició. Això condueix a casos ben curiosos i sorprenents com els que analitzarem a continuació.

2.2.2 DIFERENTS TIPUS DE MÈTRIQUES

Seguidament veurem diversos exemples de mètriques i podrem observar com poden ser de diferents les geometries que impliquen. La majoria estan definides sobre el conjunt $S = \mathbb{R}^2$ i tenen interpretacions geomètriques intuïtives. Però algunes altres no. Deixarem la mètrica de Manhattan pel següent apartat on l'estudiarem en detall.

Mètrica euclídea sobre $\mathbb{R}^2$.

La mètrica euclídea sobre el pla cartesià és la que s'ha fet servir des de sempre. És la distància intuïtiva que trobem a partir del teorema de Pitàgores. Donats dos punts del pla $P(p_1,p_2)$ i $Q(q_1,q_2)$, la fórmula que dona la seva distància és:

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

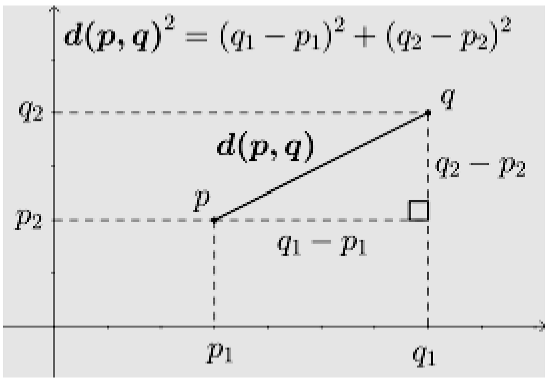


Figura 9. Mètrica euclídea (teorema de Pitàgores) *[Font: Viquipèdia]*

Dit d'una altra manera, és la longitud de la hipotenusa del triangle rectangle definit per les coordenades de dos punts.

En el cas de la mètrica euclídea les *boles*[4] tenen la forma que podem veure a la figura 10.

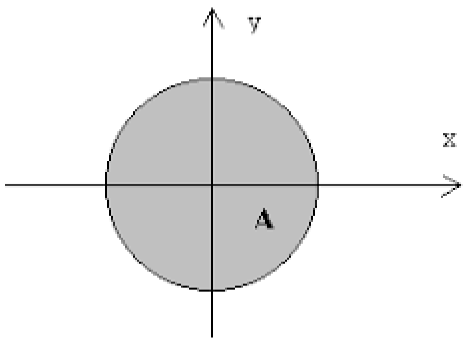


Figura 10. Bola euclídea *[Font: pròpia]*

[4] Una *bola* de centre *C* i radi *r* són tots els punts que es troben a una distància de *C* menor o igual que *r.* El concepte de *"bola"* dona una idea de la geometria que implica una mètrica.

Mètrica de Txèbitxev (o dels escacs) sobre $\mathbb{R}^2$.

Anomenada també mètrica màxima. La distància entre dos punts és el màxim dels valors absoluts de les diferències entre les coordenades:

$$d(P,Q) = \text{màx}\,(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$$

Aquest nom és degut a que es pot interpretar amb els moviments que fa el rei en un tauler d'escacs. Pensem amb un tauler d'escacs on només hi ha el rei. Aquest pot fer només un moviment dintre les 8 caselles que l'envolten. La distància entre dos caselles és el mínim número de moviments que ha de fer el rei per anar d'un lloc a un altre.

Ho podem veure a la figura 11, on s'observa també que les boles de radi *r* són *quadrats* de costat 2*r* + 1.

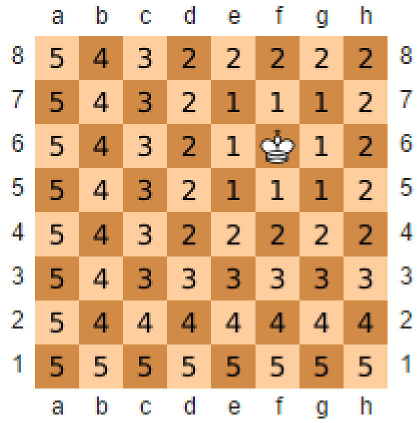


Figura 11. Distància Txèbitxev a la casella f6 *[Font: Viquipèdia]*

Mètrica del ascensor sobre $\mathbb{R}^2$.

Si pensem en un conjunt de gratacel col·locats en línia, la distància entre dos pisos que estiguessin en el mateix edifici seria el valor absolut de la diferència de coordenades verticals, o sigui, el recorregut que faria l'ascensor. Si estiguessin en edificis diferents, la distància seria la que baixes del primer ascensor, més el que camines entre els edificis, més el que puges en el segon ascensor.

Per tant, la mètrica ve definida per la següent expressió:

$$d(P,Q) = \begin{cases} |q_2 - p_2| & si\ p_1 = q_1 \\ |p_2| + |q_1 - p_1| + |q_2| & si\ p_1 \neq q_1 \end{cases}$$

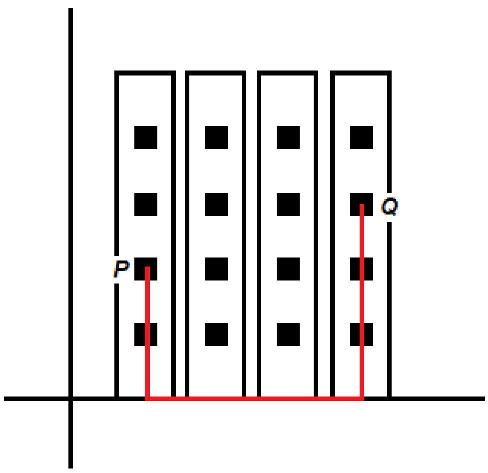


Figura 12. Mètrica de l'ascensor *[Font: pròpia]*

Per exemple, a la figura 12, tenim *P(1,2) i Q(4,3).* La distància segons la mètrica de l'ascensor seria:

$$d(P,Q) = 2 + |4 - 1| + 3 = 8$$

Fent ús del programa GeoGebra, podem mirar quin aspecte tenen les boles en aquesta mètrica. En aquest cas representem els punts que es troben a una distància fixa *r* del punt *C,* o sigui, el que podríem anomenar *circumferències* (que amb la mètrica de l'ascensor, ja no seran circulars encara que sembli una contradicció!). De la mateixa manera que amb la mètrica de Txèbitxev, les circumferències deixen de tenir la forma habitual. En aquest cas, són quadrats descentrats respecte el centre *C* més un punt a sobre situat a C + (0,*r*).

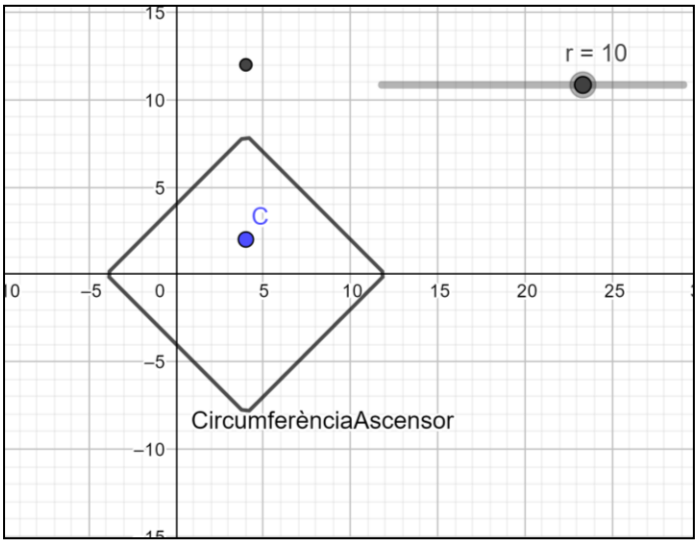


Figura 13. Circumferència amb la mètrica de l'ascensor (applet 1) *[Font: pròpia]*

Mètrica de correus sobre $\mathbb{R}^2$.

També es coneix com la mètrica del missatger. Es defineix de la següent manera:

La distància entre dos punts és la que resulta de sumar la distància euclidiana de cada punt a l'origen. És a dir, per anar del punt *P* al punt *Q,* primer anem de *P* a l'origen i, després, de l'origen a *P* (és el recorregut que faria una carta, va del remitent a l'oficina i de l'oficina al destinatari, i d'aquí ve el nom).

Ve donada per l'expressió:

$$d(P,Q) = \sqrt{{p_1}^2 + {q_1}^2} + \sqrt{{p_2}^2 + {q_2}^2}$$

A l'exemple de la figura 13, la distància entre *P(6,4)* i *Q(1,2)* serà:

$$d(P,Q) = d1 + d2 =$$

$$= \sqrt{6^2 + 4^2} + \sqrt{1^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{52} + \sqrt{5}$$

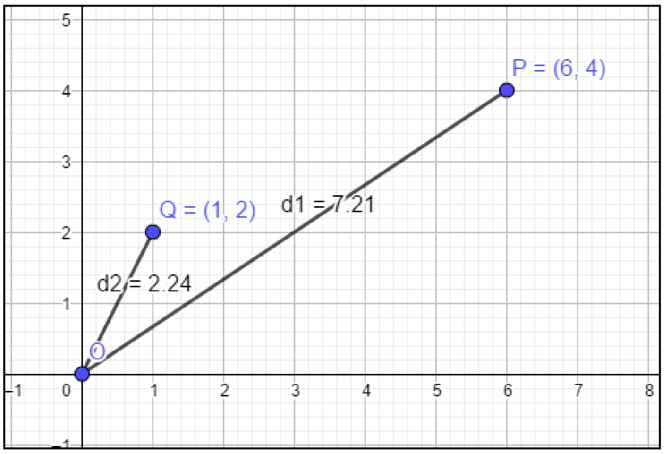


Figura 14. Mètrica de correus *[Font: pròpia]*

Fent ús del GeoGebra podem analitzar com són les circumferències (en el sentit de punts equidistants a un centre). S'observa el fet curiós que independentment d'on estigui el centre, les circumferències estan sempre centrades a l'origen. A més, poden tenir el centre a l'interior o a l'exterior. En aquesta mètrica, les circumferències sí tenen forma circular.

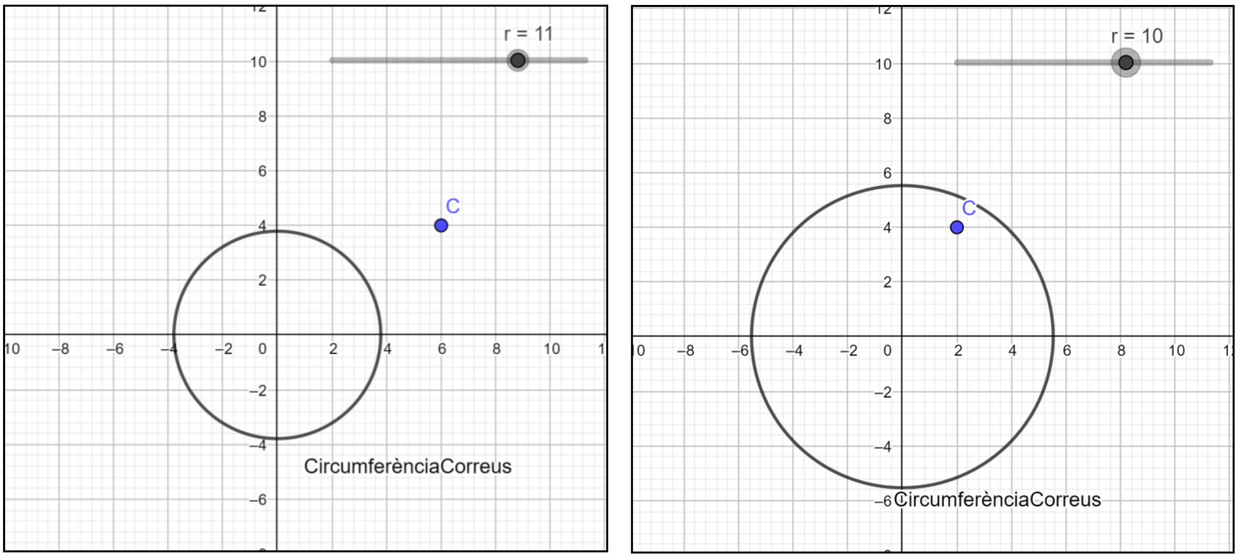


Figura 15. Circumferències amb la mètrica de correus (applet 2) *[Font: pròpia]*

Mètrica discreta

És possiblement la mètrica més senzilla que es pot trobar i no té cap interpretació geomètrica intuïtiva. Tanmateix, compleix les propietats i, per tant, és una distància:

$$d(P,Q) = \begin{cases} 0 & si\ P = Q \\ 1 & si\ P \neq Q \end{cases}$$

Les boles consten d'un sol punt quan el radi és menor que 1, i són tot l'espai quan el radi és més gran o igual que 1.

Mètrica de Hamming

Aquesta mètrica, com l'anterior, no està definida sobre $\mathbb{R}^2$ i és de gran importància en computació. Es defineix la distància de Hamming entre dues cadenes de caràcters de la mateixa longitud com el nombre de posicions diferents. Veiem alguns exemples:

P = **1001001** *Q* = **1101110** → *d(P,Q)* = 4

P = **taula** *Q* = **teula** → *d(P,Q)* = 1

Per cadenes binàries de 3 elements es pot fer una representació en un cub com el de la figura 16. La distància de Hamming es troba comptant quantes arestes s'han de recórrer per anar d'una cadena a una altra. Per exemple, per anar del 000 al 101 passem per dos arestes, per tant *d(000,101)* = 2. Aquesta representació es pot extrapolar a n dimensions (en un *hipercub*).

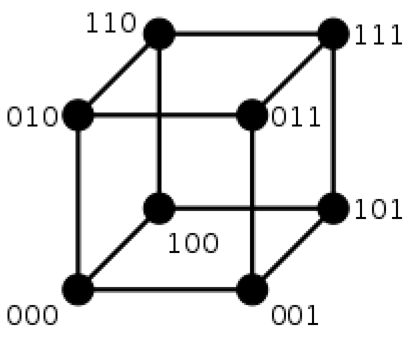


Figura 16. Distància de Hamming per cadenes de 3 bits *[Font: Viquipèdia]*

Mètrica de Minkowski

Són un conjunt de distàncies que tenen molta importància en anàlisi funcional. També s'anomenen distàncies associades a la norma L^p. Es poden definir a $\mathbb{R}^n$ i s'expressen a partir de la següent fórmula per a cada valor de *p* :

$$d(P,Q) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|^p}$$

A $\mathbb{R}^2$ aquesta mètrica té alguns casos particulars que ja hem estudiat: quan $p = 1$ recuperem la mètrica de Manhattan, quan $p = 2$ tenim la mètrica euclidiana i quan $p = \infty$ s'obté la mètrica màxima o de Txèbitxev.

A la figura 17 podem observar com són les boles en alguns casos particulars.

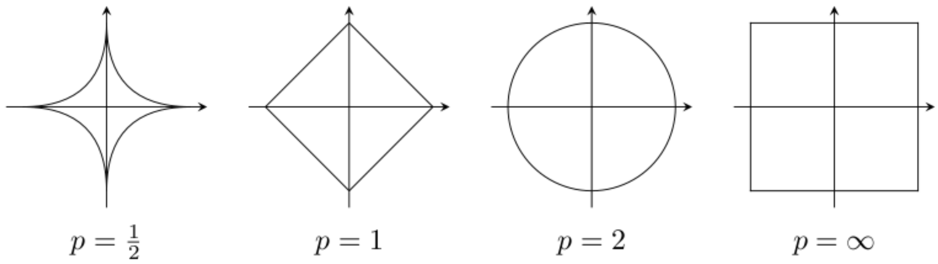


Figura 17. Boles per diferents distàncies L^p *[Font: Viquipèdia]*

3. LA MÈTRICA DE MANHATTAN

Aquest apartat el dedicarem a l'estudi en concret de la mètrica de Manhattan. Estudiarem el seu origen, la seva definició, demostrarem les seves propietats i acabarem veient una anècdota sobre com aquesta mètrica podria haver canviat la vida d'una persona.

D'altra banda, llegint diferents articles i llibres, veiem certa ambigüitat en la nomenclatura: de vegades es parla de geometria Taxicab, geometria del taxista, mètrica del taxista, mètrica de Manhattan, mètrica L_1 o, fins i tot, geometria urbana. Per triar un criteri, parlarem de *geometria Taxicab* quan ens referim a la geometria des del punt de vista global, i de *mètrica de Manhattan* quan parlem concretament de la funció distància.

3.1 ORIGEN

El primer en estudiar aquesta mètrica va ser el matemàtic alemany Hermann Minkowski (1864 – 1909). Tanmateix, el primer a anomenar-la "taxicab" va ser el matemàtic austríac Karl Menger el 1952 a una exposició al Museu de Ciència i Indústria de Chicago.

El nom de "mètrica de Manhattan" ve del disseny en quadrícula dels carrers del barri neoiorquí, que fa que el camí més curt que un cotxe pot prendre entre dos punts de la ciutat no és la línea recta (que travessaria els edificis) sinó les corresponents variacions seguint els diferents carrers.

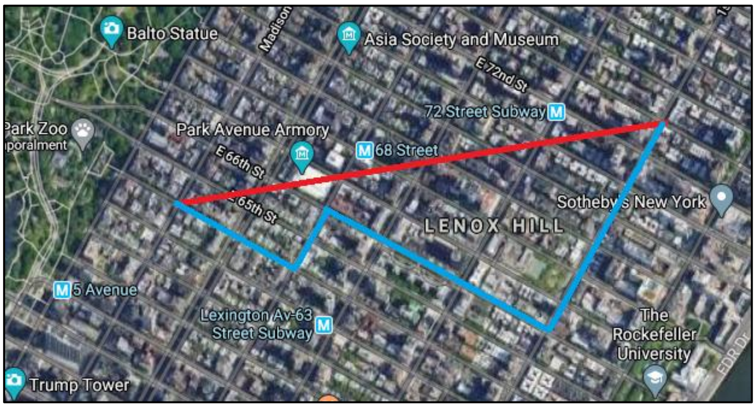


Figura 18. Manhattan *[Font: pròpia]*

Per exemple, a la figura 18 podem veure que la distància Taxicab de *P* a *Q* seria 9, per qualsevol dels camins vermell, verd, taronja o d'altres. En canvi, la distància Euclidiana seria $\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$, més petita.

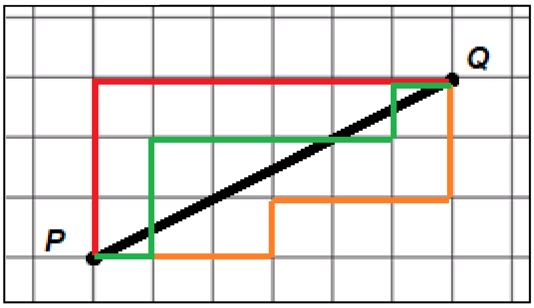


Figura 19. Mètrica de Manhattan *[Font:pròpia]*

3.2 DEFINICIÓ

La definició de la mètrica de Manhattan (també distància *Taxicab*, distància *rectilínia* o distància L_1) és la següent:

$$d(P,Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| \ ,$$

per a dos punts qualssevol de $\mathbb{R}^2$, $P(p_1,p_2)$ i $Q(q_1,q_2)$.

A continuació comprovarem que es tracta, efectivament, d'una distància. Demostrem les quatre propietats que defineixen una distància:

Propietat 1: $\boldsymbol{d(P,Q) \geq 0} \quad \forall \boldsymbol{P,Q} \in \mathbb{R}^2$

Aquesta propietat queda demostrada per la pròpia definició de la mètrica de Manhattan, ja que és la suma de dos valors absoluts.

Propietat 2: $\boldsymbol{d(P,Q) = 0}$ *si i només si* $\boldsymbol{P = Q} \quad \forall \boldsymbol{P,Q} \in \mathbb{R}^2$

Si $P = Q \ \rightarrow \ d(P,Q) = d\,(P,P) = |p_1 - p_1| + |p_2 - p_2| = 0$

Si $d(P,Q) = 0 \ \rightarrow |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = 0 \rightarrow \ p_1 - q_1 = 0 \ \ i \ \ p_2 - q_2 = 0 \rightarrow \ p_1 = q_1 \ \ i \ \ p_2 = q_2 \rightarrow \ P = Q$

Propietat 3: $\boldsymbol{d(P,Q) = d(Q,P)} \quad \forall \boldsymbol{P,Q} \in \mathbb{R}^2$

$d(P,Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = |q_1 - p_1| + |q_2 - p_2| = d(Q,P)$.

Propietat 4: $\boldsymbol{d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)} \quad \forall \boldsymbol{P,Q,R} \in \mathbb{R}^2$

$\boldsymbol{d(P,R) = |p_1 - r_1| + |p_2 - r_2| = |(p_1 - q_1) + (q_1 - r_1)| + |(p_2 - q_2) + (q_2 - r_2)|} \leq$ [5]

$\leq |p_1 - q_1| + |q_1 - r_1| + |p_2 - q_2| + |q_2 - r_2| = d(P,Q) + d(Q,R)$

■

[5] En aquest pas fem servir la desigualtat triangular del valor absolut: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3.3 EL CAMÍ MÉS CURT ENTRE DOS PUNTS

A diferència del que passa amb la geometria euclidiana, en la geometria Taxicab el camí més curt entre dos punts no és únic. Podem veure–ho a la figura 19 amb dos exemples de camins de longitud mínima (7 unitats) dins d'una graella 4 x 3 amb quadrats de costat 1. S'han generat amb un applet dissenyat per buscar camins aleatoris (veure annex).

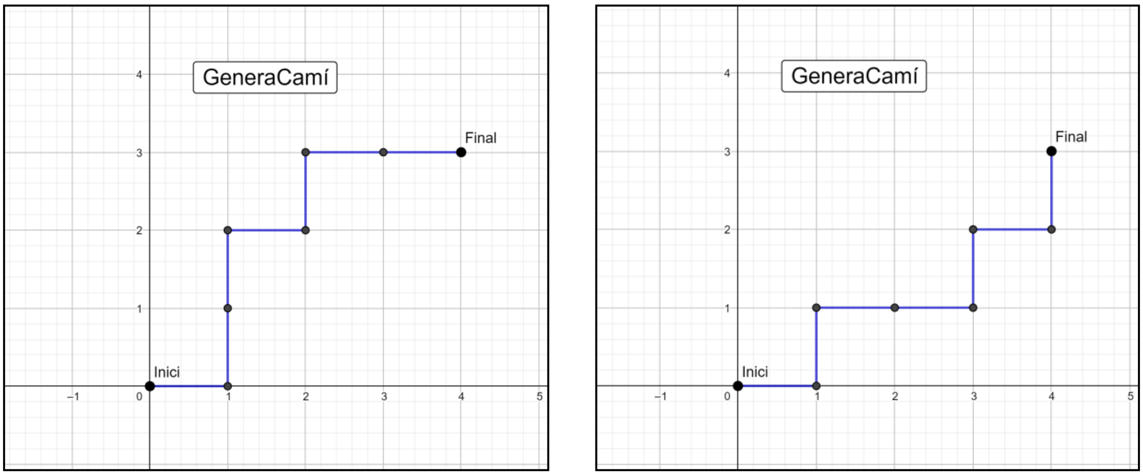


Figura 20. Generador de camins aleatoris ([applet 3](#)) *[Font: pròpia]*

Entre dos punts tenim infinits camins de distància mínima (reduint la mida de la quadrícula). Ara bé, donada una quadrícula de costat fix, podem trobar quants camins hi ha de longitud mínima. Abans de calcular la fórmula general fixem-nos en el cas d'una graella de 3x2:

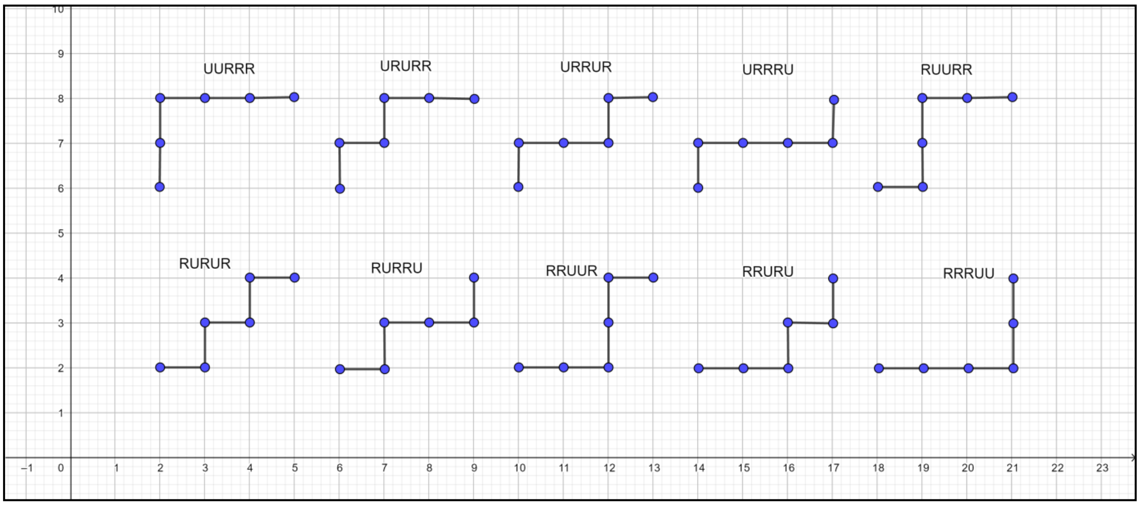


Figura 21. Camins de distància mínima dins d'una graella 3x2 *[Font: pròpia]*

Observem que els possibles camins són les diferents maneres d'ordenar 2 moviments cap a dalt (U) i 3 moviments cap a la dreta (R), és a dir, les permutacions amb repetició de 5 elements amb 3 i 2 repeticions: $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

En el cas general de *m* moviments horitzontals i *n* moviments verticals tindríem les permutacions amb repetició de *m+n* elements i *m* i *n* repeticions:

Camins de distància mínima en una quadrícula m x *n:* $PR_{m,n}^{m+n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$.

3.4 UN JUTGE EUCLIDIÀ A MANHATTAN

En aquest apartat explicarem un cas on un acusat va recórrer a la mètrica de Manhattan per intentar minimitzar la seva condemna. Es tracta d’una anècdota, però ens dona una idea de quina podria arribar a ser la importància de mesurar la distància entre dos punts d’una manera o d’una altra.

Al 2002, James Robbins va ser detingut a Manhattan, per venta de drogues. A més a més de vendre drogues, hi havia un altre factor que encara empitjorava la situació per a Robbins. La venta de drogues es va fer a menys de 1000 peus (304,8 metres) d’una escola.

Els advocats de Robbins van intentar apel·lar a la mètrica de Manhattan per eliminar aquest factor que augmentava encara més la seva acusació. Entenien que, tot i que la distància lineal (euclidiana) era de menys de 1000 peus, la distància que podia recórrer realment a peu (distància Manhattan) era major.

En la següent imatge es pot veure a on el van detenir, l’escola i el camí més curt que els uneix segons la mètrica de Manhattan.

Figura 22. L’escola i el lloc del delicte *[Font: pròpia]*

Agafar aquesta distància com a referència eliminava l'agreujant dels 1000 peus, ja que la distància que els separaria seria de 764 + 490 = 1254 peus (379,5 metres).

Tot i això el jutge va considerar que la distància havia de ser en línea recta i que, per tant, s'havia de calcular la longitud utilitzant el famós teorema de Pitàgores.

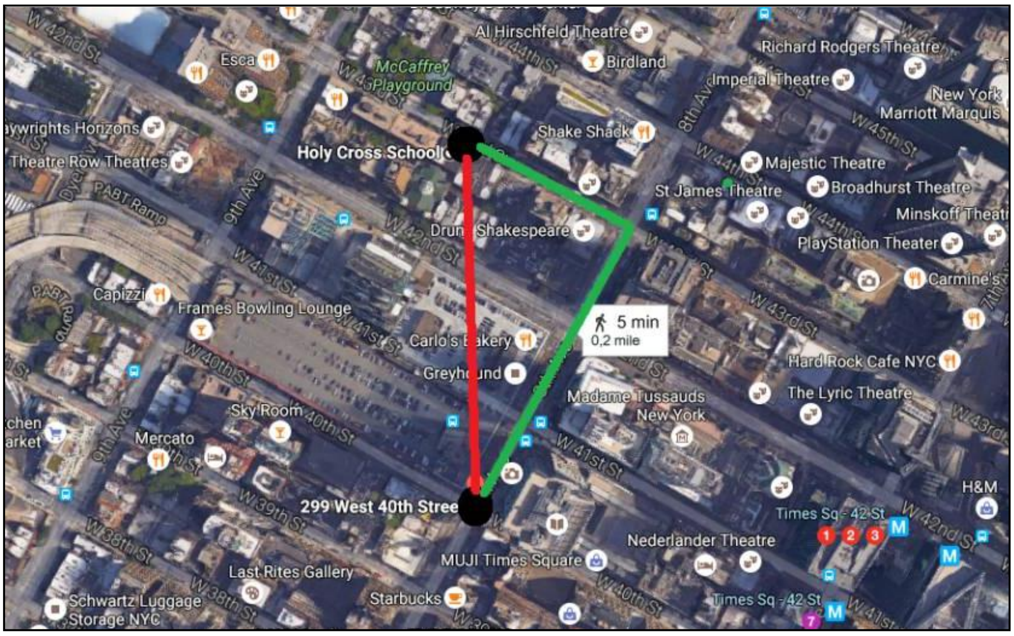


Figura 23. Comparació visual de les distàncies euclidiana i de Manhattan *[Font: pròpia]*

Utilitzant el teorema de Pitàgores tenim que la distància entre els dos punts és la següent:

$$\sqrt{764^2 + 490^2} = 907{,}63 \text{ peus (276,6 metres).}$$

Com que aquesta longitud és inferior a 1000 peus no es va poder minimitzar la condemna i a Robbins li van caure de 6 a 12 anys de presó.

Aquest judici es va fer famós i fins i tot va sortir al New York Times.

4. ELEMENTS DE LA GEOMETRIA TAXICAB

En aquest apartat estudiarem diferents elements geomètrics que es defineixen a partir del concepte de distància. D'aquesta manera podrem apreciar com canvien pel fet d'escollir una mètrica o una altra. En molts casos no farem demostracions precises, sinó que ens ajudarem del programa GeoGebra per a il·lustrar les diferents situacions, ja que, un cop dissenyada la construcció, permet moure els objectes amb facilitat i veure el seu comportament. Acabarem amb una comparació dels axiomes de les geometries euclidiana i Taxicab.

4.1 PUNTS SITUATS ENTRE ALTRES DOS

Donats dos punts de $\mathbb{R}^2$, P i Q, els punts R situats entremig de P i Q són aquells que satisfan:

- $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
- P, Q i R són col·lineals

Intuïtivament, amb la primera propietat n'hi hauria prou per assegurar que un punt està entremig d'altres dos. I això és així a la geometria euclidiana, però no a la Taxicab com veurem a continuació.

Si els punts P i Q estan alineats segons els eixos de coordenades no hi ha cap problema. En canvi, si no ho estan, veiem que tots els punts dins del rectangle que determinen satisfan que la suma de les seves distàncies als vèrtexs oposats és igual a la distància entre aquests vèrtexs. Per exemple, a la figura 24, tots els punts *R* interiors al rectangle satisfan que la suma de distàncies a *P* i *Q* és 9. Per tant, per a què un punt estigui entremig d'altres dos a la geometria Taxicab es necessiten les dues condicions.

