Travail de Recherche

Sur la conception moderne de l'infini

Kummer

2020-2021

Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt.

«Toute chose, finie ou infinie, est définie, sauf Dieu, et peut être comprise par l'intellect.»

Georg Cantor

Remerciements

À M. Santiago Migliorelli, pour m'avoir encouragé à poursuivre mes rêves et à continuer dans le beau sentier des mathématiques.

À Mme Hélène le Mauff, pour m'avoir appris la langue française et pour m'avoir transmis la motivation dont j'avais besoin pour rédiger un bon travail.

À mes parents, pour croire en moi et m'avoir enseigné ce que la vie est. Merci beaucoup pour m'avoir aidé pendant mes mauvaises passes, pour m'avoir donné des ailes et pour m'avoir enlevé toutes les barrières avec lesquelles je me suis trouvé.

À mes chers amis, qui ont été des incroyables sources d'inspiration et qui m'ont accueilli dans cette aventure appelée « baccalauréat ».

Et, finalement, merci à Mme Armonia Martínez et a Mme Concepción Hito pour m'avoir offert son aide pendant les phases de recherche et de rédaction du travail.

Abstract

Ce travail vise à donner une vision étendue des théories et des lignes de pensée concernant l'idée d'infini, en particulier celles qui peuvent s'encadrer dans le domaine des mathématiques à cause de son vaste contenu logique. L'histoire de l'infini et du nombre commence dans la Grèce Antique avec le pas du mythe au logos et les premiers postulats de l'ontologie. Ici, les premières problématiques naissent : le mouvement et le changement se mettent en doute. Grâce à la logique, discipline développée quelques décennies après, la philosophie subira une forte croissance, mais éphémère, car elle entrera en déclin lors de la chute de la civilisation hellène. Les penseurs et théologues chrétiens restreindront cette idée à Dieu, et la domination de l'Église et du dogme provoqueront une suppression des lignes alternatives à la religion. Cependant, des progrès vont être faits par rapport au calcul d'aires et de volumes sous des courbes : c'est dans cette période où l'on trouve les prédécesseurs du calcul infinitésimal de Newton et de Leibniz, une technique bancale à cause des concepts flous de fluxion et d'indivisible. Peu à peu ces imperfections métaphysiques se parachèveront, avec les brillantes interventions d'Augustin Louis de Cauchy et Karl Friedrich Weierstrass, qui y introduira le concept de limite à partir de la définition $\varepsilon - \delta$. La question de la description des nombres réels restera néanmoins irrésolue jusqu'aux contributions de Richard Dedekind, avec les coupures de Dedekind, et Charles Méray, avec son idée de construire un nombre à partir de l'addition des termes d'une suite convergente. Georg Cantor finira avec le conflit de la définition de nombre avec sa théorie de variétés, mais il va encore ranimer le débat autour de l'infini: il ouvre le monde des ordinaux et des cardinaux transfinis, en développant en même temps des règles pour opérer avec eux. L'arithmétique transfinie et des concepts généraux de théorie des ensembles sont abordés dans le cadre mathématique du travail.

Mots clés : logique mathématique, infini en acte, infini potentiel, théorie naïve des ensembles, axiomes de ZF, hypothèse du continu, arithmétique transfinie.

Abstract

Aquest treball té com a objectiu donar una visió àmplia de les teories i dels corrents de pensament relacionats amb la idea d'infinit, en particular aquells que poden emmarcar-se en el domini de les matemàtiques degut al seu estès contingut en lògica. La història de l'infinit comença a l'Antiga Grècia amb el pas del mite al logos i els primers postulats de l'ontologia. És aquí on neixen els primers problemes: el moviment i el canvi es posen en dubte. Gràcies a la lògica, disciplina desenvolupada unes dècades més tard, la filosofia tindrà la seva època daurada, molt efímera, que s'esfondrarà amb la caiguda de la civilització helena. Els pensadors i teòlegs cristians, per la seva banda, restringiran aquesta idea a Déu, i la dominació de l'Església i del dogma provocaran la supressió de tota línia de pensament alternativa a la religió durant molt de temps. No obstant això, es progressarà d'una manera notable en el càlcul d'àrees i de volums sota corbes: és en aquesta època quan trobem els predecessors del càlcul infinitesimal de Newton i de Leibniz, una tècnica fràgil a causa dels conceptes vagues de fluxió i d'infinitesimal. De mica en mica se superen i es corregeixen aquestes imperfeccions metafísiques, amb les brillants intervencions d'Augustin Louis de Cauchy i de Karl Friedrich Weierstrass, qui hi introduirà el concepte de límit a partir de la definició $\varepsilon - \delta$. La qüestió de la descripció dels nombres reals restarà sense resoldre fins a les contribucions de Richard Dedekind, amb els talls de Dedekind, i de Charles Méray, amb la idea de nombre com a resultat de l'addició de termes d'una sèrie convergent. Georg Cantor acabarà amb la discussió al voltant de la definició dels nombres amb la seva teoria de varietats, però juntament amb aquesta revolucionarà el debat sobre l'infinit: amb ella obrirà el món dels ordinals i dels cardinals transfinits, desenvolupant alhora les normes per operar amb ells. L'aritmètica transfinita i els conceptes generals de la teoria de conjunts són tractats dins el marc matemàtic del treball.

Paraules clau: lògica matemàtica, infinit en acte, infinit en potència, teoria informal de conjunts, axiomes de ZF, hipòtesi del continu, aritmètica transfinita.

Tableau des contenus

Tableau des figures

Introduction

Introduction personnelle

J'interprète les mathématiques comme cette sorte de jeu formel qui nous permet de nous abstraire en créant une vérité parallèle parfaite. Elles sont un tout vaste monde dont les humains ne pouvons que nous rapprocher, car même si dans lui tout est vrai, rien n'est réel. Les mathématiques sont, à la fin, un consensus sur ce qui est éternellement parfait, cette perfection étant basée sur la vérité. Mais, même si toute cette tour qu'on a construite sur les ciments de la logique semble complète, elle est si abstraite dans ses fondements qu'on ne sait plus si ces briques appartiennent au domaine de la plus ancienne philosophie. On ne peut alors que spéculer sur qu'est-ce que le nombre et accorder une série de principes élémentaires sur lesquels on pose les bases de cette perfection. Cette extrême formalité que les mathématiques ont quand on les développe après avoir interprété des problèmes se casse lorsqu'on se met vraiment à penser à certains aspects dangereusement flous comme leur principe élémentaire.

L'abstraction qu'on fait de l'idée de nombre n'est pas soutenue par aucun fait empirique et, pour autant, n'est pas ni vraie ni fausse. Tout simplement, le nombre n'est pas. Le nombre est inventé mais tout ce qui est devenu après lui est vrai. C'est à cause de cela qu'il devient si important d'avoir une bonne définition de nombre et d'élaborer les meilleures règles possibles en vue d'arriver jusqu'aux confins de la perfection.

Une autre idée qu'a tourmenté l'humanité depuis des temps immémoriaux est celle postulant l'existence de l'infini. Les humains, nous voulons toujours des réponses, ce qui nous a mené à créer et interpréter le monde de sorte qu'on essaye d'obtenir des possibles arguments en faveur d'une réponse ou de l'autre. Ce processus d'interprétation, qu'on pourrait qualifier de philosophie, est ce qui nous a conduit à construire la vérité à partir du nombre et toutes les mathématiques. L'infini n'est présent que dans nos têtes et c'est pour cette raison qu'on ne pourra jamais obtenir une réponse concernant sa nature. Ou pas. Dès la description d'être de Parménide d'Élée tout ce qu'on supposait comme existant s'est quand même mis en doute, comme le mouvement ou la mutabilité. Et on ne pourrait moins attendre de l'infini : existe-t-il ou pas ? Pourrait-on considérer qu'y chercher, plus que des réponses, des descriptions, nous mène inévitablement à voir la terrible fragilité formelle de toutes nos abstractions ?

Le point vraiment intéressant concernant l'infini vient lors de l'application des principes logiques qu'on a développés depuis Aristote aux encore plus anciennes idées de nombre et d'infini primitif. On ne connaît pas et on ne connaîtra jamais l'infini, mais la question qu'intriguait les mathématiciens de la fin du XIXe siècle et début du XXe était : doit-on se priver de son idée préconçue d'infinitude et assumer sa vérité logique ?

À partir de là, absolument tout ce que l'on peut dire n'est pas ni correct ni incorrect. Croire la non-existence de rien qui soit infini est licite, mais c'est ennuyant puisque cela implique qu'il ne faut pas chercher plus. Et les sciences formelles ne veulent pas cela, n'est-ce pas ? Ce que les sciences formelles prétendent de faire est d'être omnipotentes. Même si on sait qu'on n'y arrivera jamais, pourquoi rester sans penser ? On n'est pas satisfaits : on veut toujours plus de réponses, et c'est pourquoi que les mathématiciens ont assumé la possibilité d'un infini vrai. Mais cette question est vraiment dichotomique car n'importe quoi est vrai ou faux, mais pas les deux à la fois. Alors, qu'est-ce qu'il se passe dans la philosophie et les mathématiques lorsqu'on assume que l'infini existe ?

Objectifs du travail et méthodologie

Ce travail vise à enquêter sur ce que l'on comprend par « nombre » et toutes ces conclusions interprétant la nature des magnitudes et des nombres infinis. Cet écrit représente une exploration des bases philosophiques des mathématiques, à la fin. On parcourt une grande partie des problèmes parmi les domaines de la métaphysique et de l'ontologie avec l'excuse d'aborder la question mathématique de l'infini logique.

Il y a trois axes principaux dans le travail, chacun avec ses raisons d'être et son but précis. Ces trois axes sont le cadre historique, le cadre mathématique et le cadre pratique :

- **Cadre historique** : Dans le cadre historique on expose les différentes problématiques sur le concept d'infini qui se sont posées au fil des années, depuis l'ancienneté jusqu'à la théorie naïve d'ensembles conçue par Georg Cantor au XIXe siècle. La continuité est le fil conducteur d'à peu près toute cette partie, depuis la négation de l'espace et du mouvement tout d'abord postulée par Zénon d'Élée jusqu'à l'abstraction numérique de la droite réelle et les coupures de Dedekind. L'histoire de la philosophie joue un rôle vital dans la plupart du cadre historique ,lors de l'étroite relation tout au long de l'histoire entre l'infini, le chaos et Dieu même. On raconte dans cette partie, donc, les conclusions obtenues à partir des spéculations rationnelles et logiques sur ces savoirs éthérés.

- **Cadre mathématique** : Dans le cadre mathématique, même si les mathématiques sont plus ou moins présentes parmi tout le travail, on essaye de décrire les caractéristiques logiques de la théorie d'ensembles de Zermelo-Frankel. Cette théorie est un système axiomatisé à partir duquel on a réussi à développer un raisonnement logique qui peut nous décrire toutes les mathématiques à partir de certaines règles logiques élémentaires. La théorie abordée dans cette partie est juste un des plusieurs modèles axiomatisés valides proposés. On a choisi ce modèle parce qu'il est très généralisé et étendu parmi la communauté mathématique, mais par aucune autre raison. Dans cette partie on parle aussi, bien que nous en ayons parlé dans le cadre historique, sur l'hypothèse du continu et ce qu'elle implique.

- **Cadre pratique** : Le cadre pratique consiste à commenter deux textes qui ont beaucoup influé Cantor. On essayera de trouver des conclusions (pas des réponses) tout en analysant des textes des philosophes antérieurs et des personnages importants dans ce qui concerne le sujet de l'infini mathématique. Les textes qui servent de substrat pour cette dissertation sont des textes originaux (traduits au français, à l'espagnol ou en version anglaise). L'intention de cette dissertation est celle de compléter le cadre historique avec la pensée de Descartes et de Locke.

Le travail a pour but de faire réfléchir sur les questions qui ont entouré de mystère l'infini et sur la nature abstraite de la discipline mathématique. La futilité de cette sorte de mathématiques, qui pourraient être presque considérées comme un jeu sans réponse, constitue l'une des raisons principales pour l'élaboration de ce travail. La beauté et pureté logique n'ont point de comparaison avec l'utilité d'un concept. Pourquoi se distraire avec des mathématiques rustres quand on peut se laisser enchanter avec la superfluité de la logique ?

Du point de vue technique, ce travail a aussi quelques buts comme l'apprentissage du langage LaTeXet de certains logiciels informatiques comme Overleaf qui ne sont pas trop couramment utilisés. En synthèse, les objectifs du travail sont ceux de s'enrichir et de se cultiver intellectuellement, en plus de s'interroger sur quelques aspects vitales autour de la raison d'être des sciences formelles.

Hypothèse de partie

Formuler une hypothèse de partie dans ce travail est très compliqué à cause de la nature éthérée de toutes les réponses qu'on peut donner à cette question de partie. Quelle que soit l'hypothèse qu'on formule, soyez avertis, ne sera pas (et ne pourra jamais être) ni réfutée ni confirmée. Cependant, la plus opportune serait celle-ci: *les mathématiques peuvent donner des réponses par rapport à l'infini, et la logique suffit à le comprendre.*

Partie I

Cadre historique

Chapitre 1

La civilisation grecque face à l'*apeiron*

La Grèce Antique est la première civilisation qui développe la pensée rationnelle et dépasse les explications mythiques du monde, le berceau de la philosophie. Les civilisations antérieures n'étaient pas trop parvenues à connaître les mathématiques à part celles avec des applications matérielles et les grecs sont les premiers à construire des mathématiques absolument abstraites éloignées en première instance du monde qui les entourait. Les grecs avaient néanmoins hérité la nécessité empirique de dessiner les mathématiques: pour eux, un processus mathématique était vrai s'il pouvait être représenté avec un compas et une règle et, pour autant, ils avaient les limitations que la géométrie leur imposait. Les grecs sont les pères de la logique et de la mathématique moderne mais ces barrières leur ont supposé un obstacle par rapport au développement de la discipline.

Pourtant, les grecs avaient eu un débat très intéressant sur la nature de l'infini qui va influencer d'une façon très claire la mathématique et la philosophie des prochaines époques. La métaphysique et les mathématiques grecques ne peuvent pas se séparer, car les mathématiques qui s'y développaient étaient toujours encadrées dans le savoir qu'on appelait philosophie.

Le nom grec pour désigner le flou de l'infini est *apeiron*, un mot pour eux synonyme de chaos ou non-définition auquel ils ne voulaient pas faire face. Depuis Zénon, et jusqu'à Aristote, les mathématiques grecques vont rejeter toute forme d'infini, selon Aristote, *en acte*, et la pensée aristotélicienne va perdurer pendant très longtemps. D'autres philosophes grecs, néanmoins, vont théoriser sur des concepts très semblables à celui de notre infini. Afin d'éviter des contradictions, ils vont omettre les mentions à tout nombre qui ne soit pas fini. Pour parcourir les références et les concepts mathématiques essentiels autour de l'*apeiron*, il est indispensable de jeter un œil aux postulats ontologiques de Parménide et ceux de son disciple, Zénon.

1.1 L'école Éléatique

L'école Éléatique est une des premières écoles pré-socratiques, apparue pendant le VIe et le Ve siècle av. J.-C., et l'une des plus influentes de l'époque. Beaucoup de théories et d'idées sont nées dans cette école, dite Élatique dû à sa situation géographique (dans la ville d'Élée, dans la Grande-Grèce), comme Parménides d'Élée où Zénon d'Élée, dont on va parler plus tard. Cette école sera la première à utiliser l'infini et à en laisser constance dans des écrits. Les idées les plus importantes nées dans cette école vont aborder des sujets comme la nature de l'être et, à partir de cela, la nature des concepts de mouvement ou de temps. L'école Éléatique va alors être la première à théoriser, imaginer et essayer de manipuler l'entité infinie[1].

Leurs plus grands représentants sont, donc, Parménide et Zénon. L'un est connu pour avoir posé les premières questions sur l'être, et l'autre pour avoir faussement « démontré » que ni le mouvement ni le temps n'existaient, respectivement.

1.1.1 Parménide et la nature de l'être

On ne peut pas commencer cette exploration de l'infini sans passer par la définition de ce qui existe ou ce qui n'existe pas. Parménide d'Élée (né à la fin du VIe siècle av.J.-C. et mort au milieu du Ve) est le fondateur de l'ontologie, la discipline philosophique qui décrit ce qui existe et ce qui n'existe pas, en plus des qualités des choses existantes et leur relation avec notre perception. L'ontologie est donc la discipline qui aborde la nature de l'être, développée par les éléatiques de façon primitive. Parménide n'a contribué ni au développement ni au perfectionnement de l'infini, mais c'est impossible de suivre une ligne d'argumentation chronologique sans expliquer ses postulats sur l'être.

Selon Parménide, la qualité intrinsèque de l'être est celle d'*exister*. En d'autres mots, si quelque chose n'existe pas, alors elle n'*est* pas, et vice versa. À partir de ce principe, Parménide extrait toute une série de conclusions. Celles-ci sont l'unicité, l'immutabilité, la finitude, l'indestructibilité, l'indivisibilité et le fait que l'être ne puisse pas être engendré. Dans son poème, il décrit les arguments en faveur de cette nature de l'être :

- L'être n'est pas engendré car, s'il ne l'était pas, il aurait dû être créé à partir du non-être, ce qui est impossible, car le non-être n'existe pas.
- Il est indivisible car il est composé tout entier d'*être* et on ne peut pas y distinguer des parties (comme il n'y a que l'être et le non-être, et le non-être n'existe pas, la seule chose qu'il peut y avoir dans l'être, c'est l'être).

[1] L'école de Milet avait vraiment été la première à se questionner sur l'*arkhé*, le principe créateur, et on trouve qu'un de leurs représentants, Anaximandre, pensait que ce principe créateur était l'*apeiron*.

- Il n'est pas mutable car s'il cesse d'exister dans un état A pour exister dans un état B, on est en train de dire que l'être n'existe plus dans l'état A, ce qui casse le principe qui dit que l'être n'est pas engendré.
- L'être est indestructible car il n'est pas mutable et, pour autant, il ne peut pas cesser d'exister car cela casserait le principe fondamental de l'être en tant qu'« être non-existant ».
- L'être est fini, car il est précis et il est concret (c'est-à-dire qu' il est une chose concrète et, s'il ne l'était pas, il ne serait pas une entité et, pour autant, il n'existerait pas, ce qui pose une contradiction).
- Et, finalement, il est unique, car il n'existe que l'être, et tout ce qui ne serait pas de l'être serait du non-être et, par conséquent, n'existerait pas.

On peut voir ici une gestation de ce que deviendrait plus tard la logique classique, en envisageant des contradictions logiques et ce qu'on appellera plus tard *reductio ad absurdum*. Parménide n'est pas considéré comme un père fondateur de la logique, mais on peut voir un raisonnement déductif très correct et avancé dans sa pensée. Le clé réside dans son idée de « ce qui n'existe pas ne peut même pas se penser», et que par conséquent, « tout ce que l'on peut définir existe », l'un des piliers les plus importants sur lesquels l'ontologie et la métaphysique s'appuieront. En conséquence, n'importe quelle réponse fausse ou contradictoire par rapport aux postulats auparavant mentionnés, manquerait de raison[2].

1.1.2 Zénon et les paradoxes

Zénon d'Élée (490-425 av.J.-C.) était un métaphysicien grec appartenant à l'école Éléatique. Il est connu pour avoir formulé des problèmes d'intuition avec des concepts infinis impliqués. Les problèmes qu'il va poser tout au long de sa vie ne pourront pas être abordés avec les mathématiques grecques et vont être abordés du point de vue métaphysique. Zénon sera le premier à travailler avec des quantités infinies et il va être aussi le mathématicien qui va considérer une sorte de $\frac{1}{\infty} = 0$, même s'il ne le fera pas explicitement[2, pp. 81-84]. Il posera les fondements pour que les mathématiques postérieures développent les outils nécessaires pour aborder ces paradoxes d'une façon logique.

Les paradoxes de Zénon les plus célèbres et utiles dont ce travail va extraire une grande partie de son fil conducteur sont les paradoxes appelés de la dichotomie et d'Achille et la tortue, qu'on va exposer dans les prochaines pages.

[2] Avant l'arrivée d'Aristote, qui argumentera contre certains points de la pensée éléatique, on développe tout un discours autour de ces postulats. Il faudra voir aussi Gorgias, un sophiste qui contredira les arguments de Parménide et va élaborer une ligne de pensée pour conclure que l'être ne peut pas être, en considérant son manque de limite comme la qualité déterminante de sa non-existence.

Paradoxe de la dichotomie

Le paradoxe de la dichotomie a pour but de démontrer la non-existence de l'espace, du temps et même du mouvement. Zénon base ses arguments sur la thèse que l'espace et le temps sont infiniment divisibles et que, pour qu'un corps effectue un mouvement, il faut que ce corps parcourt une infinité de pas dans un temps fini, ce qui, aux yeux de la métaphysique grecque, est impossible. Zénon met un exemple, le plus connu, celui de la pierre et l'arbre.

Paradoxe 1 *Une pierre jetée contre un arbre à un mètre de distance doit parcourir en première instance le premier demi-mètre, mais aussi, avant le premier demi-mètre, elle doit en parcourir la moitié, c'est-à-dire, un quart, et comme ça ad infinitum.*

Zénon argumente que, à cause de la division infinie de la distance que le caillou doit parcourir, c'est impossible que la pierre parcourt la moindre distance. En fait, Zénon postule que la pierre n'abandonne jamais la main, puisque quelque soit la distance qu'on prenne de référence, il y en aura toujours une infinité de plus petites qu'elle et que, pour autant, la pierre devra parcourir une infinité de pas avant d'abandonner la main. Le paradoxe réside dans le fait que théoriquement il est logique de raisonner ainsi, mais l'expérience contredit ce raisonnement.

Des philosophes vont proposer des solutions encadrées dans la métaphysique, comme par exemple la solution aristotélicienne qu'on va voir plus tard. Les philosophes qui ont essayé de chercher une solution à ce paradoxe concentrent leurs réponses dans deux types : ceux qui croient que l'erreur consiste à considérer l'espace comme une entité continue et ceux qui croient que l'erreur est dans la propre division infinitésimale de l'espace (ils disent, alors, que pouvoir trouver une succession par laquelle diviser l'espace entre des parties infinies ne veut pas dire que l'espace soit intrinsèquement divisé en parties infinies). Zénon pensait probablement que la somme infinie de distances dont il parlait était infinie puisque toutes les distances individuelles sont de signe positif, une illusion très commune dans les régressions à l'infini.