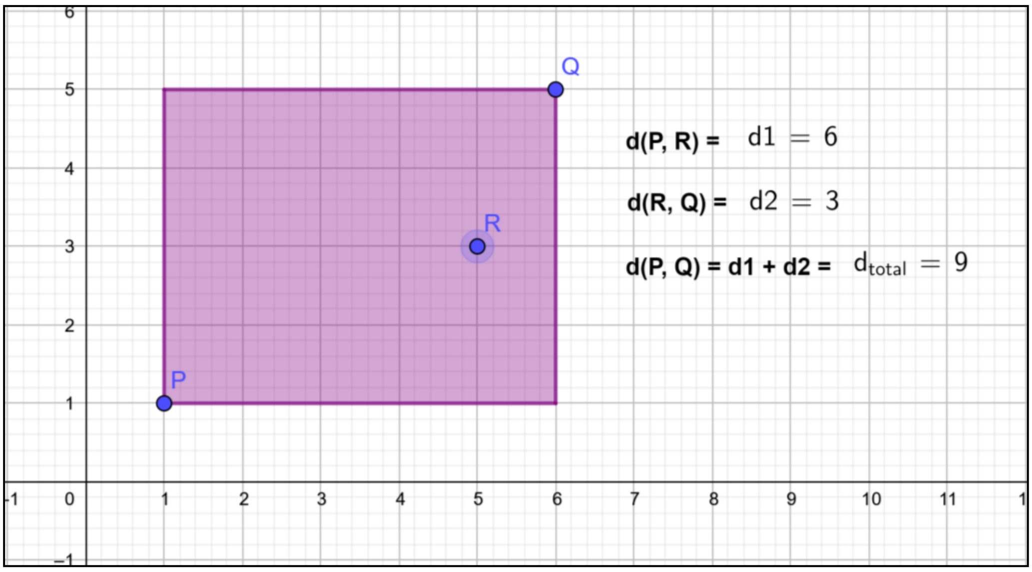


Figura 24. Punts R que satisfan d(*P*,*R*) + d(*R*,*Q*) = d(*P*,*Q*) (applet 4) *[Font: pròpia]*

4.2 PUNTS EQUIDISTANTS A ALTRES DOS

En geometria euclidiana, la mediatriu és el lloc geomètric dels punts que equidisten de dos punts donats, P i Q.

És tracta d'un element geomètric molt útil en diverses situacions, com per exemple quan s'han de delimitar regions segons àrees d'influència properes a certs punts, com veurem més endavant amb els diagrames de Voronoi.

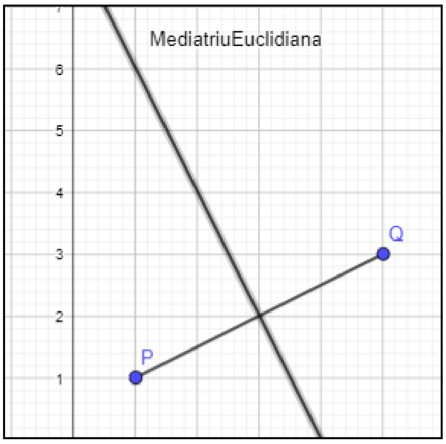


Figura 25. Mediatriu euclidiana
[Font: pròpia]

A partir de la definició, veiem que la mediatriu estarà formada pels punts R que compleixin l'equació:

$$d(P,R) = d(R,Q)$$

En el cas de la mètrica euclidiana, la mediatriu és la recta perpendicular al segment $\overline{PQ}$ que passa pel seu punt mig, com podem veure a la figura 25.

A la geometria Taxicab l'equació de la mediatriu vindrà donada per l'expressió:

$$|x - x(P)| + |y - y(P)| =$$

$$= |x - x(Q)| + |y - y(Q)|$$

Com podem observar a la figura 26, el cas general és força diferent de l'habitual.

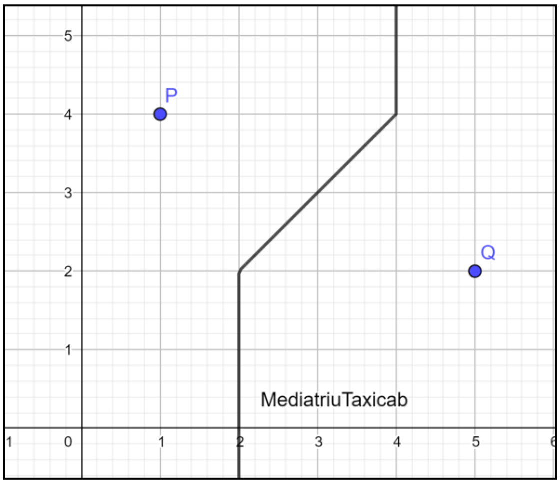


Figura 26. Mediatriu Taxicab ([applet 5]())
[Font: pròpia]

Tanmateix, hi ha dos casos particulars en què la forma canvia: un quan els punts estan alineats amb els eixos de coordenades (aleshores coincideix amb el cas euclidià), i l'altre quan els punts estan alineats amb un angle de 45º (en aquest cas, la mediatriu està formada per un segment seguit de dos quadrants infinits).

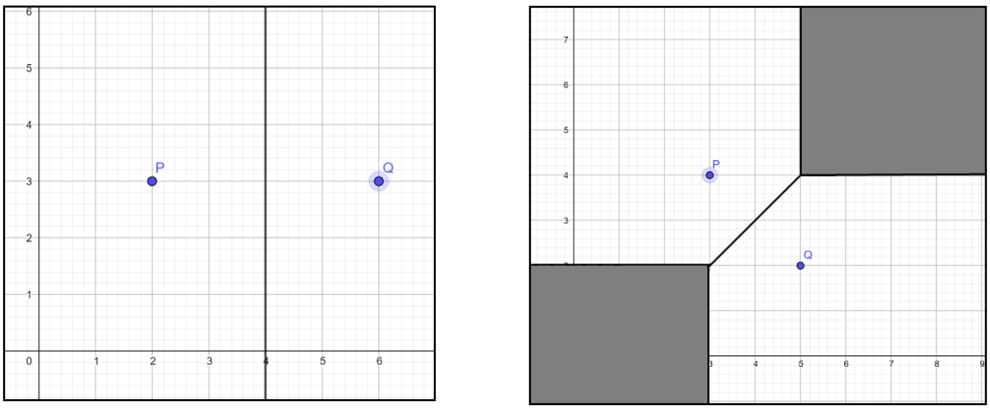


Figura 27. Mediatrius Taxicab amb P i Q alineats amb els eixos i amb P i Q a 45° ([applet 5]()) *[Font: pròpia]*

4.3 DISTÀNCIA D'UN PUNT A UNA RECTA

Donats un punt *P* i una recta *r*, es defineix la distància $d(P,r)$ com el valor mínim de les distàncies del punt *P* a qualsevol punt de la recta *r.*

Una manera visualment senzilla d'enfocar el problema és considerar una circumferència centrada en *P* i anar ampliant el radi fins que sigui tangent a la recta *r.* El punt de tangència *Q* ens donarà el punt més proper a *P* i, per tant, ens permetrà trobar la distància mínima.

Ens basarem en aquesta construcció per trobar la distància d'un punt a una recta amb la geometria Taxicab.

Haurem de tenir en compte que les circumferències són quadrats en la mètrica de Manhattan (ho veurem en detall més endavant) i distingir tres casos segons el pendent *m* de la recta :

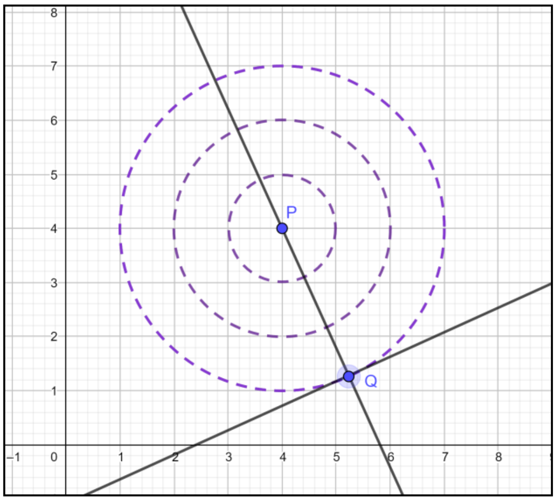


Figura 28. Distància de punt a recta amb la mètrica euclidiana *[Font: pròpia]*

- |*m*| < 1: $d(P,r)$ = distància vertical
- |*m*| > 1: $d(P,r)$ = distància horitzontal
- |*m*| = 1: $d(P,r)$ = distància vertical o horitzontal

A la figura 29 tenim un exemple generat amb un applet que calcula de distància de punt a recta (en aquest cas de 4 unitats). Observem els tres casos que es poden donar.

|*m*| < 1 |*m*| > 1 |*m*| = 1

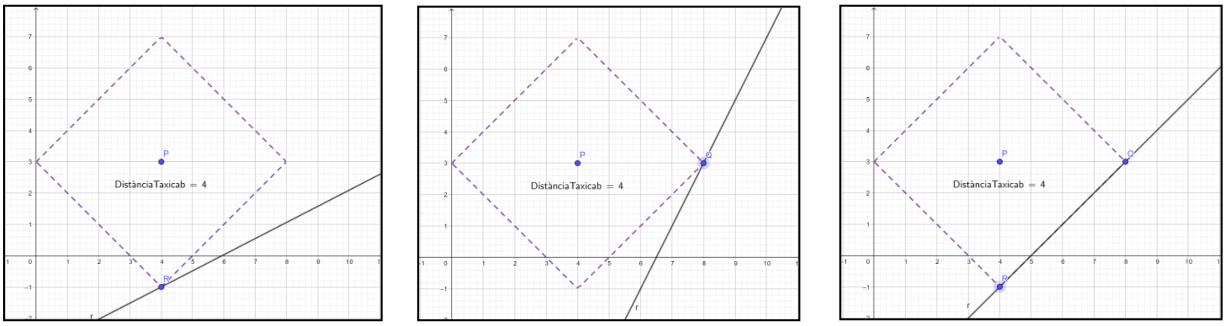


Figura 29. Distància de punt a recta amb la mètrica de Manhattan (applet 6) *[Font: pròpia]*

4.4 TRIANGLES

Desigualtat triangular

Un triangle és un polígon de tres costats. En la geometria euclidiana tres punts *A, B, C* no alienats defineixen un únic triangle i els seus costats satisfan la desigualtat triangular. Aquesta diu que la suma de dos costats qualssevol sempre és més gran que el tercer (estrictament més gran, si fos igual tindríem els tres punts alineats):

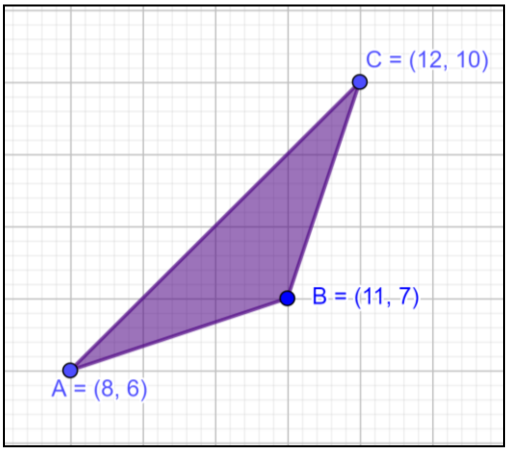


Figura 30. Desigualtat triangular falla a la geometria Taxicab *[Font: pròpia]*

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C).$$

Tanmateix aquesta desigualtat no es compleix en la geometria Taxicab, com veiem a l'exemple de la figura 30, a on

$$d(A, C) = 8 = 4 + 4 = d(A, B) + d(B, C),$$

acomplint-se la igualtat, enlloc de la desigualtat.

Teorema de Pitàgores

En el cas dels triangles rectangles ja no es compleix el teorema de Pitàgores:

$$BC^2 + CA^2 = BA^2$$

D'altra banda, en el cas dels catets alineats amb els eixos tenim una fórmula semblant. Per construcció, la distància *BC* sumada a la distància *CA* és igual a la distància de Manhattan *BA.* Per tant el teorema de Pitàgores s'escriuria de la següent manera:

$$BC + CA = BA$$

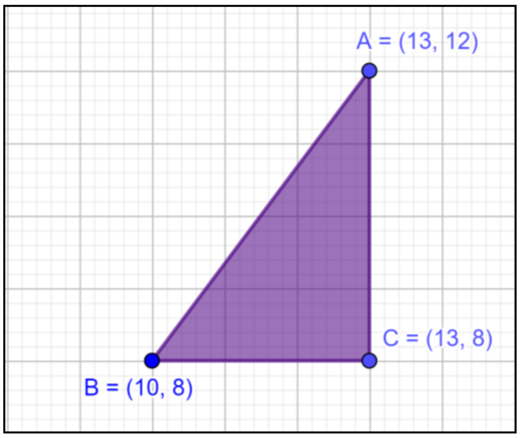


Figura 31. Teorema de Pitàgores Taxicab: ***BC + CA = 3 + 4 = 7 = BA*** *[Font: pròpia]*

Criteris d'igualtat de triangles

En aquest apartat veurem com els criteris d'igualtat de triangles en la geometria euclidiana fallen tots en la Taxicab. Més endavant, quan fem la comparació axiomàtica entre les geometries euclidiana i Taxicab, veurem que aquesta és la principal diferència entre les dues geometries.

A continuació examinarem els criteris *CCC, CAC* i *ACA* per a la geometria Taxicab.

CCC (Costat-Costat-Costat): Si dos triangles tenen iguals els tres costats, aleshores són iguals.

A la figura 32 veiem un exemple de dos triangles equilàters de costat igual a 4 unitats que tanmateix són diferents, incomplint el criteri *CCC.*

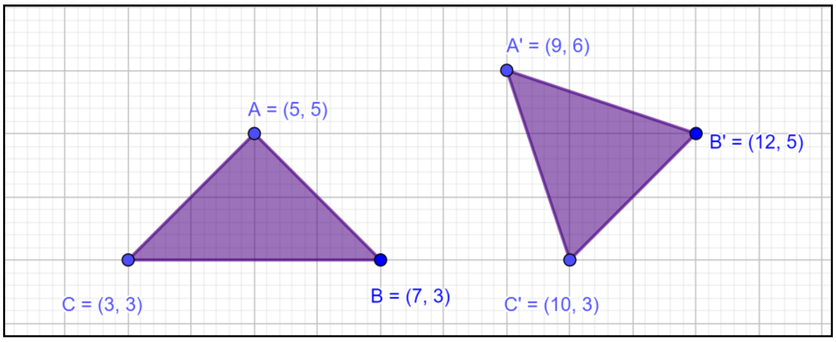


Figura 32. Violació criteri *CCC* *[Font: pròpia]*

CAC (Costat-Angle-Costat): Si dos triangles tenen iguals dos costats i l'angle que determinen, aleshores són iguals.

En l'exemple de la figura 33, podem observar que els costats *CA*, *CB, C'A'* i *C'B'* tenen tots la mateixa mida (4 unitats) i que els angles que determinen, $\widehat{ACB}$ i $\widehat{A'C'B'}$, són iguals (90º), però els triangles són diferents, violant el criteri *CAC.*

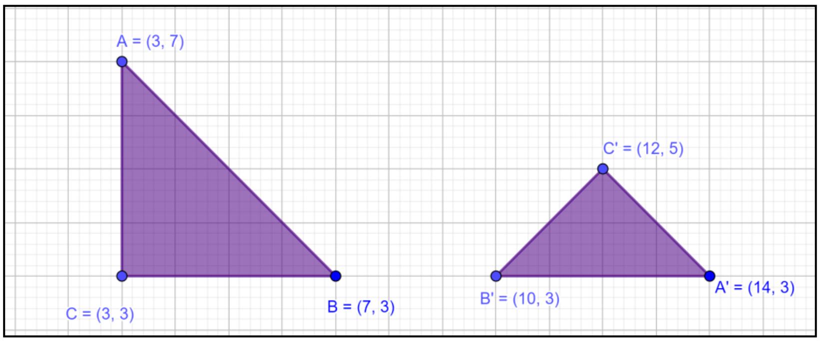


Figura 33. Violació criteri *CAC* *[Font: pròpia]*

ACA (Angle-Costat-Angle): Si dos triangles tenen iguals un costat i els angles adjacents, aleshores són iguals.

Finalment, en la figura 34 tenim el cas de dos triangles amb els costats AC i $A'C'$ iguals a 4 unitats i els angles adjacents iguals a 45º i que, tot i això, són diferents en contra del que diu el criteri *ACA*.

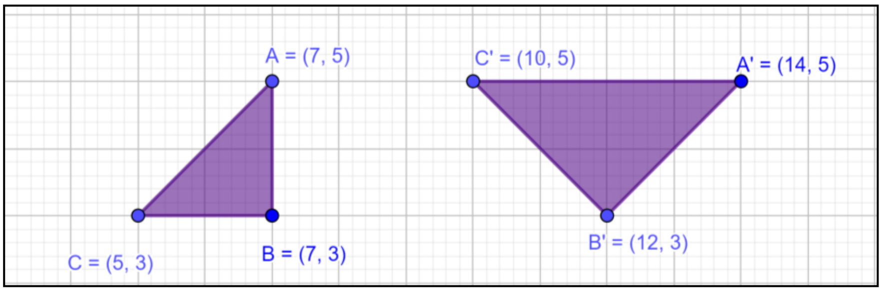


Figura 34. Violació criteri *ACA* *[Font: pròpia]*

4.5 CÒNIQUES

En la geometria euclidiana les còniques són corbes que s'obtenen de la intersecció de la superfície d'un con amb un pla. D'altra banda, tenen una definició com a lloc geomètric en termes de distància molt senzilla, cosa que les fa molt adients per investigar com variaran quan canviem de mètrica.

4.5.1 CIRCUMFERÈNCIA

La circumferència és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat centre. La distància del centre a qualsevol punt s'anomena radi.

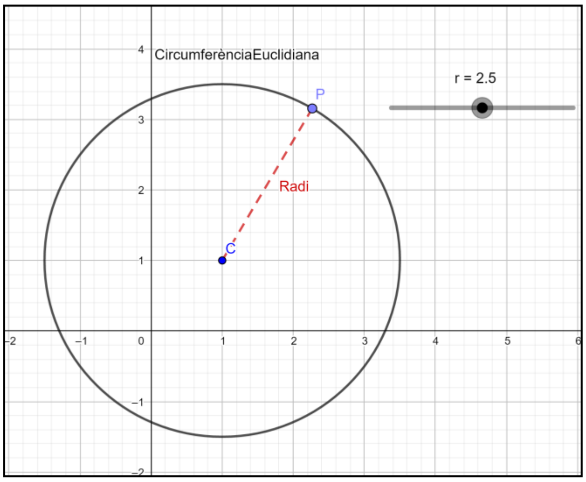


Figura 31. Circumferència euclidiana (applet 7)
[Font: pròpia]

La circumferència de centre *C(a,b)* i radi *r* amb la mètrica euclidiana, ve donada per la següent expressió:

$$d(P,C) = \sqrt{(x-a^2)+(y-b^2)} \;= r$$

En l'exemple de la figura 31 veiem que la circumferència té la forma circular habitual. A continuació veurem què passa quan canviem la definició de distància euclidiana per la de distància de Manhattan.

A la geometria Taxicab l'equació de circumferència de centre *C(a,b)* i radi *r* vindrà donada per la següent expressió:

$$d(P,C) = |x-a| + |y-b| = r$$

Introduint aquesta fórmula a GeoGebra, podem observar que la circumferència té forma quadrada (veure la figura 32, per exemple, amb una circumferència de centre *C*(2,2) i radi *r* = 4). Tots els punts sobre el quadrat es troben a distància *r* del centre *C*, un resultat no gaire intuïtiu!

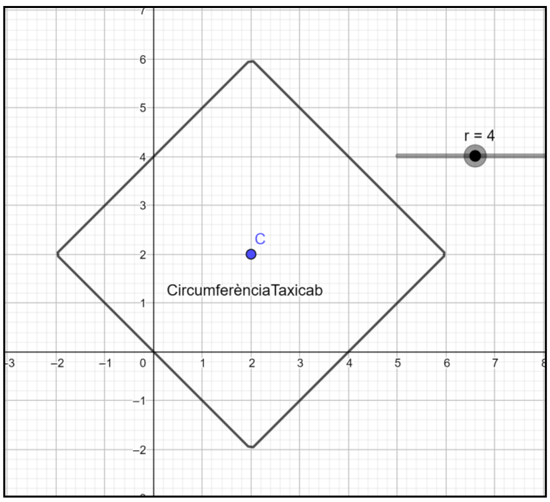


Figura 32. Circumferència Taxicab (applet 8)
[Font: pròpia]

El valor de π

Un punt interessant a destacar és que el valor de π és diferent segons la geometria que considerem. El nombre π és la relació entre el perímetre de la circumferència i el diàmetre. Per la geometria euclidiana és aproximadament 3,14159 (les primeres aproximacions són de l'any 1900 aC). En canvi, per la circumferència a la geometria Taxicab, la distància d'un vèrtex al seu contigu serà 2*r*, o sigui el diàmetre *d*. Per tant, la relació entre el perímetre (quatre costats) i el diàmetre serà:

$$\pi = \frac{4d}{d} = 4$$

4.5.2 EL·LIPSE

L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts fixos anomenats *focus* és constant.

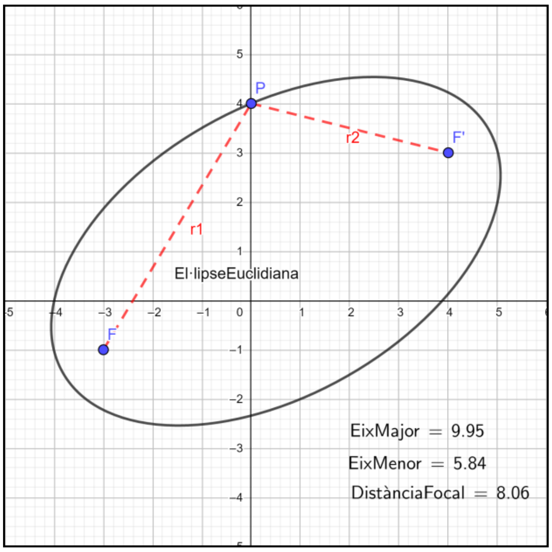


Figura 33. El·lipse euclidiana (applet 9)
[Font: pròpia]

L'equació de l'el·lipse de focus *F* i *F'* i eix major *2a* (suma de les distàncies al focus, que és constant) ve donada per l'equació:

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a$$

Quan fem servir la distància habitual (l'euclidiana), l'el·lipse té la forma coneguda de la figura 33.

En el cas de la mètrica Taxicab l'equació de l'el·lipse de focus A i B ve donada per la següent expressió:

$$|x - x(A)| + |y - y(A)| + |x - x(B)| + |y - y(B)| = 2a$$

Després d'introduir aquesta fórmula a GeoGebra veiem que la figura que es genera té forma de polígon.

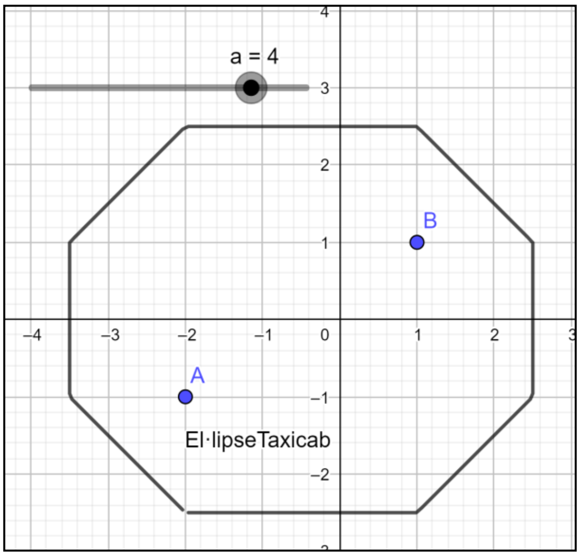


Figura 34. El·lipse Taxicab (applet 10)
[Font: pròpia]

Concretament, en el cas general l'el·lipse té forma d'octàgon (figura 34). En canvi, quan els focus estan alienats amb la direcció dels eixos, siguin horitzontals o verticals, l'el·lipse adquireix forma d'hexàgon, com podem veure a la figura 35.

Finalment, en el cas extrem en què els focus es trobessin a la distància màxima *2a,* l'el·lipse esdevindria un rectangle o un quadrat (incloent-hi tots els punts interiors, és a dir, ja no seria una corba).

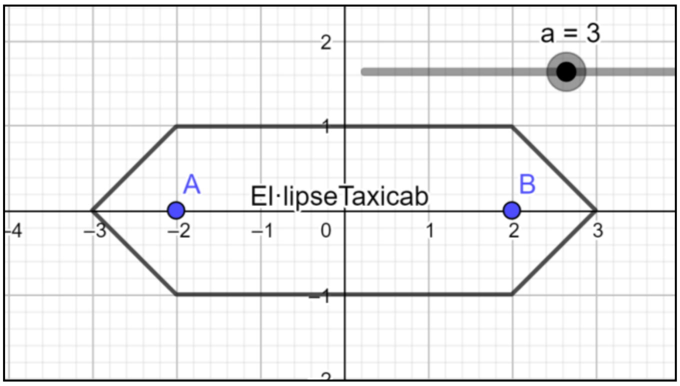


Figura 35. El·lipse Taxicab amb focus alineats amb la direcció dels eixos (applet 10) *[Font: pròpia]*

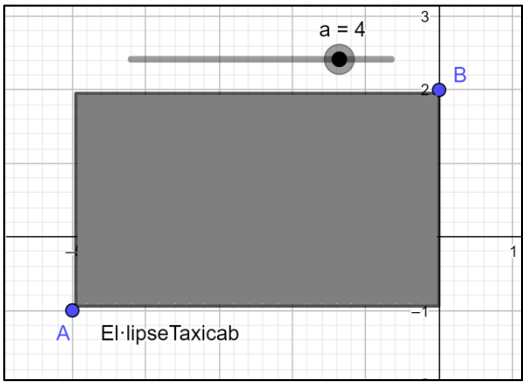


Figura 36. Cas degenerat amb focus situats a distància *2a* (applet 10) *[Font: pròpia]*

4.5.3 HIPÈRBOLA

L'hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del pla tals que la diferència entre les seves distàncies (en valor absolut) a dos punts fixos anomenats focus és constant.

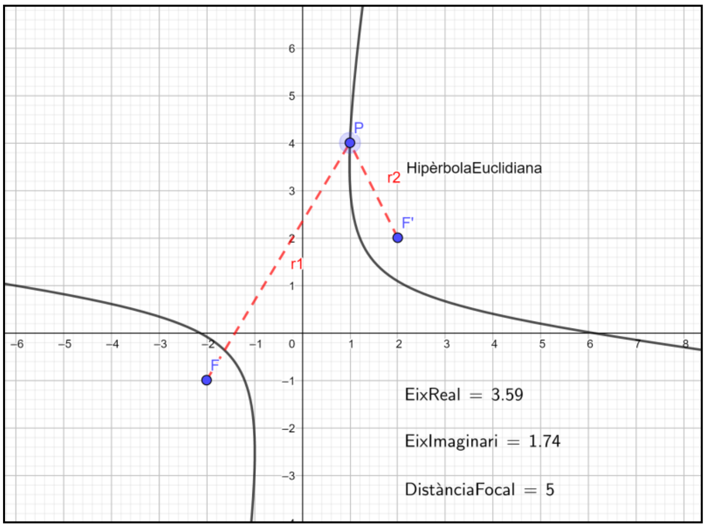


Figura 37. Hipèrbola euclidiana (applet 11) *[Font: pròpia]*

L'equació de la hipèrbola de focus F i F' i distància entre vèrtexs *2a* ve donada per la següent expressió:

$$|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$$

Fent ús de la distància euclidiana obtenim la corba típica de la hipèrbola, com podem veure a la figura 37.

En el cas de la distància Manhattan l'equació de la hipèrbola de focus A i B és la següent:

$$\big||x - x(A)| + |y - y(A)| - |x - x(B)| - |y - y(B)|\big| = 2a$$

Podem veure el resultat habitual a la figura 38.

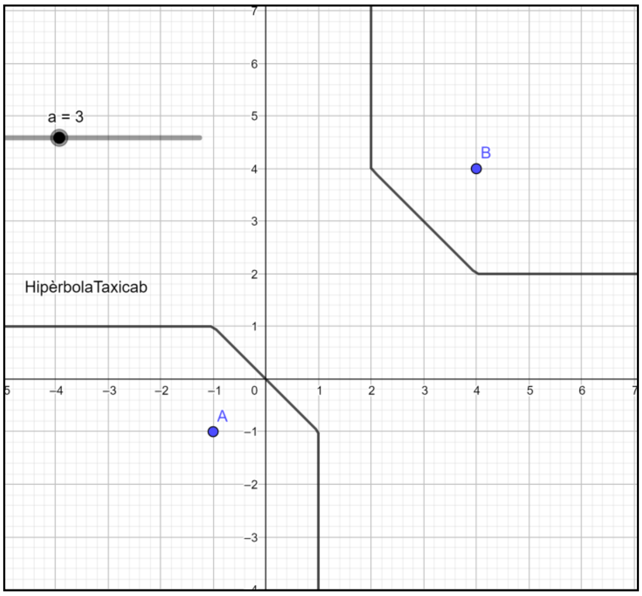


Figura 38. Hipèrbola Taxicab (applet 12) *[Font: pròpia]*

D'altra banda, com és típic en aquesta mètrica, tenim diferents casos degenerats en què la hipèrbola deixa de ser-ho. Depenent de la relació entre les distàncies horitzontals i verticals dels focus amb el valor del paràmetre *2a* es donen diverses situacions: podem tenir línees paral·leles o canviar part de les corbes per tot un quadrant infinit (figura 39).

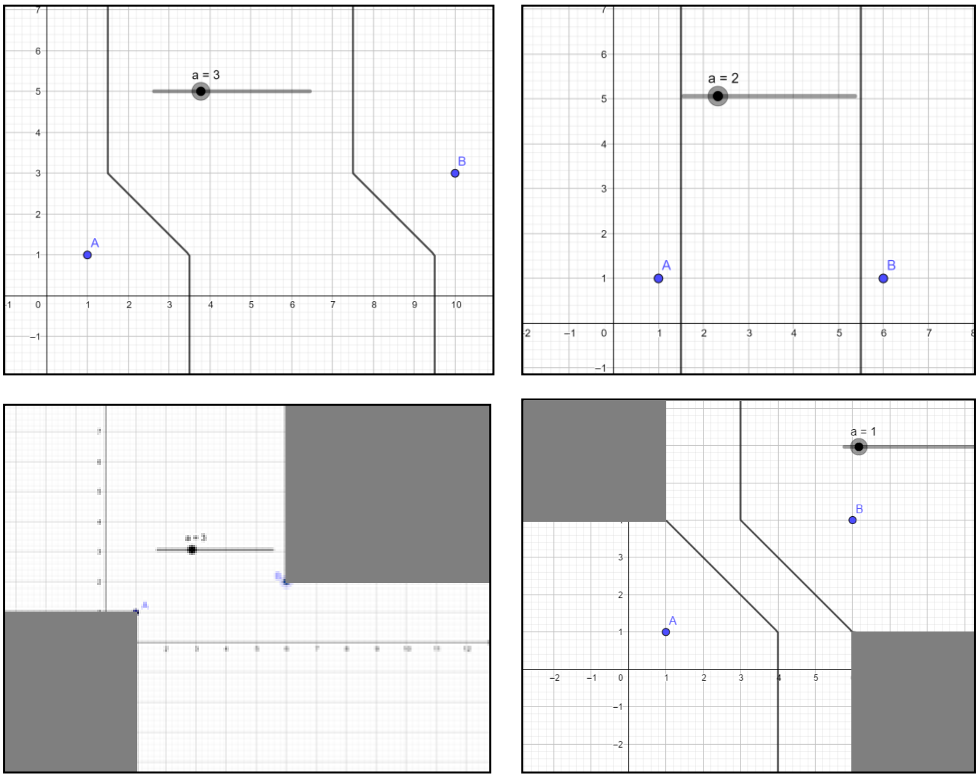


Figura 39. Hipèrboles Taxicab amb diferents casos degenerats (applet 12) *[Font: pròpia]*

4.5.4 PARÀBOLA

La paràbola és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat focus i d'una recta anomenada directriu.

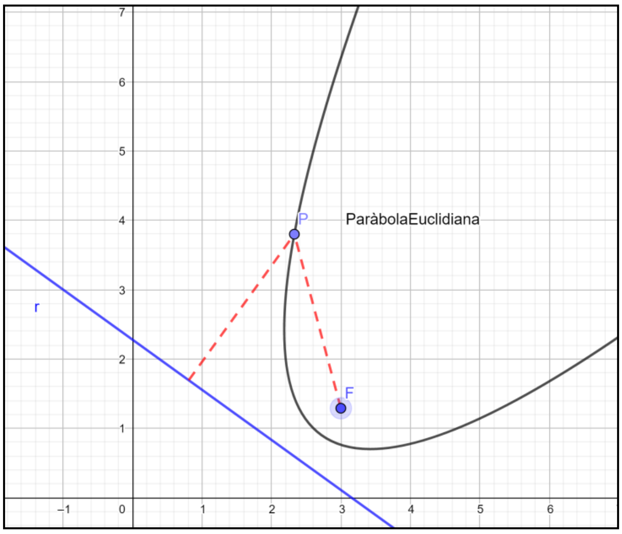


Figura 40. Paràbola euclidiana (applet 13) *[Font: pròpia]*

L'equació de la paràbola de directiu *r* i focus *F* ve donada per la següent expressió:

$$d(P,r) = d(P,F)$$

Quan utilitzem la mètrica euclidiana obtenim la corba habitual de la paràbola, com podem veure a la figura 40.

En el cas de la mètrica de Manhattan, aprofitarem el càlcul de la distància de punt a recta que hem fet a l'apartat 4.3 per expressar l'equació de la paràbola de la següent manera:

$$|x - x(F)| + |y - y(F)| = d(P,F) = d(P,r) = mín(|x - x_r|, |y - y_r|)$$

a on x_r és el punt de la recta *r* amb la mateixa ordenada que *P(x,y)* i y_r és el punt de la recta *r* amb la mateixa abscissa que *P(x,y).* Si s'intenta fer aquesta construcció directament a GeoGebra, li costa molt de calcular i, per tant, és millor fer-ho per dos casos per separat: quan |m|≤1 i quan |m|≥1.

A la figura 40, veiem com la paràbola s'obre cap a dalt en el cas |m|<1 (o cap a baix si el focus està per sota la directriu) i com s'obre cap a la dreta quan |m|>1 (o cap a l'esquerra si el focus està a l'esquerra de la directriu).

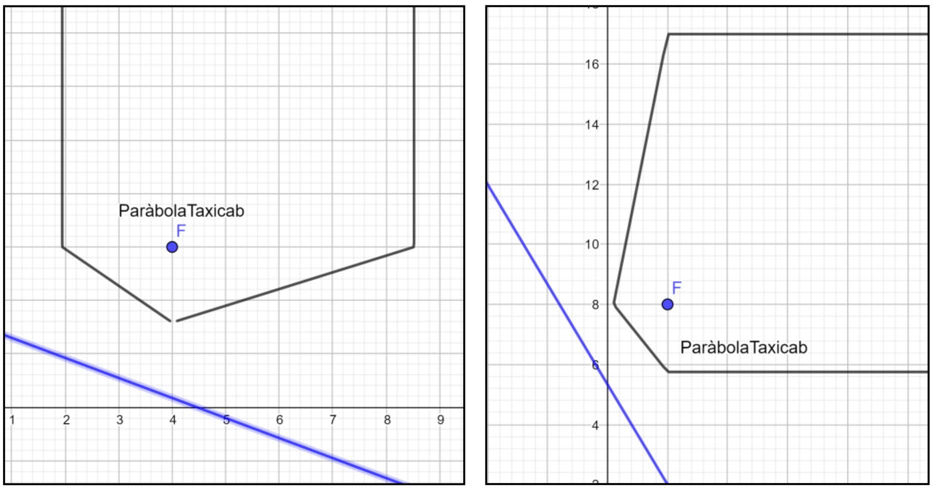


Figura 41. Paràboles Taxicab (applet 14 i applet 15) *[Font: pròpia]*

Finalment, a la figura 42 veiem els casos m = –1, m = 0 (directriu horitzontal) i m = ∞ (directriu vertical). En el cas de la directriu amb |m|=1 la paràbola té tres costats enlloc de quatre i les branques infinites són perpendiculars entre elles.

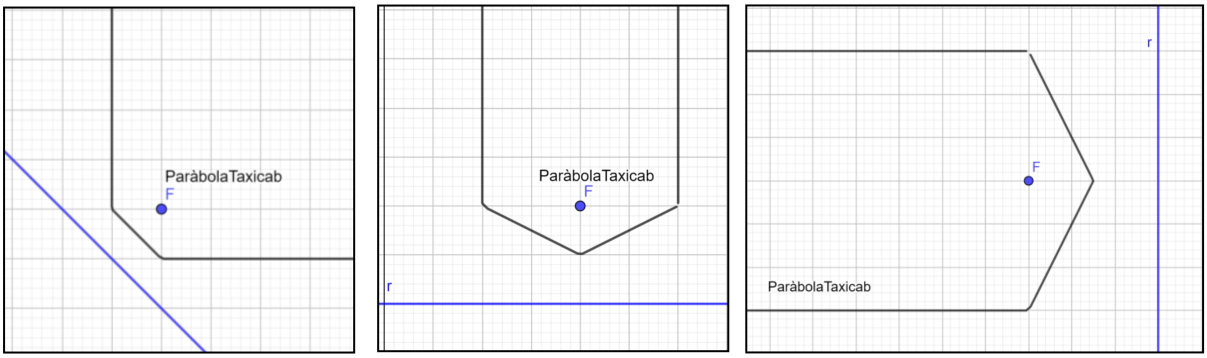


Figura 42. Paràboles Taxicab per m = –1, m = 0 i m = ∞ *[Font: pròpia]*

4.6 COMPARACIÓ AXIOMÀTICA

Seguint el plantejament que fa el llibre d'Eugene Krause, *Taxicab geometry,* podem examinar els axiomes de la geometria euclidiana i veure quins d'aquests no compleix la geometria Taxicab. No tractarem de fer demostracions rigoroses, sinó que presentarem els axiomes i, assumint de manera intuïtiva que es compleixen per la geometria euclidiana, estudiarem si es compleixen o no per la geometria Taxicab. Sorprenentment, veurem que pel que fa a l'axiomàtica no són geometries tan diferents. Són aquestes diferències les que estudiarem amb més detall.

Per dur a terme la comparació, prendrem l'enfocament de la geometria mètrica, on bàsicament es substitueixen els axiomes de congruència de l'aproximació axiomàtica per les funcions distància i mesura angular, que proporcionen una idea molt més intuïtiva de la geometria.

L'aproximació mètrica de la geometria fa incidència en els conceptes de distància i mesura d'angles. Concretament, una geometria mètrica seria un sistema [$\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, *d, m*] a on:

- $\mathscr{P}$ és un conjunt de punts
- $\mathscr{L}$ és una col·lecció de subconjunts de $\mathscr{P}$ anomenats línees
- *d* és una funció per a la distància
- *m* és una funció per mesurar angles

En el cas de la geometria euclidiana aquest sistema satisfà un conjunt de tretze propietats (o axiomes). A continuació compararem cada propietat o axioma de la geometria euclidiana amb la geometria Taxicab.

Propietats d'incidència

I. *Donats 2 punts, hi ha exactament una línia que els uneix*

II. *Cada línia conté com a mínim 2 punts; $\mathscr{P}$ conté com a mínim 3 punts no alineats.*

Aquestes propietats només fan referència a $\mathscr{P}$ i $\mathscr{L}$, per tant, hauran de ser certes tant a la geometria Taxicab [$\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, d_T, *m*] com a la geometria Euclidiana [$\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, d_E, *m*].

Propietats de la funció distància

Els següents quatre axiomes afirmen que la funció distància és definida positiva, simètrica, satisfà la desigualtat triangular i té la propietat del regle. Les tres primeres propietats ja les hem demostrades abans i són certes per a les dues geometries. Per a cada parell de punts *(P,Q)*:

III. $d(P,Q) \geq 0$ i $d(P,Q) = 0$ *si i només si* $P = Q$.

IV. $d(P,Q) = d(Q,P)$

V. $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

VI. Propietat del regle*:* donada qualsevol línia *L* de $\mathscr{L}$, existeix una funció bijectiva[6] f_L de *L* en $\mathbb{R}$ (nombres reals) de tal manera que per a tots els punts *P, Q* de *L* es satisfà:

$$|f_L(P) - f_L(Q)| = d(P,Q)$$

Ho demostrarem estudiant dos casos per separat:

<u>Cas *L* vertical</u>: Definim $f_L(p_1, p_2) = p_2$

La funció és bijectiva ja que per a cada punt de la línea *L* hi ha una única imatge i, per a cada valor real existeix una única antiimatge. A més, donat que $p_1 = q_1$ (ja que P i Q pertanyen a una línea vertical), tenim:

$$|f_L(P) - f_L(Q)| = |p_2 - q_2| = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = d(P,Q)$$

<u>Cas *L* no vertical</u>: Definim $f_L(p_1, p_2) = (1 + |m|)p_1$, on *m* és el pendent $m = \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1}$

Com en el cas anterior, la funció és bijectiva ja que, al ser lineal, tots els punts de *L* tenen una única imatge i, per a cada valor real existeix una única antiimatge. També satisfà:

$$\begin{aligned} |f_L(P) - f_L(Q)| &= |(1 + |m|)p_1 - (1 + |m|)q_1| = (1 + |m|) \cdot |p_1 - q_1| \\ &= |p_1 - q_1| + |m| \cdot |p_1 - q_1| = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = d(P,Q) \end{aligned}$$

[6] Una funció *f: X → Y* és bijectiva si, per a cada *y* ∈ *Y* existeix un únic *x* ∈ *X* tal que *y* = *f*(*x*) .

Propietat de la separació del pla

VII. Si L és qualsevol línia, aleshores existeixen un subconjunts $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ de $\mathcal{P}$ (anomenats semiplà) tal que:

i. $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ siguin convexos[7]
ii. $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{P} - L$ ($\mathcal{P}$ amb L *eliminada*)
iii. Si $P \in \mathcal{H}_1$ i $Q \in \mathcal{H}_2$, aleshores $\overline{PQ} \cap L \neq \emptyset$

Aquesta propietat no és conseqüència de la definició que es triï de distància, per tant si és certa per [$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, d_E, m], també ho serà per [$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, d_T, m]. Examinant-ho amb més detall, la propietat de la separació del pla sí té a veure amb els conceptes de segment i convexitat així com amb la relació *"estar entre"*, que implícitament involucren la definició de distància; tanmateix, es pot veure que les implicacions són les mateixes per la geometria euclidiana i per la Taxicab.

Propietats de la mesura d'angles

VIII. m assigna a cada angle un nombre real entre 0 i 180.

IX. Donada una semirecta PQ a l'extrem del semiplà $\mathcal{H}$ i donat un nombre real r, entre 0 i 180 hi ha exactament una única semirecta PR tal que $R \in \mathcal{H}$ i $m\angle RPQ = r$.

X. Si T es troba a l'interior de $\angle PQR$, aleshores $m\angle PQT + m\angle TQR = m\angle PQR$

XI. Si Q es troba entre P , R i $T \notin$ *recta* PR, aleshores $m\angle PQT + m\angle TQR = 180$

Aquestes quatre propietats que acabem d'enunciar han de ser certes per [$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, d_T, m] si ho són per [$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, d_E, m] ja que les dos geometries fan servir la mateixa funció de mesura d'angle. Els conceptes "*angle*", "*semirecta*", "*semiplà*", "*interior d'un angle*" i "*entre*", tenen el mateix significat per les dues geometries.

[7] En l'espai euclidià un conjunt és convex si per a tots els punts dins del mateix, els segments que els uneixen es troben dins del propi conjunt.

Propietat "costat-angle-costat"

XII. Donada una correspondència injectiva[8] entre el conjunt de vèrtex de dos triangles, si dos costats i l'angle comprès del primer triangle són congruents respecte les parts corresponents del segon triangle, aleshores la correspondència és una congruència[9].

Aquesta és la propietat fonamental de la geometria euclidiana [$\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, d_E, m] que la geometria Taxicab [$\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, d_T, m] no té (ho hem vist en detall a l'apartat 4.4). És per això que la geometria Taxicab és una geometria no euclidiana.

Propietat de les paral·leles

XIII. Donat un punt P exterior a una línia L, hi ha exactament una línia que passa per P i és paral·lela a L.

Finalment tenim el famós postulat de les paral·leles. Aquesta propietat ha de ser certa per la geometria Taxicab ja que només té a veure amb $\mathscr{P}$ i $\mathscr{L}$.

---

8 Una correspondència entre *X* i *Y* és injectiva si a dos elements diferents de *X* els hi correspon dos elements diferents de *Y.*

9 Dos triangles són congruents si els costats són d'igual longitud i els angles corresponents mesuren el mateix.

5. APLICACIÓ A DOS PROBLEMES DE GEOMETRIA URBANA

La geometria Taxicab pot ser més adient que l'euclidiana per a l'estudi de certes situacions dins la geometria urbana. Com a exemple, analitzarem dos problemes clàssics.

El primer consisteix en, donats tres punts, trobar quin és el lloc on la suma de les distàncies des d'aquest lloc als punts és mínima. Això seria útil a l'hora de col·locar un equipament de la manera més eficient possible. Per exemple, si hi ha tres botigues d'una mateixa cadena, seria el punt on posaríem el magatzem de distribució dels productes de les tres botigues.

El segon consisteix en dividir una regió segons les zones més properes a uns certs punts. Per exemple, si hi ha tres parcs de bombers en una regió i hi ha un incendi, permetria saber quin dels tres parcs s'hauria d'encarregar d'apagar-lo.

5.1 EL PUNT DE FERMAT

En una carta, Pierre de Fermat (1601 – 1665) va proposar un problema com a repte a E. Torricelli (1608 – 1647), un deixeble de Galileu: trobar el punt tal que la suma de les seves distàncies als vèrtexs d'un triangle fos mínima.

Hi ha moltes demostracions d'aquest problema. Torricelli va demostrar-lo de diferents formes, així com altres matemàtics (per exemple, Viviani o Cavalieri, deixebles també de Galileu). El punt P que s'obté com a solució s'anomena Punt de Fermat o Punt de Torricelli.

Es un problema clàssic de geometria euclidiana que, tanmateix, té una solució força complexa. Veurem que en el cas de la geometria Taxicab no és així.

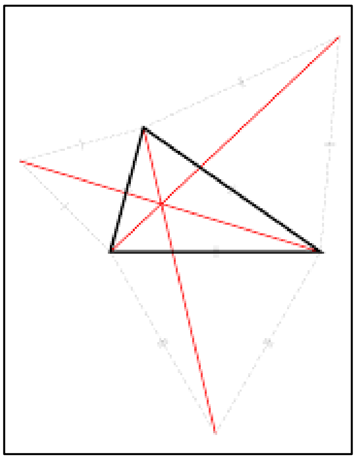


Figura 43. Punt de Fermat
[Font: Viquipèdia]

Observem la figura 44. Donat un triangle qualsevol tracem per cada vèrtex les paral·leles als eixos de coordenades. Sempre trobarem dos d'aquestes rectes que intersequen dins del triangle o, en els cas extrem, en un vèrtex. Sorprenentment, aquest és el punt de Fermat en la geometria Taxicab!

La demostració és molt intuïtiva. Si ens situem en aquest punt i fem un desplaçament vertical d'una unitat, ens allunyem una unitat de dos vèrtexs i ens acostem una en un. Per tant, en el còmput global la suma de distàncies s'incrementa una unitat. El mateix passa pel cas horitzontal. Concloem doncs, que un moviment en qualsevol direcció incrementarà la suma de distàncies als vèrtexs, per la qual cosa el punt P és el que fa mínima aquesta suma.

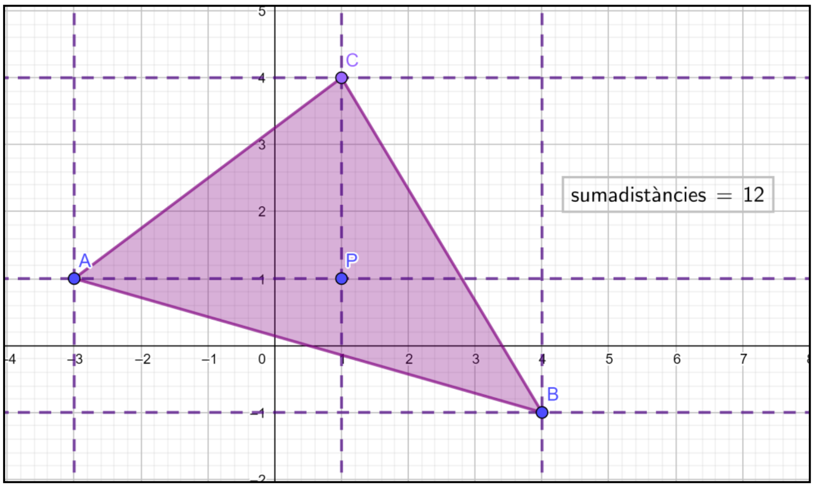


Figura 44. Punt de Fermat en la geometria Taxicab (applet 16) *[Font: pròpia]*

Podem aplicar la construcció anterior al següent cas. Considerem els tres CAP de l'eixample de Barcelona: CAP Casanova, CAP Roger de Flor i Cap Passeig de Sant Joan (punts verds de la figura 45), i suposem que volguéssim situar un magatzem d'equipament mèdic de la manera més eficient possible. La construcció anterior ens permet saber que l'hauríem de situar en el punt P (de color groc a la figura 45).

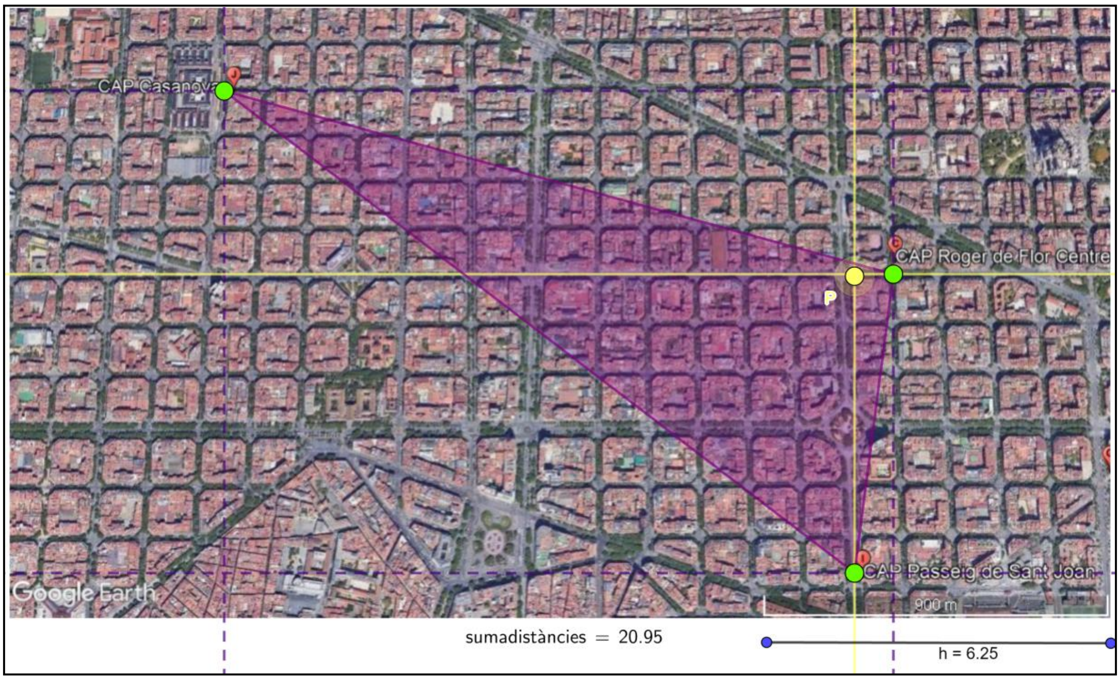


Figura 45. Punt de Fermat Taxicab de tres CAP de l'eixample *[Font: pròpia]*

Observem que l'escala de 900 metres correspon a un segment de 6,25 u. Per tant, la suma mínima de distàncies seria $\frac{900}{6,25} \times 20,95 = 3{,}352\ m$, o sigui, 3,4 km. El punt P estaria situat a uns 100 metres del CAP de Roger de Flor, potser contradient el que ens diu la intuïció.

5.2 DIAGRAMES DE VORONOI

Gueorgui Voronoi (1868 – 1908) va ser un matemàtic rus conegut per les denominades regions de Voronoi. Aquestes són unes construccions geomètriques que permeten configurar una partició del pla associada a *n* punts, de manera que a cada punt se li assigna una regió formada per tots els punts que són més propers a ell que als altres.

La manera de construir un diagrama de Voronoi és unint els punts entre sí i traçant les mediatrius dels segments de la unió. Les interseccions d'aquestes mediatrius determinen una sèrie de polígons al voltant dels punts de manera que engloben les zones més properes.

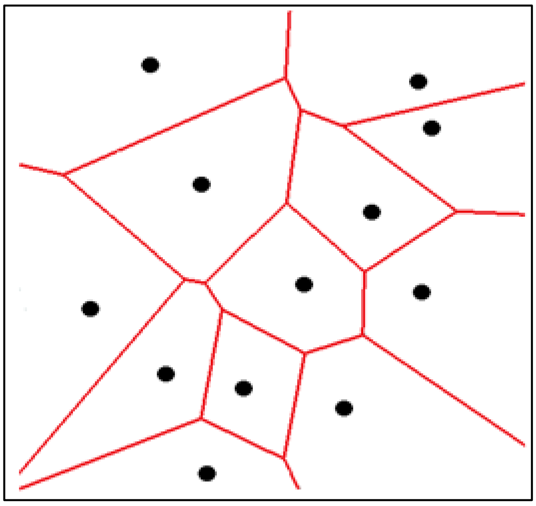


Figura 46. Diagrama de Voronoi
[Font: Viquipèdia]

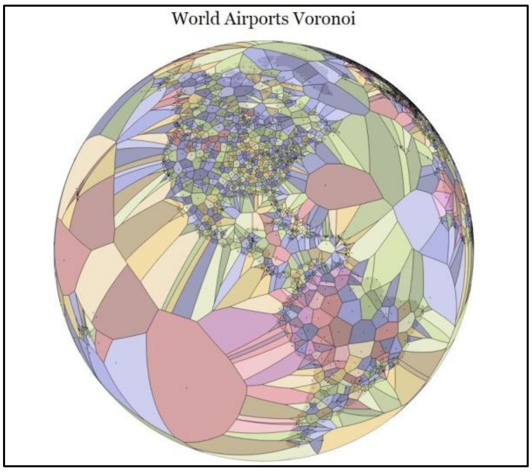


Figura 47. Diagrama de Voronoi d'aeroports
[Font: jasondavies.com]

Actualment, els diagrames de Voronoi tenen infinitat d'aplicacions en diferents camps d'estudi: gràfics per computadora, epidemiologia, geofísica, meteorologia... Per exemple a la figura 47 podem veure un diagrama de Voronoi que ens mostra quin aeroport és el més proper a cada regió del món.

Moltes d'aquestes aplicacions es dissenyen fent servir la mètrica euclidiana, però com hem vist en aquest treball, en alguns casos pot ser més adient l'ús d'altres mètriques com ara la de Manhattan.

Per a construir el diagrama de Voronoi (per exemple de tres punts) amb la mètrica de Manhattan, el que hem de fer és traçar les mediatrius de cada parella de punts, ja que les mediatrius parteixen el pla segons les zones que es troben més properes als punts donats. Un cop les mediatrius estan fetes, no considerem la part que entra en la zona d'influència dels altres punts de manera que obtindrem tres regions.

A la pràctica ho he fet amb l'eina *polígon* ja que si ho intentava automatitzar amb l'eina *color dinàmic,* el càlcul de la figura alentia molt el procés. El resultat el podem veure a la figura 48.

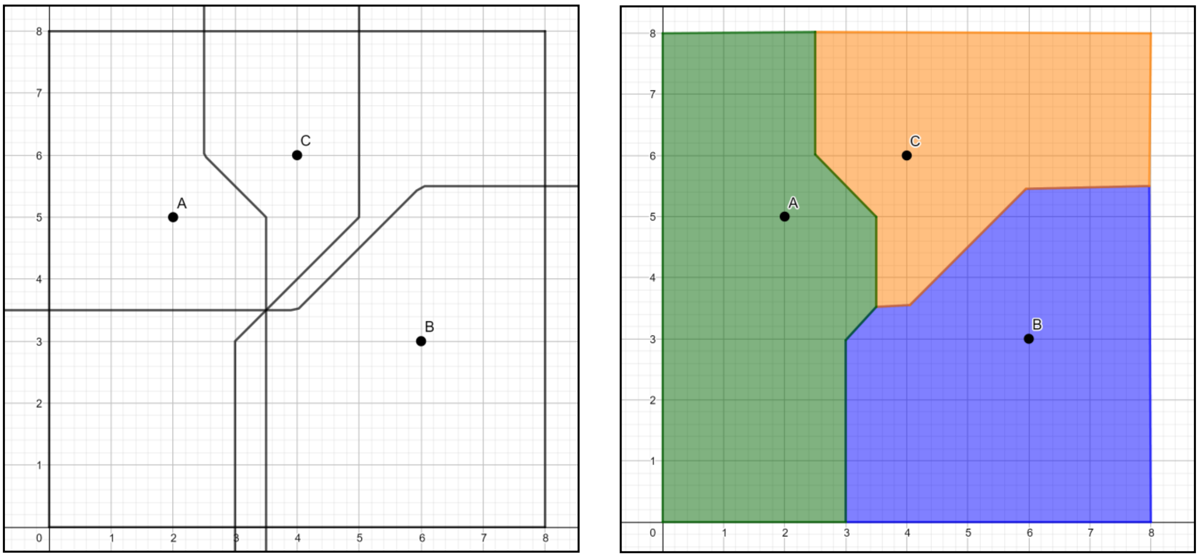


Figura 48. Diagrama de Voronoi en la geometria Taxicab (applet 17) *[Font: pròpia]*

Finalment considerem un exemple pràctic amb els tres CAP de l'apartat anterior: el CAP Casanova, el CAP Roger de Flor i el Cap Passeig de Sant Joan. Ara es tractaria de buscar quin CAP queda més a la vora de qualsevol punt de l'eixample i dividir la regió en tres zones d'influència.

El resultat el podem veure a la figura 49. El punt X situat a la confluència de la Gran Via de les Corts Catalanes amb la Rambla de Catalunya tindria els tres CAP a la mateixa distància Taxicab (en canvi, amb la mètrica euclidiana, tindria més a la vora el CAP Passeig de Sant Joan).

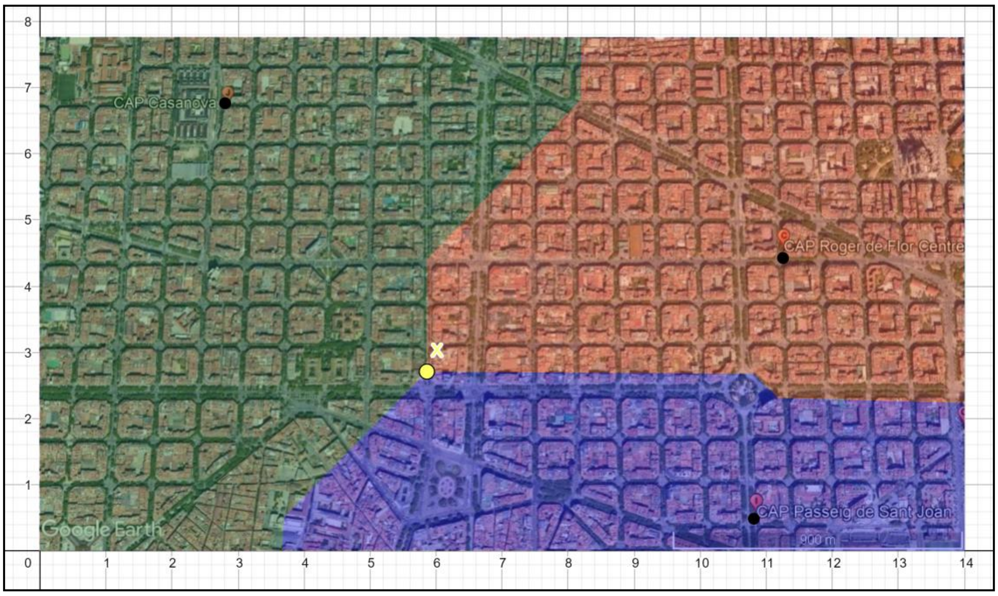


Figura 49. Diagrama de Voronoi Taxicab de tres CAP de l'eixample *[Font: pròpia]*

6. GENERALITZACIONS DE LA MÈTRICA DE MANHATTAN

Finalment, en aquest últim apartat estudiarem algunes generalitzacions que es poden fer de la mètrica de Manhattan. La primera correspon al cas tridimensional (també es podria fer per *n* dimensions, tot i que la intuïció geomètrica desapareix). La segona és el cas en què ens moguéssim per l'enreixat Taxicab afegint-ne moviments per línies amb un angle 45º, és a dir, que seguíssim els moviments de les dames xineses. Finalment, estudiem la generalització per una graella amb angles de 60º i tota una família de mètriques que generalitzen la mètrica de Manhattan per enreixats triangulars de qualsevol angle.

6.1 MÈTRICA DE MANHATTAN 3D

6.1.1 DEFINICIÓ I INTERPRETACIÓ

La mètrica de Manhattan és molt fàcil de generalitzar a tres dimensions. La definició seria la següent:

$$d(P,Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|$$

a on $P(p_1, p_2, p_3)$ i $Q(q_1, q_2, q_3)$ són punts de l'espai $\mathbb{R}^3$.

De la mateixa manera que la geometria Taxicab s'interpretava mitjançant el recorregut d'un taxi pels carrers de Manhattan, en la generalització a 3D, es pot interpretar com el recorregut que faria un dron entre els gratacels de Manhattan. A més a més de desplaçar-se a través del pla horitzontal també es podria moure en l'eix vertical.

També hi ha una altra possible interpretació a partir de la de la mètrica de Hamming. Com vàrem veure a l'apartat 2.2.2, la mètrica de Manhattan generalitzada a 3 dimensions es correspon a la distància de Hamming en el cas de cadenes de tres bits.

6.1.2 CAMINS POSSIBLES

En la geometria Taxicab 3D, el camí més curt entre dos punts tampoc no és únic. Podem veure–ho a la figura 50 amb dos exemples de camins de longitud mínima (9 unitats) dins d'una graella 2x3x4 amb quadrats de costat 1. Com en el cas anterior, s'han generat amb un applet dissenyat per buscar camins aleatoris en tres dimensions (veure applet 18).

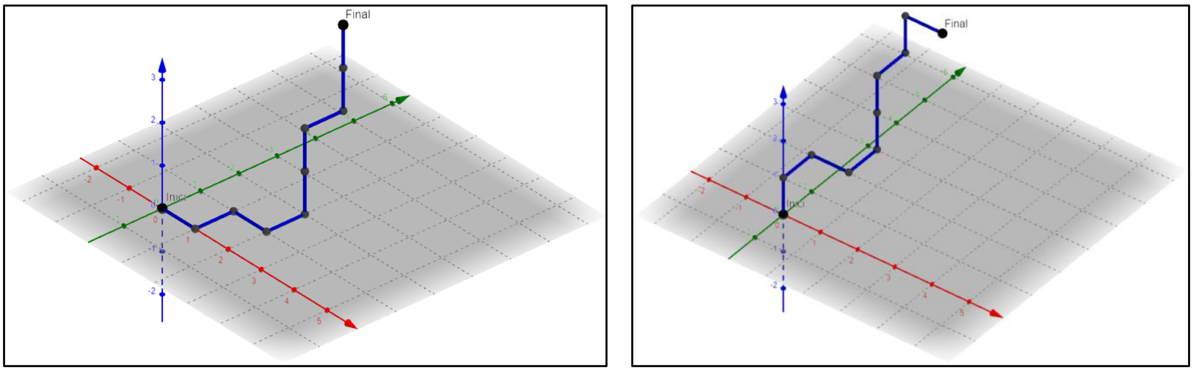


Figura 50. Generador de camins aleatoris en 3D (applet 18) *[Font: pròpia]*

De manera anàloga al cas bidimensional, donada una quadrícula de costat fix, podem trobar quants camins hi ha de longitud mínima entre dos punts en $\mathbb{R}^3$.