Avec les suites et les limites modernes, on a pu prouver la convergence de la progression des divisions de l'espace, mais le problème métaphysique reste, même avec l'intervention des mathématiques, irrésolu. L'analyse moderne, alors, aborde ce problème comme la somme infinie des termes d'une progression géométrique dont le terme général est :

$$a_n = d_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Où d_0 est la distance de référence, c'est-à-dire, le premier terme de la progression (dans ce cas, $d_0 = \frac{1}{2}$, le premier terme de la progression après le 1 total, mais on va maintenir le symbole de d_0 pour généraliser). On peut calculer l'addition des infinis termes de cette succession avec la mathématique de nos jours puisque la progression est convergente ($r < 1$). On le calculerait comme ça :

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_0}{2^{n-1}} = \frac{d_0}{1-\frac{1}{2}} = 2d_0$$

La somme des distances est, alors, deux fois celle de la distance de référence (dans le paradoxe, cela équivaut à 1). Ce paradoxe a servi pour développer ces outils, mais le but du paradoxe est de faire réfléchir le lecteur sur l'éternelle divisibilité des entités continues et, grâce à ça, démontrer son immutabilité. La mathématique, néanmoins, démontre que c'est possible de faire cette infinité de pas dans un temps fini à partir du processus qu'on vient de faire. Ce que Zénon veut exprimé, exprimé dans des termes modernes, est :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_0}{2^{n-1}} = \frac{d_0}{2^\infty} = \frac{d_0}{\infty} = 0$$

Et qu'il est alors nécessaire de faire $\infty \cdot \frac{d_0}{\infty} = d_0$ pour obtenir le résultat ce qui, aux yeux de n'importe quel mathématicien, n'est pas du tout correct. Le paradoxe est en fait là, dans la considération de l'espace comme une entité qui n'est pas continue mais, tout au contraire, divisé dans des parties infinitésimales. Si on considère l'espace comme une entité continue (infiniment divisible, oui, mais continue et non divisée), alors il n'y a pas de paradoxe.

Paradoxe d'Achille et la tortue

Dans le paradoxe d'Achille et la tortue on trouve une autre « illusion » qui veut nous faire croire que le mouvement n'existe pas. Le paradoxe, comme dans l'antérieur, est en soi une régression à l'infini[3]. Le paradoxe dit ceci :

Paradoxe 2 *Achille court plus rapidement qu'une tortue. Lui et la tortue font une course, et Achille décide de donner à la tortue un avantage de 100 mètres. La course commence et Achille parcourt la distance qui le séparait de la tortue et, dans le même temps, la tortue parcourt une distance de, disons, 5 mètres (il court 20 fois plus vite que la tortue). Achille court les 5 mètres qui le séparaient de la tortue mais elle parcourt encore une distance de 0,25 mètres. Achille court ces 25 centimètres mais la tortue parcourt encore un centimètre, et comme ça ad infinitum.*

Le fait paradoxal est, donc, qu'il semble qu'Achille, en courant beaucoup plus rapidement que la tortue, ne peut jamais la rattraper et, alors, la tortue gagne la course puisqu'Achille maintient toujours une distance avec elle (proportionnellement décroissante). Cela ne concorde pas avec l'expérience réelle, où Achille dépasserait la tortue tôt ou tard. Mathématiquement exprimé, on voit ceci :

$$d_{T_n} = d_{A_1} \cdot r^{n-1}$$

Où d_T est la distance parcourue par la tortue et d_A, la distance parcourue par Achille. On voit une récursion aux progressions convergentes dans ce paradoxe, presque la même que dans l'antérieur. Il faut

[3]Dans [11], *« regresión al infinito viciosa »*

dire que la raison 1:20 est mise au hasard pour faciliter les calculs, mais elle n'apparaît pas dans les textes originels (en fait, il est possible de considérer n'importe quelle raison $r = \frac{d_T}{d_A}$. À partir de ce moment, on va considérer une raison r telle que $r < 1$ pour que la progression soit convergente).

Si on aborde ce problème avec la cinématique moderne, il faut que l'on considère les équations de position des deux corps :

$$x_T = r \cdot t + x_0$$

$$x_A = t$$

Où x_0 est la distance d'avantage et t est le temps. Ces équations (où l'on considère un mouvement unidimensionnel) représentent la distance que les deux corps parcourent indépendamment l'un de l'autre. C'est très facile de trouver le point où les deux participants se croisent en faisant $x_A = x_T$:

$$r \cdot t + x_0 = t$$

$$t(1 - r) = x_0$$

$$t = \frac{x_0}{1 - r}$$

Où, par conséquent :

$$x_T = r \cdot \frac{x_0}{1 - r} + x_0$$

Dans ce cas, Achille et la tortue se croisent dans le point 105,2632m à peu près. Le problème avec ce paradoxe réside en considérer la vitesse d'Achille dépendante de celle de la tortue et vice versa, ce qui conduit à une interprétation fausse du problème comme une série convergente. Les deux vitesses et les deux équations de position sont indépendantes (même si on peut établir une raison commune de distance) l'une de l'autre et, comme ça, on peut résoudre le problème.

Si l'on considère la progression, on voit que la somme des infinis termes arrive jusqu'à $\frac{d_A}{1-r}$ qui représente aussi le point où Achille et la tortue se croisent. Il faudrait considérer que le point limite de la progression est en fait un point d'inflexion puisqu'après le moment où Achille croise la tortue, la distance entre tous les deux augmente d'une façon inverse. La progression est une autre façon d'arriver au même résultat, mais le paradoxe réside dans la perception que dans le point donné les deux corps ont une vitesse égale à 0 (cela se voit si on fait la limite de la progression). La façon correcte d'interpréter le problème est de considérer les deux corps comme des entités indépendantes et non pas comme une progression où la vitesse qu'Achille a ne dépend pas de celle de la tortue ni vice versa.

1.2 L'intervention aristotélicienne

Après la révolution métaphysique de l'École d'Élée, on arrive à l'intervention d'Aristote (384 av. J.-C. - 322 av.J.-C.), un philosophe grec formé à l'Académie de Platon et fondateur du Lycée. Il a été l'un des philosophes de son temps les plus polyvalents puisqu'il s'est intéressé à tous les domaines scientifiques et philosophiques de l'époque. Ses contributions à la logique et à la métaphysique sont celles qui vont influencer la pensée occidentale d'un façon plus directe et forte.

L'une des œuvres magistrales qu'Aristote nous a laissées est la fondation de la logique traditionnelle, un essai de guider la pensée humaine par des chemins déductifs. La logique s'occupe d'étudier les règles valides pour faire des raisonnements, appelées « règles d'inférence », ainsi que du calcul de la véridicité des énoncés. En résumé, la logique est la « science formelle » dont le domaine de travail est l'étude de la vérité et des chemins de raisonnement que le cerveau humain peut utiliser pour extraire des conclusions véritables à partir des prémisses initiales. Aristote s'est dédié à étudier le syllogisme, un système de raisonnement où l'on a deux prémisses initiales et, à partir de là, on extrait une troisième proposition, appelée « conclusion ».

1.2.1 La logique traditionnelle et classique

La logique se base dans les termes, les unités indivisibles de sens sémantique, qui se rallient entre elles avec des verbes généralement copulatifs. Grâce à une règle de transitivité très simple, on a ce schéma : « A est B » et « C est A » donc « C est B ». Pour extraire la conclusion « C est B », il faut que les propositions « A est B » et « C est A » soient vraies. Si « A est B » ou « C est A » ne le sont pas, alors le résultat va être faux.

Il existe plusieurs types de syllogismes, selon si le sujet de la proposition est total « Tout A est B » ou partiel « Certains A sont B », ainsi que les relations entre sujet et prédicat, qui peuvent être affirmatives « A est B » ou négatives « A n'est pas B ». On trouve alors quatre types de propositions[4] :

- **Type A :** Totale (universelle) et affirmative ($\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$)
- **Type I :** Partielle (particulière) et affirmative ($\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$)
- **Type E :** Totale et négative ($\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$)
- **Type O :** Partielle et négative ($\exists x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$)

À partir de ces propositions, ce qu'on appelle « logique inductive » est fondée et les bases pour la postérieure logique propositionnelle sont posées. Aristote est connu pour avoir élaboré le carré logique, un schéma établissant les relations logiques entre tous les types de proposition.

[4]Exprimées avec le langage logique formel, postérieur à Aristote

On distingue alors quatre types de relations entre propositions : les contraires (elles ne peuvent pas être vraies à la fois mais elles peuvent être toutes les deux fausses), sous-contraires (elles peuvent être vraies en même temps mais pas fausses), contradictoires (si l'universelle est vraie, la particulière l'est aussi; si la particulière est vraie, l'universelle est indéterminée; si la particulière est fausse, l'universelle est aussi fausse; si l'universelle est fausse, la particulière est indéterminée) ou subalternes (si l'une est vraie, l'autre est fausse). Les postulats logiques d'Aristote vont servir à faire des progrès dans la mathématique puisque, comme système formel qu'elle est, il sera possible de faire appel à la logique pour démontrer des théorèmes et faire des démonstrations mathématiques rigoureuses.

Dans la logique classique propositionnelle et le calcul des propositions, il y a une série d'axiomes à partir desquels des règles d'inférence et des arguments valides se sont développés. Parmi ces règles d'inférence avec lesquelles il est plus commun de démontrer des théorèmes, on trouve :

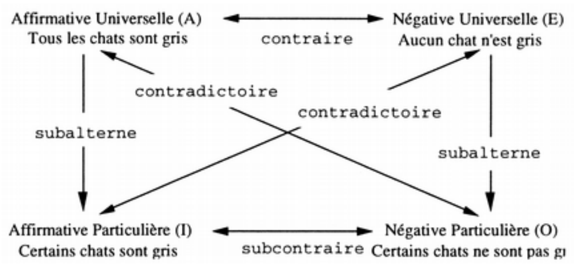

Figure 1.1: Carré logique et relations entre propositions

- *Modus ponens* : $((p \to q) \land p) \vdash q$. Ceci est un argument valide utilisé dans tous les processus mathématiques où l'on développe une expression et on y opère. C'est le raisonnement mathématique par excellence et sur lequel la plupart de preuves mathématiques s'appuient.

- *Modus tollens* : $((p \to q) \land \neg q) \vdash \neg p$. On voit cet argument dans les démonstrations par *reductio ad absurdum* lorsque les calculs effectués nous rendent un résultat faux, ce qui implique que la proposition originelle est fausse.

- *Tertium non datur* : $\vdash (p \lor \neg p)$. La loi du tiers exclu s'utilise pour désigner des contradictions où $p \land \neg p$, ce qui viole cette règle et, par conséquent, est un raisonnement faux.

- *Loi de non-contradiction* : $\vdash \neg(p \land \neg p)$. La loi de non-contradiction est la loi explicite avec laquelle on identifie des raisonnements faux (elle désigne une chose similaire à celle désignée par la loi du tiers exclu).

Aristote a été l'homme à mettre la première pierre dans ce chemin de prospérité mathématique et philosophique, en rendant possible et rationnel le raisonnement déductif avec des règles claires.

1.2.2 Aristote sur l'infini et le changement

Aristote, en plus d'être le père de la logique traditionnelle, avait proposé une solution du point de vue métaphysique aux paradoxes de Zénon. La solution qu'Aristote proposera aux paradoxes supposera un point d'inflexion sur la nature de l'infini. Il sera le premier philosophe à réfléchir sur cette idée de façon ontologique influençant les prochaines écoles philosophiques, et il va proposer aussi une distinction entre êtres : l'être *en acte* et l'être *en puissance*.

On peut appliquer cette distinction à l'infini. L'infini en puissance aristotélicien est un type d'infini qui n'existe pas tout à fait mais il se présente comme une qualité des entités qui ne terminent jamais. C'est-à-dire que, selon la pensée aristotélicienne, l'ensemble des nombres naturels n'est que potentiellement infini, car on peut prendre n'importe quelle quantité de cet ensemble, il y en aura une autre plus grande, sans aucune limite. Du fait que la suite des nombres naturels, lorsqu'on commence à compter, peut prendre toutes les valeurs qu'on veuille et du fait qu'on peut en rajouter encore une de plus on considère que cette suite est potentiellement infinie. L'infini actuel, par contre, est un type d'infini qui n'existe pas puisqu'il implique une quantité infinie de choses à la fois, toutes existantes, mais ce concept n'est pas concevable. Le fait que les quantités infinies actuelles ne puissent pas se penser est donc un indicateur de leur non-existence. Alors, c'est possible et « légal » (dans d'autres mots, cela ne contredit aucun principe sur l'être) de considérer des quantités potentiellement infinies mais pas infinies en acte.

Ce que la pensée d'Aristote implique est qu'à partir de ce moment, tout raisonnement contenant la considération de quantités infinies en acte sera erroné. Pour autant, la pensée d'Aristote influencera très fortement la façon de voir l'infini : on verra comment les infinis actuels seront considérés proches à l'hérésie et, de ce fait, les seules considérations valides ontologiquement et métaphysiquement d'infini seront celles qui auront une quantité toujours croissante ou avec la possibilité de toujours croître.

Ce que la solution suivant la ligne aristotélicienne propose est que l'espace n'est divisible entre infinies parties que potentiellement, c'est-à-dire, qu'on n'arrive jamais à la quantité infinie de divisions nécessaires pour considérer le paradoxe. Cette quantité infinie serait une quantité infinie actuelle et, pour autant, ne peut pas exister. Cette explication, sans aucune contradiction ontologique, sera acceptée comme valide et, grâce à ça, la conception de l'infini restera pareille pendant 2000 ans à peu près, jusqu'au moment où Cantor commencera à violer ce principe visant à élaborer une autre théorie sur les magnitudes infinies.

Il y a en fait une contradiction implicite lorsqu'on propose que l'infini actuel existe violant le principe de Parménide de finitude de l'être (si l'être n'est pas fini, cela implique que l'être est vague, non concret. Donc, comme l'être doit être précis pour être défini, l'infini serait du non-être). Cette rétro-alimentation des idées grecques classiques par rapport aux aristotéliciennes vont être la cause pour laquelle ni la philosophie ni les mathématiques occidentales (avec la naissance du christianisme et l'église catholique) ne vont changer la pensée.

1.3 Autres questions concernant l'infini grec

Les grecs ont découvert d'autres endroits où l'infini se cachait et quelques uns parmi eux n'avaient pas de réponse métaphysiquement correcte aux yeux de l'infini aristotélicien et les postulats de Parménide. On sait que les grecs ont été ceux qui ont découvert les nombres premiers, les nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$ ou π, et tous ces concepts sont particulièrement liés à cet infini. On va présenter, dans les prochains paragraphes, une série de problèmes que les grecs ont trouvés dont la résolution fait référence à des quantités infinies.

1.3.1 Le théorème d'Euclide

La première question qu'on va présenter est le théorème d'Euclide, présent dans le IXe livre (20ème définition) qui explique cela :

Théorème 1 *Il y a plus de nombres premiers que n'importe quelle quantité proposée de nombres premiers.*

Ce théorème est une application claire de l'infini aristotélicien. Euclide nous dit que n'importe quelle quantité qu'on propose de nombres premiers est plus petite que la quantité réelle de nombres premiers, et cela veut dire que l'ensemble de nombres premiers est potentiellement infini (il croît toujours). Euclide propose une démonstration de ce théorème, qui va être reformulée ultérieurement par d'autres mathématiciens. On va prendre sa démonstration car elle nous permet de voir plus clairement la façon dans laquelle il évite l'infini.

Soit a_p une suite finie de nombres premiers, P le produit entre tous les nombres et $q = P + 1$. Si q est un nombre premier, alors il y a déjà un nombre premier qui n'est pas dans la liste. Si q ne l'est pas, alors ça veut dire qu'un facteur premier p doit le diviser. Si ce facteur p est dans la liste, cela veut dire qu'il est un facteur diviseur de P et que, s'il l'est, ça implique qu'il sera aussi diviseur de $P - q$, c'est-à-dire, 1. Comme il n'est pas possible de diviser 1 par n'importe quoi, p n'est pas dans la liste et, par conséquent, il y a un nombre premier en dehors de la liste.

Ce problème implique un infini en puissance, puisque lui, Euclide, affirme que n'importe quelle quantité finie de nombres premiers est plus petite que la liste entière. Cette qualité de ne pas terminer est ce qui soutient la thèse d'Aristote sur l'infini puisque, pour démontrer cela, il n'y a aucune contradiction. Ce théorème, néanmoins, est l'un des premiers à considérer qu'une chose pouvait être infinie, et le fait que ce soit un théorème logiquement impeccable (qui suit la loi du tiers exclu) est un point en faveur d'Aristote.

Il y a d'autres démonstrations pour ce théorème, comme celle d'Euler (un peu plus technique)[10, pp.24-25] :

$$\prod_{i=1}^{r}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_i}\right)^k\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_i^k}\right)\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{p_i}{p_i-1}\right) \tag{1.1}$$

Où p sont tous les nombres premiers avec des ordinaux entre i et r (r représente une supposée quantité finie de nombres premiers). Ici on fait le produit de la somme des infinis termes de la progression géométrique où les raisons sont les inverses des nombres premiers. On obtient que le produit de la somme est fini, puisque la quantité r est finie. Pourtant, la deuxième partie de la démonstration, qui s'appuie sur le théorème fondamental de l'arithmétique[5], ne peut pas se négliger.

$$\prod_{i=1}^{r}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i}\right)^k\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^{k_1}}\times\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{p_2^{k_2}}\times\ldots\times\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{1}{p_r^{k_r}}=\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r}^{\infty}\frac{1}{p_1^{k_1}\times p_2^{k_2}\times\ldots\times p_r^{k_r}}$$

Et par conséquent, selon le théorème fondamental de l'arithmétique, comme tous les nombres $\mathbb{N}$ peuvent s'écrire comme le produit infini des nombres premiers, on déduit que $p_1^{k_1}\times p_2^{k_2}\times\ldots\times p_r^{k_r}$ peut représenter tous les nombres naturels. On fait alors la substitution :

$$\prod_{i=1}^{r}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i}\right)^k\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i}\right)^k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Et on sait que $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ est une série divergente (le résultat de la somme est infini). Donc, par contradiction avec le premier pas (1.1), qui donnait comme résultat un nombre fini, on déduit par *modus tollens* qu'il y a une infinité de nombres premiers.

1.3.2 Eudoxe et la méthode d'exhaustion

Eudoxe de Cnide a été l'un des premiers philosophes hellènes à s'intéresser à calculer l'aire de certaines surfaces bornées par des courbes. Il avait créé une méthode avec laquelle il est possible, à partir de plusieurs itérations, de calculer les aires de beaucoup de ces surfaces courbes. Cette méthode sera très transgressive puisqu'elle représente une sorte de calcul primitif. Cette idée pour calculer les aires peut s'utiliser pour toutes les figures qu'on veut, mais il y a une manière spécifique et détaillée avec laquelle les grecs le faisaient, et cette manière est différente face à chaque type de courbe.[2, pp.100-102] Dans la prochaine section, on va essayer de calculer l'aire sous deux des courbes coniques les plus célèbres, le cercle et la parabole.

Approximation à l'aire du cercle

La quadrature du cercle est la façon, en appliquant la méthode d'exhaustion d'Eudoxe, d'approcher l'aire et le périmètre d'une figure circulaire. En considérant un cercle comme un polygone régulier avec un nombre infini de côtés [6] il est possible de faire des approximations très précises de son aire et de son périmètre, en plus de la relation entre ce dernier et le diamètre de la figure (c'est-à-dire, de π). Aristote

[5] Tout nombre naturel n peut être exprimé avec le produit fini de puissances de nombres premiers.

[6] Suivant la ligne d'Arsitote, on va considérer un polygone avec une quantité potentiellement infinie de côtés.

a été celui qui, en considérant un polygone régulier de plus de 90 côtés, a approché le nombre π d'une façon la plus exacte dans son époque.

L'approximation qu'il a donné de π avec cette méthode a été $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, jamais vue à l'époque. La méthode d'exhaustion d'Eudoxe a vraiment supposé une avancée très grande dans la mathématique hellène, même si elle considère des infinis non pour obtenir un résultat, ce qui devrait se débattre avec les arguments aristotéliciens. On pourrait ne pas trouver des contradictions avec ce type de pensée, car Eudoxe utilise un infini potentiel de côtés mais, pour trouver le résultat final, il faudrait un infini actuel de côtés.

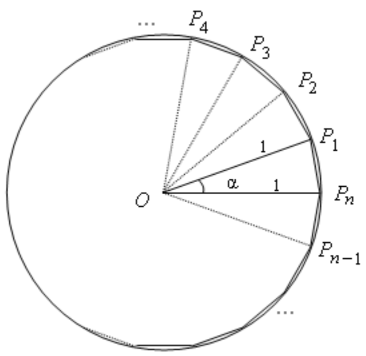

Figure 1.2: Approximation à l'aire du cercle

Quadrature de la parabole

La quadrature d'un segment parabolique est un processus itératif. Alors, de ce segment de parabole, si $A(A_x, A_y)$ et $B(B_x, B_y)$ sont les points d'intersection entre la droite le délimitant et la même parabole, on trace une droite verticale à $x = \frac{A_x+B_x}{2}$, c'est-à-dire qu'il faut tracer une droite verticale à la moitié du composant horizontal entre les deux points. À l'intersection entre cette nouvelle droite et la parabole, on trace un nouveau point. On trace un triangle et on répète le processus de choisir les deux médiatrices entre AC et BC, en traçant des nouvelles droites et, dans l'intersection, en traçant deux nouveaux triangles.

Si on répète ce processus une infinité de fois, on finira par avoir couvert tout l'aire de la parabole avec des petits triangles, chacun 8 fois plus petit que le dernier, car la hauteur se divise entre 4 et la distance horizontale est divisée entre deux. À chaque itération on trouve le double de triangles qu'à l'antérieure. L'aire couverte pour les nouveaux triangles est, donc, $\frac{1}{4}$ de celle de l'antérieure itération. Alors, on obtient une progression géométrique (1.2) nous racontant la façon dans laquelle les aires des nouveaux triangles décroissent, avec une raison $r = \frac{1}{4}$.

$$A_n = A_0 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \tag{1.2}$$

En faisant la somme des termes infinis de cette progression, on trouve que l'aire du segment de la parabole est $\frac{4}{3}$ celui du premier triangle, qu'on a appelé a_0 dans l'équation. Cette méthode représente un des antécédents les plus anciens du calcul intégral, dont on va parler plus tard, et il est un des progrès les plus grands de l'Antiquité par rapport à la manipulation de nombres infinis (autant dans le cas du segment de la parabole que dans le cas du cercle, l'infini potentiel est utilisé pour faire une approximation, et on sait que si l'on eusse utilisé l'infini en acte, on aurait pu arriver au résultat précis).