En el cas general *m* x *n* x *p*, els possibles camins són les diferents maneres d'ordenar *m* moviments cap a l'eix X, *n* moviments cap a l'eix Y i *p* moviments cap a l'eix Z, és a dir, les permutacions amb repetició de *m+n+p* elements amb *m, n* i *p* repeticions:

Camins de distància mínima en una quadrícula m x *n x p:* $PR_{m,n,p}^{m+n+p} = \dfrac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$

6.1.3 ESFERA

Anàlogament als apartats anteriors, entendrem una esfera com el lloc geomètric dels punts de $\mathbb{R}^3$ que equidisten d'un punt fix anomenat centre. Aquesta distància fixa és el radi.

A la geometria Taxicab 3D, l'equació de l'esfera de centre *C(a,b,c)* i radi *r* vindrà donada per la següent expressió:

$$d(P,C) = |x-a| + |y-b| + |z-c| = r$$

Amb l'ajuda de GeoGebra, podem representar la superfície anterior i veure quina forma adopta. Com hem vist anteriorment, la forma de l'esfera dependrà de la distància que estem considerant i, en el cas de la mètrica de Manhattan 3D, adquireix forma d'octàedre, com podem observar a la figura 51.

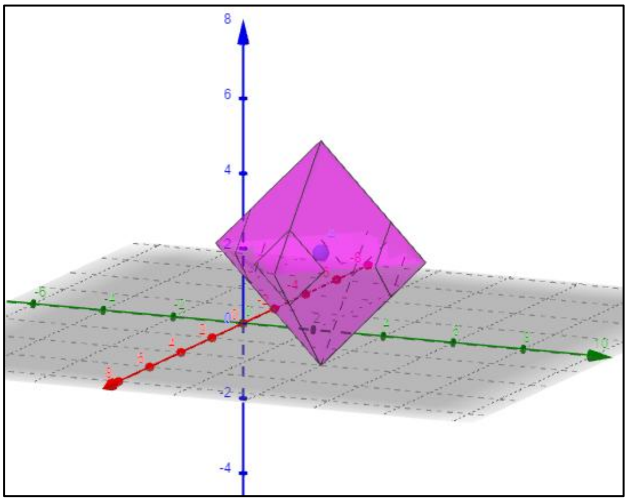


Figura 51. Esfera a Manhattan 3D (applet 19) *[Font: pròpia]*

6.2 MÈTRICA DE MANHATTAN TRIANGULAR O GEOMETRIA DE LES DAMES XINESES

6.2.1 DEFINICIÓ I INTERPRETACIÓ

Al final del seu llibre, Krause planteja la possibilitat d'estudiar noves mètriques similars a la de Manhattan però sobre graelles triangulars. Més endavant es varen definir i estudiar. Concretament, es va investigar la distància que permet moviments diagonals a més a més dels horitzontals i verticals. Se la va anomenar mètrica de les dames xineses.

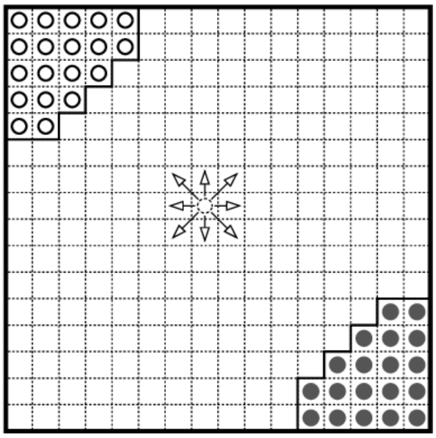


Figura 52. Dames xineses *[Font: semanticescolar.org]*

En el joc de les dames xineses les peces es poden moure verticalment (nord i sud), horitzontalment (est i oest), i diagonalment (nord-est, nord-oest, sud-est i sud-oest), i d'aquí el nom de la mètrica.

La definició de la mètrica de les dames xineses no és molt òbvia d'entrada:

$$d(P,Q) = \text{màx}\,(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right) \text{mín}\,(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$$

El camí més curt amb la mètrica de les dames xineses correspon a avançar per la diagonal fins arribar a la mateixa alçada del punt on volem acabar i després desplaçar-nos horitzontal o verticalment. Examinant-ho amb un cas particular com el de la figura 53, veiem que el *màx* $(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|) = 5$ i correspon al costat llarg de la quadrícula, mentre que el *mín* $(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|) = 3$ i correspon al costat curt. Per tant, la distància entre *P* i *Q* en la mètrica de les dames xineses seria $5 + (\sqrt{2} - 1)\cdot 3 = 2 + 3\sqrt{2}$, que equival a avançar 3 diagonals de longitud $\sqrt{2}$ i dos unitats horitzontals.

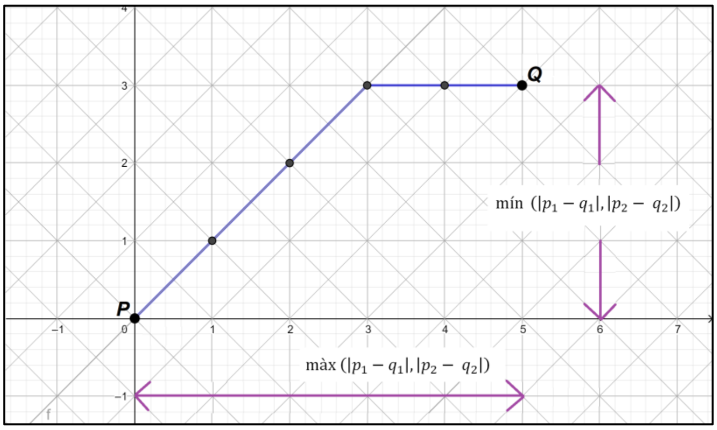


Figura 53. Mètrica de les dames xineses *[Font: pròpia]*

6.2.2 CAMINS POSSIBLES

De la mateixa manera que en la geometria Taxicab, el camí més curt entre dos punts amb la mètrica de les dames xineses no és únic. Podem veure–ho a la figura 54 amb dos exemples de camins de longitud mínima ($3 + 3\sqrt{2}$) unitats dins d'una graella 6 x 3 amb quadrats de costat 1. S'han generat amb un applet dissenyat per buscar camins aleatoris com en apartats anteriors.

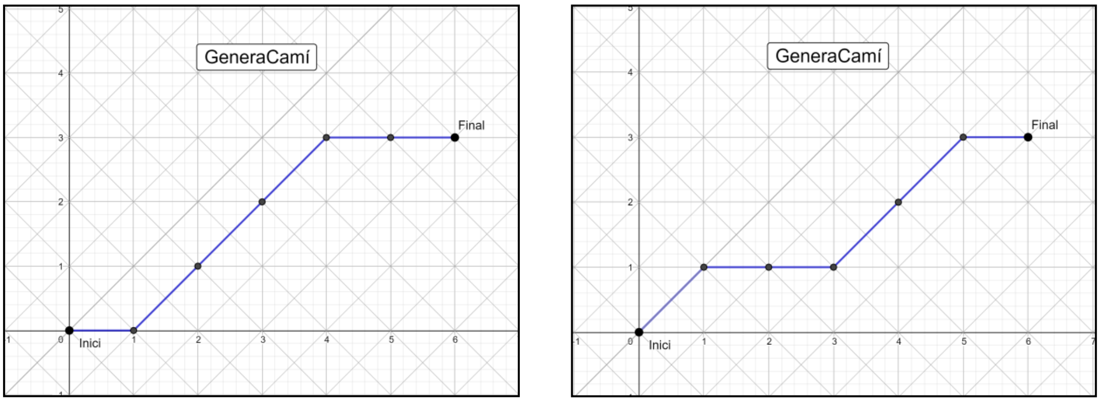


Figura 54. Generador de camins aleatoris en la mètrica de les dames xineses (applet 20)
[Font: pròpia]

Els camins de distància mínima són els que combinen 3 moviments horitzontals i 3 diagonals, és a dir, les permutacions amb repetició de 6 elements amb 3 i 3 repeticions: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

En el cas general d'una graella de *m* unitats horitzontals i *n* unitats verticals (amb $m > n$) tindríem les permutacions amb repetició de *n* elements (moviments verticals o diagonals) i $m - n$ (moviments horitzontals):

Camins de distància mínima en una quadrícula m x *n:* $PR^{m}_{n,m-n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$.

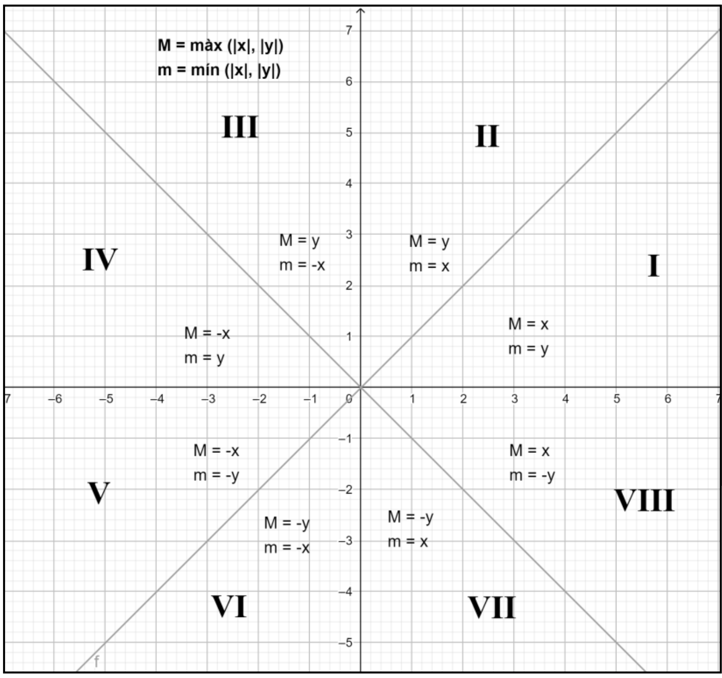
En el cas en què $m < n$, l'únic que hem de fer és canviar *m* per *n* a la fórmula. Finalment, quan $m = n$ només hi ha un camí mínim possible, que és la diagonal.

6.2.3 CIRCUMFERÈNCIA

Procedirem com en els apartats anteriors. En aquest cas, l'expressió de la mètrica complica la construcció. Una circumferència de centre *C(a,b)* i radi *r* amb la mètrica de les dames xineses vindrà donada per la següent expressió:

$$d(P,C) = \text{màx}\,(|x-a|,|y-b|) + \left(\sqrt{2}-1\right)\text{mín}\,(|x-a|,|y-b|) = r$$

Per simplificar, podem començar amb el centre a l'origen de coordenades i al final ja afegirem la translació. Haurem de considerar 8 regions segons els valors màxims o mínims de |*x*| o |*y*|, i en cada regió tindrem una expressió diferent per a la circumferència (veure figura 55).



Regió	*d(P,C) = r*
I	$x + \left(\sqrt{2}-1\right)y = r$
II	$y + \left(\sqrt{2}-1\right)x = r$
III	$y - \left(\sqrt{2}-1\right)x = r$
IV	$-x + \left(\sqrt{2}-1\right)y = r$
V	$-x - \left(\sqrt{2}-1\right)y = r$
VI	$-y - \left(\sqrt{2}-1\right)x = r$
VII	$-y + \left(\sqrt{2}-1\right)x = r$
VIII	$x - \left(\sqrt{2}-1\right)y = r$

Figura 55. Expressió de la circumferència a diferents regions amb la mètrica de les dames xineses *[Font: pròpia]*

Una vegada entrades les expressions de les rectes a GeoGebra, fetes les interseccions i definit el polígon, es fa la translació del centre (*x → x – x(C), y → y – y(C))* per aconseguir la construcció en el cas general i poder moure el centre i el radi. Afegim també la fórmula de la distància del centre a un punt mòbil sobre la circumferència per comprovar. Acabada la construcció, veiem que la circumferència amb la mètrica de les dames xineses és un octàgon (figura 56).

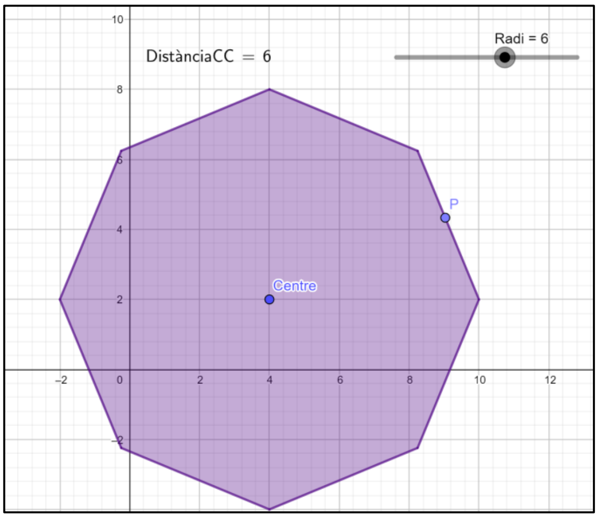


Figura 56. Circumferència amb la mètrica de les dames xineses (applet 21) *[Font: pròpia]*

6.3 ALTRES GENERALITZACIONS

Prenent com a exemple la geometria de les dames xineses, es poden definir altres geometries triangulars. Per exemple, ens podríem moure per una graella triangular de 60º, el que podríem anomenar geometria del triangle equilàter. La fórmula de la circumferència en aquest cas seria la següent:

$$d(P, C) = \text{màx}\,(|x - a|, |y - b|) + (2 - \sqrt{3})\,\text{mín}\,(|x - a|, |y - b|)$$

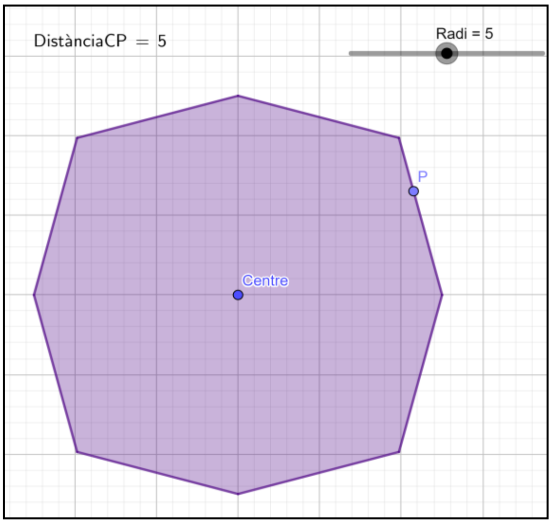


Figura 57. Circumferència amb la geometria del triangle equilàter (applet 22) *[Font: pròpia]*

A la figura 57 podem veure la circumferència amb la geometria del triangle equilàter. Veiem que la circumferència és un octàgon també, però de forma més quadrada que l'anterior.

Però aquí no s'acaben les generalitzacions, existeixen d'altres que constitueixen tot un món. De fet, es pot definir per a cada valor de α una distància (anomenada alfa-distància) de la següent forma:

$$d(P, Q) = \text{màx}\,(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,\text{mín}\,(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$$

En el cas α = 0º tenim com a cas particular la mètrica de Manhattan, en el cas α = 45º tenim la mètrica de les dames xineses i en el cas α = 60º, la geometria del triangle equilàter. Per als altres valors de α tenim la mètrica de Manhattan generalitzada a moviments per un enreixat d'angle qualsevol. A la figura 58, observem que les circumferències corresponents són octàgons, evolucionant des del quadrat Taxicab (que correspondria a α = 0º) i arrodonint-se a mesura que augmenta l'angle fins a ser pràcticament un quadrat quan α = 89º (el cas α = 90º no està ben definit).

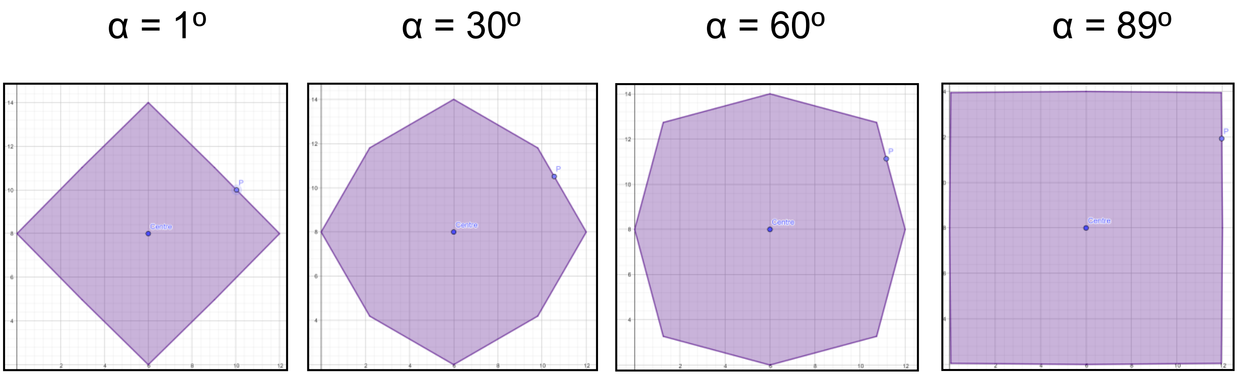


Figura 58. Circumferències amb alfa-distància (applet 23) *[Font: pròpia]*

7. CONCLUSIONS

Aquest treball sempre el recordaré associat al confinament. I és que una de les poques coses bones que va tenir la COVID-19 va ser que vaig poder dedicar-hi molt de temps. Ha estat un treball de moltes hores, tant per l'estudi i comprensió de molts conceptes avançats com per l'aprenentatge del programari GeoGebra. El disseny de les 23 construccions dinàmiques que s'adjunten i moltes altres d'estàtiques suposen moltes estones de confinament i de l'estiu, però la sensació que tens quan programes un applet i pots visualitzar tan clarament conceptes teòrics és molt gratificant.

Pel que fa als objectius que es plantejaven, per una banda, he pogut constatar com la geometria, que s'inicia com una disciplina pràctica per mesurar, evoluciona fins al punt de ser una disciplina completament abstracta. Això comporta l'aparició de noves geometries com la Taxicab. Aquesta geometria, des del punt de vista axiomàtic es diferencia molt poc de l'habitual euclidiana, i en canvi és molt més adient per aplicar en situacions de geometria urbana, per exemple.

D'altra banda, he necessitat molt d'esforç i ajuda per entendre certs aspectes teòrics, com ara la part de la comparació axiomàtica. Sense anar més lluny, el llibre bàsic d'en Krause sobre la geometria Taxicab està enfocat de manera molt original, ja que es planteja tot amb problemes, alguns resolts i d'altres no, i per això l'estudi es fa molt més lent (a part d'estar en anglès).

Ha costat també decidir què estudiar i què no, ja que hi ha poca bibliografia i cada article toca temes diversos. Però això fa també que el treball sigui original i que hagi après molt. El fil conductor d'aquesta recerca ha estat, bàsicament, comparar els objectes típics de la geometria euclidiana amb la Taxicab. Hem pogut veure que en aquesta nova geometria la distància més curta ja no és la línea recta i que, a més a més, no hi ha només un únic camí més curt. Les circumferències passen a ser quadrats, les el·lipses són hexàgons o octàgons, poden haver triangles equilàters de costats iguals però diferents entre ells, el nombre π valdria 4... és una nova geometria on la intuïció ens enganya constantment!

El programa GeoGebra mereix una menció apart. Es tracta d'un programari lliure molt útil i potent que m'ha permès fer moltes construccions, comprovar demostracions i buscar exemples de manera molt gràfica i elegant. El fet d'il·lustrar tots els conceptes amb GeoGebra i fer-lo servir per resoldre o visualitzar alguns problemes, m'ha fet comprendre pel meu compte molts aspectes que amb paper i llapis m'hagués estat potser impossible. Per exemple, els casos "degenerats" es veuen molt bé amb GeoGebra. Només amb les equacions crec que m'hagués estat molt difícil de trobar-los (tot i que per demostrar-los amb rigor s'hauria de fer algebraicament).

Tanmateix, també he trobat algunes limitacions en el programa: les fórmules complicades alenteixen molt el càlcul (per exemple amb els diagrames de Voronoi), dona errors amb funcions inverses (cas de la paràbola vertical), no és fàcil acolorir regions obertes, és molt farragós dissenyar bucles (GeoGebra permet inserir codi Java, però encara és més complicat) i alguns applets costen molt d'implementar.

Com a aplicació pràctica d'aquesta geometria, he trobat molt interessant l'estudi del punt de Fermat i dels diagrames de Voronoi. Mostren clarament que dins d'una ciutat amb els carrers quadriculats (com Barcelona o Manhattan) la geometria Taxicab és la que s'ha de considerar, ja que no ens movem en línea recta travessant edificis, sinó seguint els carrers. Per exemple, si hi hagués un incendi, el parc de bombers situat més a la vora en línea recta no tindria perquè ser l'idoni si tenim en compte que s'ha de transitar pels carrers. O la situació òptima d'un magatzem respecte a tres botigues podria no ser l'esperada amb la distància euclidiana habitual. Seria més realista i eficaç si mesuréssim les distàncies a la ciutat mitjançant la mètrica de Manhattan.

Val a dir que a mesura que anava acabant el treball, quan em vaig haver d'enfrontar a les generalitzacions (per exemple amb les alfa-distàncies) les definicions matemàtiques i la seva implementació a GeoGebra es complicaven bastant. Però d'altra banda, ho vaig trobar molt interessant i donava peu a seguir fent recerca sobre els diferents elements geomètrics amb aquestes generalitzacions de la mètrica de Manhattan.

Finalment, m'agradaria acabar ressaltant la quantitat de temes i personatges matemàtics diferents que han sorgit al llarg d'aquest treball, demostrant que la geometria és una disciplina omnipresent. Com deia Kepler *"on hi ha matèria, hi ha geometria"*, tot i que Hilbert potser no pensaria el mateix!

8. BIBLIOGRAFIA

LLIBRES

GARDNER, M. (1991). *The last recreation.* New York: Springer-Verlag.

GÓMEZ, JOAN (2010). *Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclideas.* Villatuerta: RBA.

HORMIGÓN, M. (1991). *Las matemáticas del siglo XIX.* Madrid: Ediciones Akal.

KRAUSE, EUGENE F. (1986). *Taxicab Geometry. An Adventure in Non-Euclidean Geometry.* New York: Dover Publications.

MILLMAN, R.S. and PARKER, G.D. (1981). *Geometry. A Metric Approach with Models. 2a edició.* New York: Springer-Verlag.

RÍBNIKOV, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* Moscú: Editoral Mir.

ARTICLES

DIVJAK, B. (2000). "Notes on Taxicab Geometry". *KoG,* núm.5 vol.5: 5 – 9

GÓMEZ, J.V. (2019). "Euclides no vivió en Manhattan: Geometria Urbana". *Modelling in Science Education And Learning,* vol. 12: 59 – 69.

PETROVIC, M. et al (2014). "Geometry of some taxicab curves". *4th International Conference for Geometry and Engineering Graphics "moNGeometrija 2014",* vol. 2: 53 – 64.

REVENTÓS, A. (2004). "Un nou món creat del no-res. Un món on es pot quadrar el cercle!". *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques,* núm.2 vol. 19: 47 – 83.

SABATINI, M. (2007). "La geometría del taxi". *MATerials MATemàtics,* vol. 2007: 1 – 13.

TIAN S. (2005). "Alpha-distance. A generalization of chinese checker distance and taxicab distance". *Missouri Journal of Mathematical Sciences,* núm 1, vol. 17: 35 – 40.

ÇOLAKOGLU, H.B and KAYA, R. (2008). "On the regular polygons in the Chinese checkers plane". *Applied Sciences,* vol. 10: 29 – 37.

WEBGRAFIA

COL·LABORADORS DE VIQUIPÈDIA (2020). *Absolute geometry [en línia]. [Consultat: 19 d'abril 2020]* Disponible a Internet: *https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_geometry*

COL·LABORADORS DE VIQUIPÈDIA (2020). *Axiomas de Hilbert [en línia]. [Consultat: 19 d'abril 2020]* Disponible a Internet: *https://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Hilbert*

COL·LABORADORS DE VIQUIPÈDIA (2020). *Programa de Erlangen [en línia]. [Consultat: 22 d'abril 2020]* Disponible a Internet: *https://es.wikipedia.org/wiki/Programa_de_Erlangen*

COL·LABORADORS DE VIQUIPÈDIA (2020). *Geometria [en línia]. [Consultat: 24 d'abril 2020]* Disponible a Internet: *https://ca.wikipedia.org/wiki/Geometria*

COL·LABORADORS DE VIQUIPÈDIA (2020). *Hamming distance [en línia]. [Consultat: 30 de maig 2020]* Disponible a Internet: *https://en.wikipedia.org/wiki/Hamming_distance*

COL·LABORADORS DE VIQUIPÈDIA (2020). *Metric space [en línia]. [Consultat: 30 de maig 2020]* Disponible a Internet: *https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space*

COOPER, M (2005). *Conviction With an Angle Is Upheld by Court of Appeals [en línia]. [Consultat: 28 de desembre 2019]* Disponible a Internet: *https://www.nytimes.com/2005/11/23/nyregion/conviction-with-an-angle-is-upheld-by-court-of-appeals.html*

CREATIVITY IN MATHEMATICS *(2017). What is... Taxicab Geometry? [en línia]. [Consultat: 5 de juliol 2020]* Disponible a Internet: *https://cre8math.com/2017/02/05/what-is-taxicab-geometry/*

DOSIL, M (2018). *Llocs geomètrics [en lína]. [Consultat: 30 de juny 2020]* Disponible a Internet: *http://mdosil.cat/mates1batcientific/temes/llocsgeometrics/*

FREEMAN, D (2014). *Hex Chess [en línia]. [Consultat: 3 d'agost 2020]* Disponible a Internet: *https://www.slideshare.net/DanFreeman1/hex-chess-42904746*

HERNÁNDEZ, E (2017). *Problemas clásicos de optimización [en lína]. [Consultat: 10 d'agost 2020]*. Disponible a Internet: *http://verso.mat.uam.es/~eugenio.hernandez/17-18-MasterFPS/Analisis-5-4.pdf*

INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE (2020). *Geogebra Manual [en línia]. [Consultat: 28 desembre 2019]* Disponible a Internet: *https://wiki.geogebra.org/ca/P%C3%A0gina_principal*

JANSSEN, C. (2007). *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town [en línia]. [Consultat: 26 de desembre 2019]* Disponible a Internet: *https://math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/JanssenMSMSS07.pdf*

MONTERDE, J. (2001). *Espacios métricos y geometría Riemanniana [en línia]. [Consultat: 15 d'abril 2020]* Disponible a Internet: *https://epdf.pub/espacios-metricos-y-geometria-riemanniania.html*

PINO, E (2013). *Fonaments de la Geometria [en línia]*. *[Consultat: 15 d'abril 2020]* Disponible a Internet: *http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/53964/2/memoria.pdf*

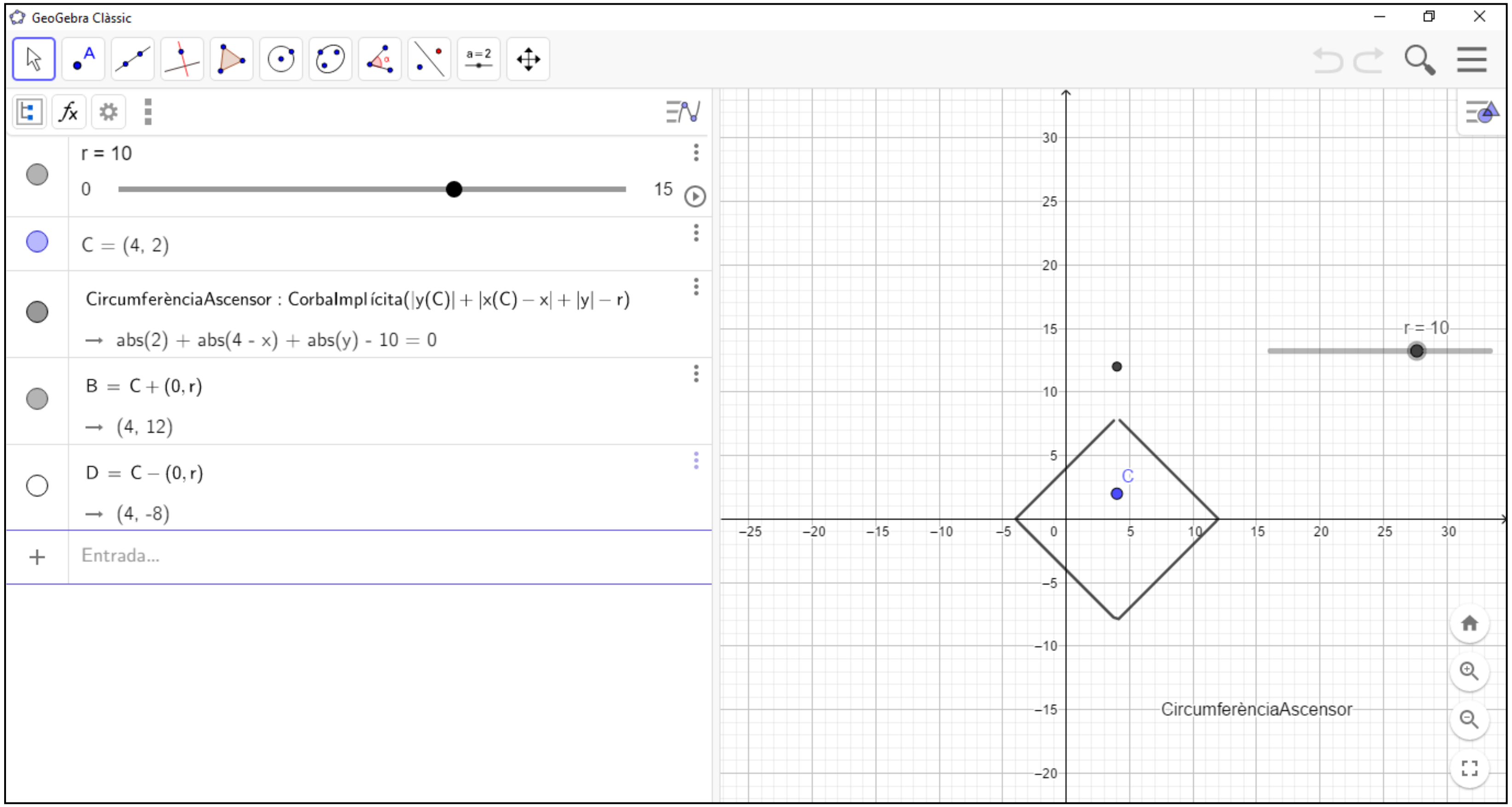
SEXTON, S (2006) *Taxicab Geometry [en línia]. [Consultat: 1 de juny 2020]* Disponible a Internet: *http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa06/Sexton/GeoFinalProject/Taxicab/history.html*

ANNEX. CONSTRUCCIONS DINÀMIQUES AMB GEOGEBRA: ARXIUS GGB I HTML, CAPTURA I PASSOS DE LA CONSTRUCCIÓ

Construcció 1: circumferència amb la mètrica de l'ascensor

1_Circumferència_Ascensor.ggb

1_Circumferència_Ascensor.html

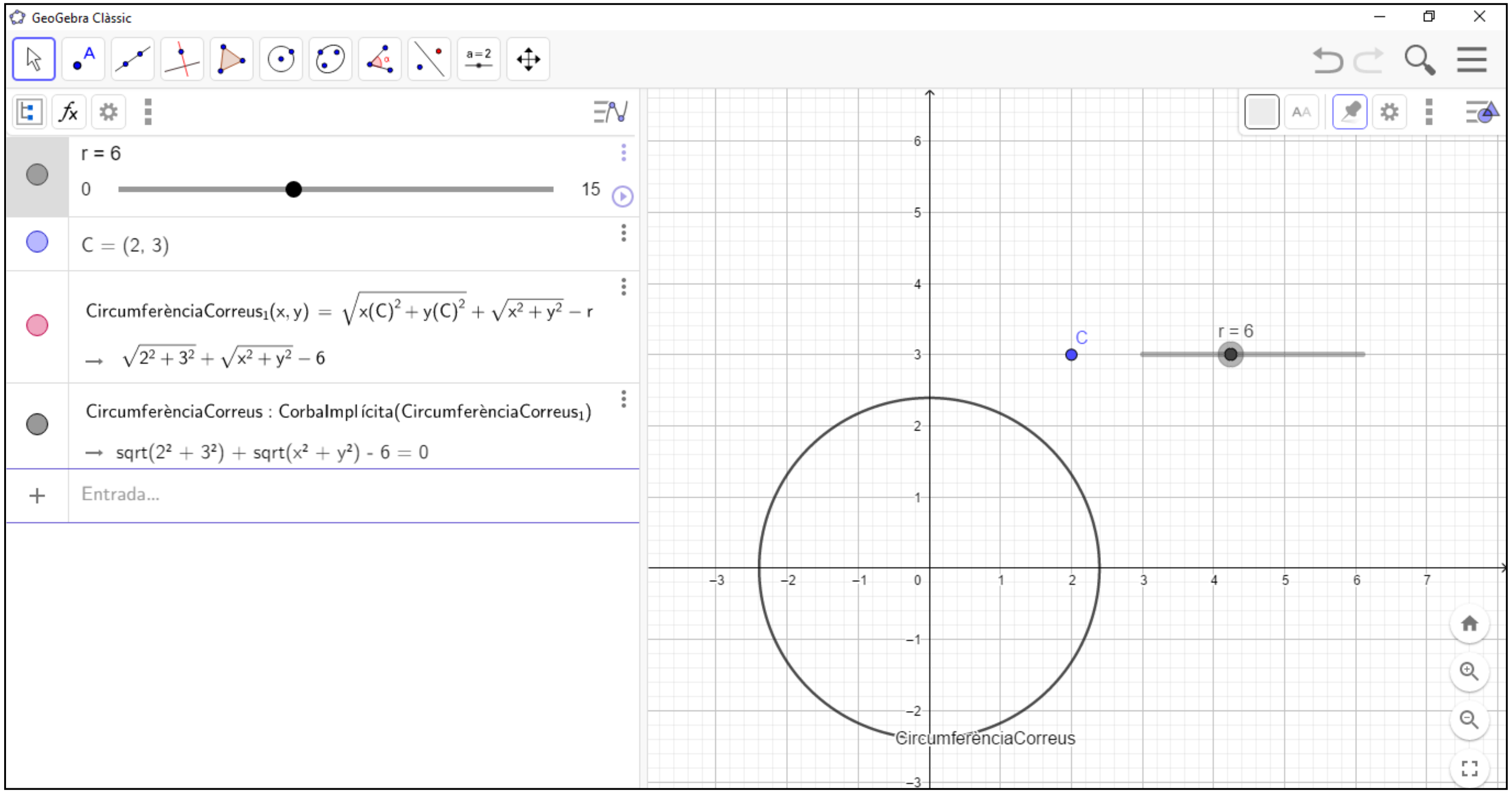


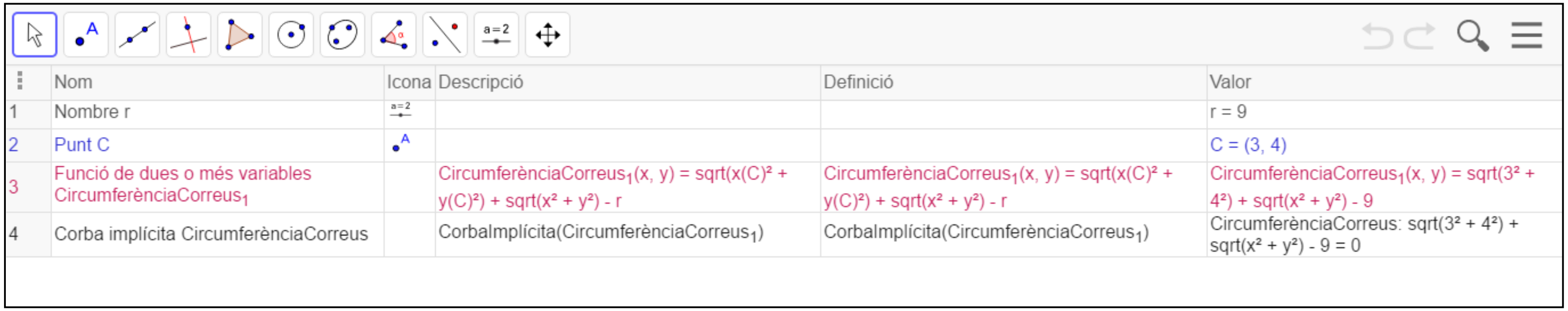
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Nombre r				r = 10
2	Punt C				C = (4, 2)
3	Corba implícita CircumferènciaAscensor		CorbaImplícita(abs(y(C)) + abs(x(C) - x) + abs(y) - r)	CorbaImplícita(abs(y(C)) + abs(x(C) - x) + abs(y) - r)	CircumferènciaAscensor: abs(2) + abs(4 - x) + abs(y) - 10 = 0
4	Punt B		C + (0, r)	C + (0, r)	B = (4, 12)
5	Punt D		C - (0, r)	C - (0, r)	D = (4, -8)

Construcció 2: circumferència amb la mètrica de correus

2_Circumferència_Correus.ggb

2_Circumferència_Correus.html

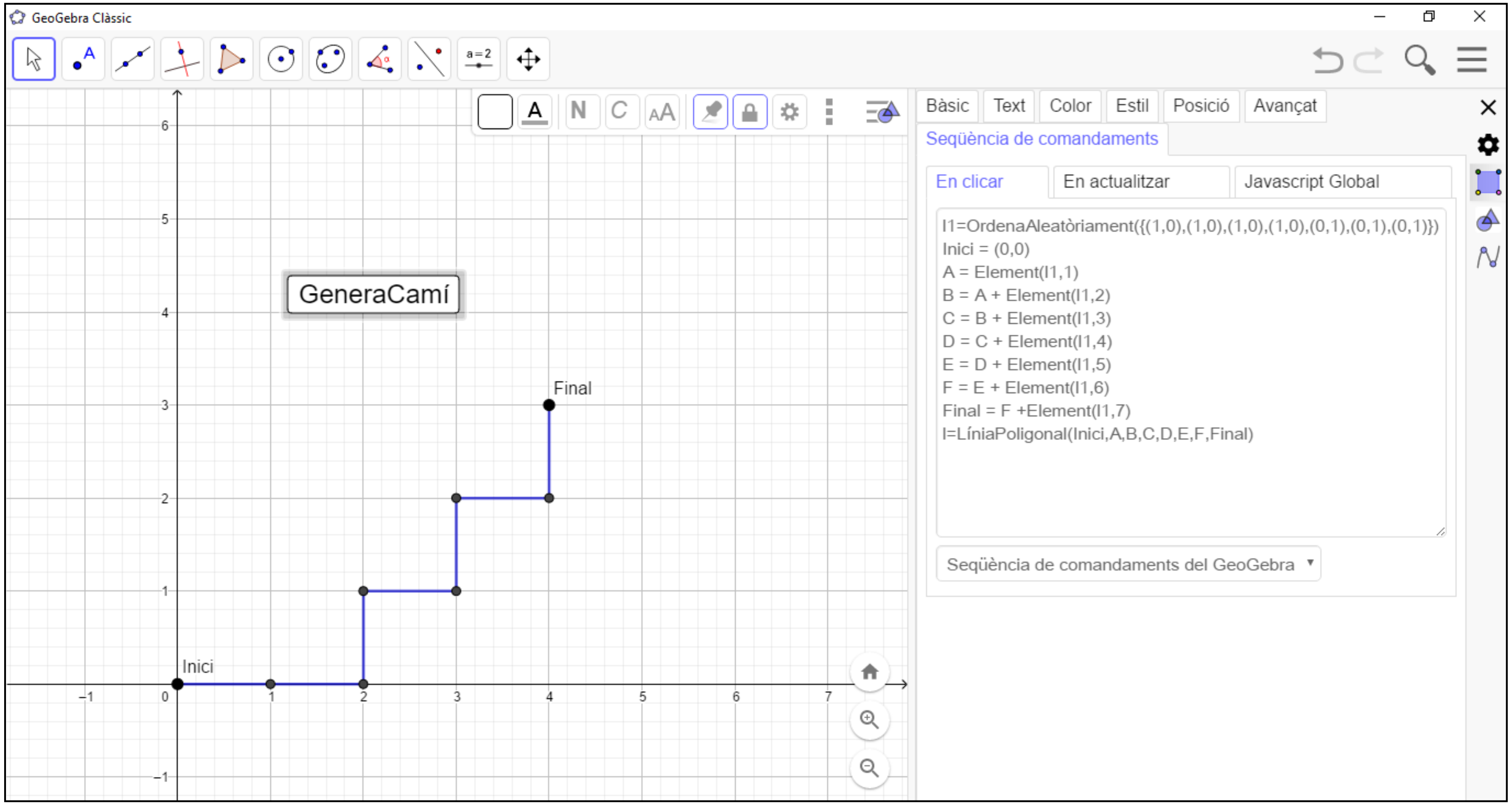




	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Nombre r				r = 9
2	Punt C				C = (3, 4)
3	Funció de dues o més variables CircumferènciaCorreus$_1$		CircumferènciaCorreus$_1$(x, y) = sqrt(x(C)² + y(C)²) + sqrt(x² + y²) - r	CircumferènciaCorreus$_1$(x, y) = sqrt(x(C)² + y(C)²) + sqrt(x² + y²) - r	CircumferènciaCorreus$_1$(x, y) = sqrt(3² + 4²) + sqrt(x² + y²) - 9
4	Corba implícita CircumferènciaCorreus		CorbaImplícita(CircumferènciaCorreus$_1$)	CorbaImplícita(CircumferènciaCorreus$_1$)	CircumferènciaCorreus: sqrt(3² + 4²) + sqrt(x² + y²) - 9 = 0

Construcció 3: generador de camins aleatoris

3_Genera_Camí.ggb   3_Genera_Camí.html

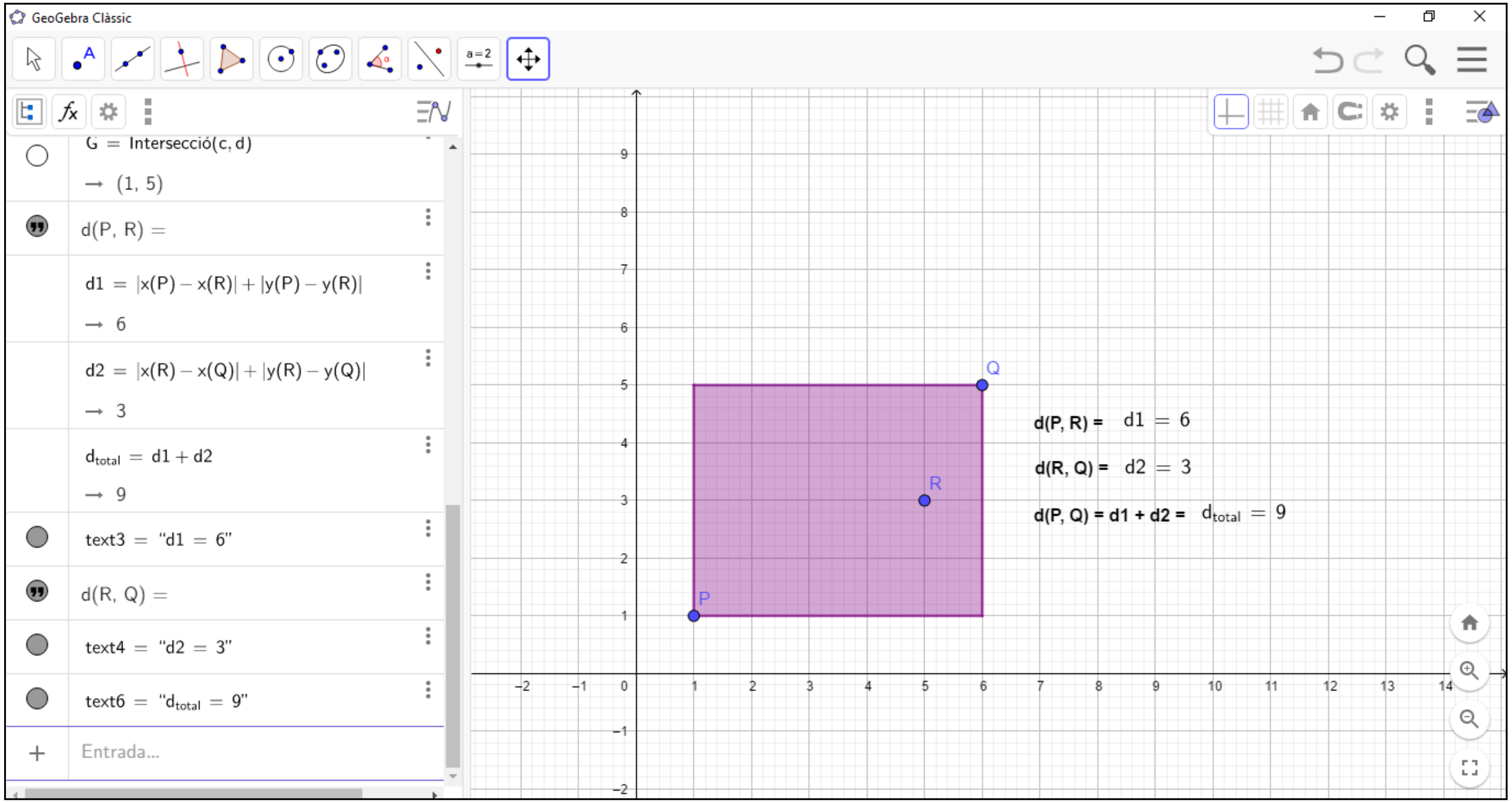


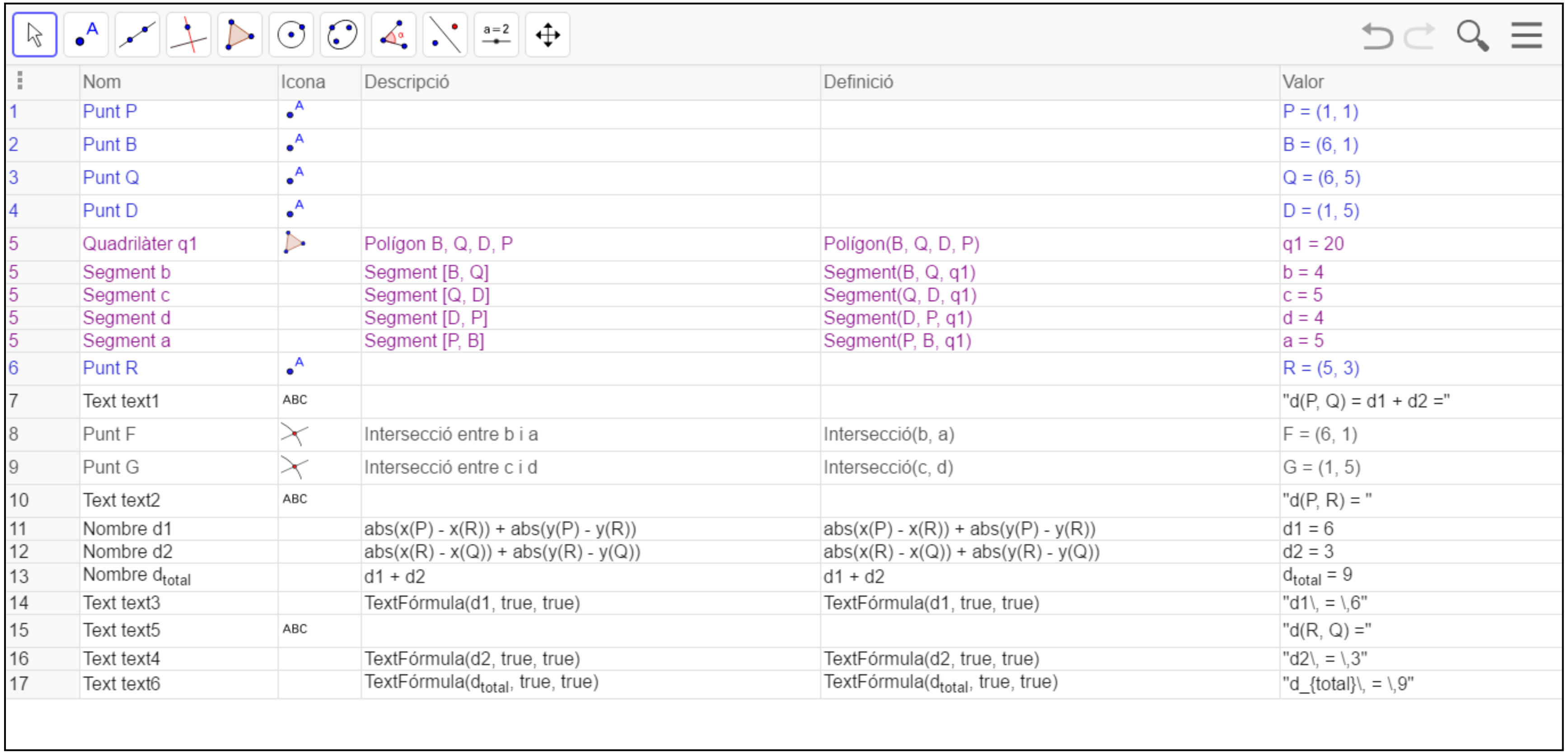
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Llista l1		OrdenaAleatòriament({(1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 1), (0, 1)})	OrdenaAleatòriament({(1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 1), (0, 1)})	l1 = {(0, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 1), (1, 0), (1, 0), (1, 0)}
2	Punt A		Element(l1, 1)	Element(l1, 1)	A = (0, 1)
3	Punt B		A + Element(l1, 2)	A + Element(l1, 2)	B = (1, 1)
4	Punt C		B + Element(l1, 3)	B + Element(l1, 3)	C = (1, 2)
5	Punt D		C + Element(l1, 4)	C + Element(l1, 4)	D = (1, 3)
6	Punt E		D + Element(l1, 5)	D + Element(l1, 5)	E = (2, 3)
7	Punt F		E + Element(l1, 6)	E + Element(l1, 6)	F = (3, 3)
8	Nombre A1	a=2			A1 no definit
9	Botó GeneraCamí	OK			GeneraCamí
10	Punt Inici	A			Inici = (0, 0)
11	Punt Final		F + Element(l1, 7)	F + Element(l1, 7)	Final = (4, 3)
12	Línia poligonal l		Línia poligonal Inici, A, B, C, D, E, F, Final	LíniaPoligonal(Inici, A, B, C, D, E, F, Final)	l = 7

Construcció 4: punts que satisfan d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)

4_SegmentTaxicab.ggb

4_SegmentTaxicab.html



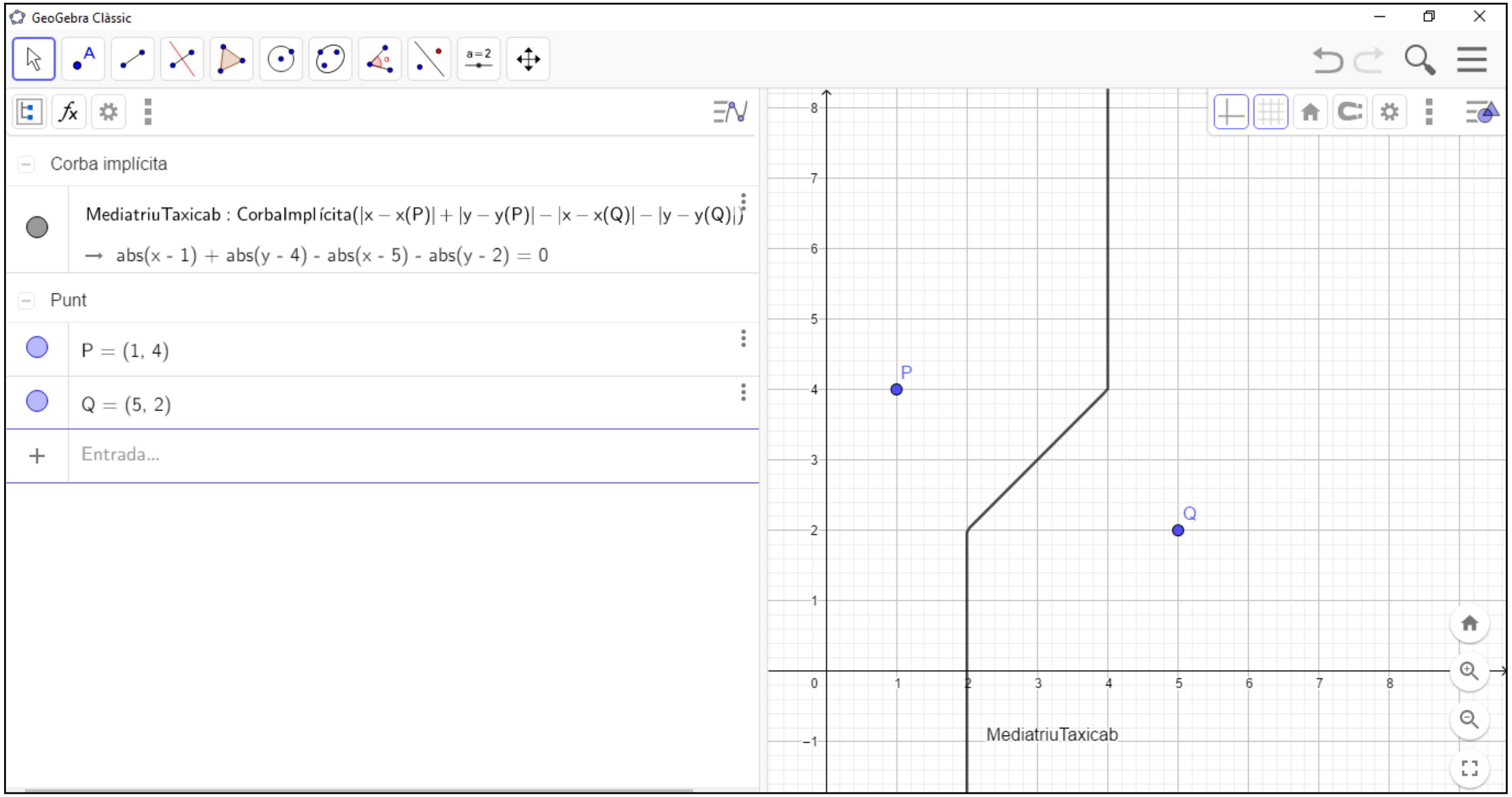


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt P				P = (1, 1)
2	Punt B				B = (6, 1)
3	Punt Q				Q = (6, 5)
4	Punt D				D = (1, 5)
5	Quadrilàter q1		Polígon B, Q, D, P	Polígon(B, Q, D, P)	q1 = 20
5	Segment b		Segment [B, Q]	Segment(B, Q, q1)	b = 4
5	Segment c		Segment [Q, D]	Segment(Q, D, q1)	c = 5
5	Segment d		Segment [D, P]	Segment(D, P, q1)	d = 4
5	Segment a		Segment [P, B]	Segment(P, B, q1)	a = 5
6	Punt R				R = (5, 3)
7	Text text1	ABC			"d(P, Q) = d1 + d2 ="
8	Punt F		Intersecció entre b i a	Intersecció(b, a)	F = (6, 1)
9	Punt G		Intersecció entre c i d	Intersecció(c, d)	G = (1, 5)
10	Text text2	ABC			"d(P, R) = "
11	Nombre d1		abs(x(P) - x(R)) + abs(y(P) - y(R))	abs(x(P) - x(R)) + abs(y(P) - y(R))	d1 = 6
12	Nombre d2		abs(x(R) - x(Q)) + abs(y(R) - y(Q))	abs(x(R) - x(Q)) + abs(y(R) - y(Q))	d2 = 3
13	Nombre d_{total}		d1 + d2	d1 + d2	d_{total} = 9
14	Text text3		TextFórmula(d1, true, true)	TextFórmula(d1, true, true)	"d1\, = \,6"
15	Text text5	ABC			"d(R, Q) ="
16	Text text4		TextFórmula(d2, true, true)	TextFórmula(d2, true, true)	"d2\, = \,3"
17	Text text6		TextFórmula(d_{total}, true, true)	TextFórmula(d_{total}, true, true)	"d_{total}\, = \,9"

Construcció 5: mediatriu Taxicab

5_MediatriuTaxicab.ggb

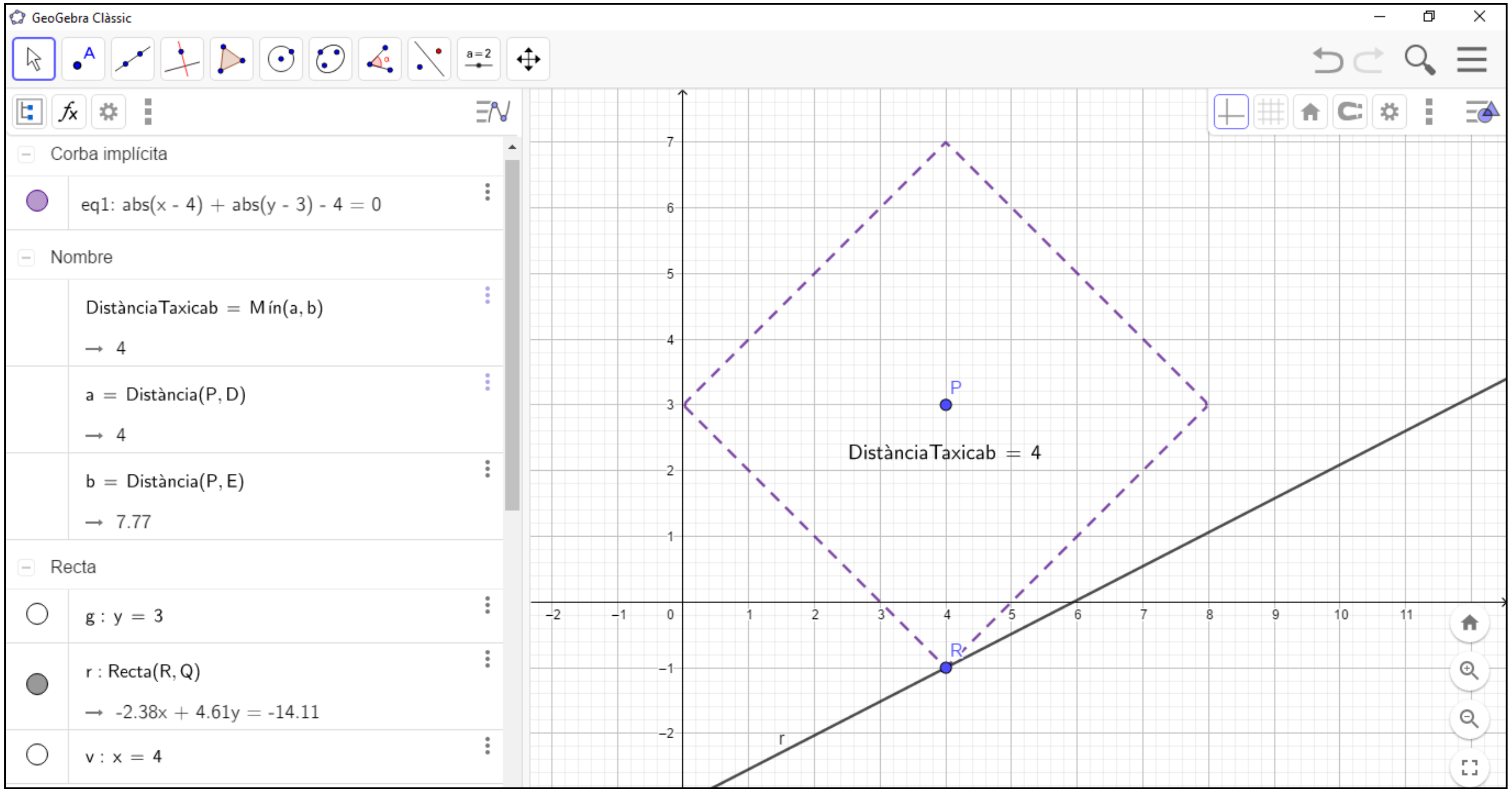
5_MediatriuTaxicab.html

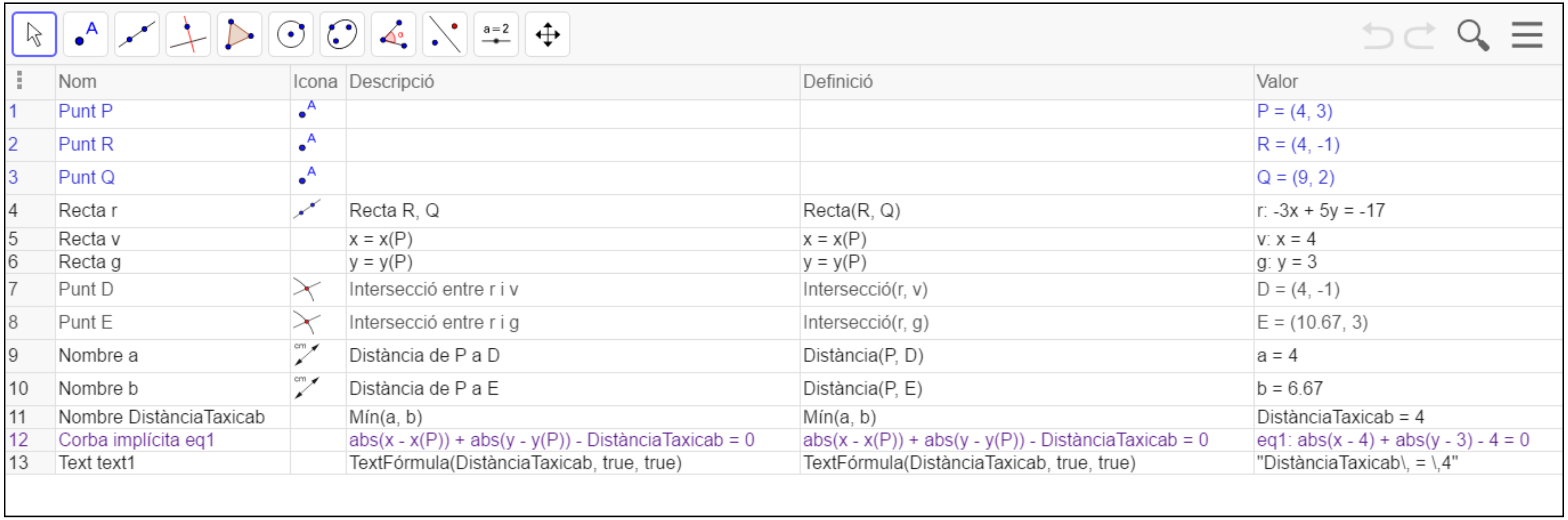


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt P				P = (1, 4)
2	Punt Q				Q = (5, 2)
3	Corba implícita MediatriuTaxicab		CorbaImplícita(abs(x - x(P)) + abs(y - y(P)) - abs(x - x(Q)) - abs(y - y(Q)))	CorbaImplícita(abs(x - x(P)) + abs(y - y(P)) - abs(x - x(Q)) - abs(y - y(Q)))	MediatriuTaxicab: abs(x - 1) + abs(y - 4) - abs(x - 5) - abs(y - 2) = 0