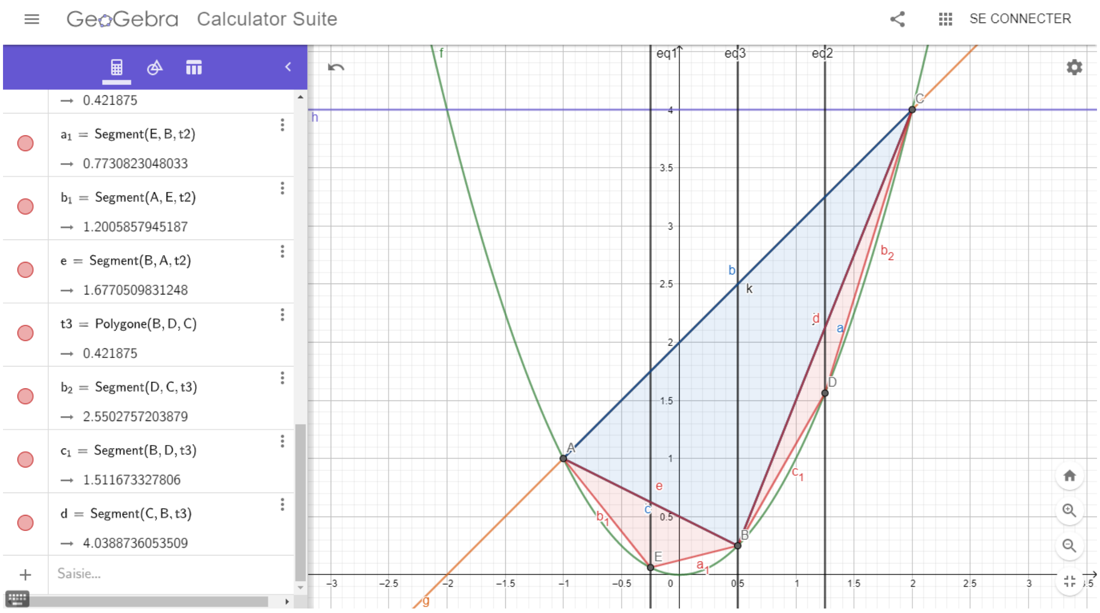

Figure 1.3: Exemple de quadrature de parabole, à la deuxième itération, avec GeoGebra.

Chapitre 2

La naissance du calcul et la nouvelle problématique

Entre les grecs et le développement du calcul infinitésimal on ne trouve pas trop d'avancées scientifiques dans le monde occidental. En Inde, en Chine et dans le monde arabe, néanmoins, il y en aura. Les plus grands représentants des progrès mathématiques seront le zéro et les nombres négatifs, des nombres qui n'avaient pas été pris en considération dans la civilisation grecque parce qu'ils « n'étaient pas ». Pourtant, dans l'Europe chrétienne, il y aura une restriction très forte de la pensée car ce que l'église ou la Bible dictait se renforçait avec de la coercition. L'église va épouser la pensée aristotélicienne et néo-platonicienne qui, fusionnées avec une doctrine religieuse omniprésente, vont beaucoup empêcher le développement des sciences (spécialement si la réponse scientifique ne plaisait pas ou contredisait celle de l'église). Donc, on se trouve avec un mauvais panorama dans une société entourée de dogmes, ceux-ci étant la façon dont cette société fonctionnait.

2.1 La morale chrétienne et l'église catholique du Moyen Âge

Le christianisme naît avec la naissance de Jesus-Christ autour de l'année 0. Les idées et conceptions chrétiennes s'étendent partout en Méditerranée, premièrement comme une secte de la religion juive interdite et, après l'édit de Thessalonique, de façon officielle dans la totalité du reste de l'empire Romain. Entre ce dernier édit et la révolution scientifique, la religion va acquérir de plus en plus de poids et va finalement éclipser les autres disciplines. On voit, surtout dans le Moyen Âge central et tardif, un développement très fort de la théologie, dont le plus haut représentant est Saint Thomas d'Aquin (1225-1274).

Thomas d'Aquin fut un philosophe et théologien chrétien du XIIIe siècle, énormément influencé par la pensée aristotélicienne et scolastique, surtout dans sa conception du mouvement et mutabilité de l'être.

Cette conception du mouvement deviendra importante aussi par rapport à l'exploration historique de sa philosophie. En fait, l'une des choses qui différenciait la conception ontologique aristotélicienne et celle de Parménide est la mutabilité de l'être. C'est-à-dire, en faisaient un lien avec l'*existence potentielle*, que selon Aristote l'être mute et change au long de son existence, tandis que, selon la tradition éléate, cette mutabilité n'était pas justifiée. C'est comme un enfant qui devient un homme : la personne avec la qualité d'enfant cesse d'être un enfant et mute jusqu'à la catégorie d'homme. Là, l'enfant qui fut cesse d'exister, mais pas la personne. On peut dire donc qu'un enfant est potentiellement un homme et, lorsqu'il l'est, il n'est plus un enfant et, pour autant, l'enfant cesse d'exister pour devenir un homme existant.

La pensée de Thomas d'Aquin incluait aussi la distinction entre la foi et la raison, qui s'occupent du monde spirituel et du monde matériel, respectivement. La reconnaissance de la foi comme doctrine valide et la démonstration de l'existence de Dieu selon les postulats aristotéliciens (surtout celui du *moteur original*) que Saint Thomas d'Aquin avait fait vont porter le Pape Léon XIII à reconnaître la pensée thomiste comme correcte et, à partir de ce moment, comme doctrine philosophique de l'église catholique. Cela inclut la conception ontologique classique de l'infini, qui coïncidait avec l'idée grecque d'infini mais avec une nuance religieuse : l'infini absolu, en acte, restera réservé à Dieu et à la foi, car la raison ne peut pas s'en occuper. Si on ose, à partir de ce moment, contredire ces postulats, on sera des hérétiques.

Pendant cette époque, on ne trouve que des travaux concernant les séries infinies, comme la série harmonique et la preuve de sa divergence[1] ou la série de Grandi[2]. On ne trouve aucune référence à l'infini, sauf dans certains textes métaphysiques du précédemment cité Thomas d'Aquin et dans ces séries infinies[2, pp. 292-293]. Cependant, il y aura des petites contributions sur les nombres irrationnels comme l'application des produits infinis pour obtenir π (2.1, selon François Viète).

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot ... \tag{2.1}$$

Et on arrive donc au début du XVIIe siècle, où le poids de l'église reste encore très lourd dans tous les aspects de la société européenne. Des scientifiques comme Johannes Kepler, Isaac Newton ou Galilée Galilei vont commencer à esquiver les restrictions d'opinion de l'Inquisition et vont faire avancer énormément tous les domaines scientifiques de l'époque. Galilée (1564-1642) fut le plus endommagé par cette répression d'entre eux, car il sera le premier à contredire la théorie géocentrique que l'église promulguait; il fut donc extrêmement censuré et persécuté. L'élaboration du traité *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze* en 1638, où il réfléchit sur le paradoxe de la correspondance 1-à-1 (dont on va parler

[1] La série harmonique est une série divergente telle que $a_n = \frac{1}{n}$. Même si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, elle est divergente car, si l'on regroupe ses termes, on voit que ses additions partielles (des deux premiers termes, puis des quatre termes suivants, puis des huit suivants, ..., puis des 2^a termes) ont un résultat plus grand que $\frac{1}{2}$. Cette preuve est du même Oresme.

[2] $S_n = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$, dont le résultat de la somme dépend de la façon dont on regroupe les termes de la suite.

plus tard) et fait des découvertes autour de la nature des ensembles infinis, supposera le point d'inflexion que la science nécessitait pour avancer[2, pp.360-361]. À partir de ce moment-là, la mentalité de croire aux dogmes que l'autorité de l'église dictait changera radicalement, et on trouvera une utilisation des méthodes de raisonnement inductives et déductives[3] dans lesquels la science moderne s'appuiera. Galilée sera, donc, le personnage qui bouleversera la pensée de l'époque et celui qui commencera la révolution scientifique des prochains siècles.

Les mathématiciens les plus influents de cette époque, comme François Viète ou John Napier font des avancées dans la trigonométrie et l'astronomie, mais pas trop par rapport à la maîtrise des magnitudes infinies. À partir des problèmes qui vont se poser, de nouvelles mathématiques seront créées : on verra le prélude du calcul infinitésimal et la naissance des mathématiques supérieures à la suite de cela.

On assiste à une séparation progressive des mathématiques et la réalité directe; l'utilisation de magnitudes infinitésimales deviendra très fréquente à partir de ce moment. L'utilisation de ces outils marquera une crise profonde invisible car les applications des nouvelles techniques cachera les possibles fissures métaphysiques et même mathématiques des nouvelles théories développées.

2.2 Problèmes mathématiques à résoudre

Grâce à Galilée les sciences croîtront d'une façon exponentielle quantitativement et qualitativement. Une relaxation des impositions du clergé sur la pensée vont pousser à des nouvelles inventions matérielles (comme des nouveaux instruments de mesure et observation) mais aussi méthodologiques (toujours en s'appuyant sur la praxis logique). La quantité de problèmes qui s'étaient posés, comme le calcul d'orbites ou trouver des droites tangentes par rapport à des courbes, feront avancer les sciences (formelles ou expérimentales) très rapidement.

La chute du modèle géocentrique et l'essor du modèle héliocentrique fera que des scientifiques comme Kepler (après Galilée et Copernicus) et des mathématiciens comme Cavalieri développent des méthodes les aidant à calculer les orbites des astres autour du Soleil. D'autres mathématiciens développeront des mathématiques appliquées où l'infini est présent, mais sans trop de rigueur. C'est là que les sciences commencent à se séparer de la conception aristotélicienne de l'infini et prennent une nouvelle direction, sans peur d'utiliser des méthodes impliquant des quantités infinitésimales qui, selon la tradition, ne seraient pas du tout acceptables.

Kepler est l'un des premiers scientifiques à développer la notion que l'aire sous une courbe de position est proportionnelle au temps écoulé. Même si les processus utilisés par Kepler et ses collègues sont très similaires à ceux que Newton et Leibniz vont développer, il n'est pas considéré de fait père du calcul. On

[3] En fait, ce dernier type de raisonnement était utilisé mais, comme la raison dont on partait était dogmatique et objectivement douteuse, on ne peut pas le considérer comme un mécanisme valide.

peut dire néanmoins qu'il l'a aidé à naître.

Les problèmes dont on parle étaient purement techniques puisque, dans le calcul de trajectoires et d'orbites, c'était impossible de recourir à la méthode d'exhaustion d'Eudoxe qui avait fonctionné jusqu'alors. Les astronomes et les physiciens avaient besoin d'un outil pour calculer des trajectoires et des vitesses instantanées[2, p. 362]. Cavalieri va proposer en 1635, dans son livre *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* la méthode des indivisibles, une méthode avec la forme de l'ancienne exhaustion mais avec de concepts nouveaux comme les *Omnes lineae* ou les similitudes entre figures.

2.2.1 Le principe de Cavalieri

La solution aux problèmes proposée par Bonaventura Cavalieri était un nouveau principe qui permettait de calculer des aires et des volumes de figures de 2 ou 3 dimensions. Le principe postule que :

Théorème 2 *Étant donnée une figure bornée de trois dimensions, elle aura deux figures tangentes de deux dimensions parallèles entre elles dans une direction fixée. N'importe quelle figure bidimensionnelle située dans l'intervalle compris entre les deux tangentes et parallèle par rapport à elles coupera la figure initiale dans une figure aussi bidimensionnelle qui aura toute la surface en commun avec les points intérieurs de la figure initiale. Si, par contre, la nouvelle figure se situe en dehors de l'intervalle, elle n'aura pas de points communs avec la figure initiale.*

Ceci nous a permis de calculer avec précision le volume des sphères à partir de figures tridimensionnelles de révolution comme le cône ou le cylindre en établissant une relation entre les aires des sections coniques parallèles à la base et celles de la sphère. Il est aussi important de connaître le principe de *omnes lineae* « toutes les lignes » de Cavalieri, l'application du principe antérieur aux figures bidimensionnelles. Dans le livre *Exercitationes geometricae sex* « Six exercitations géométriques », publié en 1647, Cavalieri introduit six problèmes de géométrie que les géomètres postérieurs vont utiliser pour élaborer des réponses et réaliser des investigations autour d'eux.

En fait, ce principe n'est qu'une des plusieurs découvertes de Cavalieri, mais il est devenu très important pour son implication dans le développement du futur calcul infinitésimal. Il a posé les bases pour que les prochains scientifiques développent plus de techniques raffinées. Le calcul du volume de la sphère se considère comme le volume d'un cylindre avec un cône inverti en lui. Si on considère une sphère de rayon r et un cylindre comme celui qu'on a dit, on sait que

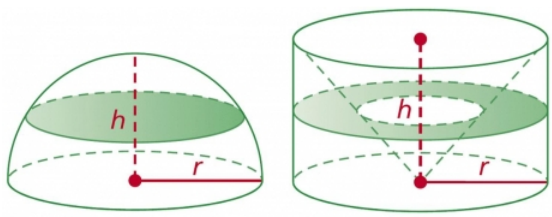

Figure 2.1: Méthode de Cavalieri pour calculer l'aire de la sphère.

l'aire d'un plan élevé une hauteur h par rapport à l'équateur de la sphère sera $\pi(r^2 - h^2)$ et que, si on coupe la figure d'à droite avec la même hauteur par rapport à la base, l'aire de la figure bidimensionnelle formée sera $\pi \times r^2 - \pi \times h^2$, ou $\pi(r^2 - h^2)$, la même que celle de la sphère. Alors, si on sait que le volume du cône est égale à $\frac{1}{3}\pi r^3$, on déduit que le volume de la sphère est deux fois la différence entre celui du cylindre et celui du cône, concrètement $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Ce qui est en fait important de ce principe est l'utilisation d'un concept primitif d'infinitésimal comme les *omnes lineae* qui se raffinera tout au long des prochaines années avec l'intervention d'énormes scientifiques. Bonaventura Cavalieri est aussi connu pour avoir déterminé l'aire sous une courbe cycloïde avec le même principe, mais on ne va pas aborder ce fait dans le travail.

2.2.2 Méthodes de Fermat et Pascal

Après Bonaventura Cavalieri, Pierre de Fermat et Blaise Pascal avaient créé une méthode de quadrature de paraboles et d'autres courbes qui ressemble beaucoup la méthode qu'on a aujourd'hui [2, p. 384]. Ces deux mathématiciens ont trouvé la quadrature de la parabole généralisée $y = x^{\frac{m}{n}}$ et de l'hyperbole généralisée $\frac{1}{x^{m/n}}$ où $m, n \in \mathbb{N}$. Cette méthode utilise une façon de calcul très similaire à celui des sommes de Riemann: toujours avec une valeur limite, la méthode consiste à considérer l'aire de la courbe comme la somme des parties infinies rectangulaires où la base diminue en fonction d'une raison q où $0 < q < 1$ et la hauteur des rectangles est l'image de la valeur limite de l'intervalle antérieur. Pourtant, les sommes de Riemann vont « de gauche à droite », étant la base des petits rectangles toujours la même, et dans la méthode de Fermat-Pascal c'est obligatoire que les bases diminuent en suivant cette progression géométrique.

L'aire sous la parabole est égale à $\frac{n}{m+n}S_0$, où m et n sont les mêmes coefficients d'avant, et l'aire sous l'hyperbole généralisée est $\frac{n}{m-n}a^{\frac{n-m}{n}}$. En fait, la trouvaille de la formule pour calculer l'aire sous l'hyperbole généralisée a été possible grâce à Gregorius Sain Vincent, un mathématicien belge du XVIIe siècle, contemporaine à Fermat.

Ce qui devient très important, dans les processus de Cavalieri et de Fermat-Pascal est l'utilisation de proto-limites et des magnitudes infinitésimales (ou qui tendent à 0). Sa manipulation mathématique par convenance sera très efficace face à ses applications pratiques, mais ce fait évoluera dans des problèmes par rapport à la définition des infinitésimaux et sera un point faible de la théorie qui ne sera pas affronté jusqu'à Weierstrass, au XIXe siècle, bien après l'invention du calcul. Les prochains pas seront ceux de Newton et Leibniz qui, en utilisant les concepts développés par les mathématiciens pré-calcul, vont développer une arithmétique des infinitésimaux, ainsi que des règles pour les manipuler et calculer des intégrales et dérivées.

2.3 L'apparition du calcul infinitésimal

Avec les contributions de Cavalieri, Fermat, Pascal et d'autres comme Roverbal ou Barrow; Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz ont développé de façon indépendante deux méthodes unifiant les notions de toutes les antérieurs dans ses respectives techniques. La méthodologie de Cavalieri, celle d'Eudoxe dans son époque, les quadratures de Fermat, etc., étaient utiles pour calculer des aires de figures concrètes, mais elles ne l'étaient pas pour calculer n'importe quelle aire ou trouver n'importe quelle tangente sur un point de la fonction. L'unification des techniques des mathématiciens pré-calcul va avoir plusieurs conséquences dans les applications des mathématiques. La physique avait besoin de ces méthodes, mais elles cachaient toute une incohérence et un comportement paradoxale derrière leurs applications que les mathématiciens n'ont osé traiter jusqu'à Weierstrass.

Les techniques de Newton et de Leibniz ont beaucoup de points communs : tous les deux utilisent le concept d'infinitésimal dans leurs raisonnements respectifs, et tous les deux utilisent une méthode qui n'est pas du tout éloignée de celle de Cavalieri. Bref, les deux scientifiques se basent sur le taux de croissance ou décroissance dans un espace d'amplitude indéfiniment petite. Ils n'avaient pas le concept de limite et, à cause de ça, l'utilisation de ces outils n'était pas justifiée, ce qui ultérieurement évoluera dans une crise mathématique[2, ch.XIX par. 3-8]. La définition de dérivée, utilisée pour calculer la droite tangente sur un point et, par conséquent, calculer le taux de croissance instantané, passe par calculer la division entre deux magnitudes très proches à 0. À l'époque de Newton et Leibniz, cette définition pourrait être celle-ci:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{2.2}$$

Δx et Δy étaient des quantités infinitésimales, ce qui impliquerait toujours une indétermination du type $\frac{0}{0}$. À la fin du XVIIe siècle il n'existait pas la notion de limite et l'opération de division de $\frac{0}{0}$ n'était pas légitimée. Pour « résoudre » en quelque sorte ce type d'indétermination, on considérait que les infinitésimaux étaient suffisamment grands pour être des dénominateurs mais assez petits pour changer le résultat d'une addition ou d'une soustraction. Mais les faiblesses métaphysiques de la théorie ne l'ont pas arrêtée, et elle a continué à se développer dans les prochaines décennies car, même si ces opérations n'étaient pas légitimées, elles fonctionnaient très bien et résolvaient beaucoup de problèmes dans le mondé réel.

La méthode de Newton incluait le concept de fluxion, le taux de variation d'une magnitude par rapport au temps, et un type d'infinitésimal qu'il utilisait à sa convenance, le *o*. Newton avait développé sa propre façon de calculer les dérivées, avec le point de vue d'un physicien (d'ici les fluxions) :

$$f'(x) = \frac{f(x+o) - f(x)}{(x+o) - x}$$

Où, pour calculer n'importe quelle dérivée, il faut manipuler ces quasi-zéros de façon apparemment arbitraire[11, pp. 129-135]. Cette ambiguïté méthodologique des deux théories, qui ne pouvaient pas s'exprimer dans le langage moderne, avait un écran qui faisait que l'on ne s'intéresse pas à essayer de trouver une solution au problème des infinitésimaux : ses applications dans tous les domaines des sciences formelles. Avec le calcul infinitésimal, on pouvait déterminer la distance parcourue par un objet tout en regardant l'aire sous la courbe d'un graphique de vitesse-temps, ou on pouvait calculer l'accélération d'un corps à partir de la pente de cette même graphique. Une mathématique apparemment vide et sans aucun sens logique était en train de résoudre les problèmes physiques et mathématiques de l'époque, et il fallait trouver une façon logique de comprendre cette théorie.

Sans les définitions et contributions ultérieures de Weierstrass, toute cette, terriblement utile, branche des mathématiques était l'objet d'importantes paradoxes comme celles de Zénon. En fait, ces mathématiques considéraient une magnitude infiniment petite actuelle, ce qui viole tous les principes aristotéliciens sérieusement pris à l'époque. Et les paradoxes ressemblaient beaucoup à ceux de Zénon, donc $\frac{1}{\infty}$ était exactement la quantité de des deux magnitudes qu'on prenait en compte. Encore une fois, la mathématique se trouve dans la même situation, mais elle peut cette fois se détacher des implications métaphysiques qu'elle peut avoir grâce à ses applications. Pour les mathématiciens de l'époque, ça sera important de ne pas regarder dans les fondements de la théorie, car elle se serait rapidement effondrée.

2.4 L'invention de la limite

Bernard Bolzano fut le premier mathématicien à regarder les fondements du nouveau calcul, à peu près un siècle et demi après son invention. Il propose l'adoption d'un nouveau concept en mathématiques pour que cette branche soit cohérente et ne manipule pas des quantités à sa convenance : la valeur limite. L'œuvre de Bolzano n'avait pas été prise en considération par les mathématiciens de l'époque car il n'était pas trop connu dans son temps, mais il consolidera les concepts nécessaires pour la définition de limite d'Augustin de Cauchy et Karl Weierstrass[2, pp. 608-609]. Son œuvre touche tous les domaines de l'analyse moderne: on y trouve le théorème de la valeur intermédiaire et le théorème de Bolzano-Weierstrass[4].

2.4.1 Le calcul d'Agustin-Louis de Cauchy

Agustin-Louis de Cauchy, dans son *Cours d'Analyse* essaie de rendre le calcul plus rigoureux, car les définitions et les outils utilisés n'étaient pas vraiment soumis à des règles concrètes et ils étaient manipulés selon la convenance de chaque processus et de chaque mathématicien. Il propose, donc, deux définitions clés pour le développement du calcul moderne :

- Quand les valeurs successivement donnés à une variable concrète se rapprochent indéfiniment d'une certaine valeur, en ayant une différence aussi petite que le manipulateur veuille, cette valeur fixée

[4] Expliqués dans la section 2.4.2

est appelée *limite*.

- Lorsque les valeurs successives absolues attribuées à une variable décroissent indéfiniment jusqu'à être plus petites que n'importe quelle quantité, cette valeur est un *infinitésimal.* Cette variable a 0 comme limite.