Construcció 6: distància punt recta Taxicab

6_PuntRectaTaxicab.ggb   6_PuntRectaTaxicab.html



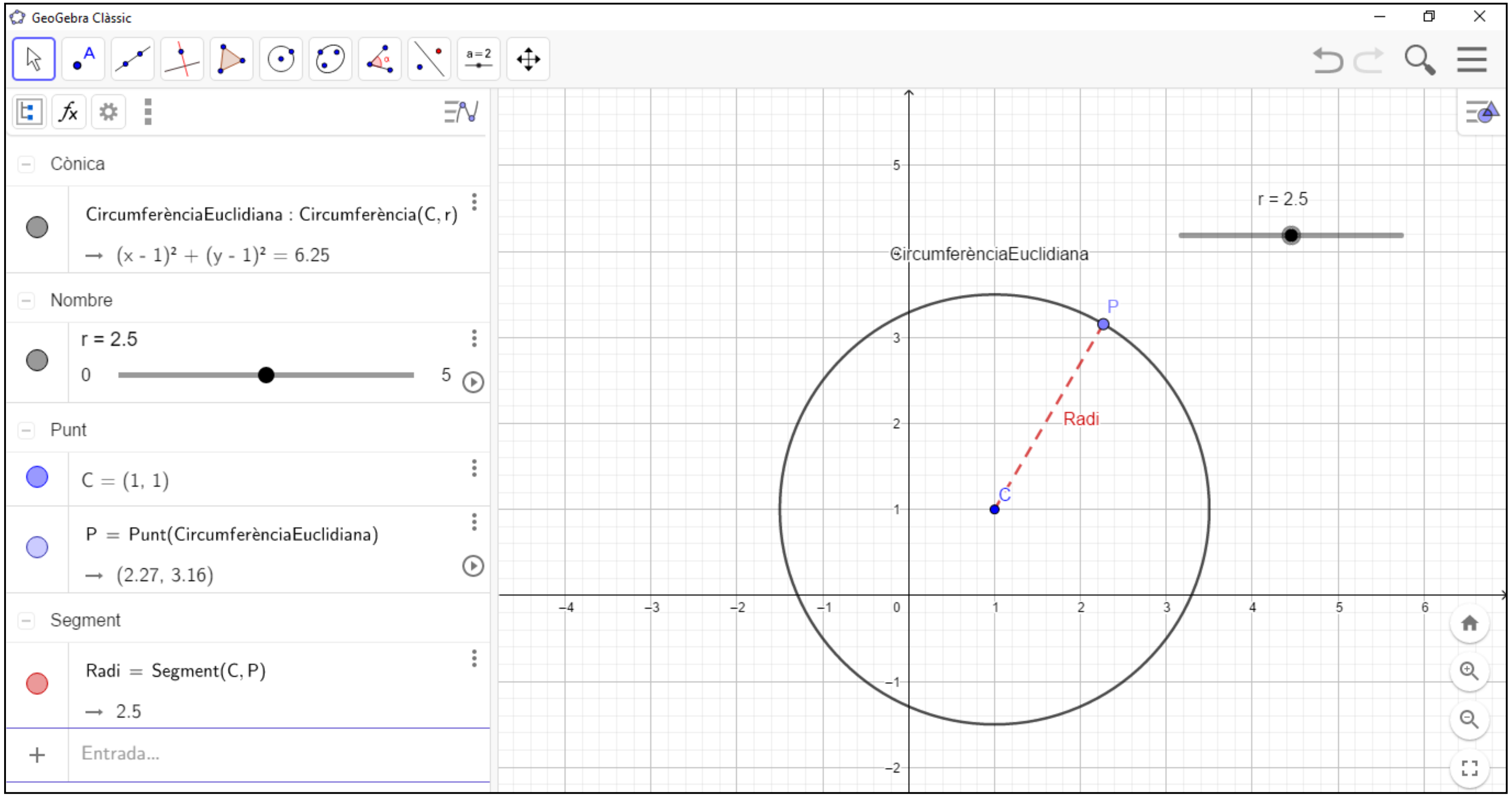


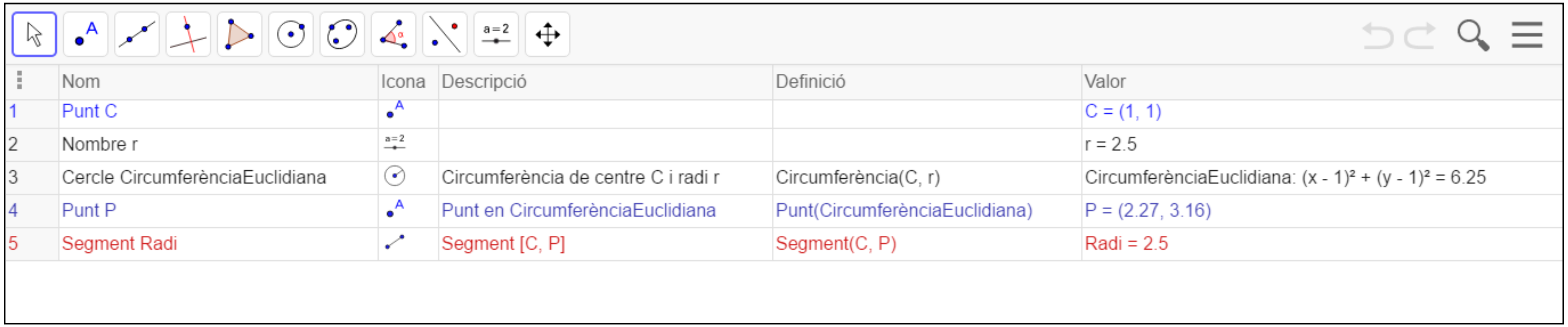
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt P				P = (4, 3)
2	Punt R				R = (4, -1)
3	Punt Q				Q = (9, 2)
4	Recta r		Recta R, Q	Recta(R, Q)	r: -3x + 5y = -17
5	Recta v		x = x(P)	x = x(P)	v: x = 4
6	Recta g		y = y(P)	y = y(P)	g: y = 3
7	Punt D		Intersecció entre r i v	Intersecció(r, v)	D = (4, -1)
8	Punt E		Intersecció entre r i g	Intersecció(r, g)	E = (10.67, 3)
9	Nombre a		Distància de P a D	Distància(P, D)	a = 4
10	Nombre b		Distància de P a E	Distància(P, E)	b = 6.67
11	Nombre DistànciaTaxicab		Mín(a, b)	Mín(a, b)	DistànciaTaxicab = 4
12	Corba implícita eq1		abs(x - x(P)) + abs(y - y(P)) - DistànciaTaxicab = 0	abs(x - x(P)) + abs(y - y(P)) - DistànciaTaxicab = 0	eq1: abs(x - 4) + abs(y - 3) - 4 = 0
13	Text text1		TextFórmula(DistànciaTaxicab, true, true)	TextFórmula(DistànciaTaxicab, true, true)	"DistànciaTaxicab\, = \,4"

Construcció 7: circumferència euclidiana

7_Circumferència_Euclidiana.ggb

7_Circumferència_Euclidiana.html



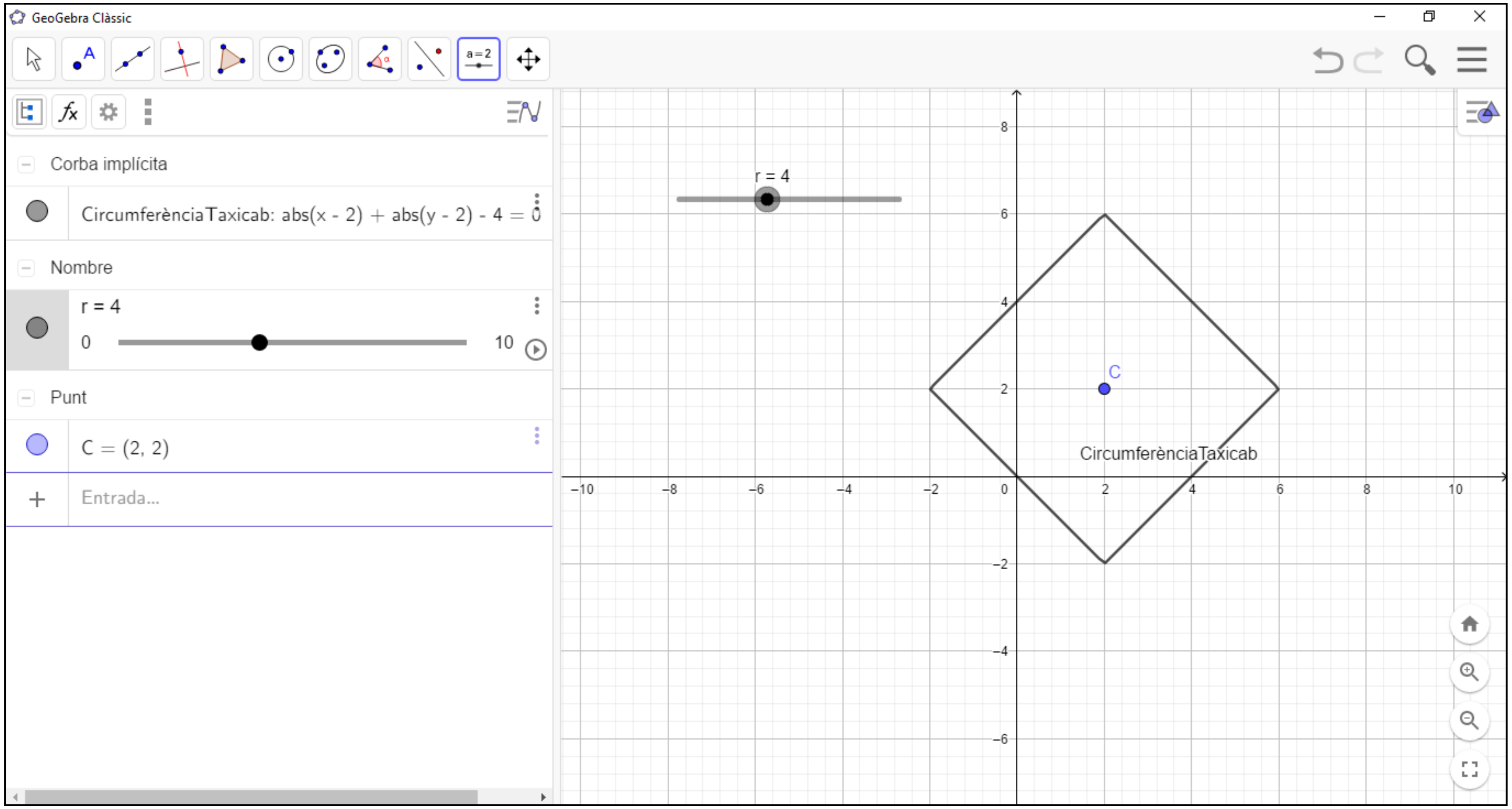


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt C				C = (1, 1)
2	Nombre r				r = 2.5
3	Cercle CircumferènciaEuclidiana		Circumferència de centre C i radi r	Circumferència(C, r)	CircumferènciaEuclidiana: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 6.25$
4	Punt P		Punt en CircumferènciaEuclidiana	Punt(CircumferènciaEuclidiana)	P = (2.27, 3.16)
5	Segment Radi		Segment [C, P]	Segment(C, P)	Radi = 2.5

Construcció 8: circumferència Taxicab

8_CircumferènciaTaxicab.ggb

8_CircumferènciaTaxicab.html

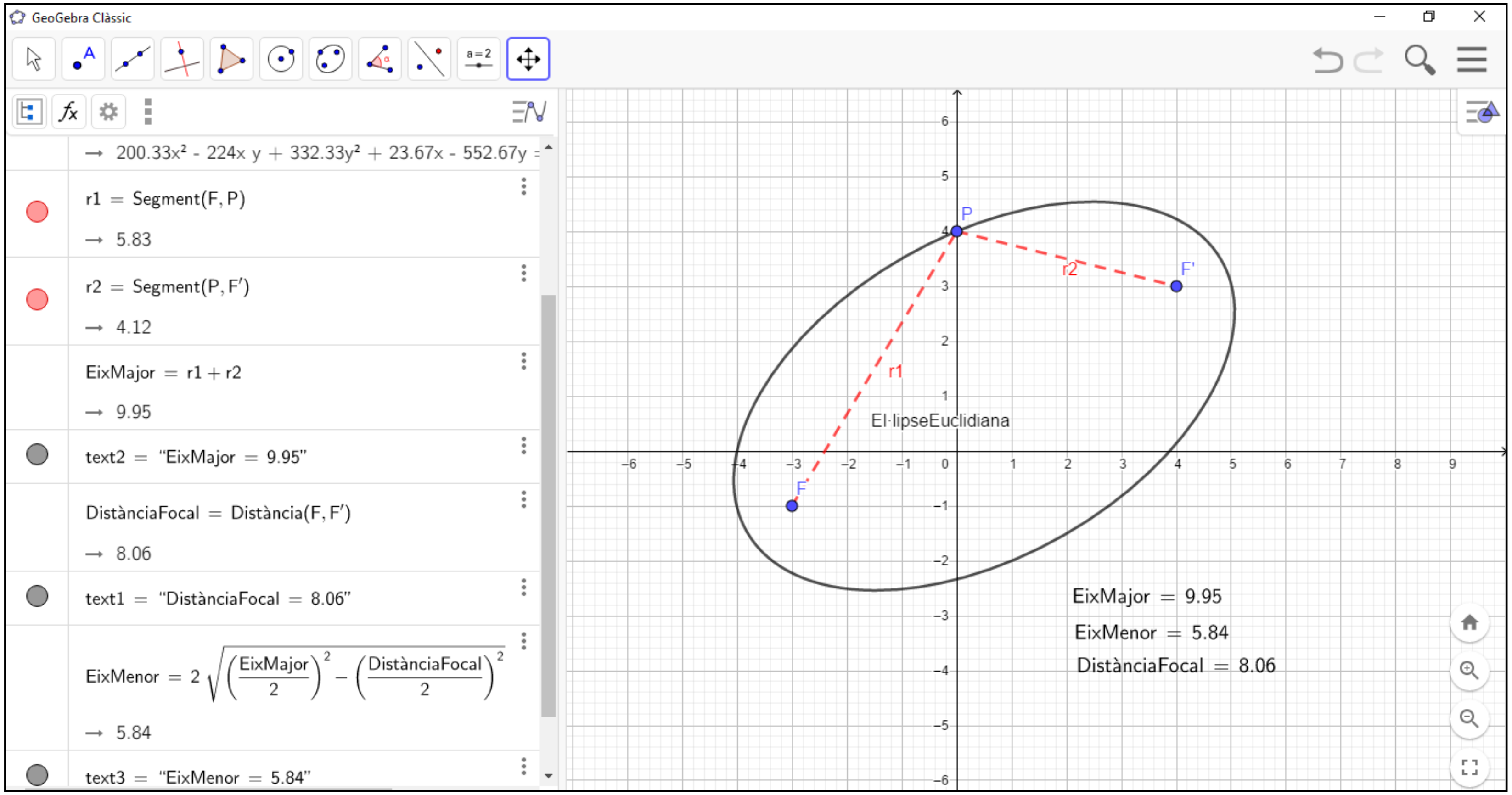


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt C				C = (2, 2)
2	Nombre r				r = 4
3	Corba implícita CircumferènciaTaxicab		abs(x - x(C)) + abs(y - y(C)) - r = 0	abs(x - x(C)) + abs(y - y(C)) - r = 0	CircumferènciaTaxicab: abs(x - 2) + abs(y - 2) - 4 = 0

Construcció 9: el·lipse euclidiana

9_El·lipseEuclidiana.ggb

9_El·lipseEuclidiana.html

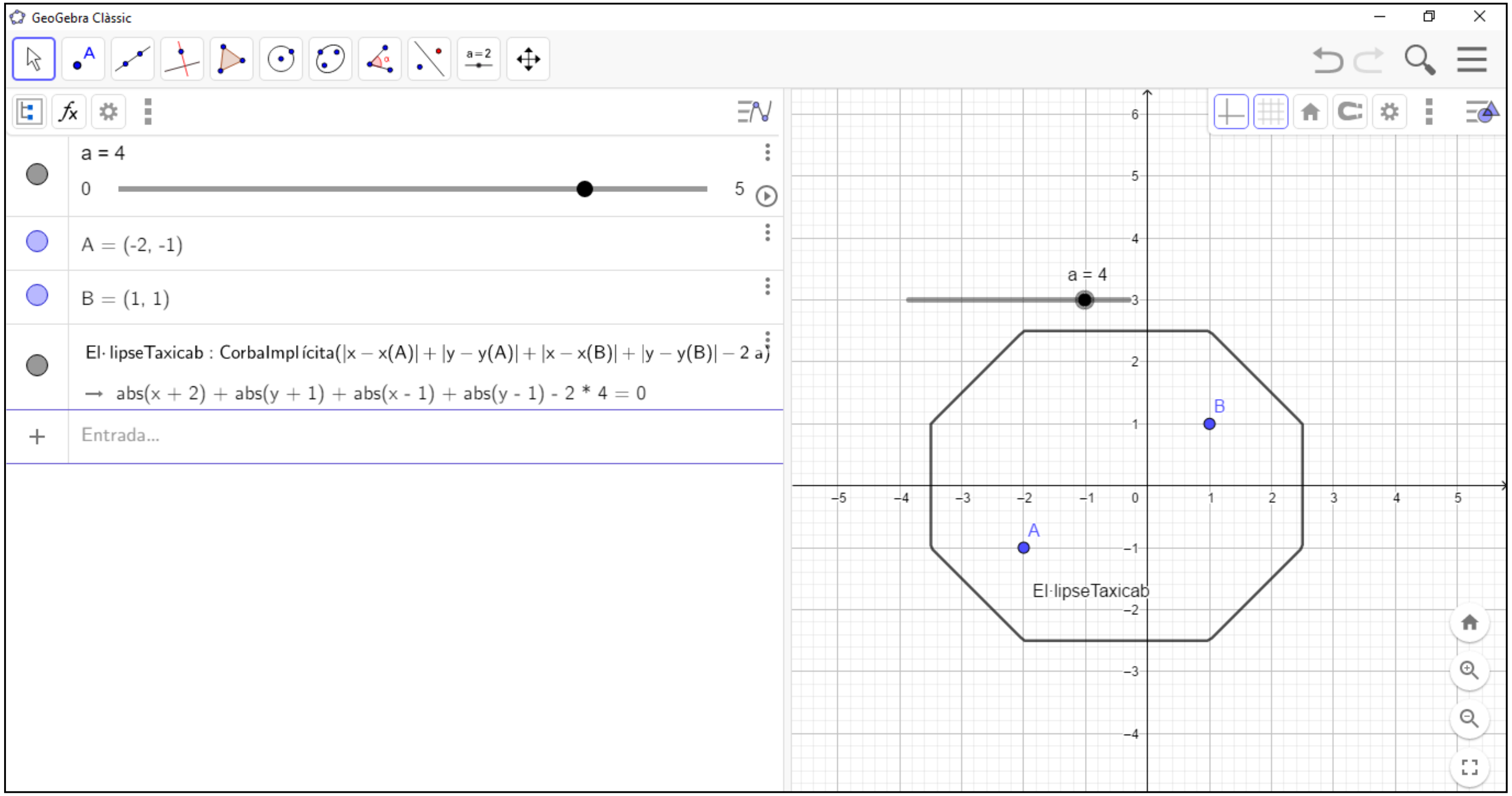


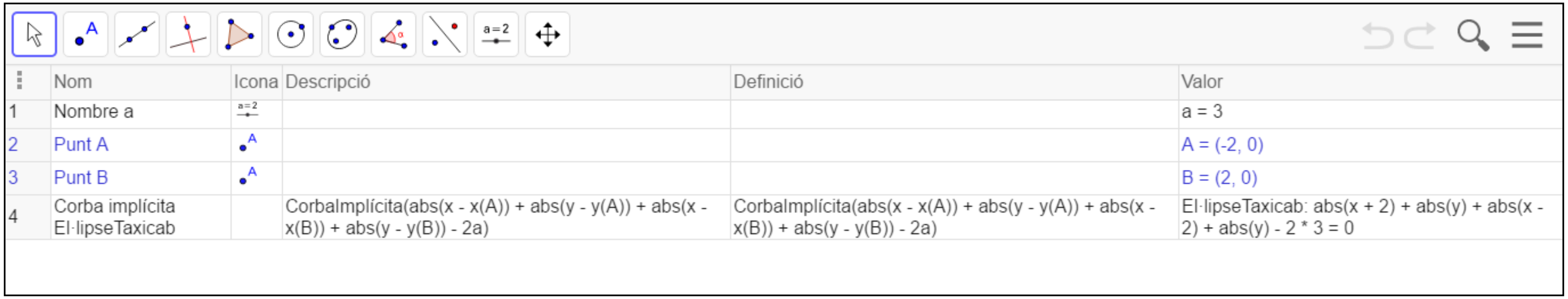
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt F				F = (-3, -1)
2	Punt F'				F' = (4, 3)
3	Punt P				P = (0, 4)
4	El·lipse El·lipseEuclidiana		El·lipse de focus F i F' que passa per P	El·lipse(F, F', P)	El·lipseEuclidiana: 200.33x² - 224x y + 332.33y² + 23.67x - 552.67y = 3106.66
5	Segment r1		Segment [F, P]	Segment(F, P)	r1 = 5.83
6	Segment r2		Segment [P, F']	Segment(P, F')	r2 = 4.12
7	Nombre EixMajor		r1 + r2	r1 + r2	EixMajor = 9.95
8	Text text2		TextFórmula(EixMajor, true, true)	TextFórmula(EixMajor, true, true)	"EixMajor\, = \,9.95"
9	Nombre DistànciaFocal		Distància de F a F'	Distància(F, F')	DistànciaFocal = 8.06
10	Text text1		TextFórmula(DistànciaFocal, true, true)	TextFórmula(DistànciaFocal, true, true)	"DistànciaFocal\, = \,8.06"
11	Nombre EixMenor		2sqrt((EixMajor / 2)² - (DistànciaFocal / 2)²)	2sqrt((EixMajor / 2)² - (DistànciaFocal / 2)²)	EixMenor = 5.84
12	Text text3		TextFórmula(EixMenor, true, true)	TextFórmula(EixMenor, true, true)	"EixMenor\, = \,5.84"

Construcció 10: el·lipse Taxicab

10_El·lipseTaxicab.ggb

10_El·lipseTaxicab.html



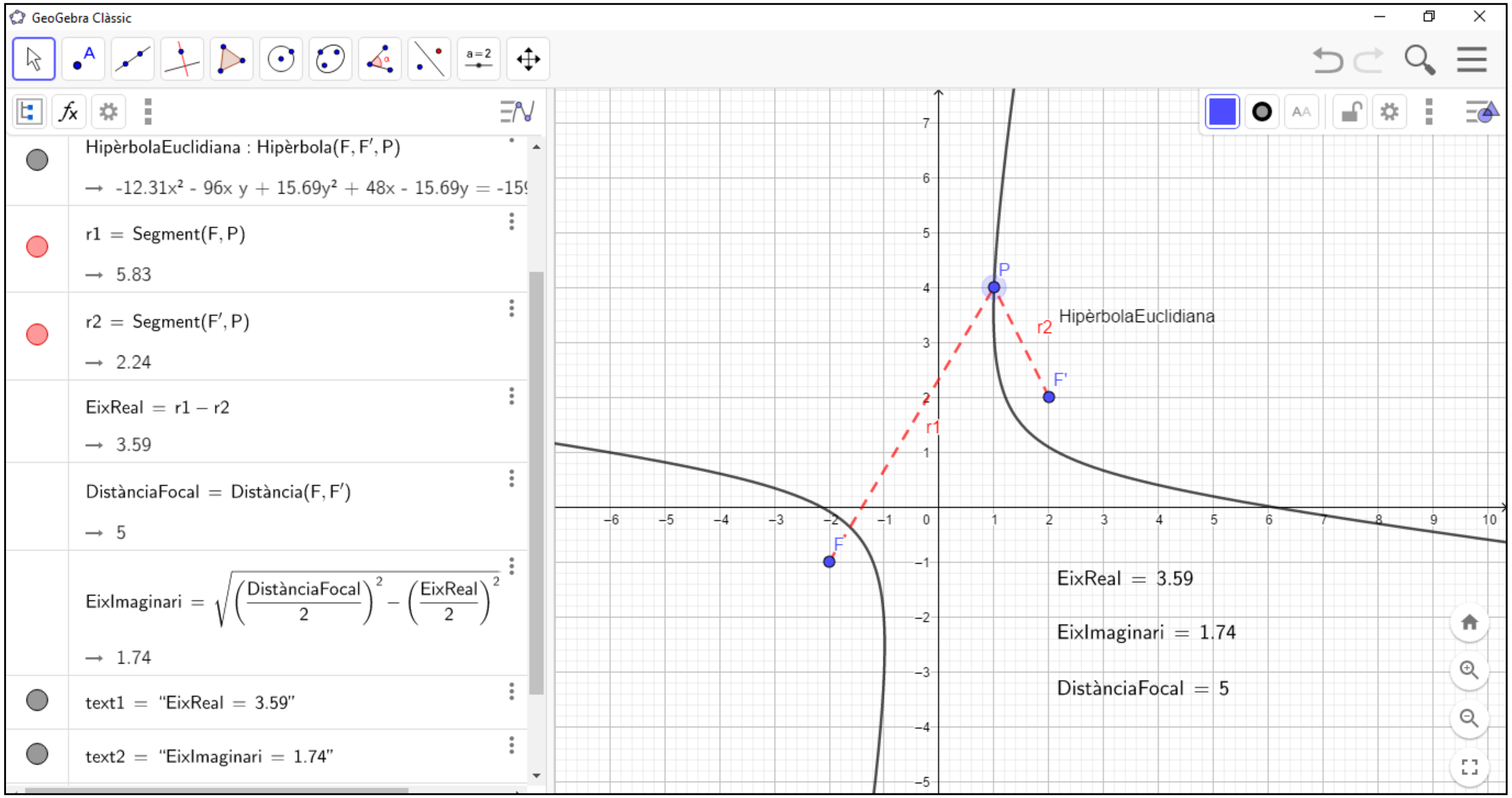


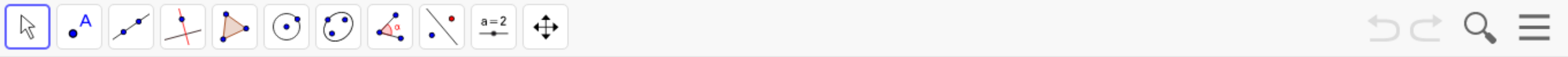
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Nombre a	a=2			a = 3
2	Punt A	A			A = (-2, 0)
3	Punt B	A			B = (2, 0)
4	Corba implícita El·lipseTaxicab		CorbaImplícita(abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) + abs(x - x(B)) + abs(y - y(B)) - 2a)	CorbaImplícita(abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) + abs(x - x(B)) + abs(y - y(B)) - 2a)	El·lipseTaxicab: abs(x + 2) + abs(y) + abs(x - 2) + abs(y) - 2 * 3 = 0

Construcció 11: hipèrbola euclidiana

11_HipèrbolaEuclidiana.ggb

11_HipèrbolaEuclidiana.html



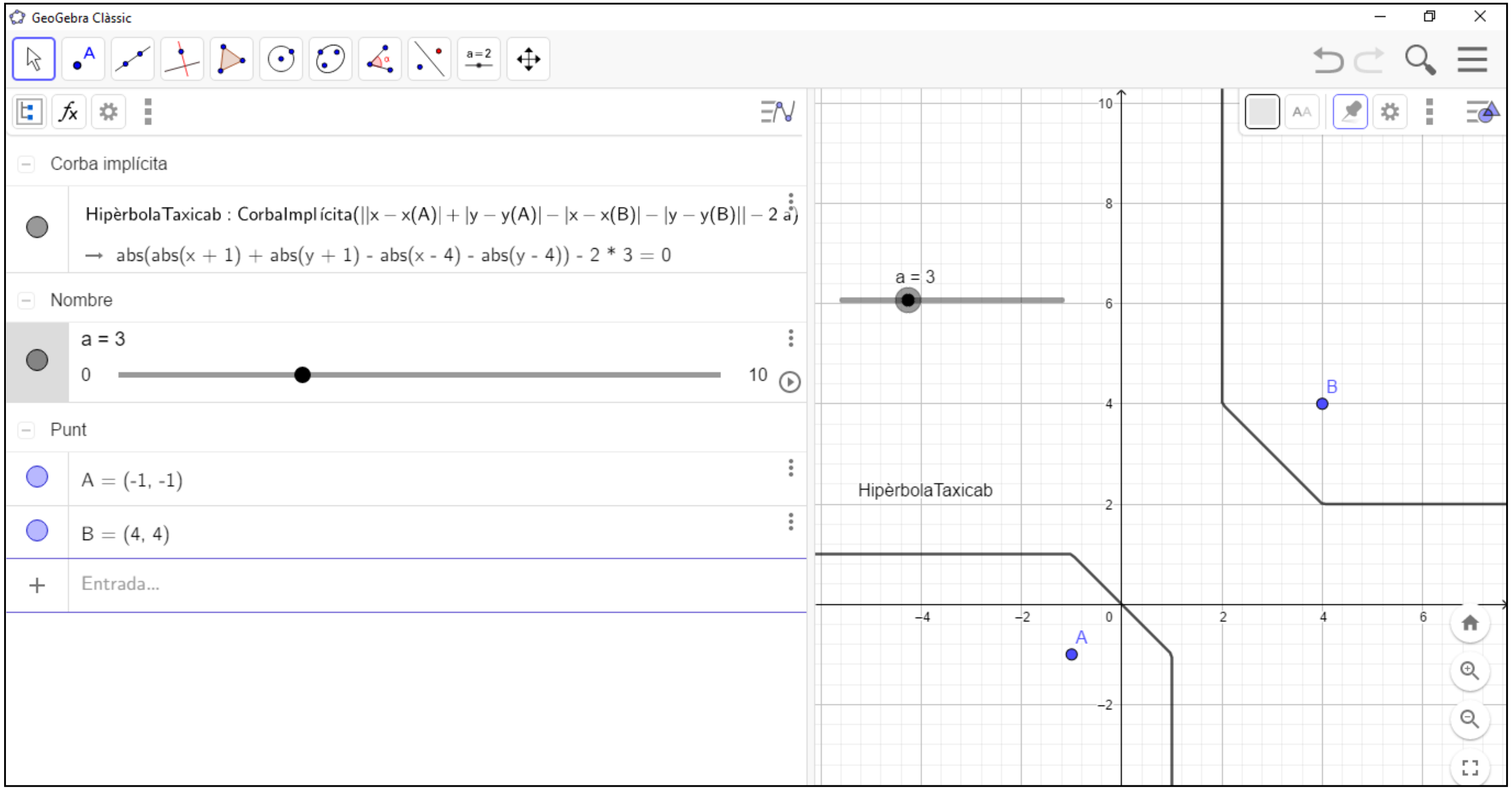


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt F				F = (-2, -1)
2	Punt F'				F' = (2, 2)
3	Punt P				P = (1, 4)
4	Hipèrbola HipèrbolaEuclidiana		Hipèrbola de focus F i F' que passa per P	Hipèrbola(F, F', P)	HipèrbolaEuclidiana: -12.31x² - 96x y + 15.69y² + 48x - 15.69y = -159.99
5	Segment r1		Segment [F, P]	Segment(F, P)	r1 = 5.83
6	Segment r2		Segment [F', P]	Segment(F', P)	r2 = 2.24
7	Nombre EixReal		r1 - r2	r1 - r2	EixReal = 3.59
8	Nombre DistànciaFocal		Distància de F a F'	Distància(F, F')	DistànciaFocal = 5
9	Nombre EixImaginari		sqrt((DistànciaFocal / 2)² - (EixReal / 2)²)	sqrt((DistànciaFocal / 2)² - (EixReal / 2)²)	EixImaginari = 1.74
10	Text text1		TextFórmula(EixReal, true, true)	TextFórmula(EixReal, true, true)	"EixReal\, = \,3.59"
11	Text text2		TextFórmula(EixImaginari, true, true)	TextFórmula(EixImaginari, true, true)	"EixImaginari\, = \,1.74"
12	Text text3		TextFórmula(DistànciaFocal, true, true)	TextFórmula(DistànciaFocal, true, true)	"DistànciaFocal\, = \,5"