Ces deux nouvelles définitions, jamais données jusqu'alors, seront utilisées afin de renforcer le calcul. À partir de ces définitions, on trouvera la bonne définition de dérivée (2.3). En plus, il ne faudra plus faire référence à des quantités explicitement infinitésimales dans aucune définition de dérivée, même celle de Newton (inspirée dans la vision de Pierre de Fermat). Alors, il y a une autre façon rigoureuse de définir la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.3}$$

On voit comment, grâce à ce nouveau concept, le calcul infinitésimal résout de plus en plus ses problèmes méthodologiques, même s'il a fallu plus d'un siècle pour les « reformuler ». On peut voir que le travail de Cauchy est absolument impeccable, puisqu'il ne fait aucune référence explicite à l'infini et il n'en a même pas besoin. C'est la première tentative de formaliser le calcul. Cauchy fait aussi des progrès dans le traitement des successions, et établit le concept de continuité d'une fonction.

Pourtant, Karl Weierstrass considérait que ces définitions, plus précises que celles qu'il y avait avant, étaient encore un peu vagues. Weierstrass, donc, va développer sa propre définition de limite (définition $\epsilon - \delta$) en se basant plutôt sur des critères géométriques formels.

Les suites de Cauchy

Agustin Louis de Cauchy a aussi fait des travaux concernant les suites infinies. Plus concrètement, on connaît un de ses énoncés principaux, qui est celui des suites de Cauchy, à partir desquelles l'analyse de Weierstrass et la théorie de Méray sur la construction des nombres réels se sont développées. Une suite de Cauchy est une suite où cette propriété s'accomplit :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall k \geq 0, |r_{n+k} - r_n| < \varepsilon$$

C'est-à-dire, les suites de Cauchy sont des suites bornées dont la limite de la distance entre deux points est égale à zéro. La limite de cette distance lorsque $\varepsilon \to 0$ est aussi zéro. En d'autres mots, la distance entre deux points de la succession est de plus en plus proche à une quantité infinitésimale (en fait, à zéro). Le mathématicien français Charles Méray donnera, à partir des suites qui accomplissent le critère de Cauchy et grâce à des notions ensemblistes, une première définition rigoureuse des nombres réels mais qui ne sera pas du tout considérée importante, car Georg Cantor en fera une ampliation si importante que le critère de définition des nombres réels deviendra « le critère de Cantor » et non pas « le critère de Méray ». On va le voir plus tard, mais Georg Cantor va définir les nombres réels comme des nombres qui peuvent être définis avec ce type de suites. C'est-à-dire que, selon lui, les nombres réels peuvent se définir comme des sommes des termes infinis de séries infinies convergentes de la forme $S_n = \frac{1}{b^n}$, où b représente la base du système numérique que l'on utilise.

2.4.2 Le calcul de Weierstrass

Karl Friedrich Weierstrass était un mathématicien qui a rélisé des travaux concernant le même aspect que Cauchy, mais avec un autre point de vue. En s'appuyant sur l'œuvre de ce dernier mathématicien, Weierstrass établira encore une « ré-formulation » de l'analyse de Cauchy [2, pp. 606-607].

La définition formelle de limite proposée par ce mathématicien est celle qu'on prend en considération aujourd'hui, et elle utilise un langage mathématique plus précis que celui présent dans la définition de Cauchy. Il ratifie et confirme que la proposition de Cauchy qui dit « $f(x)$ se rapproche d'une valeur L lorsque x tend à une valeur c si $f(x)$ peut se rapprocher de L en prenant une valeur de x dont la distance entre c et lui soit arbitrairement petite » est certaine, en leur donnant la rigueur logique et méthodologique nécessaire, lorsque l'infinitésimal disparaît complètement du calcul [9, p.55]. Il ne sera plus nécessaire, grâce à lui, d'utiliser des concepts mathématiquement ambigus en analyse.

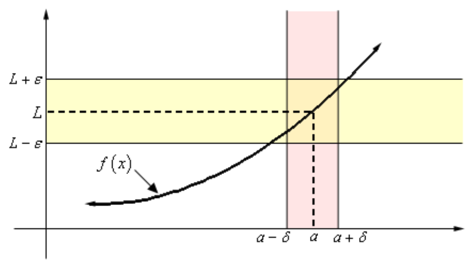

Figure 2.2: Définition de limite selon les intervalles epsilon-delta

La définition formelle de la limite est :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall x \in D(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - c| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Où $D \subseteq \mathbb{R}$. Il n'y a pas de problème métaphysique, dans ce nouveau calcul, mais on trouve le problème de définir les nombres réels, puisqu'ils n'étaient pas définis à cette époque. Ce dernier problème sera posé, et il faudra que Richard Dedekind développe encore un nouveau concept qu'on va voir après.

Théorème de Bolzano

Le théorème de Bolzano est un théorème sur l'analyse des fonctions qui dit:

Théorème 3 *Si f est une fonction réelle continue définie dans l'intervalle $[a, b]$ où a et b ont un signe contraire, alors il y aura au minimum une valeur c de x telle que $(f(c) = 0)$.*

La démonstration de ce théorème est facile, puisqu'il est possible de le prouver en voyant la continuité de la fonction. Ce théorème, néanmoins n'est qu'un cas particulier proposé par Bolzano, qui s'utilise souvent comme corollaire pour prouver le théorème de la valeur intermédiaire. Ce théorème nous dit que :

Théorème 4 *Soit f une fonction continue définie dans l'intervalle $[a, b]$ ($[a, b] \in \mathbb{R}$). Alors, on trouve que, si cette fonction est vraiment continue, toutes les valeurs de la limite dans l'intervalle donné sont égales à celles de l'image $f(x)$ de la fonction dans l'intervalle.*

Pour explorer ce théorème, néanmoins, il faut regarder la définition de continuité d'une fonction donnée par Cauchy, qui dit qu'une fonction est continue lorsqu'une augmentation infiniment petite de la variable produit une augmentation infiniment petite dans l'image. Ce théorème est donc la première abstraction que l'on fait depuis la définition de continuité : si une fonction est continue dans un intervalle donné, on peut dire que les points infinis de la fonction dans cet intervalle sont définis et que, pour autant, la valeur limite de chaque valeur qu'on puisse donner à la variable coïncide avec celle de son image pour tous les points de la fonction entre a et b.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est un théorème lié aux limites des successions. Il a des applications très importantes dans divers domaines de la mathématique, en incluant l'analyse, l'économie mathématique ou la topologie. Ce théorème dit :

Théorème 5 *Toute succession infinie convergente a au moins une suite partielle infinie.*

On considère cela presque intuitivement, puisque la définition de succession infinie est qu'elle a un nombre infini de termes. La démonstration est très simple. Prenons une suite a_n définie dans un intervalle réel $[a, b]$, dont la valeur limite se trouve dans cet intervalle. Si on divise cet intervalle en deux parties, il y aura un intervalle avec un nombre fini de valeurs et un autre intervalle (l'intervalle où la limite se trouve) avec des infinis termes. On peut répéter ce processus toutes les fois qu'on veut, et on obtiendra toujours un intervalle où la succession a_n trouve sa limite et a un nombre infini de valeurs. Alors, on peut déduire que la suite a_n aura toujours au moins une succession partielle infinie et convergente.

Chapitre 3

La continuité de la droite numérique : Dedekind et Cantor

Richard Dedekind est considéré comme la première personne à avoir établi une définition rigoureuse des nombres réels. C'est le responsable d'avoir résolu le problème des fondements du calcul en présentant cette définition formelle, et il est aussi considéré comme un des mathématiciens qui vont influencer le plus le développement de la théorie d'ensembles cantorienne. Avec l'œuvre *Was sind und was sollen die Zahlen*, publiée en 1888, Dedekind expose sa façon de voir les nombres réels et il développe un nouveau concept appelé « Coupures de Dedekind ». Ses travaux sont très liés à ceux de Georg Cantor, un mathématicien d'origine russe avec lequel il s'est retrouvé durant ses vacances en Suisse. On sait qu'ils ont maintenu une correspondance postale très fréquente dans laquelle leurs idées vont couler. Tous les deux seront, donc, les pères de la théorie des nombres moderne, en apportant chacun une définition pour les nombres réels.[2, pp. 607-608][11, par. 6c]

3.1 Les coupures de Dedekind

Dans son exploration sur la nature des nombres réels et le problème des fondements de l'analyse, Richard Dedekind avait décrit une façon de définir les nombres réels à partir des nombres rationnels et de prouver, en même temps, qu'il y a un nombre infini d'espaces vides dans la suite des nombres rationnels. Le problème de la continuité de l'espace (et aussi de la droite numérique) est une question qui a intrigué les mathématiciens et les philosophes depuis des temps immémoriaux. Depuis Euclide, on sait que dans chaque intervalle de la droite numérique on peut trouver une infinité de nombres rationnels, mais on savait néanmoins que les nombres irrationnels étaient une partie importante de la droite numérique, représentant des espaces vides dans une succession infiniment dense. À partir d'une naissante théorie des ensembles, Dedekind pourra expliquer et définir cet ensemble, en plus de créer une sorte d'algorithme en vue de l'obtenir à partir de l'ensemble défini $\mathbb{Q}$.

On sait que $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{p}{q}\}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$, c'est la définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ à partir des réels. Mais la forme de décrire les nombres $\mathbb{R}$ n'est pas si facile.[1] Ce que Richard Dedekind a fait c'est de considérer la droite numérique (ce qu'on appelle aujourd'hui la droite réelle) et la couper dans deux sous-ensembles. La construction des nombres réels s'est faite en définissant une partition de cet ensemble où l'ensemble universel référentiel soit $\mathbb{Q}$ et la partition soit de la forme (A, B) où $B = \overline{A}$. Les coupures de Dedekind servent à démontrer les infinis espaces vides dans la droite numérique et que, même si l'ensemble des rationnels est infiniment dense, il y a aussi cette infinité d'espaces vides. Le contre-exemple le plus célèbre est celui de $\sqrt{2}$, mais le processus suivant pourrait se faire avec tous les nombres irrationnels (au moins ceux qui sont constructibles comme φ). On suit une série de critères méthodologiques et d'axiomes pour procéder à l'élaboration de ces coupures. Les postulats initiaux pour les construire sont ceux trois-ci (ici exprimés avec la notation ensembliste):

- $A \cap B = \varnothing$
- $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$

C'est-à-dire que chaque membre de A et B est rationnel et, en plus, les ensembles A et B n'ont aucun élément commun, étant tous les éléments de B définis comme les éléments de l'ensemble des rationnels qui sont tous plus grands que n'importe quel élément de A. En d'autres mots, que $B = \overline{A}$. En même temps, il faut considérer aussi que les sous-ensembles, sachant que $A \subset \mathbb{Q}$ et $B \subset \mathbb{Q}$ peuvent être bornés. Il y a trois possibilités: que A soit strictement borné supérieurement ; que B ait une borne stricte inférieure et qu'aucun des sous ensembles aient des bornes strictes. Il y a une seule restriction quant à la combinaison de bornes : les deux ensembles ne peuvent pas être bornés à la fois, car dans tous les cas les conditions initiales seraient violées (si les bornes supérieures de A et de B partagent des éléments, alors le premier principe n'est pas respecté et, s'ils ne partagent pas d'éléments, il est possible de trouver un nombre tel que (étant a' la borne supérieure de A et b' la borne inférieure de B) $\frac{a'+b'}{2}$, ce qui implique que $A \cup B$ ne contiendrait pas l'ensemble $\mathbb{Q}$ dans sa totalité).

Tous les nombres rationnels son définissables à partir des coupures de Dedekind, mais il y a des coupures de Dedekind où le point d'inflexion que représente le pas entre l'ensemble A et l'ensemble B n'est pas un nombre rationnel. La coupure (*schnitt* en allemand) que $\sqrt{2}$ génère est l'exemple le plus célèbre de preuve d'irrationalité avec cette méthode. Pour y mettre un autre exemple, on va démontrer l'irrationalité de $\sqrt{5}$. Si le *schnitt* de la coupure est produit par un nombre $x[x \in \mathbb{Q}]$, on ne devrait pas être capables d'un trouver aucun autre nombre qui soit entre les deux ensembles, ce qui contredirait le deuxième

[1] La preuve qui suit cette explication a été inspirée dans la preuve de [11], dans la partie 6c.

principe. Alors, si on le trouve, la proposition $\wp = (\forall a \in A, \forall b \in B,\ \exists x((x \in \mathbb{Q}) \wedge (x > a) \wedge (x < b)))$ sera fausse. On définit les ensembles A et B :

- $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid (a^2 < 5) \vee (a \leq 0)\}$
- $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid (b^2 > 5) \wedge (b > 0)\}$, où l'on trouve l'implication $((b^2 > 1) \wedge (b > 0)) \rightarrow (b > 1)$

Si x est le *schnitt* entre A et B (puisqu'aucun ensemble n'est pas strictement borné), il y a deux possibilités: $(\forall x \forall a(x > a)) \rightarrow ((x \equiv a') \vee (x \equiv b'))$, où a' représente la borne supérieure de l'ensemble A et b' la borne inférieure de l'ensemble B[2]. On considère aussi un nombre $x^+[x^+ \in B]$ tel que $(x^+)^2 > 5$. Pour démontrer que le *schnitt* de ces deux ensembles n'est pas un nombre rationnel, on doit faire le suivant raisonnement: $(\exists x^+[(x^+ > x) \wedge ((x^+)^2 < 5)]) \rightarrow (\neg\wp)$, une *reductio ad absurdum*. Pour le faire, considérons aussi un nombre p tel que $(p > 0) \wedge (p = 5 - x^2)$. À partir de ça, on peut définir aussi un nombre x^+ tel que $x^+ = \frac{1}{25}p + x$, et on procède à la démonstration :

$$(x^+)^2 = \left(x + \frac{1}{25}p\right)^2 = \frac{125x^2 + 10xp + p^2}{125} \tag{3.1}$$

Et, par définition, $(x^2 > x) \rightarrow \left(\frac{10x^2p}{125} > \frac{10xp}{125}\right)$, car $(x^+ = x + \frac{p}{25}) \wedge (p > 0)$. Donc :

$$\frac{125x^2 + 10x^2p + p^2}{125} > \frac{125x^2 + 10xp + p^2}{125} \tag{3.2}$$

Vu que $p = 5 - x^2$, on déduit que $x^2 = 5 - p$. Alors :

$$\frac{125(5-p) + 10p(5-p) + p^2}{125} > (x^+)^2 \tag{3.3}$$

En conséquence, en opérant avec cette expression on obtient que :

$$\frac{525 - 125p + 50p - 10p^2 + p^2}{125} > (x^+)^2 \tag{3.4}$$

Ce qui, en simplifiant, nous donne que :

$$(5 - \frac{9p^2 + 75p}{125}) > (x^+)^2 \tag{3.5}$$

Encore par définition de p, on déduit que $-\frac{9p^2+75p}{125} < 0$ car $p > 0$. Alors, selon le principe logique de transitivité, on obtient cette expression-ci :

$$5 > (5 - \frac{9p^2 + 75p}{125}) > (x^+)^2 \tag{3.6}$$

La contradiction nécessaire pour démontrer que $\wp$ est fausse et que, pour autant, cette coupure (qui est absolument valide, sans aucune contradiction) est produite par un nombre qui n'est pas rationnel (dans ce cas, $\sqrt{5}$).

[2]À noter : aucun des ensembles est strictement borné, ce qui veut dire que $((x \equiv a') \vee (x \equiv b')) \Longleftrightarrow (x \equiv schnitt)$

Avec ce raisonnement, on déduit la situation des nombres irrationnels dans la droite numérique, et on définit l'ensemble $\mathbb{R}$ comme l'ensemble de tous les nombres définissables à partir des coupures. Le nombre $\sqrt{5}$ est défini pour la paire (A, B) initiale et, en général, tous les nombres irrationnels dont le carré est un nombre naturel sont construits à partir d'un coupure (A, B) non bornée du même aspect que la paire définissant $\sqrt{5}$. Pour autant, on peut déjà dire qu'il y a une infinité de nombres de la forme $a = \sqrt{n}$ tels que $(n \in \mathbb{N}) \wedge (a \notin \mathbb{Q}) \wedge (a^2 = n)$ dans les réels, représentant des espaces de la droite numérique occupés par des nombres irrationnels (et ils ne les sont tous, car il faudrait inclure les irrationnels algébriques comme $\sqrt[3]{2}$ et les transcendants comme π). On prouve, par induction mathématique, l'infinité de points de la droite numérique occupés par des nombres irrationnels.

On revient alors au problème qu'on a été en train de discuter pendant tout le travail : la continuité. Le raisonnement de Dedekind implique que l'ensemble de nombres rationnels est infiniment dense (ce qui était déjà prouvé, et on peut ré-prouver avec les suites de Cauchy) mais il implique qu'il y a néanmoins une infinité de discontinuités, provoquées par l'existence des nombres irrationnels. C'est dans ce type de nombres où la continuité de la droite numérique réside : si on considère un ensemble contenant les rationnels et les irrationnels, celui-ci serait un ensemble continu. Alors, l'ensemble des réels reste désormais défini comme l'ensemble de tous les nombres qui peuvent se définir en tant que *schnitts.*

Ceci était un problème qui inquiétait beaucoup Georg Cantor, qui croyait qu'il était nécessaire de théoriser sur les nombres finis et transfinis et les relations entre eux. Il faudra donc que Cantor développe sa théorie d'ensembles naïve et son arithmétique transfinie pour que les nombres réels soient complètement fixés.

3.2 La vision cantorienne des nombres réels

Georg Cantor, le mathématicien révolutionnaire créateur de la théorie d'ensembles, impulsera la première tentative d'une théorie de l'infini. Il a aussi des travaux très influents dans le domaine de la théorie des nombres. C'est à travers de ce domaine qu'il développe ses ultérieures conceptions sur les transfinis, en étudiant l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres naturels. Cantor a aussi développé une autre façon de définir l'infinité de nombres réels [2, pp. 611-615], avec un processus un peu plus abstrait à partir du critère des suites de Cauchy, vues auparavant. La possible définition de nombre donnée par Cantor utilise des sommes de suites convergentes de Cauchy.

Il propose une structure que tous les nombres réels doivent accomplir. Les nombres réels sont, selon Cantor et Méray, des éléments limite de certaines suites de Cauchy. Mathématiquement, la continuité, selon eux, se définit de cette façon :

$$\lim_{\nu \to \infty} (a_\nu + a_{\nu+\mu}) = 0 \tag{3.7}$$

Où a_ν est un membre arbitraire (toujours dans $\mathbb{Q}$) d'une suite de nombres rationnels, et a_μ est son successeur (arbitrairement grand, mais le successeur de ν dans cette suite convergente). Si on fait la somme de tous les membres possibles de cette succession, en commençant par le nombre n le plus petit et en allant en ordre jusqu'à ∞, alors on obtient cela :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \simeq \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n \right)$$

C'est-à-dire, que n'importe quel nombre réel peut être défini comme le résultat de cette somme, où c_n représente le terme général de la suite définissant le nombre [3, pp.20-21]. On peut prouver que cette série est convergente. C'est une suite accomplissant le critère de Cauchy parce qu'elle satisfait aussi la condition qu'on peut choisir un nombre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\varepsilon > |a_{\nu+\mu} - a_\nu|$. C'est comme ça que Georg Cantor réussit à expliquer les nombres réels d'une façon différente à celle de Dedekind.

3.3 Principes de l'infini logique

Avec les théories de Dedekind et de Cantor, ne pas penser à l'infinité de nombres et de possibilités de nombres réels que ces deux nouvelles définitions présentaient est devenu impossible. Ce n'était pas strictement nécessaire d'y penser mais ce prochain pas était, à l'avis de l'auteur du travail, une évolution naturelle et compréhensible, une façon de faire avancer la discipline et un sujet de réflexion presque obligatoire pour la logique. C'était toutefois un terrain dangereux, du fait que la question de l'infini n'avait pas été traitée que dès la vision métaphysique, et essayer d'y trouver des réponses logiquement consistantes était absolument un risque que pouvait bien ne pas être pris.

Dans cette partie, probablement la plus longue du travail, on découvrira les secrets des idées de Cantor et d'autres mathématiciens et logiciens visant à comprendre le caractère des magnitudes infinies. C'est important aussi de raconter les raisonnements et démonstrations utilisées par ces auteurs et y trouver les inconsistances logiques (présentes dans presque toutes les contributions des différents penseurs).

L'œuvre de Bernard Bolzano autour de l'infini a été très prolifique, et elle a posé les bases pour que Georg Cantor développe son arithmétique transfinie. *Paradoxien des Unendlichen* est un écrit de Bolzano publié après sa mort en 1851 qui rassemble les paradoxes de Zénon et celles de Galilée et servira d'inspiration pour la théorie cantorienne. On va voir plus en avant que les apparentes paradoxes qui ont un rapport avec l'infini sont en fait les caractéristiques qui définissent les nombres transfinis (en définitive, des règles qui gèrent la nature des ensembles infinis).

Toutefois, ce livre aura aussi un impact considérable dans le monde mathématique car il mettra les ciments de la pensée finitiste aussi , un courant de pensée commandé par Leopold Kroenecker qui postule que les mathématiques et les résultats qui s'obtiennent à partir des processus infinis ou de n'importe quoi ayant un rapport avec une quantité infinie sont fausses et ne sont pas valides[2, pp. 615-617].

Une chose est très claire : une bataille entre finitistes et non-finitistes se livrera lors de la publication de ce livre et les publications cantoriennes. On sera témoins d'une défaite *ex aequo* jugée par Kurt Gödel, au début du XXe siècle, quand expose ses théorèmes d'incomplétude.

3.3.1 Cantor et la théorie naïve d'ensembles

En récupérant des concepts de l'analyse weierstrassien et des *Deux Nouvelles Sciences*, Georg Cantor a réussi à élaborer une pensée alternative autour des nombres et des ensembles infinis. Ces concepts, encadrés dans sa *théorie générale de variétés*, vont représenter la chute de la conception philo-aristotélicienne de l'infini que les mathématiciens antérieurs ont eue, en supposant une vraie révolution de la logique mathématique. Pour commencer à la raconter, il faut commenter les règles qui suivent les ensembles finis par rapport à eux-mêmes :

- S'il est possible d'établir une bijection entre deux ensembles A et B telle que $f : A \longleftrightarrow B$, alors A et B ont le même nombre d'éléments. Mathématiquement, $(f : A \longleftrightarrow B) \to (|A| = |B|)$
- Si A et B ont le même nombre d'éléments, A et B doivent forcément ne pas être sous-ensembles l'un de l'autre. Mathématiquement, $(|A| = |B|) \to ((A \not\subset B) \wedge (B \not\subset A))$.

Galilée Galilei s'est déjà rendu compte que quelques ensembles infinis n'accomplissaient pas la deuxième propriété. L'exemple le plus célèbre est celui de la possible bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$[3], grâce à laquelle on peut lier chaque élément de ces deux ensembles, étant à la fois $\mathbb{N}^2 \subset \mathbb{N}$, ce qui est apparemment paradoxal. Georg Cantor a renouvelé ce paradoxe et l'a transformé en une des propriétés fondamentales des ensembles infinis. Selon lui, donc, les parties peuvent ne pas être plus petites que l'ensemble entier.

Cantor utilisera cette propriété pour comparer la quantité de nombres de certains ensembles, comme les ensembles de nombres entiers, rationnels ou réels. Il a trouvé qu'il était possible de proposer une fonction strictement bijective entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ et entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, mais pas entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. En suivant son postulat initial, il est arrivé à la conclusion que les ensembles où on peut faire correspondre les nombre un-à-un avaient le même nombre d'éléments. Donc, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ mais $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$[4].

La théorie de Cantor commencera à se développer en considérant des ensembles dérivés, des ensembles formés par les points d'accumulation de l'ensemble antérieur.

La dérivation d'ensembles

Dans ses premiers travaux, Cantor élabore la notion d'ensemble dérivé, un ensemble contenant des points dont voisinage, arbitrairement petit, a une quantité infinie de points. C'est-à-dire, que m est un point d'accumulation de S si dans l'ensemble S, l'entourage $L = (m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ a une infinité de membres.

[3] L'ensemble des carrés des nombres naturels, $\mathbb{N}^2 = 1, 4, 9, 16, ...$

[4] On le sait grâce à ce qu'on appelle l'« argument diagonal », où Cantor trouve que, en considérant n'importe quelle suite de nombres réels, il y en aura toujours au moins un qui ne sera pas dans la liste

On dit alors que S' est le dérivé de S lorsqu'il contient tous ses points d'accumulation; et que S'' est l'ensemble qui contient les points d'accumulation de S', et cetera. Cantor distingue entre deux types d'ensembles infinis selon cette propriété : ceux où $P^n = \varnothing$ et ceux où $P^n = P$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). On se pose alors la question : si n est n'importe quel nombre naturel, faut-il s'arrêter lorsqu'on arrive à l'infini ? La réponse de Cantor fût non, et il a utilisé une très bizarre notation pour l'exprimer : $P^{\infty} = P$; $P^{\infty+1} = P$, et plus.

Ceci a été considéré illogique dans son temps, car l'infini était une entité réservée pour la manipuler dans des démonstrations mathématiques mais pratiquement impensable. L'infini-plus-un de Cantor aurait été traditionnellement pris pour un infini. Mais la distinction qu'il fait entre ces deux expressions (qui ne dénotent qu'un ordre) est timidement compréhensible. La considération de l'infini ordinal juste comme un point de référence, mais pas comme la quantité irréalisable que l'on comprenait jusqu'à alors, vient d'ici.

Les ordinaux selon la théorie naïve d'ensembles

Les nombres ordinaux sont les nombres utilisés afin de décrire une position par rapport à une suite, mais pas de quantités. Par exemple, si $\infty+1$ décrit une quantité, on peut dire que $\infty+1 = \infty$. Mais, lorsqu'on parle d'ordre, et plus concrètement de la façon cantorienne, $\infty + 1 > \infty$. Cantor décrit un infini en acte dans ce qui concerne à la situation des quantités sur la droite réelle, puisque deux points ne peuvent avoir une position simultanée sur la droite réelle. Pour autant, l'ordinal $\infty + 1$ est « plus éloigné de n'importe quel nombre naturel » que l'ordinal ∞.

Georg Cantor, en voyant que les nombres infinis et plus grands que l'infini représentaient vraiment des références d'ordre, arrive à la conclusion qu'il faut créer une nouvelle classe de nombres : les ordinaux, désignant des positions. Il crée un système simple de deux « principes » visant à développer la nouvelle classe des ordinaux. Ces deux points de partie sont les « principes de génération » :

- *Première principe*: Chaque ordinal a a un successeur avec la forme $a + 1$.
- *Seconde principe*: Chaque suite infinie d'ordinaux a un successeur b qui est le nombre immédiatement suivant à la suite.

Il crée aussi une notation spécifique pour les nombres ordinaux, et il les classifie dans plusieurs types : ceux de classe (I), formés par les nombres naturels (en incluant le zéro), ceux de classe (II), ceux formés par des quantités infinies en acte (que Cantor appelle ω), et ceux qui les suivent (classe (III) et plus). La communauté mathématique aura du mal à comprendre la vision de Cantor de l'infini comme point de référence, et considérera que la notation et la logique qu'il utilise dans ses travaux sera risquée.

La droite numérique cantorienne est alors formée par les nombres naturels, auxquels correspond une quantité finie; les ordinaux de classe (II), qui viennent juste après les nombres naturels, etc.. ω est le nombre qui suit à la succession de tous les nombres naturels. La droite ne s'arrête pas là, puisqu'elle suit avec $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$. Il y a un moment où l'on arrive à 2ω et la droite suivra. Après viendra $\omega^2, \omega^3, \ldots$, après, ω^ω, après, ω^{ω^ω} jusqu'à $\epsilon_0 = sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$ et plus en avant, *ad infinitum.* On inclurait aussi les nombres des classes plus grandes que la deuxième, comme la troisième, dont le premier membre est le nombre appelé Ω, le nombre suivant la suite des ordinaux de seconde classe. En résumé, la première classe d'ordinaux est celle qui inclut les nombres naturels ; la deuxième, celle qui inclut les nombres conformés par des ω, et la troisième, celli qui inclut des nombres Ω, et cetera. La droite ne s'arrête pas et ne finit pas, mais ce qui est important à remarquer, c'est qu'on va pouvoir toujours ordonner ces ordinaux, n'importe quels soient, puisque l'ensemble des ordinaux est forcément un ensemble ordonné.

Les cardinalités et les cardinaux selon la théorie naïve d'ensembles

Les ensembles infinis sont des ensembles avec un nombre infini d'éléments. On distingue, selon la théorie cantorienne, deux types d'ensembles infinis : les dénombrables et les non-dénombrables, différenciés par leur cardinalité. La cardinalité des ensembles finis est un nombre naturel, puisqu'il ne peut pas y avoir ni un nombre négatif ni un nombre rationnel d'éléments dans un ensemble. Jusqu'ici, cela semble logique, mais lorsqu'on étudie la cardinalité des ensembles infinis on se trouve avec des aspects qui ne sont pas du tout intuitifs.

Les ensembles dénombrables Les ensembles dénombrables sont des ensembles ayant un ordinal de classe II correspondant propre. Dans d'autres mots, cela veut dire qu'on peut mettre par ordre tous leurs éléments (et, pour autant, ils sont coordonnables avec l'ensemble des naturels). On peut donc déterminer une suite avec les membres de ce type d'ensembles sans qu'aucun membre de la collection en reste dehors. Par exemple, c'est le cas des nombres entiers. On peut écrire les nombres entiers comme une succession sans qu'aucun des éléments de cet ensemble n'y soit pas inclus (et, de cette façon, on est en train d'établir une bijection de façon indirecte du fait qu'on indexe les membres de la suite et, grâce à ça, on coordonne les éléments de $\mathbb{N}$ un-à-un avec les éléments de $\mathbb{Z}$). Même s'il peut sembler que ces deux ensembles ont un nombre différent de membres, ils ont en fait la même cardinalité, grâce au principe établi qui dit qu'un ensemble A est infini s'il est coordonnable avec un de ses sous-ensembles.

On dit que ce type d'ensembles a une cardinalité $\aleph_0$, le symbole utilisé par les théoriciens des ensembles pour décrire une sorte de cardinalité à laquelle on peut attribuer un nombre ordinal de seconde classe. $\aleph_0$ n'est pas un nombre concret et défini, tout au contraire, il désigne juste l'idée que la collection qui l'a comme cardinalité est une collection dénombrable.

Les ensembles non-dénombrables Les ensembles non-dénombrables sont ceux qui, contrairement à ce qui se passait dans le monde des dénombrables, ne peuvent pas se mettre en correspondance avec la suite des naturels. L'exemple le plus célèbre de collection non-dénombrable est la collection des nombres réels puisque n'importe de quelle façon on les ordonne : il y aura toujours des membres de $\mathbb{R}$ qui ne seront pas dans la suite. Le symbole utilisé pour exprimer la cardinalité des nombres réels, prétendument immédiate à celle des ensembles dénombrables est $\aleph_1$.

Dans le cas des ensembles finis on trouve que leurs respectifs ordinaux et cardinaux coïncident, mais c'est une propriété des ensembles dénombrables que ces deux nombres puissent ne pas le faire. On distingue en fait un autre type de nombre cardinal infini : les cardinaux du type $\aleph_\alpha$ où α est un nombre ordinal plus grand que 1. En fait, on verra dans le prochain point que $\aleph_\alpha$ correspondrait à un ordinal de $\alpha + 1$ème espèce. C'est vraiment difficile d'imaginer un nombre tellement grand, mais il ne faut pas le faire : pour Cantor et pour les logiciens les règles fondamentales de la logique suffissent à prouver qu'une hypothèse est vraie (ou réelle) ou pas.

L'hypothèse du continu

L'hypothèse du continu est un problème qui naît lorsqu'on essaie de calculer la cardinalité de la collection $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble puissance des nombres naturels. Avec le théorème du binôme de Newton, on peut voir que la cardinalité de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est $2^{\aleph_0}$, puisque toutes les possibilités d'ensemble qu'on peut construire avec un ensemble de cardinalité $\aleph_0$ est ce nombre là, $2^{\aleph_0}$. L'hypothèse du continu consiste, donc, à dire qu'il n'existe pas un cardinal $|A|$ tel que $2^{\aleph_0} < |A| < \aleph_1$, du fait que $2^{\aleph_0}$ ne représente pas aucun cardinal d'un ensemble dénombrable et le prochain cardinal infini connu non-dénombrable est $\aleph_1$. Une autre façon de déduire que la cardinalité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est $2^{\aleph_0}$ (autrement dit $\mathfrak{c}$, comme Cantor désignait originellement cette quantité), c'est en reliant chaque sous-ensemble de $\mathbb{N}$ avec une succession de zéros et uns (qui sont, en fait, deux nombres, d'ici le numéro 2 de $2^{\aleph_0}$). On pourrait aussi exprimer les sous ensembles de $\mathbb{N}$ avec des suites infinies en alternant 3 nombres différents, et le résultat de la cadinalité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ serait alors $3^{\aleph_0}$. En fait, le cardinal du continu pourrait se généraliser comme $a^{\aleph_0}$ où $a \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne une des règles les plus importantes de la branche de l'arithmétique transfinie.

Georg Cantor semblait convaincu que cette hypothèse était vraie, mais on ne peut pas vraiment la prouver ni la réfuter : Kurt Gödel démontrera que c'est impossible de la démontrer et Paul Cohen démontrera qu'elle ne peut pas être réfutée non plus. De plus, Cantor affirmait un énoncé que l'on appelle « hypothèse généralisée du continu », qui consiste à cela:

$$2^{\aleph_a} = \aleph_{a+1}$$

Logiquement formulée, l'hypothèse du continu est $\forall A[|A| > \aleph_0]$; $\nexists B[|A| < |B| < 2^{|A|}]$. Ceci a été un problème si célèbre qu'il a été publié par David Hilbert dans sa liste des 23 problèmes du siècle. L'hypothèse du continu, même si elle n'est ni vraie ni fausse, sera considérée comme valide par certains systèmes axiomatisés et invalide pour d'autres.

3.3.2 Impossibilités logiques et paradoxes dérivés de la théorie cantorienne

Des impossibilités logiques, des contradictions et des paradoxes, néanmoins, vont peu à peu se découvrir au sein de la théorie cantorienne. Il est important de connaître les fondements logiques de la théorie d'ensembles du cadre mathématique, dont la lecture est recommandée avant de poursuivre.

Or, ce qui est vraiment fondamental par rapport aux impossibilités logiques de la théorie, c'est de comprendre qu'elle n'est pas définie par des axiomes. Tout au contraire, la théorie naïve de Cantor est, comme son nom nous indique, naïve, et elle décrit juste des concepts et des idées qui semblaient logiques, et qui s'étaient obtenus à partir d'une pensée avec un espace vide empirique trop grand comme pour s'en échapper. En fait, ce qui rendait la théorie si susceptible à l'apparition de paradoxes était l'ambiguïté de ses définitions élémentaires. Mais ce n'est pas la faute de Cantor, donc il s'est limité à exprimer ses idées, objectivement bien construites du point de vue logique, mais avec des bases douteuses (car il y avait des aspects ambigus dans la définition d'objet et d'ensemble). Par exemple, en ce qui concerne l'auto-référence, qu'on va voir dans notre explication des trois principales contradictions de la théorie qui l'ont faite avancer.

Paradoxe de Burali-Forti

Le paradoxe de Burali-Forti part du concept qu'on vient de traiter concernant les nombres ordinaux. L'ambiguïté de la définition d'ordinal rend ce concept suffisamment compréhensible mais elle le rend suffisamment flou pour qu'il ait des contradictions graves dans sa formulation. Le paradoxe réside dans le fait qu'on peut considérer un ensemble qui contient tous les nombres ordinaux. Même si les ordinaux ont deux principes de génération, Cantor, qui avait été le premier à découvrir le paradoxe, se rend compte de son erreur de fondements et essaye d'y donner une solution, consistant à rajouter un troisième principe de génération.

En considérant O (omicron majuscule) comme un poset bien ordonné de la forme $(O, \in)$, c'est-à-dire, un ensemble ordonné par une relation d'inclusion; en supposant qu'il peut exister tel ensemble O, contenant la suite de tous les ordinaux (une collection inaccessible, certainement); et en appliquant les deux principes de génération, ce serait logique de considérer un o tel que $o_a = max\{O\} + 1$. Mais, dans ce cas, o_a serait aussi un ordinal qui ne serait pas inclus dans O, ce qui représente une contradiction de la loi du tiers exclu. De plus, si l'on suppose que $o_a \in O$, on voit que $o_a < O$ et qu'au même temps $O \in O + 1$, ce qui casse le principe de trichotomie des ensembles bien ordonnés. Exprimé dans le langage courant, il est contradictoire qu'un ensemble contienne un élément qui n'est pas, par définition, membre de la collection.

La solution donnée par Cantor consistera à rajouter un troisième principe de génération visant à expliciter que les deux principes antérieurs ne sont pas applicables à la suite complète de tous les ordinaux. Pourtant, des logicistes très influents comme David Hilbert jugeront la solution de Cantor trop faible et, du fait qu'elle ne répondait pas aux vrais erreurs de formulation de la théorie, son équipe de logicistes vont la réviser. Cette recherche de solutions aux paradoxes inhérentes à la théorie cantorienne supposera le début de la crise des fondements des mathématiques, puisqu'elles étaient déjà construites sur la théorie de variétés, et la découverte des failles de base faisait trembler la discipline mathématique.

Paradoxe du théorème de Cantor

On pourrait considérer un paradoxe dans le théorème de Cantor qui ressemble beaucoup celle-ci. Le théorème de Cantor est une proposition qui dit que $\mathcal{P}(A)$ a une cardinalité plus grande qu'A. Ceci implique que, étant donné un ensemble A, il y a toujours un ensemble plus grand que lui. Alors, qu'est-ce qu'il se passe dans le cas où A est l'ensemble universel, c'est-à-dire, l'ensemble qui contient absolument tout ? Selon le théorème de Cantor, il devrait y avoir un ensemble plus grand que celui qui contient tout mais, à son tour, il devrait être un élément de l'ensemble universel originel. Le paradoxe sémantique réside donc dans l'absolu, ce qui portera Cantor à dire que les règles qu'il applique aux ensembles transfinis ne sont pas applicables aux ensembles absolus.

Encore une fois, les logicistes considéraient que la solution de Cantor n'était pas rigoureuse, car elle était exprimée dans des termes purement philosophiques qu'elle ne pouvait pas se considérer une réponse accomplissant les standards logiques propres des mathématiques. Note historique : Cantor était un homme très religieux, et il considérait que l'infini devait être réservé à Dieu. Sous ce prétexte, la découverte de paradoxes dans ses théories le tranquillisaient, car ces contradictions calmaient son angoisse de travailler sur un domaine du savoir interdit ou d'avoir essayé de défier la sagesse divine.

Paradoxe de Russell

Le paradoxe de Russell aborde la définition des ensembles en les décrivant selon la propriété qu'ils accomplissent. Il a trouvé un cas particulier où l'existence même de la propriété générait des paradoxes. Considérons l'ensemble $F = \{x | x \notin x\}$. À partir des postulats généraux de la théorie d'ensembles, on obtient une proposition : $x \in F \iff x \notin x$ et, lorsqu'on essaye de trouver si F est membre de F, on obtient que $F \in F \iff F \notin F$, un postulat absolument contradictoire. Cantor n'avait pas pu y donner une réponse, ni logique ni philosophique puisque, lors de sa découverte, il était déjà dans un état mental pitoyable comme conséquence de sa profonde dépression. Les logiciens de l'époque vont créer un système axiomatisé de la théorie d'ensembles qui va résoudre toutes les paradoxes connues jusqu'alors. La contribution d'Ernest Zermelo sera vitale pour la résolution de ces paradoxes, puisqu'elle sera la responsable de la création d'un système tellement fiable qu'on utilise encore dans nos jours[5].

Tous les paradoxes antérieurement décrits impliquent ce qu'on appelle l'auto-référence, en d'autres

[5] Or, le système d'axiomes ne sera pas totalement consistent, comme Gödel démontrera quelques années plus tard de la publication des travaux de ces célèbres logiciens.

mots, la possibilité de faire qu'un ensemble soit membre de lui-même. La tâche des mathématiciens et des logiciens de la première moitié su XXe siècle sera désormais celle de trouver un système axiomatisé qui ne permette pas cette auto-référence. Le contexte, quand même, n'était pas du tout favorable pour les penseurs logicistes parce que la découverte de ces failles si importantes au sein de la théorie sur laquelle toute la mathématique devait se baser avait déclaré illégitime, d'une façon très dangereuse, l'œuvre de Cantor et ses défenseurs. La phrase d'Henri Poincaré « La théorie des ensembles [infinis] sera vue comme une maladie dont on s'est guéris » [8, p.72] décrit très bien la situation de la réputation de l'œuvre dedekindienne et cantorienne. Dans le prochain chapitre, on verra les contributions de logiciens comme Ernst Zermelo ou Abraham Fraenkel, qui vont créer des bons systèmes axiomatisés et vont justifier, en quelque sorte, la raison d'être de la pensée logiciste [6, pp. 6-7].

3.4 Après Cantor : naissance des théories axiomatiques et le formalisme

On se situe à la fin du XIXe siècle et au début du XXe, une étape intéressante dans l'historie des mathématiques connue comme la « crise des fondements ». On connaît la première crise des mathématiques lorsque les grecs découvrent les nombres *arratos*, qui avait eu un impact similaire dans la philosophie et les mathématiques de l'époque. Avoir trouvé une contradiction si grande au sein de leur conception mathématique les avait tellement impactés qu'ils ont dû repenser tous leurs schémas. La crise des fondements dont on parle dans ce travail est très souvent comparée avec la crise grecque, mais avec un résultat différent.

À partir du développement de la théorie générale des variétés de Georg Cantor, deux lignes de pensée philosophiques naissent : celle des logicistes, qui pensaient que la mathématique pouvait se construire à partir des règles logiques ; et celle des intuitionnistes, ceux qui croyaient que les mathématiques étaient physiques et que c'est l'homme qui les interprétait. Les logicistes acceptaient la théorie des ensembles cantorienne, et ils sont ceux qui vont développer les systèmes axiomatisées qu'on va voir tout de suite. Les intuitionnistes, par contre, vont se méfier de cette théorie, car ils croient que les mathématiques qui ne peuvent pas se trouver physiquement et qui n'existent que dans le cerveau humain ne sont pas vraies.

Tout au début, la situation était très calme, avec une discussion dialectique entre les deux positions, mais la naissance du formalisme de David Hilbert supposera une fracture encore plus profonde au sein des mathématiques. La phrase d'Hilbert *« Nous devons savoir, nous saurons »* résume la foi que lui, Hilbert, avait dans la logique pure comme substrat des mathématiques.

Le formalisme est l'école fondée par David Hilbert et son rêve d'axiomatiser les sciences formelles comme la mathématique ou la physique. David Hilbert croît, et il a des soutiens importants parmi la communauté mathématique, que toutes ces sciences formelles doivent avoir des axiomes de partie.

L'école formaliste naît à partir de l'école logiciste. Ces deux écoles auront donc des traits communs, comme la subordination des mathématiques à la logique où cette sorte de « matérialisme mathématique » suivant la ligne platonicienne. Ce qui fait distinguer le formalisme des autres écoles est sa confiance et son attachement radicaux à la logique formelle. Les formalistes transcendent la discussion sur la nature idéale ou matérielle des concepts mathématiques, en croyant que la seule condition nécessaire pour définir un objet mathématique est qu'il puisse s'obtenir à partir d'un groupe d'axiomes défini. Tout concept mathématique, donc, n'est qu'une tautologie implicite dans les axiomes fondamentaux et qui doit se trouver en manipulant ces axiomes de départ, selon les règles d'inférence.

Le formalisme, même s'il semble dans certains aspects une position logiciste « radicale », se distingue du logicisme en tant que lui, le formalisme, il rejette la connaissance à priori comme base valide pour le développement des mathématiques[6]. La vision formaliste est, donc, une vision qui considère la pensée mathématique comme un jeu avec le but d'obtenir des tautologies, dont les règles sont simplement les règles syntactiques de manipulation des postulats de départ. La vision formaliste éloigne les mathématiques de la réalité et des idées humaines et les met dans un contexte complètement différent, donc ils ne s'occupent que de la véracité des mathématiques et non pas de son existence. Ils considèrent que cet aspect est complètement négligeable et ils croient, pour autant, qu'il n'y a aucun besoin d'avoir des mathématiques ni mentalement réelles ni matériellement réelles : la seule réalité qui doit affecter les mathématiques est la réalité logique et théorique. Donc, tout ce qui peut être développé à partir des axiomes de départ est vrai et, pour autant, une découverte.

David Hilbert et ses alliés formalistes avaient lancé, dans les premiers décennies du siècle passé, une course pour obtenir ce système d'axiomes de départ. Quand on se réfère à la recherche fructueuse mais improductive des ciments des mathématiques, on se réfère a ce qu'on appelle formellement « le projet logiciste », qui consiste à trouver un système axiomatisé complet et absolument consistant. C'était le rêve d'Hilbert mais, à la fin de la course et après un conflit dialectique très intense entre les formalistes et les intuitionnistes, Kurt Gödel, un logicien autrichien, arrivera et détruira complètement le, plus que projet, rêve formaliste. Les formalistes, en laissant de côté les conflits entre écoles, sont ceux qui ont eu plus de force et ceux qui semblaient avoir des arguments plus raisonnables, mais ils vont découvrir qu'ils s'étaient trompés. Encadrée dans les célèbres 23 problèmes d'Hilbert, l'axiomatisation de la mathématique n'aura pas de réponse.