Construcció 12: hipèrbola Taxicab

12_HipèrbolaTaxicab.ggb

12_HipèrbolaTaxicab.html

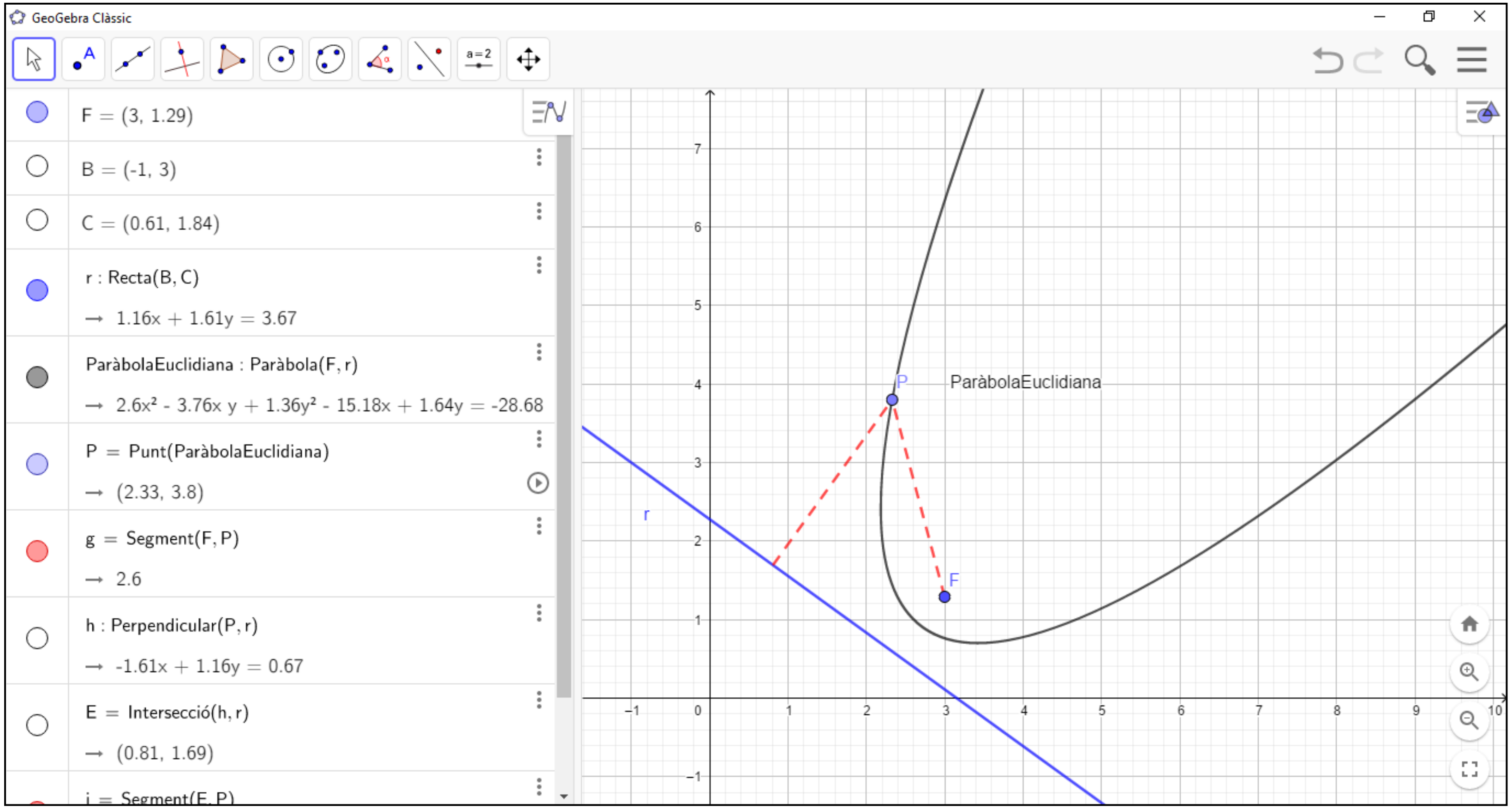


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt A				A = (-1, -1)
2	Punt B				B = (4, 4)
3	Nombre a				a = 3
4	Corba implícita HipèrbolaTaxicab		CorbaImplícita(abs(abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) - abs(x - x(B)) - abs(y - y(B))) - 2a)	CorbaImplícita(abs(abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) - abs(x - x(B)) - abs(y - y(B))) - 2a)	HipèrbolaTaxicab: abs(abs(x + 1) + abs(y + 1) - abs(x - 4) - abs(y - 4)) - 2 * 3 = 0

Construcció 13: paràbola euclidiana

13_ParàbolaEuclidiana.ggb

13_ParàbolaEuclidiana.html

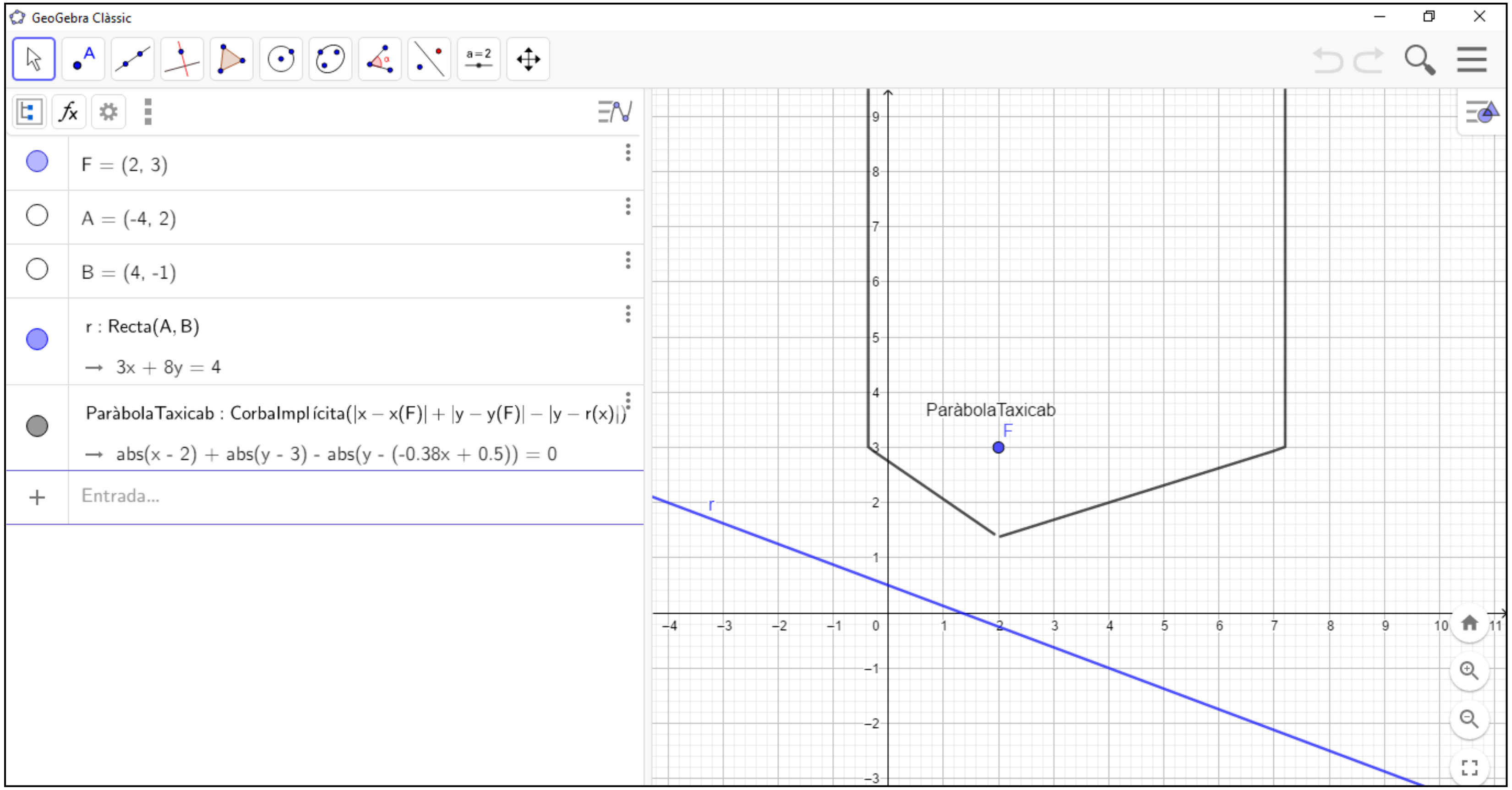


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt F				F = (3, 1.29)
2	Punt B				B = (-1, 3)
3	Punt C				C = (0.61, 1.84)
4	Recta r		Recta B, C	Recta(B, C)	r: 1.16x + 1.61y = 3.67
5	Paràbola ParàbolaEuclidiana		Paràbola de focus F i directriu r	Paràbola(F, r)	ParàbolaEuclidiana: $2.6x^2 - 3.76x\,y + 1.36y^2 - 15.18x + 1.64y = -28.68$
6	Punt P		Punt en ParàbolaEuclidiana	Punt(ParàbolaEuclidiana)	P = (2.33, 3.8)
7	Segment g		Segment [F, P]	Segment(F, P)	g = 2.6
8	Recta h		Recta que passa per P i és perpendicular a r	Perpendicular(P, r)	h: -1.61x + 1.16y = 0.67
9	Punt E		Intersecció entre h i r	Intersecció(h, r)	E = (0.81, 1.69)
10	Segment i		Segment [E, P]	Segment(E, P)	i = 2.6

Construcció 14: paràbola Taxicab |m|≤1

14_ParàbolaTaxicab_H.ggb

14_ParàbolaTaxicab_H.html

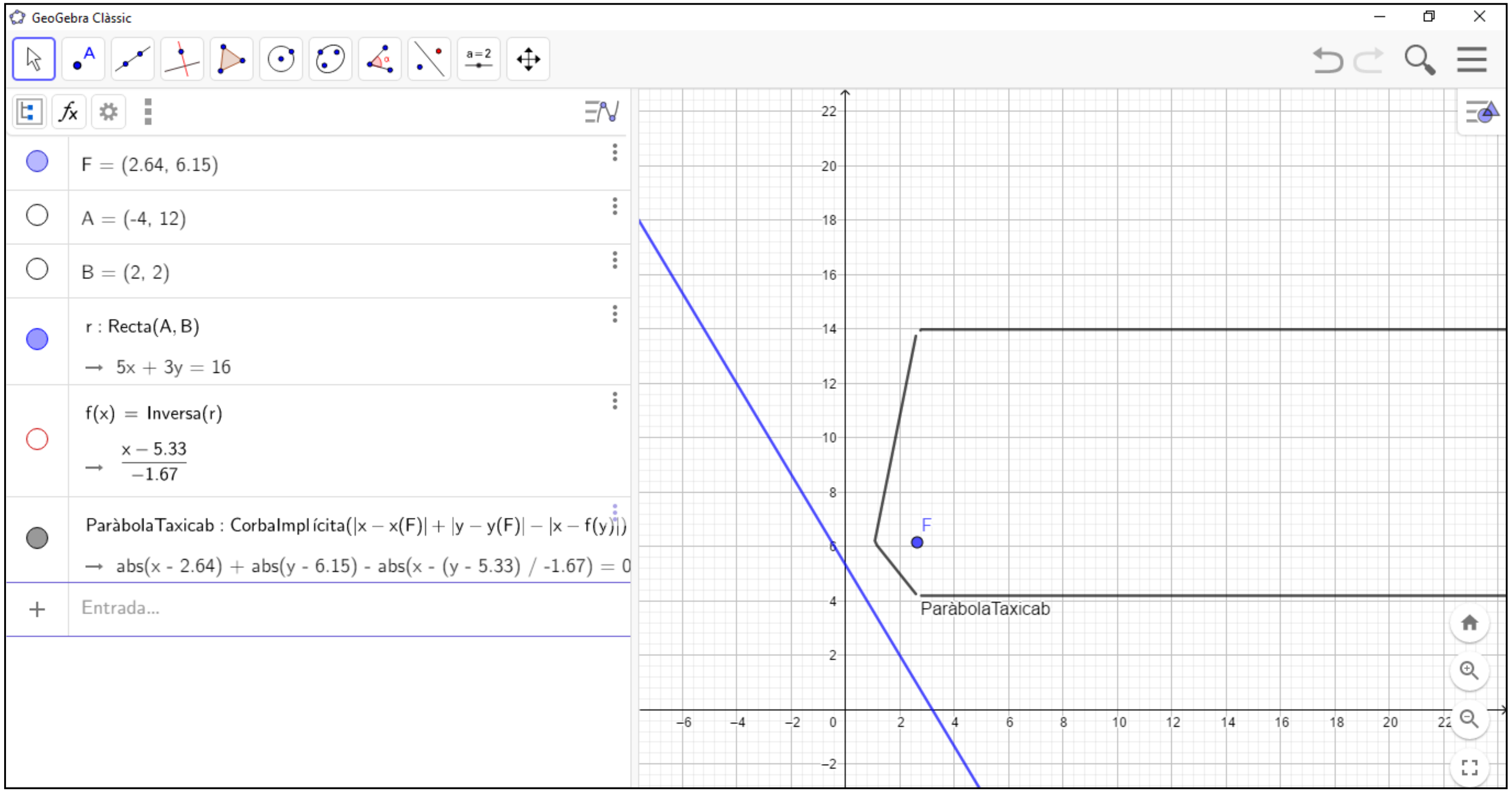


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt F				F = (2, 3)
2	Punt A				A = (-4, 2)
3	Punt B				B = (4, -1)
4	Recta r		Recta A, B	Recta(A, B)	r: 3x + 8y = 4
5	Corba implícita ParàbolaTaxicab		CorbaImplícita(abs(x - x(F)) + abs(y - y(F)) - abs(y - r(x)))	CorbaImplícita(abs(x - x(F)) + abs(y - y(F)) - abs(y - r(x)))	ParàbolaTaxicab: abs(x - 2) + abs(y - 3) - abs(y - (-0.38x + 0.5)) = 0

Construcció 15: paràbola Taxicab |m|≥1

15_ParàbolaTaxicab_V.ggb

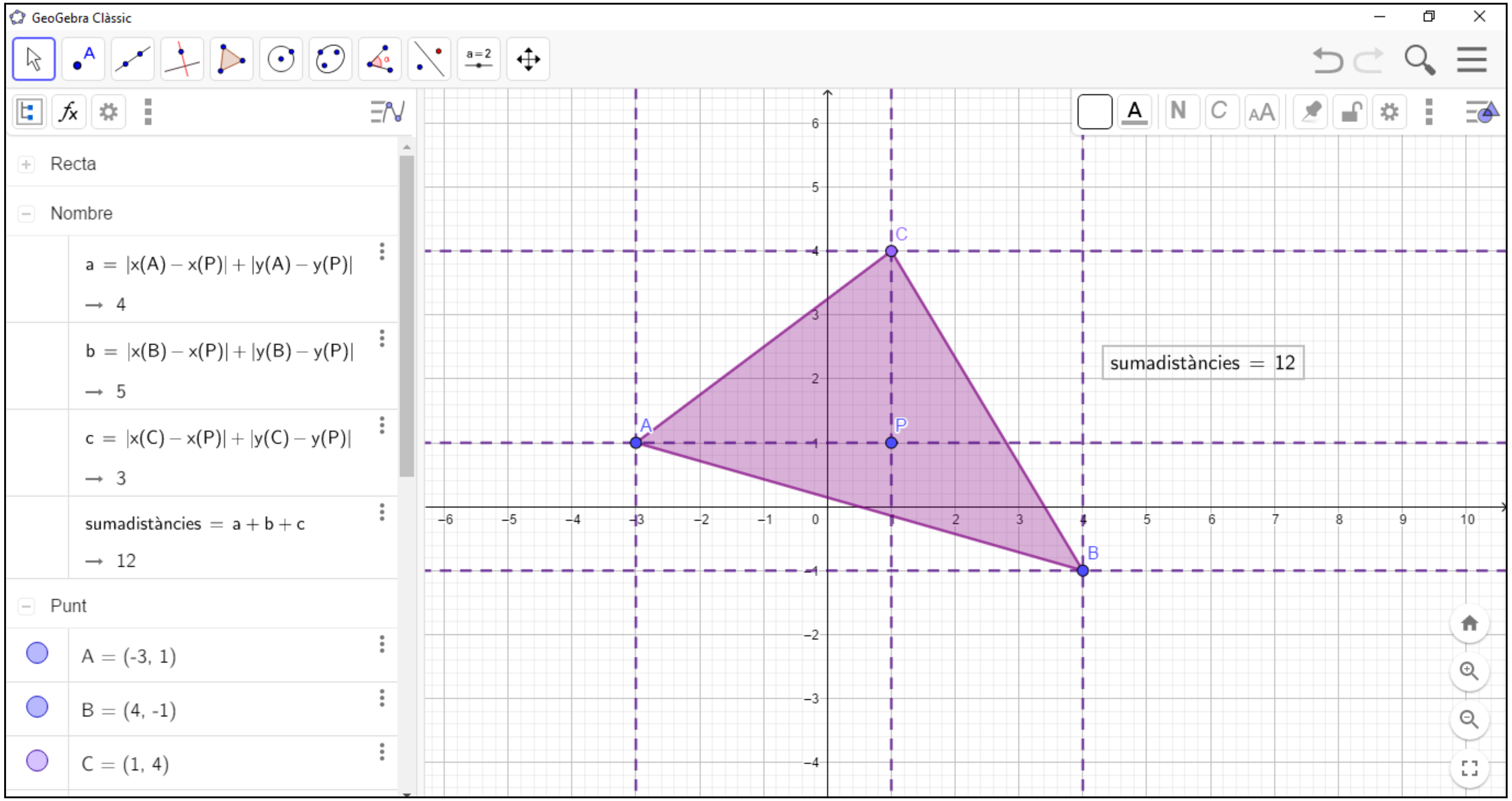
15_ParàbolaTaxicab_V.html



	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt F				F = (2, 6)
2	Punt A				A = (-4, 12)
3	Punt B				B = (2, 2)
4	Recta r		Recta A, B	Recta(A, B)	r: 5x + 3y = 16
5	Funció f		Inversa(r)	Inversa(r)	f(x) = (x - 5.33) / -1.67
6	Corba implícita ParàbolaTaxicab		CorbaImplícita(abs(x - x(F)) + abs(y - y(F)) - abs(x - f(y)))	CorbaImplícita(abs(x - x(F)) + abs(y - y(F)) - abs(x - f(y)))	ParàbolaTaxicab: abs(x - 2) + abs(y - 6) - abs(x - (y - 5.33) / -1.67) = 0

Construcció 16: punt de Fermat en la geometria Taxicab

16_PuntFermat.ggb 16_PuntFermat.html

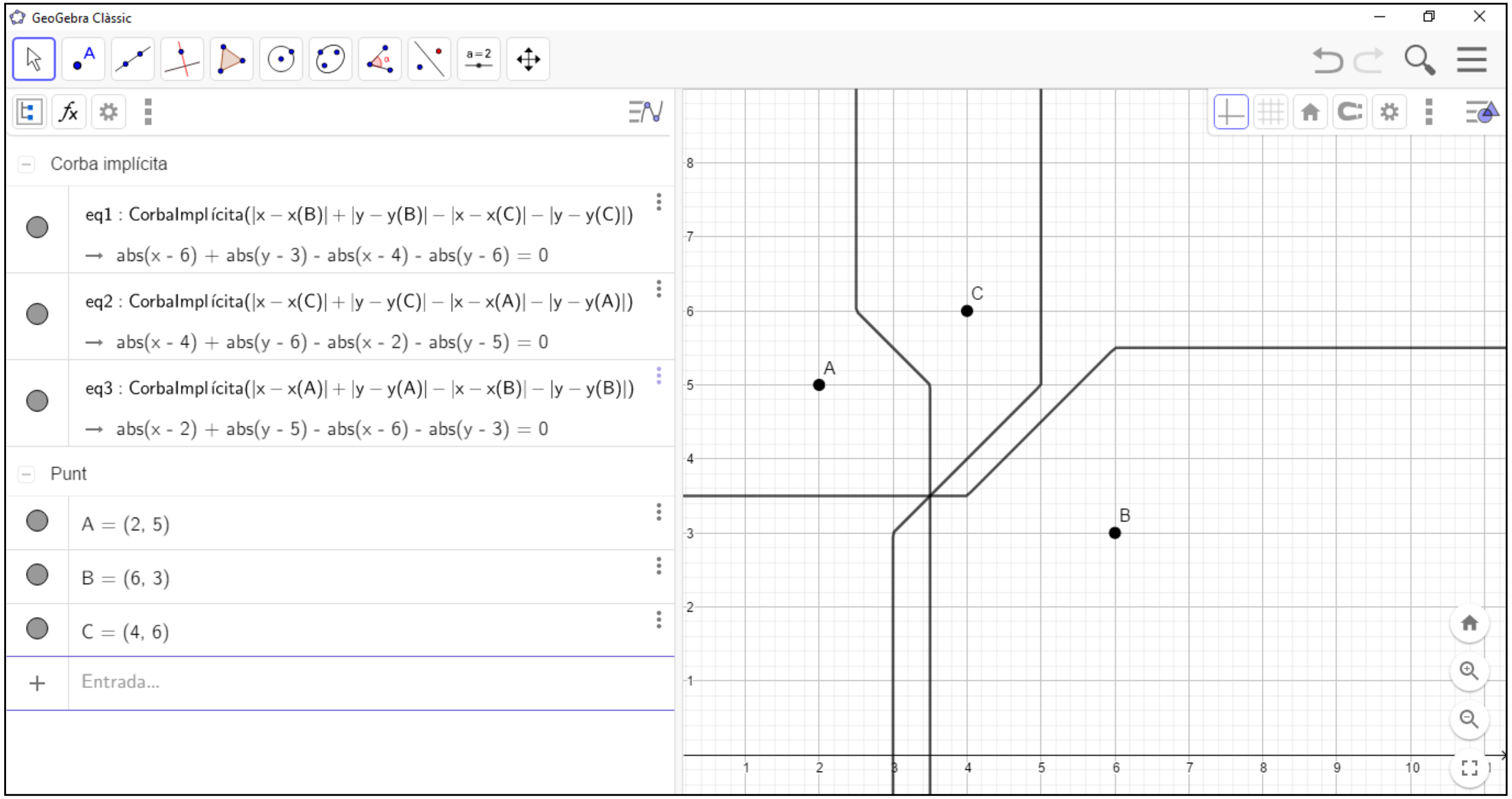


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt A				A = (-3, 1)
2	Punt B				B = (4, -1)
3	Punt C				C = (1, 4)
4	Punt P				P = (1, 1)
5	Nombre a		abs(x(A) - x(P)) + abs(y(A) - y(P))	abs(x(A) - x(P)) + abs(y(A) - y(P))	a = 4
6	Nombre b		abs(x(B) - x(P)) + abs(y(B) - y(P))	abs(x(B) - x(P)) + abs(y(B) - y(P))	b = 5
7	Nombre c		abs(x(C) - x(P)) + abs(y(C) - y(P))	abs(x(C) - x(P)) + abs(y(C) - y(P))	c = 3
8	Nombre sumadistàncies		a + b + c	a + b + c	sumadistàncies = 12
9	Text text1		TextFórmula(sumadistàncies, true, true)	TextFórmula(sumadistàncies, true, true)	"sumadistàncies\, = \,12"
10	Recta r_1		y = y(A)	y = y(A)	r_1: y = 1
11	Recta r_2		x = x(C)	x = x(C)	r_2: x = 1
12	Triangle tri1		Polígon A, C, B	Polígon(A, C, B)	tri1 = 14.5
12	Segment b_1		Segment [A, C]	Segment(A, C, tri1)	b_1 = 5
12	Segment a_1		Segment [C, B]	Segment(C, B, tri1)	a_1 = 5.83
12	Segment c_1		Segment [B, A]	Segment(B, A, tri1)	c_1 = 7.28
13	Recta eq1		x = x(A)	x = x(A)	eq1: x = -3
14	Recta f		y = y(C)	y = y(C)	f: y = 4
15	Recta eq2		x = x(B)	x = x(B)	eq2: x = 4
16	Recta g		y = y(B)	y = y(B)	g: y = -1

Construcció 17: diagrama de Voronoi en la geometria Taxicab

17_VoronoiTaxicab.ggb

17_VoronoiTaxicab.html

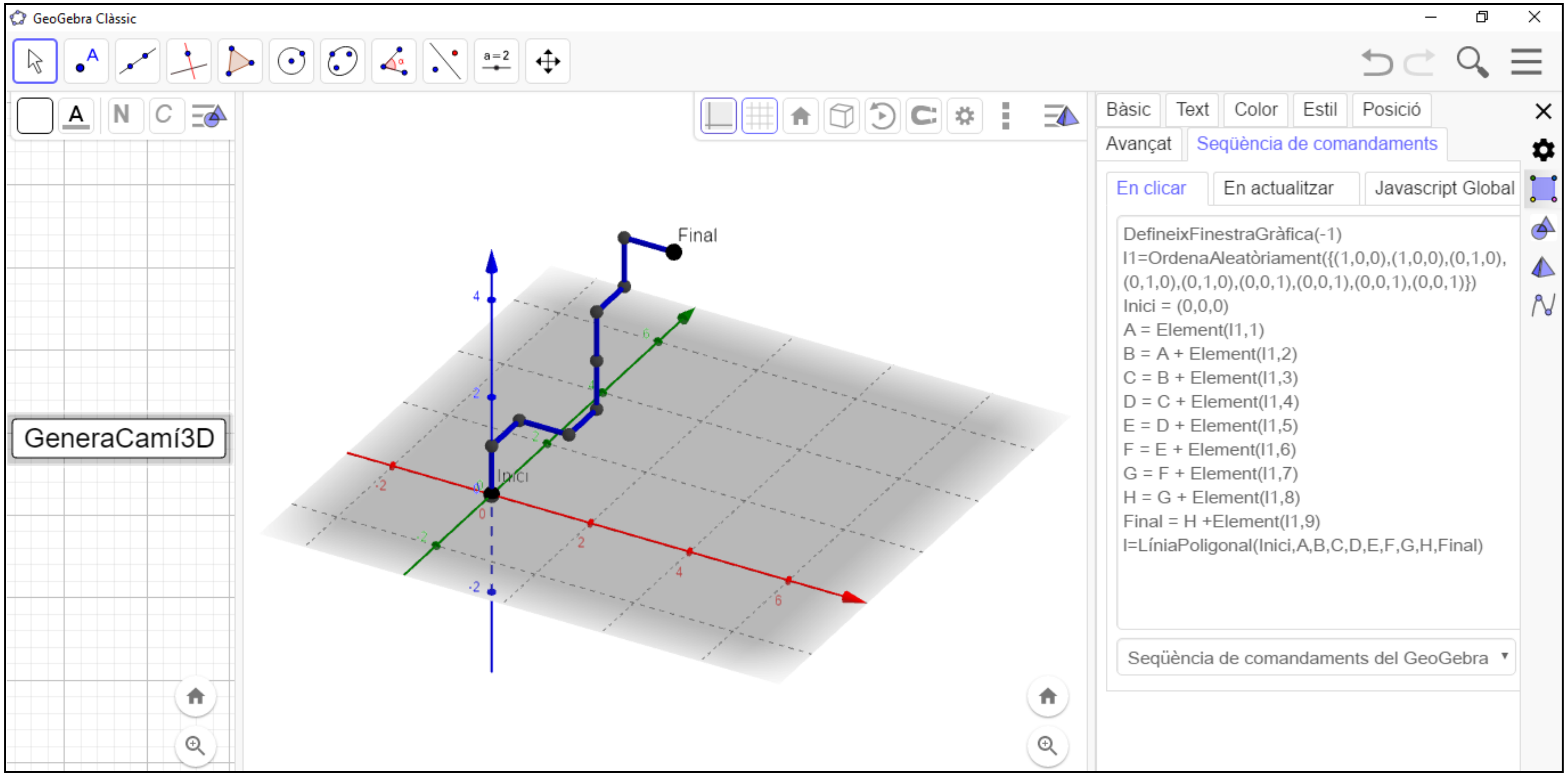


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt A				A = (2, 5)
2	Punt B				B = (6, 3)
3	Corba implícita eq3		CorbaImplícita(abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) - abs(x - x(B)) - abs(y - y(B)))	CorbaImplícita(abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) - abs(x - x(B)) - abs(y - y(B)))	eq3: abs(x - 2) + abs(y - 5) - abs(x - 6) - abs(y - 3) = 0
4	Punt C				C = (4, 6)
5	Corba implícita eq1		CorbaImplícita(abs(x - x(B)) + abs(y - y(B)) - abs(x - x(C)) - abs(y - y(C)))	CorbaImplícita(abs(x - x(B)) + abs(y - y(B)) - abs(x - x(C)) - abs(y - y(C)))	eq1: abs(x - 6) + abs(y - 3) - abs(x - 4) - abs(y - 6) = 0
6	Corba implícita eq2		CorbaImplícita(abs(x - x(C)) + abs(y - y(C)) - abs(x - x(A)) - abs(y - y(A)))	CorbaImplícita(abs(x - x(C)) + abs(y - y(C)) - abs(x - x(A)) - abs(y - y(A)))	eq2: abs(x - 4) + abs(y - 6) - abs(x - 2) - abs(y - 5) = 0
7	Text text1	ABC			"Diagrama de Voronoi amb la mètrica de Manhattan"

Construcció 18: generador de camins aleatoris en 3D

18_Genera_Camí_3D .ggb

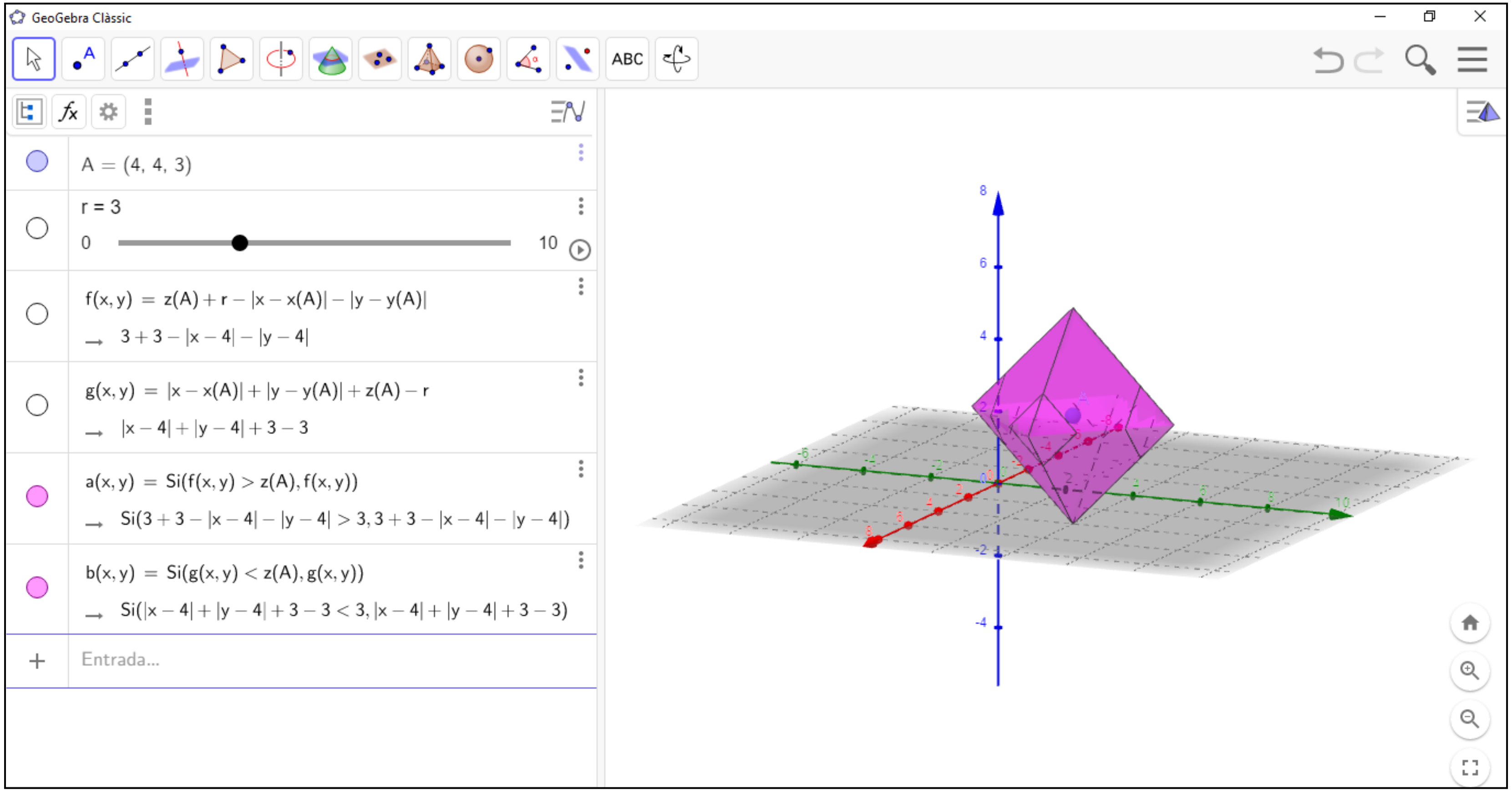
18_Genera_Camí_3D .html



	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Llista l1		OrdenaAleatòriament({(1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1)})	OrdenaAleatòriament({(1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1)})	l1 = {(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)}
2	Punt A				A = (-1, 1)
3	Punt B		A + Element(l1, 2)	A + Element(l1, 2)	B = (-1, 2, 0)
4	Punt C		B + Element(l1, 3)	B + Element(l1, 3)	C = (-1, 2, 1)
5	Punt D		C + Element(l1, 4)	C + Element(l1, 4)	D = (-1, 3, 1)
6	Punt E		D + Element(l1, 5)	D + Element(l1, 5)	E = (0, 3, 1)
7	Punt F		E + Element(l1, 6)	E + Element(l1, 6)	F = (0, 3, 2)
8	Punt G		F + Element(l1, 7)	F + Element(l1, 7)	G = (1, 3, 2)
9	Punt H		G + Element(l1, 8)	G + Element(l1, 8)	H = (1, 3, 3)
10	Nombre A1	a=2			A1 no definit
11	Botó GeneraCamí3D	OK			GeneraCamí3D
12	Punt Inici				Inici = (0, 0, 0)
13	Punt Final		H + Element(l1, 9)	H + Element(l1, 9)	Final = (1, 4, 3)
14	Línia poligonal l		Línia poligonal Inici, A, B, C, D, E, F, G, H, Final	LíniaPoligonal(Inici, A, B, C, D, E, F, G, H, Final)	l = 9.41