Par rapport à la théorie de Cantor, les formalistes considèrent valide cette théorie en tant qu'elle suit une ligne logique, mais ils essayeront de la polir et de décrire une autre théorie axiomatisée de variétés. Une de ces nouvelles théories axiomatiques, celle de Zermelo, est décrite dans le cadre mathématique du travail.

[6] Voir RUSSELL, Bertrand. *The Problems of Philosophy* pour plus d'informations sur l'acquisition des connaissances.

Partie II

Cadre mathématique

Chapitre 4

Formalisation de l'infini moderne : la théorie de ZF

La théorie des ensembles naïve que Cantor avait développée, susceptible aux paradoxes et n'accomplissant pas les standards logiques, a été formalisée par l'équipe de David Hilbert et l'école formaliste. Ernst Zermelo, dans une tentative de construire un théorie axiomatisée d'ensembles consistante, avait proposé la sienne : la théorie axiomatisée de Zermelo. Fraenkel, à son tour, avait ajouté certains axiomes afin de compléter la théorie, en créant ainsi la théorie axiomatisée de Zermelo-Fraenkel, le système d'axiomes qu'on utilise encore aujourd'hui pour baser les mathématiques.[1]

4.1 Introduction aux langages formels

Les langages formels sont des langages permettant d'exprimer des énoncés logiques (chaînes de symboles du langage) et, en même temps, de les manipuler. Tout langage formel $\mathcal{L}$ a un alphabet, c'est-à-dire, un ensemble de symboles avec lesquels on peut construire ces énoncés. Il y a plusieurs types de symboles :

- Pour les constantes, l'utilisation de c_i, i étant un index dans l'ensemble de nombres naturels, est très répandue. Une constante est une valeur fixée, un objet qui ne change pas ses propriétés, invariable. Cependant, on utilisera dans ce travail d'autres symboles afin de désigner des constantes spécifiques (toujours indiqués dans leurs respectives sections).

- Pour les variables, on utilise très fréquemment la notation x_i, étant i encore un index. Une variable est une valeur qui peut prendre n'importe quelle valeur constante. Autrement dit, x_i désigne des constantes sans déterminer.

[1] Afin d'éviter des références constantes, les principales sources utilisées dans la rédaction [1, pp. 2-20], [6, pp. 1-35], [5, pp. 3-26, 301-358]

- Il y a plusieurs types de connecteurs logiques, chacun avec ses propres caractéristiques et, en raison de cela, ils ont tous des symboles différents. La fonction des connecteurs est celle de créer un énoncé dont la valeur de vérité est modifiée en fonction de la valeur de vérité des objets que les connecteurs relient.
  - La négation est désignée avec le symbole $\neg$. Sa fonction est celle de changer la valeur de vérité de l'énoncé qui l'a (en d'autres mots, $\neg\alpha$ nie l'énoncé α).
  - L'implication est un connecteur désigné par $\rightarrow$. Elle a une valeur de vérité tel qu'un élément faux implique n'importe quel autre élément et qu'un élément vrai n'implique qu'un autre élément vrai. Il est utile de lire « a implique b »
  - L'équivalence logique se définit comme une implication dans les deux directions de l'énoncé, de sorte que $a \Leftrightarrow B$ signifie $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$ à la fois.
  - La conjonction est un connecteur désigné par $\wedge$ exprimant une connexion du type « a et b », étant a et b des énoncés.
  - La disjonction, par contre, est un connecteur que l'on désigne par $\vee$ indiquant une connexion du type « a ou b ».

  Les propositions formées par des connexions logiques ont une valeur de vérité déterminée par leurs tables de vérité. On comprend « $a \vee b$ » comme toutes les possibilités vraies de cette combinaison.

- Les quantificateurs sont des symboles logiques nécessaires dans tout langage formel $\mathcal{L}$. Ils indiquent l'existence d'une variable, comme $\exists$, le quantificateur existentiel. Il existe encore un autre type de quantificateur, l'universel, dénoté par $\forall$ dans le langage méta-mathématique, qui décrit une totalité de variables.

- Les relations logiques se symbolisent avec R_i^n, i étant un index distinguant les différents types de relation et n indiquant l'arité de la relation. L'arité est une propriété des relations qui indique le nombre de variables que la relation met en rapport. Un exemple de relation d'arité $n = 1$ pourrait être, par exemple, Hx, où H indique que les variables qui met en rapport « sont des hommes ». C'est-à-dire, avec les relations on crée des affirmations mettant en rapport des variables. Dans ce cas, Hx signifie « x est un homme ». Les relations les plus fréquentes sont, néanmoins, celles d'arité $n = 2$, appelées « binaires ». Dans le langage de la théorie d'ensemblels, il n'y a que deux relations fondamentales : l'égalité ($=$) et l'appartenance ($\in$).

- En dernier lieu, les foncteurs sont des caractères qui transforment les variables en leur donnant une propriété, généralement désignés f_i^n, où i et n ont la même signification que dans le cas des relations logiques. Tandis que Hx, dans l'exemple antérieur, où H était une relation, disait que « x est un homme », si on prend H comme une fonction avec la même propriété, la succession de symboles Hx décrit désormais la construction « des hommes ». Alors que les relations expriment des affirmations, les foncteurs expriment un groupe de variables classiques accomplissant une certaine propriété. Un exemple de foncteur binaire, d'arité $n = 2$, serait G (« le plus grand ») dans la structure Gxy, x et y étant des variables. Gxy désignerait alors « Le plus grand parmi x et y ».

Il faudrait encore présenter le $|$, un caractère introduisant une propriété que la variable que $|$ décrit doit accomplir.

En fait, les symboles essentiels pour la représentation de tous les concepts ne sont que cinq (en plus des symboles spécifiques qu'on peut décrire), ceux de négation, conjonction, existence, parenthèses ((,)) et égalité (=). Les formules sont des successions finies de symboles d'un langage formel qui peuvent exprimer une propriété φ relative à une ou plus variables (dans ce cas on les appelle des formules bien formées) ou pas (juste des chaînes de symboles). Ces formules φ et ψ (comme on les note normalement) relatives à une variable x peuvent, à la fois, être liées entre elles avec des connecteurs logiques et, par conséquence, créer une nouvelle formule avec des valeurs de vérité propres. On vérifie que φ est une formule si :

- $x \in y$ et $x = y$ sont des formules atomiques, c'est-à-dire, ce sont les formules bien formées les plus élémentaires.
- $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ et $\exists x \varphi(x)$ sont aussi des formules bien formées.

En fait, n'utilisant que des variables, la négation, la conjonction et le quantificateur existentiel, on peut désigner les autres symboles de connexion logique, comme la disjonction ou l'équivalence et d'autres relations (comme $\neq$ ou $\notin$) :

- $x \neq y$ peut s'exprimer comme $\neg(x = y)$
- $x \notin y$ est équivalent à $\neg(x \in y)$
- $\varphi \vee \psi$ est le même que $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\varphi \Rightarrow \psi$ se définit comme $\neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est $\varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$

On décrit ainsi, à partir des symboles primitifs, toutes les relations dont on a besoin pour commencer à expliquer le reste de concepts. Il faut insister dans le fait que les formules bien formées ne sont valides que dans les cas où leurs tables de vérité indiquent qu'elles sont vraies. Dans le domaine de la logique propositionnelle, une table de vérité indique la validité des formules bien formées. Par exemple, la table de vérité de la disjonction décrit que, si φ est une formule vraie et $\neg\varphi$ est fausse, que $p \vee q$, $\neg p \vee q$ et

$p \vee \neg q$ sont vraies (valides) tandis que $\neg p \vee \neg q$ est fausse, étant p et q des propositions atomiques. Deux énoncés sont équivalents si leurs respectives tables de vérité correspondent.

En introduisant le quantificateur universel dans le jeu, on trouve des règles pour nier certains énoncés (caractéristiques du domaine de la théorie des ensembles). L'action du quantificateur universel $\forall$ sur une variable x accomplissant une propriété $\varphi(x)$ est équivalente à l'énoncé "$\neg(\exists x(\neg\varphi(x)))$". Autrement dit, le quantificateur universel équivaut à la locution "pour chaque x", x étant une variable, "il n'existe aucun x qui n'accomplit pas $\varphi(x)$". Décrite l'action du quantificateur universel et l'existentiel étant pris en compte, on voit que la négation des énoncés où l'on les trouve se déroule de cette façon:

- $\neg(\forall x \in X(\varphi(x))) \Leftrightarrow \exists x \in X(\neg\varphi(x))$
- $\neg(\exists x \in X(\varphi(x))) \Leftrightarrow \forall x \in X(\neg\varphi(x))$

En ayant expliqué les fondements du langage logique qu'on va utiliser pendant le reste du travail, il faut encore définir certains concepts qui n'ont pas à voir avec la notation. Ces concepts deviendront importants afin de rassurer la compréhension textuelle du développement théorique. Un axiome est un énoncé de début qui s'accepte comme vrai (pour autant, un énoncé qui n'est pas objet de discussion) à partir duquel on peut extraire des conclusions. Un définition est un énoncé visant à introduire une nouvelle notion. Finalement, on définit un théorème comme une conclusion extraite des axiomes principaux ou bien des théorèmes précédents avec des règles d'inférence prouvant sa validité. Ceux-ci sont les trois types d'énoncés propres d'un système logique comme celui de la théorie axiomatique d'ensembles.

4.2 Conceptualisation des idées expliquées

Un ensemble est une collection d'objets bien définis et distinguables entre eux. La relation d'appartenance est une relation d'ordre qui impose une hiérarchie où les objets primordiaux sont les objets mêmes. Cette relation nous fait distinguer ce qui appartient à quelque unité (objet) et l'entité qui rassemble les unités contenues (ensemble). Les diagrammes de Venn sont une façon très graphique et simple pour comprendre la relation d'appartenance. Dans le cas de la figure 4.1, les numéros représentent les objets qui appartiennent aux ensembles X et Y. Il ne faut pas dire que, dans le cas des ensembles, ils doivent être en quelque sorte définis afin qu'on n'ait aucun doute sur l'appartenance d'un objet à certain ensemble. On trouve que les deux ensembles ci-dessous bien définis sont $X = \{1, 2, 3, 5\}$ et $Y = 1, 2, 6, 4$. Les autres nombres qui n'apparaissent pas dans les ensembles X et Y, c'est-à-dire, ceux de U sont tout le reste d'objets possibles (U est la classe universelle, dont on parlera plus tard). On se voit dans l'obligation d'expliquer alors qu'est-ce qu'une classe.

La définition formelle de classe s'établit à partir de l'erreur que Georg Cantor avait fait lorsqu'il avait considéré que l'accomplissement d'une propriété pouvait définir un ensemble. En d'autres mots, la

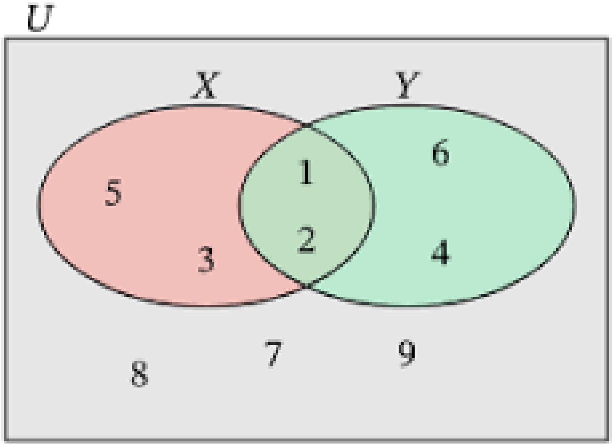

Figure 4.1: Diagramme de Venn

définition que Cantor avait faite d'ensemble n'était pas consistante : on a vu, par exemple, que ce que nous considérions une classe, pour Cantor était un ensemble, comme la classe de Russell. Afin d'éviter ce type de paradoxes, la définition d'ensemble changera. Il y aura, donc, une distinction fondamentale entre classe et ensemble. Pour définir une classe, il suffit de regrouper tous les objets accomplissant une certaine propriété, et il est permis pour elles de former des contradictions. L'autre condition qu'on met pour la constitution d'un ensemble c'est que les objets que l'on rassemble appartiennent d'abord à un ensemble prouvé consistant (c'est-à-dire, qui n'ait pas de contradictions en soi et qui puisse être défini à partir des axiomes).

Ce sont tous les concepts qui doivent être clairs avant de poursuivre avec l'explication formelle. Dans les prochaines sections, on exposera les différents axiomes avec lesquels on va travailler. Avant d'exposer les axiomes de Zermelo-Fraenkel, il faut regarder les postulats de Giuseppe Peano sur l'arithmétique, réalisés en 1889 et qui ont servi de base pour les prochaines théories axiomatiques d'ensembles.

4.3 À propos de l'arithmétique de Peano

Les axiomes de Peano sont une collection d'axiomes fondamentaux à partir desquels on développe l'arithmétique (et, par conséquent, de la mathématique en général) grâce à l'opération de succession, un foncteur d'arité 1 tel que $S(a) = a + 1$. Ce système axiomatisé est constitué par neuf axiomes fondamentaux, apparemment consistants (on n'y a pas encore trouvé des paradoxes) qui décrivent les propriétés élémentaires de la mathématique. Les premiers axiomes définissent la notion et les propriétés de l'égalité et les nombres et les prochains, la fonction de succession et la règle d'induction.

- $\exists 1[1 \in \mathbb{N}]$ Ce premier axiome nous décrit le 1, un élément fondamental qui existe dans l'ensemble des naturels et qui n'est le successeur d'aucun nombre x tel que $x \in \mathbb{N}$ (voir 8ème axiome).
- $a = a$ Ce deuxième axiome nous décrit l'égalité univalente. En d'autres mots, il exprime qu'un nombre est égal à lui-même.
- $\forall a, b \in \mathbb{N}\ ((a = b) \Leftrightarrow (b = a))$ Ce troisième axiome est celui de l'égalité bivalente (principe de symétrie), exprimant la symétrie de l'expression $a = b$.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ (((a = b) \wedge (b = c)) \rightarrow (a = c))$ Ce quatrième principe est la définition de la propriété logique de transitivité, selon laquelle si deux éléments sont égaux à un autre, tous les trois sont, donc, pareils.
- $((a = b) \wedge (b \in \mathbb{N})) \rightarrow (a \in \mathbb{N})$ Le cinquième axiome dit que si a est égal à un nombre naturel b, a est naturel.
- $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists S[(S(a) = a + 1) \wedge (S(a) \in \mathbb{N})]$ Ce sixième axiome est celui définissant l'opération mathématique fondamentale de succession, sans laquelle on ne pourrait pas développer les autres. La fonction S est ce qu'on appelle la fonction de succession, qui se définit comme l'addition d'une unité à une quantité naturelle x, étant $S(x)$ un nombre naturel aussi.
- $\forall a, b \in \mathbb{N}\ (a = b) \Leftrightarrow (S(a) = S(b))$ Ce septième axiome exprime que le principe de symétrie est aussi applicable entre successeurs, et il raconte aussi la relation entre les égalités des nombres naturels et de leurs respectifs successeurs.
- $\forall a \in \mathbb{N}\ S(a) \neq 1$ Ce huitième axiome est l'axiome établissant que le nombre 1 n'est le successeur d'aucun nombre naturel.
- $\forall K \forall x \in \mathbb{N}\ (S(x) \in K) \rightarrow (x \in K)$ Ce neuvième axiome est celui du « principe d'induction mathématique », un principe suivant l'idée de transitivité introduite auparavant.

En fait, les postulats de Peano ne sont que cinq, mais cette liste est plus complète et présente des théorèmes essentiels complémentaires. Il y a une discussion très forte sur si le zéro est un nombre naturel et, dans le cas où on le considère, il faut faire des petites modifications où 0 substituerait les 1 des axiomes (sauf dans le sixième, où $S(a)$ reste égal à $a + 1$).

4.4 Axiomes de Zermelo-Fraenkel

Les axiomes de Zermelo-Fraenkel sont une série de neuf axiomes pris généralement comme base mathématique, utilisés en vue d'éviter les paradoxes logiques formulés antérieurement dans le travail, comme le paradoxe de Russell, explicitement résolu grâce aux schémas de l'axiome de compréhension et de l'axiome de fondation. À continuation, on explique les particularités et les noms de chaque axiome, et comment ils servent à éviter les paradoxes qu'on obtenait avec la théorie naïve de variétés.

Axiome de l'ensemble vide

$$\exists A \forall a (a \notin A)$$

L'axiome de l'ensemble vide postule l'existence de l'ensemble qui n'a aucun élément, c'est-à-dire, de l'ensemble de la forme $A = \{\}$. $\varnothing$ est l'unité fondamentale à partir de laquelle la fonction successeur et d'autres concepts qu'on va décrire plus tard se sont définis.

Axiome d'extensionnalité

$$\forall X \forall Y [\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y]$$

L'axiome d'extensionnalité dit que deux ensembles sont pareils s'ils ont exactement les mêmes éléments. Grâce à cet axiome, on peut prouver l'unicité de l'ensemble vide, par exemple, puisque si $\varnothing = \{\}$ et $\varnothing' = \{\}$, alors $\varnothing = \varnothing'$.

Axiome de fondation

$$\forall X [X \neq \varnothing \rightarrow \exists Y \in X (Y \cap X = \varnothing)]$$

L'axiome de fondation est un axiome qui nous dit que, donné un ensemble X non-nul, il a toujours un sous-ensemble $A \subset X$ tel que l'intersection entre X et A est l'ensemble vide, c'est-à-dire, que X et A n'ont pas des éléments communs.

Axiome de compréhension

$$\forall A \exists B \forall x [x \in B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \phi(x)]$$

L'axiome de compréhension est un axiome qui postule qu'à chaque ensemble lui correspond une propriété ϕ. Il est important de repérer qu'il ne permet que la construction de sous-ensembles de B, ce qui évite de toute façon la définition d'ensembles du type $x|\phi(x)$. Pour autant, il évite le paradoxe de Russell, consistant précisément à un ensemble du type $X = x|x \notin X$. Cet axiome définit au même temps la notion de classe, conceptualisée dans la section 5.2. Tout ce qui n'accomplisse pas la propriété $\varphi(x) = x \in X \wedge \psi(x)$ sera considéré une classe dans le cas où x n'appartienne à un ensemble. Si $\neg\psi(x)$, alors $\neg\varphi(x)$.

Axiome des paires

$$\forall x \forall y \exists Z[(x \in Z) \wedge (y \in Z)]$$

L'axiome des paires permet la formation d'un ensemble contenant des couples formés par deux autres ensembles. Il décrit la multiplication cartésienne d'ensembles de façon indirecte. Cet axiome a pour but de garantir un ensemble avec les deux éléments x et y décrits dans l'axiome (il faut remarquer que x et y peuvent bien être des ensembles, sans restrictions). L'ensemble contenant seulement x et y est une paire non-ordonnée. C'est à dire, ils sont des ensembles z tels que $z = \{u \in z : u = x \vee u = y\}$. Dans le cas où $\{x, y\} = \{x, x\}$, on détermine par extensionnalité que $\{x, x\} = \{x\}$.

On définit une paire ordonnée par la définition de Kuratowski, $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, mais il est plus facile de comprendre qu'une paire est ordonnée si elle accomplit que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = c \wedge c = d$. On utilisera les paries ordonnés dans la définition du produit cartésien.

Axiome de réunion

$$\forall A \exists B \forall c[c \in B \Leftrightarrow \exists D(c \in D \wedge D \in A)]$$

L'axiome de la réunion, par contre, définit l'ensemble résultant de l'union entre deux ensembles différents. On doit interpréter que A est une famille d'ensembles (autrement dit, un ensemble dont les éléments sont à la fois des ensembles) et que B est la réunion entre les éléments des éléments de F (c'est-à-dire, l'union des éléments des ensembles appartenant à F). Avec l'axiome d'union on peut décrire des ensembles avec la quantité d'éléments qu'on veuille, même si cette quantité n'est pas finie.

Avec l'axiome de réunion on définira plus tard ce qui est la fonction successeur et qu'est-ce que ça implique par rapport aux ordinaux. On définira $\mathbb{N}$ fondamentalement à partir de cet axiome.

Axiome de remplacement

$$\exists Y(\varphi(Y)) \wedge (\exists Z(\varphi(Z) \to Z = Y))$$

L'axiome de remplacement est l'axiome qui nous dit que l'image d'un ensemble est aussi un ensemble. Sans parler encore explicitement sur des fonctions, une conséquence de l'axiome de remplacement c'est qu'on peut définir un ensemble B tel que il contient des éléments qui sont liés en quelque sorte avec les éléments d'un ensemble A. C'est-à-dire, que $\forall A \exists B \forall x \in A \exists y \in B(\varphi(x, y))$.

Axiome de l'infini

$$\exists I(\varnothing \in I \wedge \forall x \in I(x \cup \{x\}) \in I)$$

L'axiome de l'infini, dans ce cas, décrit l'existence d'un ensemble I qui contient l'ensemble vide et tous les successeurs de $\varnothing$ et, par conséquent, il définit indirectement le concept d'ordinal. Ces ensembles qu'on appelle « inductifs » sont ceux qui contiennent l'élément minimal et qui s'ils contiennent n'importe quel élément, ils vont contenir aussi le successeur de cet élément. L'ensemble successeur $S(x)$ se définit comme la réunion entre un ensemble x et l'ensemble dont il est le seul élément, $\{x\}$. Alors, un ensemble sera inductif et, pour autant, infini, s'il contient toute la suite des naturels. Il faut encore préciser la notion de succession, celle d'ordinal et celle d'ensemble inductif, dont on va parler plus tard.

Axiome de l'ensemble puissance

$$\forall X \exists Y \forall Z [Z \subseteq X \rightarrow Z \in Y]$$

L'axiome de l'ensemble puissance, qui serait le dernier axiome dans le système de Zermelo-Fraenkel, nous dit qu'il existe un ensemble Y tel qu'il contienne tous les sous-ensembles du référentiel X (de n'importe quelle quantité d'éléments). Y serait l'ensemble puissance, autrement dit « ensemble des parties de X », qui contient une quantité d'éléments $2^{|X|}$ (on aborde cette question plus tard).