Construcció 19: esfera Taxicab 3D

19_Esfera3D.ggb 19_Esfera3D.html

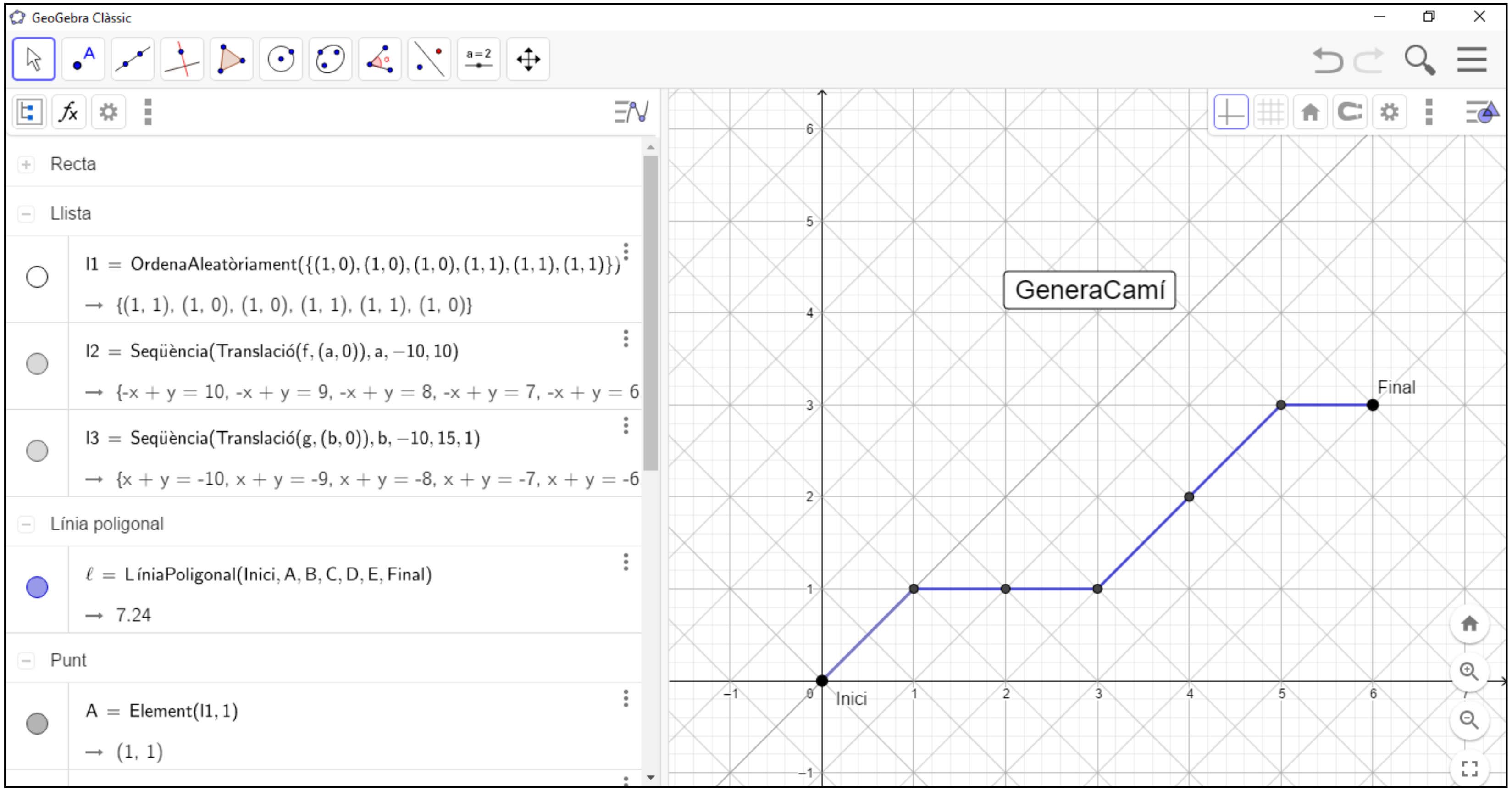


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt A				A = (4, 4, 3)
2	Nombre r	a=2			r = 3
3	Funció de dues o més variables f		f(x, y) = z(A) + r - abs(x - x(A)) - abs(y - y(A))	f(x, y) = z(A) + r - abs(x - x(A)) - abs(y - y(A))	f(x, y) = 3 + 3 - abs(x - 4) - abs(y - 4)
4	Funció de dues o més variables g		g(x, y) = abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) + z(A) - r	g(x, y) = abs(x - x(A)) + abs(y - y(A)) + z(A) - r	g(x, y) = abs(x - 4) + abs(y - 4) + 3 - 3
5	Funció de dues o més variables a		a(x, y) = Si(f(x, y) > z(A), f(x, y))	a(x, y) = Si(f(x, y) > z(A), f(x, y))	a(x, y) = Si(3 + 3 - abs(x - 4) - abs(y - 4) > 3, 3 + 3 - abs(x - 4) - abs(y - 4))
6	Funció de dues o més variables b		b(x, y) = Si(g(x, y) < z(A), g(x, y))	b(x, y) = Si(g(x, y) < z(A), g(x, y))	b(x, y) = Si(abs(x - 4) + abs(y - 4) + 3 - 3 < 3, abs(x - 4) + abs(y - 4) + 3 - 3)

Construcció 20: generador de camins aleatoris amb la mètrica de les dames xineses

20_Genera_Camí_Chinese_Checkers.ggb

20_Genera_Camí_Chinese_Checkers.html

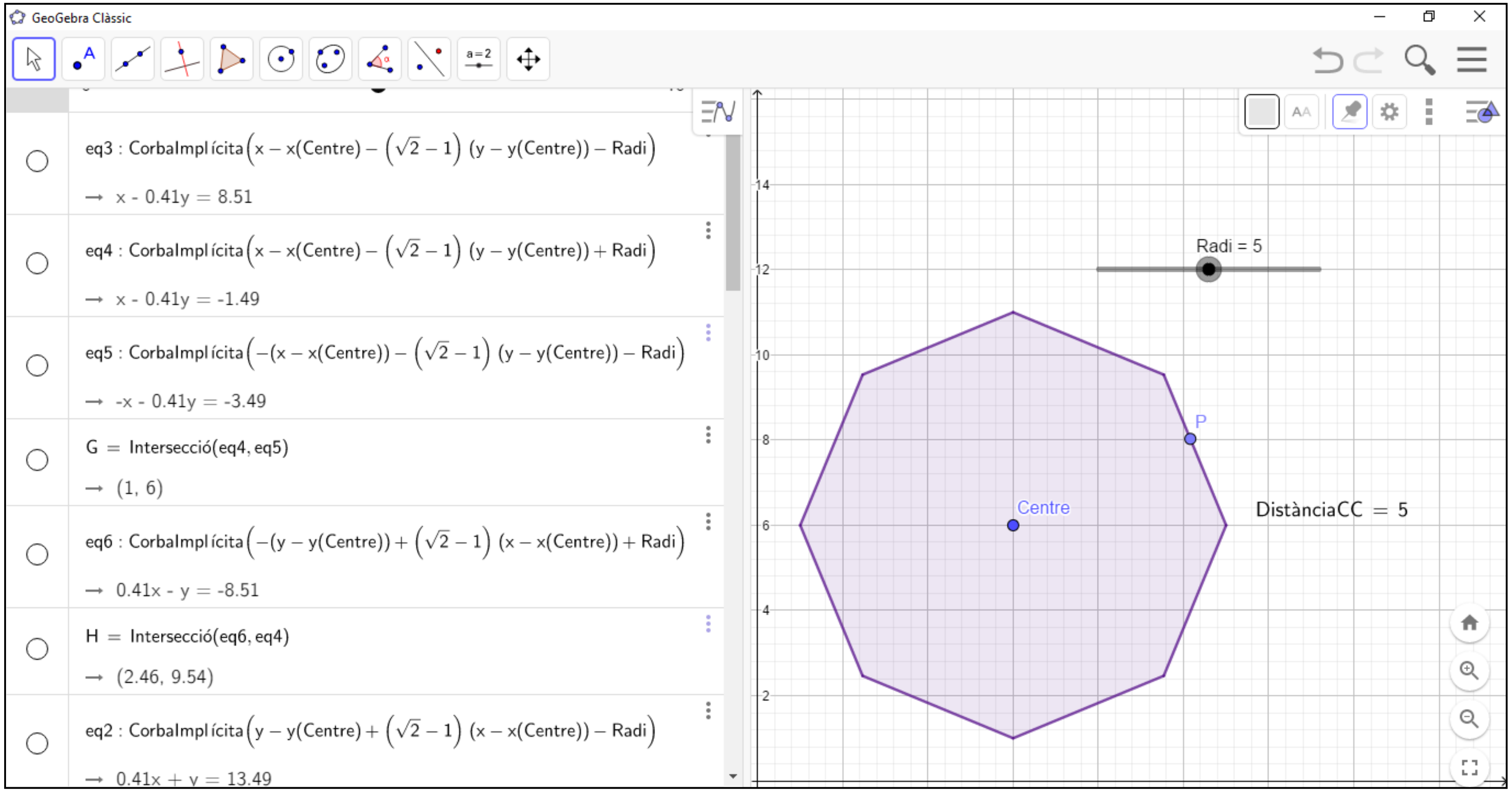


	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Llista l1		OrdenaAleatòriament({(1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 1), (1, 1)})	OrdenaAleatòriament({(1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 1), (1, 1)})	l1 = {(1, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 1), (1, 0), (1, 1)}
2	Punt A		Element(l1, 1)	Element(l1, 1)	A = (1, 0)
3	Punt B		A + Element(l1, 2)	A + Element(l1, 2)	B = (2, 0)
4	Punt C		B + Element(l1, 3)	B + Element(l1, 3)	C = (3, 1)
5	Punt D		C + Element(l1, 4)	C + Element(l1, 4)	D = (4, 2)
6	Punt E		D + Element(l1, 5)	D + Element(l1, 5)	E = (5, 2)
7	Punt F		E + Element(l1, 6)	E + Element(l1, 6)	F = (6, 3)
8	Nombre A1	a=2			A1 no definit
9	Botó GeneraCamí	OK			GeneraCamí
10	Punt Inici				Inici = (0, 0)
11	Punt Final		E + Element(l1, 6)	E + Element(l1, 6)	Final = (6, 3)
12	Línia poligonal l		Línia poligonal Inici, A, B, C, D, E, Final	LíniaPoligonal(Inici, A, B, C, D, E, Final)	l = 7.24
13	Recta f				f: y = x
14	Llista l2		Seqüència(Translació(f, (a, 0)), a, -10, 10)	Seqüència(Translació(f, (a, 0)), a, -10, 10)	l2 = {-x + y = 10, -x + y = 9, -x + y = 8, -x + y = 7, -x + y = 6, -x + y = 5, -x + y = 4, -x + y = 3, -x + y = 2, -x + y = 1, -x + y = 0, -x + y = -1, -x + y = -2, -x + y = -3, -x + y = -4, -x + y = -5, -x + y = -6, -x + y = -7, -x + y = -8, -x + y = -9, -x + y = -10}
15	Recta g				g: y = -x
16	Llista l3		Seqüència(Translació(g, (b, 0)), b, -10, 15, 1)	Seqüència(Translació(g, (b, 0)), b, -10, 15, 1)	l3 = {x + y = -10, x + y = -9, x + y = -8, x + y = -7, x + y = -6, x + y = -5, x + y = -4, x + y = -3, x + y = -2, x + y = -1, x + y = 0, x + y = 1, x + y = 2, x + y = 3, x + y = 4, x + y = 5, x + y = 6, x + y = 7, x + y = 8, x + y = 9, x + y = 10, x + y = 11, x + y = 12, x + y = 13, x + y = 14, x + y = 15}

Construcció 21: circumferència amb la mètrica de les dames xineses

21_Circumferència_chinese_checkers.ggb

21_Circumferència_chinese_checkers.html

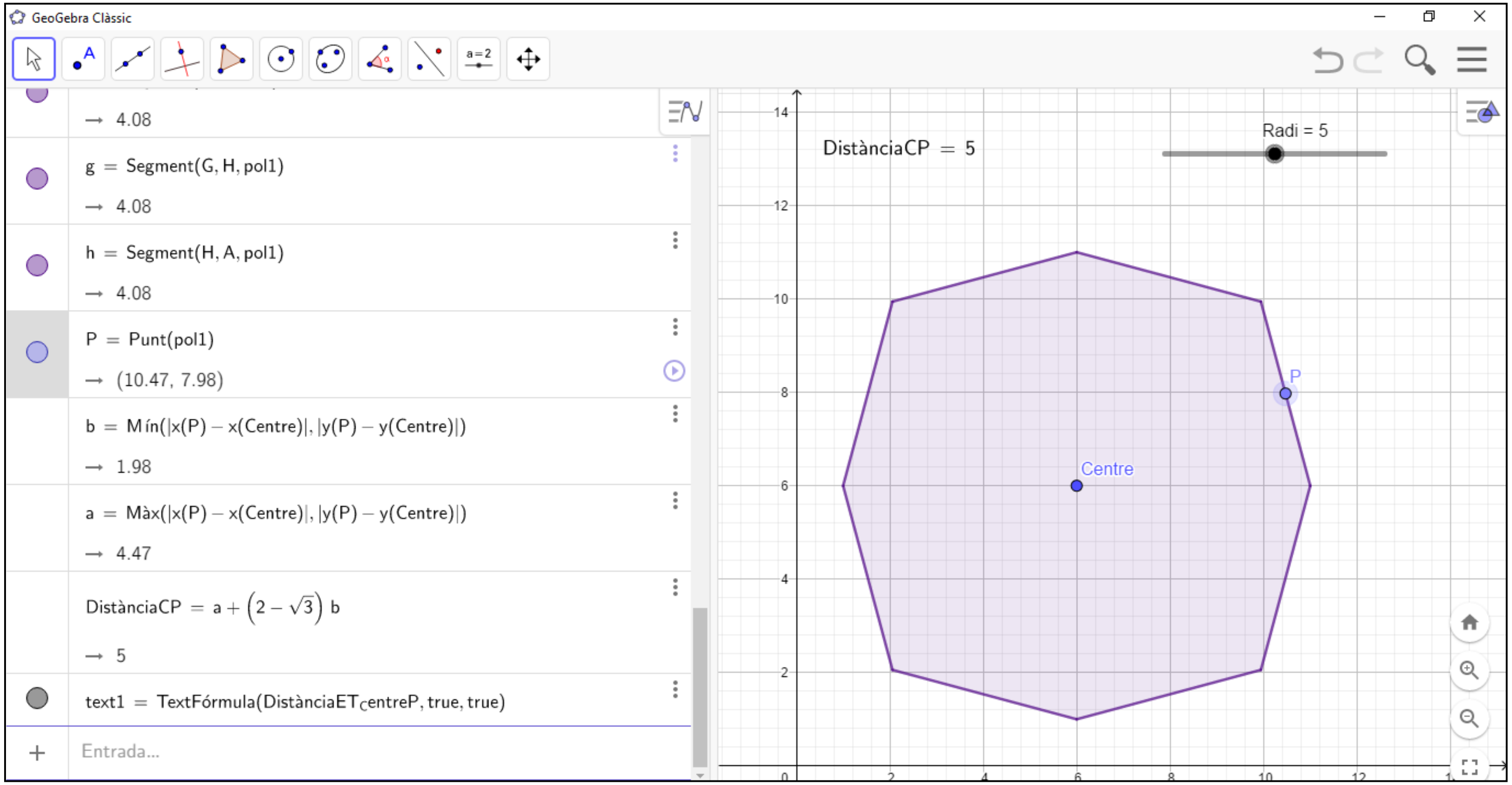


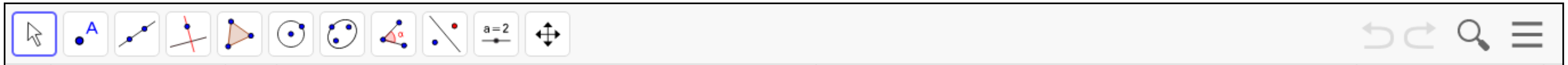
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt Centre				Centre = (4, 2)
2	Nombre Radi				Radi = 5
3	Corba implícita eq3		CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) - Radi)	eq3: x - 0.41y = 8.17
4	Corba implícita eq4		CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) + Radi)	eq4: x - 0.41y = -1.83
5	Corba implícita eq5		CorbaImplícita(-(x - x(Centre)) - (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(-(x - x(Centre)) - (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) - Radi)	eq5: -x - 0.41y = 0.17
6	Punt G		Punt d'intersecció entre eq4 i eq5	Intersecció(eq4, eq5)	G = (-1, 2)
7	Corba implícita eq6		CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) + Radi)	eq6: 0.41x - y = -5.34
8	Punt H		Punt d'intersecció entre eq6 i eq4	Intersecció(eq6, eq4)	H = (0.46, 5.54)
9	Corba implícita eq2		CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) - Radi)	eq2: 0.41x + y = 8.66
10	Punt A		Punt d'intersecció entre eq2 i eq6	Intersecció(eq2, eq6)	A = (4, 7)
11	Corba implícita eq7		CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) - Radi)	eq7: 0.41x - y = 4.66
12	Punt D		Punt d'intersecció entre eq7 i eq3	Intersecció(eq7, eq3)	D = (7.54, -1.54)
13	Corba implícita eq8		CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sqrt(2) - 1) (x - x(Centre)) + Radi)	eq8: 0.41x + y = -1.34
14	Punt F		Punt d'intersecció entre eq8 i eq5	Intersecció(eq8, eq5)	F = (0.46, -1.54)
15	Punt E		Punt d'intersecció entre eq7 i eq8	Intersecció(eq7, eq8)	E = (4, -3)
16	Corba implícita eq1		CorbaImplícita(x - x(Centre) + (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) + (sqrt(2) - 1) (y - y(Centre)) - Radi)	eq1: x + 0.41y = 9.83
17	Punt C		Punt d'intersecció entre eq3 i eq1	Intersecció(eq3, eq1)	C = (9, 2)
18	Punt B		Punt d'intersecció entre eq1 i eq2	Intersecció(eq1, eq2)	B = (7.54, 5.54)
19	Polígon pol1		Polígon A, B, C, D, E, F, G, H	Polígon(A, B, C, D, E, F, G, H)	pol1 = 70.71
19	Segment a_1		Segment [A, B]	Segment(A, B, pol1)	a_1 = 3.83
19	Segment b_1		Segment [B, C]	Segment(B, C, pol1)	b_1 = 3.83
19	Segment c_1		Segment [C, D]	Segment(C, D, pol1)	c_1 = 3.83
19	Segment d		Segment [D, E]	Segment(D, E, pol1)	d = 3.83
19	Segment e		Segment [E, F]	Segment(E, F, pol1)	e = 3.83
19	Segment f		Segment [F, G]	Segment(F, G, pol1)	f = 3.83
20	Punt P		Punt en pol1	Punt(pol1)	P = (2.03, 6.18)
21	Nombre b		Mín(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	Mín(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	b = 1.97
22	Nombre a		Màx(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	Màx(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	a = 4.18
23	Nombre DistànciaCC		a + (sqrt(2) - 1) b	a + (sqrt(2) - 1) b	DistànciaCC = 5
24	Text text1		TextFórmula(DistànciaCC, true, true)	TextFórmula(DistànciaCC, true, true)	"DistànciaCC\, = \ 5"

Construcció 22: circumferència amb la mètrica del triangle equilàter

22_Circumferència_
Manhattan_Equilater.

22_Circumferència_
Manhattan_Equilater.





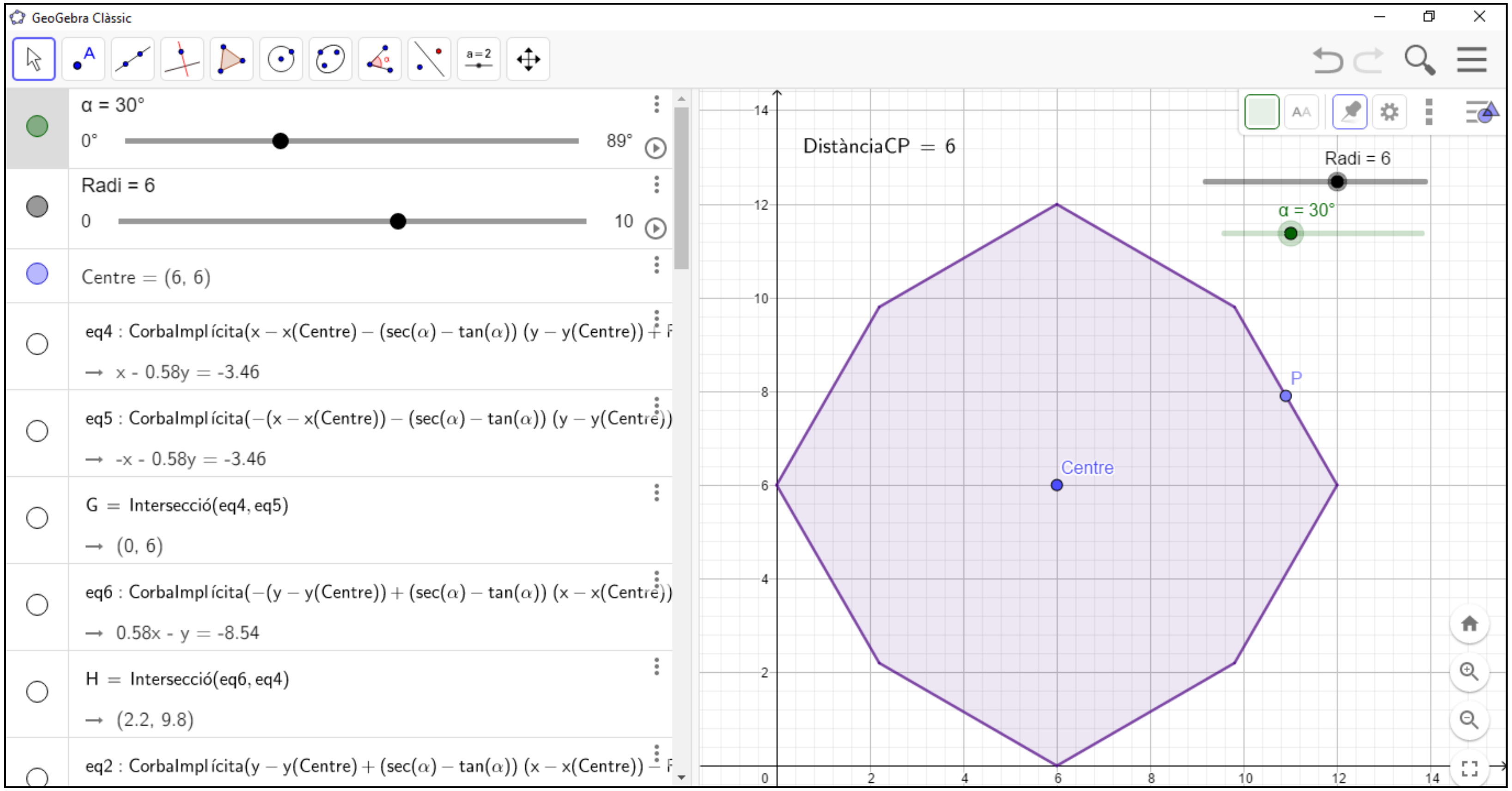
	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Punt Centre				Centre = (6, 6)
2	Nombre Radi				Radi = 5
3	Corba implícita eq3		CorbaImplícita(x - x(Centre) - (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) - (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) - Radi)	eq3: x - 0.27y = 9.39
4	Corba implícita eq4		CorbaImplícita(x - x(Centre) - (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) - (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) + Radi)	eq4: x - 0.27y = -0.61
5	Corba implícita eq5		CorbaImplícita(-(x - x(Centre)) - (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(-(x - x(Centre)) - (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) - Radi)	eq5: -x - 0.27y = -2.61
6	Punt G		Punt d'intersecció entre eq4 i eq5	Intersecció(eq4, eq5)	G = (1, 6)
7	Corba implícita eq6		CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) + Radi)	eq6: 0.27x - y = -9.39
8	Punt H		Punt d'intersecció entre eq6 i eq4	Intersecció(eq6, eq4)	H = (2.06, 9.94)
9	Corba implícita eq2		CorbaImplícita(y - y(Centre) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(y - y(Centre) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) - Radi)	eq2: 0.27x + y = 12.61
10	Punt A		Punt d'intersecció entre eq2 i eq6	Intersecció(eq2, eq6)	A = (6, 11)
11	Corba implícita eq7		CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) - Radi)	eq7: 0.27x - y = 0.61
12	Punt D		Punt d'intersecció entre eq7 i eq3	Intersecció(eq7, eq3)	D = (9.94, 2.06)
13	Corba implícita eq8		CorbaImplícita(y - y(Centre) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(y - y(Centre) + (2 - sqrt(3)) (x - x(Centre)) + Radi)	eq8: 0.27x + y = 2.61
14	Punt F		Punt d'intersecció entre eq8 i eq5	Intersecció(eq8, eq5)	F = (2.06, 2.06)
15	Punt E		Punt d'intersecció entre eq7 i eq8	Intersecció(eq7, eq8)	E = (6, 1)
16	Corba implícita eq1		CorbaImplícita(x - x(Centre) + (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) + (2 - sqrt(3)) (y - y(Centre)) - Radi)	eq1: x + 0.27y = 12.61
17	Punt C		Punt d'intersecció entre eq3 i eq1	Intersecció(eq3, eq1)	C = (11, 6)
18	Punt B		Punt d'intersecció entre eq1 i eq2	Intersecció(eq1, eq2)	B = (9.94, 9.94)
19	Polígon pol1		Polígon A, B, C, D, E, F, G, H	Polígon(A, B, C, D, E, F, G, H)	pol1 = 78.87
19	Segment a_1		Segment [A, B]	Segment(A, B, pol1)	a_1 = 4.08
19	Segment b_1		Segment [B, C]	Segment(B, C, pol1)	b_1 = 4.08
19	Segment c_1		Segment [C, D]	Segment(C, D, pol1)	c_1 = 4.08
19	Segment d		Segment [D, E]	Segment(D, E, pol1)	d = 4.08

19	Segment e		Segment [E, F]	Segment(E, F, pol1)	e = 4.08
19	Segment f		Segment [F, G]	Segment(F, G, pol1)	f = 4.08
19	Segment g		Segment [G, H]	Segment(G, H, pol1)	g = 4.08
19	Segment h		Segment [H, A]	Segment(H, A, pol1)	h = 4.08
20	Punt P		Punt en pol1	Punt(pol1)	P = (10.47, 7.98)
21	Nombre b		Mín(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	Mín(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	b = 1.98
22	Nombre a		Màx(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	Màx(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	a = 4.47
23	Nombre DistànciaCP		a + (2 - sqrt(3)) b	a + (2 - sqrt(3)) b	DistànciaCP = 5
24	Text text1		TextFórmula(DistànciaCP, true, true)	TextFórmula(DistànciaCP, true, true)	"DistànciaCP\, = \,5"

Construcció 23: circumferència amb la mètrica alfa-distància

23_Circumferència_Alpha_Manhattan.ggb

23_Circumferència_Alpha_Manhattan.html



	Nom	Icona	Descripció	Definició	Valor
1	Angle α				α = 30°
2	Nombre Radi				Radi = 6
3	Punt Centre				Centre = (6, 6)
4	Corba implícita eq4		CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) + Radi)	eq4: x - 0.58y = -3.46
5	Corba implícita eq5		CorbaImplícita(-(x - x(Centre)) - (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(-(x - x(Centre)) - (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) - Radi)	eq5: -x - 0.58y = -3.46
6	Punt G		Punt d'intersecció entre eq4 i eq5	Intersecció(eq4, eq5)	G = (0, 6)
7	Corba implícita eq6		CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) + Radi)	eq6: 0.58x - y = -8.54
8	Punt H		Punt d'intersecció entre eq6 i eq4	Intersecció(eq6, eq4)	H = (2.2, 9.8)
9	Corba implícita eq2		CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) - Radi)	eq2: 0.58x + y = 15.46
10	Punt A		Punt d'intersecció entre eq2 i eq6	Intersecció(eq2, eq6)	A = (6, 12)
11	Corba implícita eq7		CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(-(y - y(Centre)) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) - Radi)	eq7: 0.58x - y = 3.46
12	Corba implícita eq3		CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) - (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) - Radi)	eq3: x - 0.58y = 8.54
13	Punt D		Punt d'intersecció entre eq7 i eq3	Intersecció(eq7, eq3)	D = (9.8, 2.2)
14	Corba implícita eq8		CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) + Radi)	CorbaImplícita(y - y(Centre) + (sec(α) - tan(α)) (x - x(Centre)) + Radi)	eq8: 0.58x + y = 3.46
15	Punt F		Punt d'intersecció entre eq8 i eq5	Intersecció(eq8, eq5)	F = (2.2, 2.2)
16	Punt E		Punt d'intersecció entre eq7 i eq8	Intersecció(eq7, eq8)	E = (6, 0)
17	Corba implícita eq1		CorbaImplícita(x - x(Centre) + (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) - Radi)	CorbaImplícita(x - x(Centre) + (sec(α) - tan(α)) (y - y(Centre)) - Radi)	eq1: x + 0.58y = 15.46
18	Punt C		Punt d'intersecció entre eq3 i eq1	Intersecció(eq3, eq1)	C = (12, 6)
19	Punt B		Punt d'intersecció entre eq1 i eq2	Intersecció(eq1, eq2)	B = (9.8, 9.8)

20	Polígon pol1		Polígon A, B, C, D, E, F, G, H	Polígon(A, B, C, D, E, F, G, H)	pol1 = 91.29
20	Segment a_1		Segment [A, B]	Segment(A, B, pol1)	a_1 = 4.39
20	Segment b_1		Segment [B, C]	Segment(B, C, pol1)	b_1 = 4.39
20	Segment c_1		Segment [C, D]	Segment(C, D, pol1)	c_1 = 4.39
20	Segment d		Segment [D, E]	Segment(D, E, pol1)	d = 4.39
20	Segment e		Segment [E, F]	Segment(E, F, pol1)	e = 4.39
20	Segment f		Segment [F, G]	Segment(F, G, pol1)	f = 4.39
20	Segment g		Segment [G, H]	Segment(G, H, pol1)	g = 4.39
20	Segment h		Segment [H, A]	Segment(H, A, pol1)	h = 4.39
21	Punt P		Punt en pol1	Punt(pol1)	P = (10.9, 7.91)
22	Nombre b		Mín(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	Mín(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	b = 1.91
23	Nombre a		Màx(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	Màx(abs(x(P) - x(Centre)), abs(y(P) - y(Centre)))	a = 4.9
24	Nombre DistànciaCP		a + (sec(α) - tan(α)) b	a + (sec(α) - tan(α)) b	DistànciaCP = 6
25	Text text1		TextFórmula(DistànciaCP, true, true)	TextFórmula(DistànciaCP, true, true)	"DistànciaCP\, = \ 6"