Les axiomes de Zermelo-Fraenkel évitent tous les paradoxes connus jusqu'à alors, mais il faudra attendre à l'intervention de Kurt Gödel pour qu'on ne le considère plus un système axiomatisé consistant. On n'a trouvé encore aucun paradoxe, mais on est sûrs et certains qu'il n'est pas consistant.

4.5 Algèbre élémentaire d'ensembles

On peut définir toute une série d'opérations logiques et mathématiques avec les ensembles à partir des axiomes de ZF. Les opérations les plus connues sont celles d'intersection, de réunion, de trouver son complémentaire par rapport à la classe universelle, de trouver la différence entre deux ensembles ou même le produit cartésien. On les développe tout de suite mais, préalablement, il est important de définir ce qui est un sous-ensemble et, par extension, un sur-ensemble. Un sous-ensemble est un ensemble défini par la propriété $A \subseteq B = \forall x \in A, x \in B$, c'est-à-dire, que si tous les éléments de A appartiennent aussi à B, A est un sous-ensemble de B, noté par $A \subseteq B$. Un sur-ensemble part du même concept mais dans la direction contraire : dans ce même cas, B serait un sur-ensemble de A. Ceci étant défini, on voit que $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ puisque dans ce cas ils auraient exactement les mêmes éléments.

En sachant ce qui vient d'être expliqué, on passe alors à la définition de quelques opérations arithmétiques entre ensembles :

Réunion et intersection L'opération de réunion est l'opération fondamentale de la théorie. Celle-ci consiste à unir les éléments de deux ensembles de la façon qu'on a expliqué dans la partie de l'axiome de réunion. Comme son nom nous indique, cet axiome est crucial afin de pouvoir définir des ensembles avec plusieurs éléments, et qui en quelque sorte définit une sorte d'opération d'addition. Le résultat de la réunion entre deux ensembles A et B est un ensemble dont ses éléments sont tous ceux qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux au même temps. Formellement, $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$. Dans le cas de la figure 4.1, la réunion de X et Y serait $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

L'intersection, par contre, est une opération consistante à construire un ensemble avec les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Formellement, $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$. Dans la figure 4.1, l'intersection entre les ensembles X et Y serait $X \cap Y = \{1, 2\}$ puisque ce sont les éléments communs entre les deux ensembles.

On peut généraliser les opérations d'union et d'intersection et les réaliser parmi une famille entière d'ensembles, c'est-à-dire, parmi les éléments A_i d'un ensemble F qui sont à la fois des ensembles :

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in U : \forall i \in I, x \in A_i\}$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U : \exists i \in I, x \in A_i\}$

Où A_i sont des ensembles qui sont à la fois les éléments d'une famille F. I, dans ce cas, c'est l'ensemble dont les éléments représentent les sous-indexes $_i$ des éléments de F. Ceci veut dire que les éléments de F sont notés comme $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Dans une famille $F = \{A_1, A_2, A_3\}$, par exemple, $I = \{1, 2, 3\}$, tandis que dans une famille $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est la façon dont on crée la réunion de tous les éléments-ensemble de la famille ; alors que $\bigcap_{i \in I} A_i$ consiste à trouver les éléments communs parmi tous les éléments-ensemble de F.

Différence et ensemble complémentaire La différence entre deux ensembles consiste à trouver les éléments d'un ensemble déterminé qui n'appartiennent pas à l'autre. Mathématiquement, on définit l'opération de différence entre A et B comme $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$. L'ensemble complémentaire de A, dans ce cas, c'est l'ensemble résultant de réaliser l'opération de différence entre un ensemble (ou classe) de référence et un ensemble A concret. Avec le langage logique, on exprime l'ensemble complémentaire de A dans U comme $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$. Dans l'exemple de l'image 4.1, on trouve que $X \setminus Y = \{3, 5\}$, que $Y \setminus X = \{4, 6\}$ et que l'ensemble complémentaire de X est formé par tous les éléments possibles, sauf les éléments de X. Il faut dire que l'ensemble complémentaire peut se noter de deux façons différentes : $\overline{A}$ ou A^c.

Toutes ces opérations élémentaires entre ensembles (au moins celles qu'on a abordées jusqu'à maintenant) accomplissent certaines propriétés :

- $A \cap A = A = A \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap U = A = A \cup \varnothing$; $A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup A^c = U$; $A \cap A^c = \varnothing$; $(A^c)^c = A$; $U^c = \varnothing$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Lorsqu'on manipule des opérations généralisées, la dernière propriété pourrait s'exprimer d'une autre façon, en rendant cette opération applicable aux familles de avec plus de deux ensembles :

- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$
- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} {A_i}^c$

Produit cartésien Afin d'expliquer le concept de produit cartésien on doit repêcher la définition de paire ordonnée. Intuitivement, une paire ordonnée est un ensemble de deux objets, permis par l'axiome des paires, dans lequel l'ordre des objets importe. Les paires, pour qu'elles soient ordonnées, doivent accomplir la propriété $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = c \wedge c = d$. Les paires et les autres ensembles ordonnés de la même nature (obtenus en appliquant le concept de paire à plusieurs éléments) peuvent à la fois être classifiés selon ce qu'on appelle l'« ordre lexicographique », dont on va parler plus tard.

Le produit cartésien entre deux ensembles est, donc, un ensemble contenant toutes les paires ordonnées possibles formées par les éléments des deux ensembles. La définition mathématique est $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A \wedge b \in B\}$. Les éléments de l'ensemble $A \times B$ sont donc toutes les combinaisons de paires ordonnées que les éléments de A et de B peuvent faire. Le concept rassemble beaucoup celui de la multiplication ordinaire (lorsqu'on multiplie deux nombres, ce qu'on est en train de faire est de compter tous les éléments de l'ensemble $A \times B$).

Introduite l'opération de produit cartésien, dans le cas des familles finies d'ensembles, on peut le généraliser à peu près de la même façon que pour la réunion et l'intersection. On voit que :

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle : a_i \in A_i, i \in \{1, 2, ...n\}\}$$

Le produit cartésien accomplit certaines propriétés mais, contrairement à ce que l'on penserait, n'accomplit pas la propriété commutative parce que les paires que l'on obtient en opérant de cette façon sont ordonnées, et cela implique que, par exemple, $\{x, y\} \neq \{y, x\}$. Alors, $X \times Y \neq Y \times X$. Il faut dire que si on fait le produit cartésien plusieurs fois entre le même ensemble on obtient $A \times A \times A \times ... \times A$, et on simplifie cette notation en écrivant tout simplement A^n.

Cette opération a certaines propriétés qui doivent être prises en considération :

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

- $C \neq \varnothing \wedge A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
- $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$
- $B \subset C \Leftrightarrow A \times B \subset A \times C$
- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times D) \cap (C \times B)$
- $\forall A, B, C, D \neq \varnothing$; $(A \times B \subset C \times D) \Leftrightarrow (A \subset C \wedge B \subset D)$

4.5.1 Relations

On dit que deux choses sont liées si elles ont quelque propriété commune. Il se passe pareil avec les éléments des ensembles. Mathématiquement, le concept de relation est un peu plus flou et différent, mais il partage une similarité sémantique avec le langage humain courant.

Une relation d'arité 2 $\mathcal{R}$ sur A_1, A_2 est un sous-ensemble tel que $\mathcal{R} \subset A_1 \times A_2$. Dans ce cas, où le produit cartésien est fait entre deux ensembles, cette relation reçoit le nom de « relation binaire », mais on peut faire le produit cartésien entre tous les ensembles que l'on veut, en changeant l'arité de la relation. Mathématiquement, $\mathcal{R} : \forall z \in \mathcal{R} \exists x, y(z = \langle x, y \rangle)$. En parlant de relations binaires, on dit qu'il existe une relation entre a et b si le couple $\langle a, b \rangle$, fruit du produit cartésien $A \times B$, est un élément de l'ensemble $\mathcal{R}$. On dira alors que a est lié à b à travers de la notation $a\mathcal{R}b$.

Il ne faut pas que les ensembles-facteurs du produit cartésien soient différents. Les relations, appelées sur A, sont les possibles sous-ensembles du produit cartésien entre A et A, c'est-à-dire, des sous-ensembles de A^2. Selon les propriétés qu'une relation sur A accomplisse, on les distingue avec des différents noms. Les paramètres utilisés afin de les classifier sont ceux-ci :

Réflexivité La réflexivité est une propriété qui nous dit que bien tous les éléments d'un ensemble sont liés avec eux-mêmes ou pas. Une relation *réflexive* est une relation $\mathcal{R}$ qui permet qu'un élément a soit lié avec lui-même ($\forall a \in A(a\mathcal{R}a)$). Contrairement, une relation *irréflexive* est une relation qui ne permet pas le fait qu'un élément a soit lié avec lui-même ($\nexists a \in A(a\mathcal{R}a)$).

Symétrie La symétrie est une propriété des relations qui sert à distinguer entre relations symétriques, antisymétriques ou asymétriques. Une relation *symétrique* est une relation qui impose que si a est lié avec b, alors b est aussi lié avec a ($\forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a)$). L'*antisymétrie* nous dit que, dans le cas où une relation puisse être symétrique, cela voudrait dire que les éléments liés sont les mêmes ($\forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b)$). Les relations *asymétriques*, par contre, sont les relations qui ne permettent pas que deux éléments d'un ensemble soient liés de façon bidirectionnelle, comme il se passait avec les autres types de relation. Une relation asymétrique est donc une relation où $\forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \Rightarrow \neg(b\mathcal{R}a))$.

Transitivité La transitivité est une propriété des relations binaires sur A permettant de lier un élément x avec un élément z lorsque les deux sont liés à un élément intermédiaire y. D'une façon plus formelle, on définit la transitivité comme $\forall x, y, z \in A(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$. Une relation peut être transitive ou pas. Il faut introduire un concept ici qu'on utilisera plus tard : les $\mathcal{R}$-chemins, qui sont les « pas » qu'on doit faire dans un ensemble-relation transitif pour arriver d'un élément jusqu'à un autre. On en parle plus tard.

Types de relation

En ayant décrit les paramètres qu'on utilisera afin de classifier les relations, on doit en décrire les plus importantes par rapport au travail et en donner quelques exemples :

- Une relation d'équivalence sur un ensemble A est une relation $\sim$ sur A qui satisfait les propriétés réflexive, symétrique et transitive. Le symbole est fréquemment utilisé pour désigner les relations d'équivalence sur A. Ce type de relation permet de rassembler des éléments mutuellement liés à travers de classes d'équivalence. Les classes d'équivalence, à son tour, sont des ensembles dont les éléments sont les éléments de l'ensemble relation liés avec a. On dit que $[a] = \{x \in A : x \sim a\}$.

- Une relation d'ordre est, par contre, une relation justement transitive, mais qui n'accomplit pas forcément les propriétés symétrique ni réflexive, comme il se passait avec celles d'équivalence. On distingue en même temps plusieurs types de relations d'ordre, tandis que d'équivalence il n'y en a qu'une. Les différents types de relations d'ordre sont le *pré-ordre* (réflexif et transitif), les ordres partiaux strictes (transitifs, irréflexifs) ou non-strictes (réflexifs, transitifs, antisymétriques) et l'ordre total strict (transitif, irréflexif et trichotomique[2]).

  La relation d'ordre la plus élémentaire de la théorie d'ensembles est la relation $\in$ d'appartenance, sur laquelle on parlera plus dans les prochaines pages. D'autres relations d'ordre seraient, par exemple, $<$, $>$ ou $\leq$.

Les différents types de relation entre éléments ayant été ci-dessus exposés, on peut maintenant passer à la définition d'ensemble bien ordonné et le concept axiomatisé d'ordinal, qui deviendra très important face à la compréhension des prochains sujets.

[2]La trichotomie est une propriété de disjonction forte que les ensembles totalement et strictement ordonnés doivent accomplir. Cette propriété est une sorte d'extension de l'asymétrie, qu'on décrit comme $\forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a \vee b = a)$. Ceci implique qu'il ne peut pas y avoir deux conditions à la fois. Dans d'autres mots, soit a est lié avec b, soit b est lié avec a, soit b et a sont pareils, mais pas deux possibilités simultanément

4.6 Les nombres ordinaux

4.6.1 Considérations préalables

Bon ordre Le bon ordre est une propriété de certains ensembles qui sont à la fois bien fondés et dont leurs éléments sont liés avec une relation d'ordre total strict. Un ensemble est bien fondé s'il a un élément plus petit que tout le reste, c'est-à-dire, s'il a un élément a tel que $\forall b, a < b$[3]. L'autre condition qu'un ensemble bien ordonné doit accomplir est celle de l'existence d'une relation d'ordre total strict parmi ses éléments. Un exemple serait l'ensemble $(A, <)$, où $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ et $\mathcal{R} =<$[4]. On voit que A a un élément minimal, le 1, un élément pour lequel il n'y a aucun élément dans A tel que $a < 1$. Il est totalement ordonné puisque la relation $<$ est une relation d'ordre total strict (transitive, irréflexive et trichotomique, car $\forall a, b, c(a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c)$, $\forall a, b(a < b \Rightarrow b \not< a)$ et $\forall a, b(a < b \vee b < a \vee a = b)$, respectivement). Si A accomplit ces caractéristiques, alors on dit que l'ensemble A est un ensemble bien ordonné.

Fonctions et fonction successeur Le concept de fonction en théorie des ensembles ressemble beaucoup au concept de fonction des mathématiques traditionnelles. Une fonction, quelques fois appelée « application », est une règle qui relie un élément originel a, appartenant à A, avec un élément b d'un ensemble B appelé « image de a » ou $f(a)$, étant A et B des ensembles non-vides. Normalement, l'ensemble A est appelé *ensemble initial* et l'ensemble B est nommé *ensemble final*, et les éléments a et $f(a)$ sont très souvent appelés x et y, respectivement. L'ensemble image est un sous-ensemble de B étant, à la fois, l'ensemble des images d'un sous-ensemble de A.

On distingue trois types de fonction : injective si à chaque élément de B lui correspondent plusieurs éléments de A ; surjective si à chaque élément de A lui correspondent plusieurs éléments de B et bijective $(f : A \longrightarrow B)$ si à chaque élément lui correspond un (et seulement un) élément de B et vice versa.

4.6.2 Les ordinaux de Von Neumann

Un ordinal de Von Neumann est un ensemble bien ordonné dont les éléments sont des itérations de la fonction successeur, voir $S(x) = x \cup \{x\}$. En d'autres mots, ils sont des ensembles bien ordonnés qui contiennent à la fois tous leurs précédents. Ce concept peut être utilisé pour définir les nombres naturels $\mathbb{N}$ en prenant l'ensemble noté par 0 (zéro), isomorphe[5] à l'ensemble vide. Un fonction successeur

[3] Ceci n'est pas formellement correcte, mais on va le laisser de cette façon afin de simplifier l'explication

[4] La notation utilisée pour définir des *posets*, des ensembles partiellement ordonnés, est $(A, \sqsupset)$, où A est un ensemble générique et $\sqsupset$ est n'importe quelle relation d'ordre (elle peut être ordre partial ou total puisque l'ordre total est souvent considéré comme un type d'ordre partial)

[5] Quand on abordera l'arithmétique entre ordinaux de Von Neumann on expliquera le concept d'isomorphisme mais, pour le moment, il suffit avec comprendre qu'un ensemble est isomorphe à un autre s'ils ont le même type d'ordre.

$S(x) = x \cup \{x\}$ est, à son tour, une fonction directement prise des axiomes arithmétiques de Peano, générant des ensembles à partir de l'union entre les éléments précédant x et x même. Les premiers ordinaux de Von Neumann sont ceux-ci :

$0 = \varnothing$

$1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$

$2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$

$3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{\{0, 1\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

L'ordinal 4 sera $S(3)$ et on peut continuer l'énumération en prenant une variable x et un foncteur unitaire S. Ce type de nombre, n'étant pas défini que par une fonction et un élément minimal, a une caractéristique intéressante : il est totalement ordonné, car $0 \in 1 \wedge 1 \in 2 \wedge 2 \in 3...$, un ensemble qu'on juge bien ordonné par son élément minimal 0 et le type de relation entre les éléments de l'ensemble. On peut visualiser graphiquement les ordinaux de Von Neumann comme des segments situés sur une sorte de droite numérique de façon à ce que le prochain ordinal lui contient.

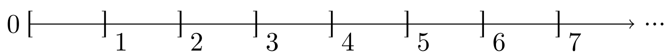

Figure 4.2: Représentation graphique des ordinaux de Von Neumann

Le 0 est l'élément minimal car il ne contient aucun élément (isomorphe à $\varnothing$), et le 1, le 2, le 3 ..., sont ce qu'on appelle des ordinaux successeurs, c'est-à-dire, des ordinaux résultants d'appliquer la fonction successeur à leur précédent. On dit donc qu'un ensemble X est un ordinal s'il est transitif et bien ordonné par la relation d'appartenance. Par exemple, l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$ ne serait pas un ordinal car $0 \in 1 \wedge 1 \in X$ mais $0 \notin X$.

Les ordinaux sont très fréquemment représentés par des lettres grecques comme ξ, et la classe de tous les nombres ordinaux est O_N. De la nature des ordinaux de Von Neumann on obtient deux conséquences ou propriétés : $x \in O_N \Rightarrow x \notin x$ et $x \in O_N \Rightarrow S(x) \in O_N$. Il y a trois types d'ordinal qui peuvent être établis lors de la théorie de Von Neumann :

- L'ordinal minimal est l'ordinal le plus petit, c'est-à-dire, le zéro. Cet ordinal est aussi défini comme l'intersection généralisée de n'importe quelle famille d'ordinaux. À remarquer : $\bigcap X \in O_N : Y \in \bigcap X \wedge Z \in Y; \forall \alpha \in X(y \in \alpha)$. Autrement dit, la définition d'ordinal minimal passe pour celle des éléments minimaux de n'importe quel ensemble bien ordonné et transitif. $\bigcap X = minX$.

- Les ordinaux successeurs sont donc les ordinaux que l'on obtient lorsqu'on applique une quantité finie (ou infinie, comme on va voir après) de fois la fonction successeur à l'ordinal minimal. β est un ordinal successeur si $\exists \alpha (\beta = S(\alpha))$.

- Les ordinaux limite sont un autre type distingué d'ordinaux qui ne sont pas ni le successeur d'aucun ordinal ni égaux à 0. On pourrait penser que, si l'ordinal minimal était la côte inférieure de l'ensemble l'ordinal limite en serait la supérieure, mais la classe des ordinaux n'a pas tout à fait cette côte. Le concept d'ordinal limite est plus abstrait que ceci.

L'induction en $\mathbb{N}$

Donnée une classe X où $\varnothing \in X$ et $y \in X \Rightarrow S(y) \in X$, on peut dire que cette classe contient absolument tous les nombres naturels. Le nom de cette type de classes est celui de « classe inductive », nom pris du processus de démonstration mathématique appelé « induction » avec lequel on peut prouver des théorèmes. L'ensemble inductif le plus petit est celui des nombres naturels, constitué justement par les éléments minimum que la définition requiert. La méthode mathématique de démonstration prend son nom car elle utilise absolument les mêmes concepts que ceux des ensembles inductifs (un théorème est vrai s'il est valide pour le cas 0, le cas k et son cas successeur).

Il y a néanmoins d'autres ensembles inductifs (ceux-ci totalement infinis) qui contiennent tous les nombres naturels, comme celui qu'on note ω, en rendant hommage aux ordinaux limites naïves que Cantor avait notés de cette façon. La classe ω se définit comme l'ordinal limite le plus petit, puisqu'il contient juste tous les naturels. On pourrait l'imaginer comme le successeur de la suite entière de $\mathbb{N}$, en fait. Il sert à définir ce qui est un ensemble fini, car il est considéré comme la quantité infinie en acte la plus petite. Un ensemble X est fini si $\exists n \in \omega (X \preccurlyeq n)$. À son tour, si on sait que α est fini, alors $\alpha \in \omega$, étant α un ordinal.

4.6.3 Arithmétique ordinale

Afin de commencer à décrire les opérations qu'on peut faire entre des ensembles ordinaux, il faut réviser le concept d'isomorphisme. Le mot vient des vocables grecs *iso* (égal) et *morphos* (forme), et c'est un nom très bien choisi pour le concept. Deux ensembles sont isomorphes entre eux s'il est possible d'établir une fonction bijective entre eux de façon à ce que, $(A, \prec)$ et $(B, \sqsubset)$ étant des ensembles bien ordonnés, $A \cong B (\forall a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B \exists! f : A \rightarrow B \iff a_1 \prec a_2 \Leftrightarrow b_1 \sqsubset b_2)$. Intuitivement expliqué, deux ensembles sont isomorphes si pour chaque élément de chaque ensemble bien ordonné (lié avec son précédant et successeur), les éléments de l'ensemble image sont liés de la même façon que ceux de l'ensemble primitif. Il y a un isomorphisme entre deux ensembles, donc, s'il existe une fonction bijective entre eux qui leur fait accomplir cette propriété d'ordre. À partir du concept d'isomorphisme, avec beaucoup d'applications fascinantes dans la branche de la topologie, on construit la base pour les opérations mathématiques entre ordinaux. Les nouveaux ordinaux qu'on va construire, fruit des opérations qu'on réalise, seront isomorphes donc à un, et seulement un, ensemble totalement ordonné. On désigne les opérations suivantes :

Addition d'ordinaux L'addition de deux ordinaux α et β consiste à définir un ensemble isomorphe à la suite formée en première instance par les éléments de α et après par ceux de β. On profite du concept d'ordre lexicographique, une façon générique d'ordonner les paires ordonnées entre elles. L'ordre lexicographique est une sorte d'extension à la fois du concept de paire ordonné. En vue d'ordonner deux paires $\langle a, b\rangle$ et $\langle c, d\rangle$, ce qu'on fait pour les ordonner selon leur ordre lexicographique est de comparer les premiers éléments de chaque paire et après les deuxièmes. Alors, on ordonnera les paires que nous allons obtenir lors de l'addition de manière que $\langle a, b\rangle < \langle a, b\rangle \Leftrightarrow a < c \vee (x = c \wedge b < d)$.

La définition mathématique de l'ensemble addition résultant de deux ordinaux distincts est $\alpha + \beta = \mathit{type}((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta))$. Cette définition-ci implique que l'ensemble formé sera une suite formée où on trouvera tout d'abord les éléments de α, par la propriété de l'ordre lexicographique, et après ceux de β, grâce aussi à l'ordre lexicographique. L'addition ordinale ne satisfait pas la propriété commutative que l'addition avec laquelle on est habitués à travailler étant donné que l'ordre de la séquence sera différent si l'on met premier les éléments du seconde ensemble que ceux du premier. Dans le cas des ordinaux finis, par exemple, ceci n'a pas d'importance. Mettons-en un exemple :

$$\alpha = 3 = \{0, 1, 2\} \ ; \ \beta = \{4\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

Si on fait $\alpha + \beta$ ou $\beta + \alpha$ n'a pas d'importance car $\alpha + \beta = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$[6] et, dans l'autre sens, $\beta + \alpha = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2)\}$. On voit que $\alpha + \beta \cong \beta + \alpha$ et, même si les deux ensembles sont en soi différents, on peut faire une bijection entre les éléments du premier avec ceux du seconde. Dans le cas des ordinaux qui ne sont pas de successeurs, c'est un peu plus bizarre. Essayons donc de réaliser l'opération $\omega + 1$ et $1 + \omega$. En opérant,

$$\{0\} \times \omega = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3)...\} \ ; \ \{1\} \times 1 = \{(1,1)\}$$

$$\{0\} \times 1 = \{(0,0)\} \ ; \ \{1\} \times \omega = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), ...\}$$

En ordonnant les paires par ordre lexicographique, on voit $1+\omega = \mathit{type}(\{(0,0) < (1,0) < (1,1) < (1,2) < (1,3) < (1,4) < ...\})$ isomorphe à ω et, de l'autre côté, $\omega + 1 = \mathit{type}(\{(0,0) < (0,1) < (0,2) < (0,3) < (0,4) < ... < (1,0)\})$, qui a juste un élément plus que ω. Au moment où l'on met une côte supérieure à un ensemble infini du type ω, on est en train de définir son successeur, en fait. Alors, $S(\omega) = \omega + 1$ mais pas $1 + \omega$.[7]

L'addition entre deux ordinaux pourrait se visualiser en quelque sorte comme des pas qui se sont faits sur une droite numérique. Par exemple, dans le cas de $\alpha = 3$ et $\beta = 4$, on pourrait voir l'opération $\alpha + \beta$ comme un athlète qui court en premier lieu trois kilomètres et en deuxième lieu les autres quatre.

[6] Il faut remarquer qu'on a simplifié la notation puisque les paires ordonnées peuvent être écrites de cette forme aussi.

[7] Afin d'illustrer ça, en plus de regarder le prochain exemple, il serait intéressant de repérer que $\{(0,0) < (0,1) < (0,2) < (0,3) < ... < (1,0)\}$ tandis que $\{(0,0) < (1,0) < (1,1) < (1,2) < ...\}$. La « forme » des suites des deux opérations, donc, est différente dans les deux cas.

Cependant, par rapport aux ordinaux infinis, $1 + \omega$ symboliserait un athlète qui doit courir un premier kilomètre et après il devrait en courir une infinité plus, alors que $\omega + 1$, à son tour, dit que cet athlète doit tout d'abord courir une course infinie et après une autre course d'un kilomètre quand il aura fini la première (physiquement et mathématiquement impossible, mais c'est un exemple plus clair que la définition).

Multiplication d'ordinaux La multiplication d'ordinaux a les mêmes concepts que l'addition. Elle consiste à construire un autre type d'ensemble isomorphe. On peut multiplier deux ordinaux de la façon suivante : $\alpha \cdot \beta = type(\beta \times \alpha)$. Ici, on fait le produit cartésien à l'inverse entre ces deux mêmes ensembles de façon à ce qu'on puisse ordonner lexicographiquement le résultat de l'opération. Faisons, par exemple, $3 \cdot 4$:

$3{\cdot}4 = type(\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2)\})$

Dans le domaine de l'arithmétique classique, $3{\cdot}4 = 12$, et c'est vrai, mais dans le domaine de l'arithmétique ordinale, on dit que l'ensemble $3 \cdot 4$ est isomorphe à l'ordinal 12, car ils ont le même type d'ordre (c'est-à-dire, on peut faire correspondre deux objets liés de $3 \cdot 4$ à deux objets liés de 12 et ils seront liés de la même façon). Par rapport aux ordinaux successeurs, ceci reste comme dans le cas de l'addition, où $3 \cdot 4$ et $4 \cdot 3$ sont isomorphes au même ordinal, 12. Dans ce qui concerne les ordinaux infinis (ceux de seconde classe, comme ω), on trouve néanmoins que cette propriété n'est pas du tout vraie. Faisons, maintenant, $2 \cdot \omega$ et $\omega \cdot 2$:

$$\omega \cdot 2 = type(2 \times \omega) = \{(0,0),(0,1),(0,2)...(1,0),(1,1),(1,2)...\}$$

$$2 \cdot \omega = type(\omega \times 2) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),...\}$$

Ici, on voit que $\omega \cdot 2$ serait isomorphe à un ordinal du type $\omega + \omega$ tandis que $2 \cdot \omega$ serait, par contre, isomorphe à ω. On ordonne les éléments des deux nouveaux ensembles par ordre lexicographique aussi, de sorte que $2 \cdot \omega$: $\{(0,0) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < ...\}$ et, dans $\omega \cdot 2$: $\{(0,0) < (0,1) < (0,2) < ... < (1,0) < (1,1) < (1,2)...\}$

Les deux opérations ont trois propriétés, expliquées tout de suite :

- **Propriété associative**: $(\alpha + \beta) + \gamma \cong \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \cong \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- **Élément neutre**: $0 + \alpha \cong \alpha + 0 \cong \alpha$ et $1 \cdot \alpha \cong \alpha \cdot 1 \cong \alpha$
- **Propriété distributive**: $\alpha(\beta + \gamma) \cong \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, mais $(\alpha + \beta)\gamma \ncong \gamma \cdot \alpha + \gamma \cdot \beta$

4.7 Les cardinaux

Les cardinaux sont des nombres qui désignent le nombre d'éléments d'une classe (pas forcément un ensemble) ayant le même nombre d'éléments qu'un ensemble donné. Par exemple, on dirait que, dans

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $|A| = 4$, $|A|$ étant le cardinal de A lorsque le nombre [8] 4 est équipotent à A (c'est-à-dire, que c'est possible de bijecter les éléments de A sur ceux de 4 et vice versa). À remarquer : pour assigner un cardinal selon la technique de Von Neumann, qui assume l'axiome du choix, il faut qu'il soit possible de faire une bijection entre un ordinal et un ensemble, mais ils ne doivent pas forcément être pareils. En d'autres mots, ceci exprime qu'il suffit avec l'établissement d'une bijection entre l'ordinal donné et l'ensemble, étant ou n'étant pas isomorphes. On définit, donc, le cardinal d'un ensemble comme le nombre ordinal le plus petit qui peut se bijecter sur l'ensemble donné.

Dans ce qui concerne les ensembles finis, le concept de cardinal est très intuitif mais, par rapport aux ensembles infinis, ceci n'est pas tout à fait si facile à comprendre. Il est néanmoins facile d'assigner le nombre ordinal le plus petit qui peut être surjecté avec un ensemble quelconque si cet ensemble est fini, et on le fait instinctivement en comptant. Pourtant, chez les infinis, les compter devient plus difficile et requiert des stratégies logiques qu'on explique tout de suite.

4.7.1 Les cardinaux finis et infinis : différences essentielles

Dans ce qui concerne les ensembles finis, on leur assigne un cardinal similaire à un ordinal α tel que $\alpha \in \omega$, c'est-à-dire, un nombre naturel selon la définition de Von Neumann. Par rapport aux cardinaux auxquels aucun nombre naturel peut être injecté, on leur assigne un cardinal en fonction de leur correspondance avec les ordinaux limites. Un exemple de cela serait le cas des nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, leur ordinal limite étant ω et leur cardinal, $\aleph_0$. Cependant, si on construit l'ensemble des nombres entiers de façon que $\mathbb{Z}' = \{0, 1, 2, ..., -1, -2, -3, ...\}$[9] on voit que l'ordinal qui lui correspond est $\omega \cdot 2$, c'est-à-dire, $\omega + \omega$, plus grand que ω tout seul. Le cardinal de $\mathbb{Z}'$, noté $|\mathbb{Z}'|$, reste toujours $\aleph_0$, car il peut être mis en bijection avec l'ensemble des nombres naturels. Bien qu'ils aient le même nombre d'éléments, leur ordinal n'est pas le même, car $\mathbb{Z}'$ n'est pas isomorphe à ω et, par extension, à $\mathbb{N}$.

On peut distinguer les cardinaux infinis dans deux sections : le cardinal du dénombrable ($\aleph_0$) et les autres cardinaux plus grands que lui, comme $\mathfrak{c}$, $\aleph_1$ ou $|P(\mathbb{N})|$. Ceux-ci sont des cardinaux correspondant à des ensembles qui ne sont pas dénombrables[10], des ensembles qui sont si grands qu'ils ne peuvent pas être mis en bijection avec l'ensemble infini des naturels. Il y a aussi des cardinaux plus grands de la forme $\aleph_\alpha$ où $\alpha \in \omega$, mais ce qu'on connaît comme des « grands cardinaux » sont ceux cardinaux qui sont si grands pour être exprimés comme $\aleph_\xi$, ξ étant un ordinal. On ne va pas entrer dans ce sujet par raisons d'espace.

[8] Selon la définition de von Neumann, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$

[9] Ici on est en train de considérer que -1 contient tous les nombres positifs. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas vraiment un ensemble bien ordonné car il manque d'un élément minimal, mais on peut jouer avec ses éléments et considérer que la suite de tous les nombres positifs précède -1 et le reste de la suite des nombres négatifs.

[10] Voir 3.3.1

L'importance de l'axiome des parties

L'axiome des parties[11] définit l'ensemble des parties (ensemble puissance) d'un autre ensemble. De la seule existence de cet ensemble, Cantor avait déduit son très célèbre théorème sur le cardinal de n'importe quel ensemble $\mathcal{P}(X)$. Il dit, l'ensemble donné étant fini ou infini, que le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ sera plus grand que celui de X. Cantor avait prouvé ça grâce au concept de couverture, consistant à substituer avec une suite infinie les membres d'un ensemble avec des uns, tandis que les éléments qui n'y appartiennent pas sont substitués avec des zéros. De cette façon, on peut créer des suites infinies et, avec celles-ci, les structurer de sorte que l'« argument diagonal de Cantor » puisse être appliqué sur elles. Le but de cet argument diagonal est de créer une nouvelle suite de uns et de zéros qui ne coïncide pas avec aucune des suites déjà formées. Dans le cas des ensembles avec une quantité finie de nombres on voit que ce nouvel ensemble a un cardinal[12] de $2^{|X|}$.

Par rapport aux ensembles dénombrables, ceci est aussi applicable, mais on voit que lorsqu'on fait l'ensemble de toutes les suites, il y a des suites appartenant aussi à $\mathcal{P}(X)$ qu'on ne peut pas former d'une façon naturelle. On découvre alors la non-dénombrabilité des ensembles puissances d'ensembles dénombrables. C'est-à-dire, $|\mathcal{P}(\aleph_0)| = 2^{\aleph_0}$, et on arrive à la conclusion que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Le problème arrive lorsqu'on considère $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ce qu'on appelle l'hypothèse du continu, un problème qui a été déterminant pour la méta-mathématique. Mais on n'est pas sûrs que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ non plus[13], et c'est un énoncé qui reste (et restera) là comme une curiosité théorique et un objet de débat.

---

[11] Voir 4.4

[12] Le 2 de la base est un nombre provenant des propriétés de la combinatoire, mais on pourrait aussi l'interpréter comme le nombre d'éléments possibles dans la suite (juste des zéros et des uns). $|X|$ représenterait la quantité d'éléments possibles dans la suite.

[13] $\mathfrak{c}$ est la cardinalité du continu, formulée par Cantor, qui représente le cardinal de l'ensemble des nombres réels. $\mathfrak{c}$ n'est pas dénombrable, et c'est à cause de cela que Cantor considérait que $\mathfrak{c} = \aleph_1$

Partie III

Cadre pratique

Chapitre 5

La tradition aristotélicienne et les influences de Cantor

Georg Cantor, un brillant scientifique dont on a beaucoup parlé, est l'auteur d'une des plus révolutionnaires idées par rapport au rapprochement de l'infini à partir de la logique. Toutefois, il a été très limité par la domination de la pensée aristotélicienne et scolastique. Dans son œuvre *Grundlager einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fondements d'une théorie générale des variétés), publiée dans la revue scientifique allemande *Mathematische Annalen* en 1883, il fait une exploration mathématique et philosophique sur la notion de son infini, comme il avance déjà dans le sous-titre de l'article *Ein mathematisch-philosopher Versuch in der Lehre des Unendlichen*[3] (littéralement, « une exploration mathématique et philosophique sur la théorie de l'infini »). Dans ce célèbre article, Cantor cite plusieurs philosophes, très célèbres dans son époque, dont les pensées constituent les ciments que Cantor a dus dépasser afin que sa conception de l'infini et du nombre soit acceptée.

Dans ce cadre pratique, qui pourrait se prendre comme une partie philosophique, on analysera deux textes de deux philosophes sur lesquels Cantor s'appuie, cités explicitement dans l'article. Ces textes appartiennent à René Descartes et à John Locke. En outre, on va aussi commenter la partie philosophique du texte de Cantor, déterminante afin de comprendre la dynamique actuelle des mathématiques.

5.1 René Descartes : Principia philosophiæ

René Descartes était un mathématicien, métaphysicien et philosophe consacré à l'épistémologie né en 1596 à Descartes et mort en 1650 à Stockholm. C'est l'un des principaux théoriciens de la pensée rationaliste, un homme influant très vastement tous les domaines formels du savoir pendant la période de la révolution scientifique. Ses œuvres les plus célèbres sont les *Meditationes de la prima philosophia*, le *Discours de* *la méthode* et *Principia philosophiæ*, écrits en 1641, 1637 et 1644, respectivement. C'est l'auteur de la phrase *« Cogito, ergo sum »*, une devise plutôt célèbre dans plusieurs domaines de la littérature et de la philosophie.

Dans cette section, on commente concrètement les paragraphes XXVI et XXVII du premier livre des *Principia philosophiæ*, deux chapitres qui parlent surtout de la façon dont les humains comprenons le monde, pourquoi on ne peut pas utiliser la qualification d'« infini » pour n'importe quoi, et quelle relation a le concept d'infini avec Dieu. Il faut dire que la pensée cartésienne autour de la divinité supposera un important obstacle moral qui empêchera Cantor de pouvoir révéler ses conclusions sur l'infini, et ceci entravera beaucoup les nouvelles avancées concernant ce type d'idées.

Pendant le chapitre XXVI, dans sa totalité consacré à traiter les idées sans bornes, Descartes dit ceci à propos de l'infinitude et de la non-définition :

> [...] nous ne nous embarrasserons jamais dans les disputes de l'infini ; d'autant qu'il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer ni en tâchant de le comprendre [...]
>
> DESCARTES, René. *Principia philosophiæ*, 1647 (traduction de l'abbé Picot), [4] partie I, ch.XXVI

Il ne faut pas s'occuper de l'infini, car essayer de comprendre avec une conception finie ce qui l'échappe serait, dans tous les sens, absolument futile. En outre, on voit que Descartes, juste après ce fragment, qualifie subtilement d'« hérétiques » ceux qui osent réfléchir à l'infini, car ils sont hypothétiquement en train de considérer que leur esprit est infini :

> [...] c'est pourquoi nous ne nous soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d'une ligne infinie est infinie, et si le nombre infini est pair ou non pair, et autres choses semblables, à cause qu'il n'y a que ceux qui s'imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner telles difficultés.
>
> DESCARTES, René. *Principia philosophiæ*, 1647 (traduction de l'abbé Picot), [4] partie I, ch.XXVI

Après cette tentative de persuasion consistante à méprendre ceux qui veulent s'occuper des curiosités de l'infini, Descartes raconte que ce qu'on devrait faire afin de ne pas générer des contradictions ou des pensées alternatives est de laisser de côté cette question, de ne pas qualifier ce qui n'est pas borné comme « infini » mais comme « indéfini ». L'idée que Descartes veut exprimer dans le prochain passage est que le raisonnement humain est imparfait et qu'il nous mène à nommer de façon incorrecte les entités apparemment sans des bornes. La raison humaine constitue, donc, une sorte de biais qui nous fait voir les idées dont on ne trouve pas de bornes comme infinies. En résumé, les humains croient que ne pas voir de limites dans quelque chose signifie automatiquement que cette chose n'en a pas et, selon Descartes, il faut être conscients que ce qui se passe en réalité c'est que nous ne sommes capables de déterminer si elle en a ou pas. C'est pourquoi on doit changer le qualificatif.

Durant le XXVII chapitre il parle un peu plus sur les différences entre l'infini et l'indéfini. Concrètement, il dit que Dieu est la seule entité qui mérite l'adjectif d'« infini », puisqu'il est sûr et certain qu'il ne peut pas avoir des limites :

> Et nous appellerons ces choses indéfinies plutôt qu'infinies, afin de réserver à Dieu seul le nom d'infini; tant à cause que nous ne remarquons point de bornes en ses perfections, comme aussi à cause que nous sommes très assurés qu'il n'y en peut avoir.

DESCARTES, René. *Principia philosophiæ*, 1647 (traduction de l'abbé Picot), [4] partie I, ch.XXVII

5.2 John Locke : *An Essay Concerning Human Understanding*

John Locke (1632-1704) était un philosophe anglais du XVIIe siècle intéressé surtout aux domaines de l'épistémologie, la philosophie politique et, de façon professionnelle, à la médecine. Son œuvre épistémologique la plus connue, que Cantor cite dans son article comme une des principales sources d'inspiration, c'est *« An Essay Concerning Human Understanding »* (Un essai sur l'entendement humain), où il explique comment les humains participent dans son acquisition de connaissances et quelles sont les voies grâce auxquelles les éléments de son entourage se présentent face à leurs sens. Dans cette section, on analysera les principales contributions de Locke aux notions de nombre et d'infini, présentes surtout dans les chapitres XVI et XVII du livre II de cette œuvre.

Locke comprend le nombre à partir de l'unité, c'est-à-dire, comme une façon d'exprimer les idées de quantité à partir de l'indivisible[1]. Lui, et les philosophes idéalistes, traitaient la réalité à partir de ce qu'ils appelaient des « idées », des abstractions mentales du monde sans lesquelles les humains ne pourraient pas traduire et comprendre leur réalité et leurs expériences. Pendant les chapitres antérieurs à ceux-ci, il parle de la « durée » et de l'« expansion », deux idées, selon lui, désignant le temps et l'espace. Ces idées de durée et d'expansion sont très liées avec l'idée de « nombre » qu'il va exposer, lorsque la durée et l'expansion peuvent être deux manifestations physiques du nombre. Dans ce qui concerne ces idées, Locke fait cette réflexion :

[1] Cet indivisible n'est pas le même indivisible que dans le calcul de Leibniz. Ici, le mot « indivisible » décrit une unité.

> Duration has never two parts together, expansion altogether. Duration, and time which is a part of it, is the idea we have of perishing distance, of which no two parts exist together, but follow each other in succession; an expansion is the idea of lasting distance, all whose parts exist together, and are not capable of succession.

LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698, [7] bk.II, ch.XV, par. 12

Par rapport à aux limitations de la durée et de l'expansion, on trouve dans le même chapitre un extrait très illustrateur :

> Expansion not bounded by matter. The mind, having got the idea of the length of any part of expansion, let it be a span, or a pace, or what length you will, can, as has been said, repeat that idea, and so, adding it to the former, enlarge its idea of length, and make it equal to two spans, or two paces; and so, as often as it will, till it equals the distance of any parts of the earth one from another, and increase thus till it amounts to the distance of the sun or remotest star. By such a progression as this, setting out from the place where it is, or any other place, it can proceed and pass beyond all those lengths, and find nothing to stop its going on, either in or without body. [...] Nor duration by motion. Just so is it in duration. The mind having got the idea of any length of duration, can double, multiply, and enlarge it, not only beyond its own, but beyond the existence of all corporeal beings, and all the measures of time, taken from the great bodies of all the world and their motions.

LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698, [7] bk.II, ch.XV, par. 2 et 3

Comme on peut voir dans ce cas, les idées d'expansion et de durée ne sont pas limitées par les propriétés de matière ou du mouvement, selon lui. L'espace est lié de façon incorrecte à la matière, une sorte de préjugé que Locke, dans cet extrait, essaie de dépasser. Même avec la conception physique du temps. En d'autres mots, ça veut dire que l'espace et le temps ne sont liés à ces autres propriétés que lors des mesures qu'on peut faire. On peut voir aussi que l'être humain est capable de manipuler avec son intellect les quantités de ces idées-là, c'est-à-dire, de les agrandir, diminuer, multiplier, et cetera, par les propriétés intrinsèques de ces idées.

On peut décrire, donc, les concepts de temps et de lieu comme une sorte de mesures relatives de ces idées indépendantes du reste. Le temps et la place n'existent que lorsqu'on les mesure. Selon Locke :

> Time in general is to duration as place to expansion. They are so much of those boundless oceans of eternity and immensity as is set out and distinguished from the rest, as it were by landmarks; and so are made use of to denote the position of finite real beings, in respect one to another, in those uniform infinite oceans of duration and space.
>
> LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698,[7] bk.II, ch.XV, par. 5

Cependant, ce qui devient intéressant est son idée d'infini, car il introduit le « nombre », une idée à partir de laquelle les notions de l'éternel et de l'incommensurable peuvent se décrire.

Tout au long des chapitres XVI et XVII de son livre, il expose les idées de nombre et d'infinité, cette dernière étant étroitement liée à l'expansion incommensurable ou la durée éternelle. Locke comprend le nombre comme une idée à partir du concept universel d'« unité ». Il faut néanmoins comprendre, afin de concevoir le nombre dans sa totalité, ce qu'il décrivait comme les « modes » d'une idée. Les modes sont les différentes façons dont une idée peut se manifester. Par exemple, les modes du nombre sont les différentes quantités que les nombres peuvent exprimer. Ces modes du nombre sont produits à partir du processus d'addition[2].

> Amongst all the ideas we have, as there is none suggested to the mind by more ways, so there is none more simple, than that of unity, or one: it has no shadow of variety or composition in it: every object our senses are employed about; every idea in our understandings; every thought of our minds, brings this idea along with it.
>
> LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698, [7] bk.II, ch.XVI, par. 1

Ce qui est inhérent à l'idée d'unité (et, par extension, de nombre) c'est sa capacité de designer tous les particuliers, quelles que ses propriétés ou ses qualités soient. Le nombre se base, comme il explique dans tout le premier paragraphe, sur le concept d'unité, dont on peut modifier le mode grâce à l'addition d'autres unités. « *Its modes made by addition. By repeating this idea in our minds, and adding the repetitions together, we come by the complex ideas of the modes of it.* ».

L'unité désigne l'un, le nombre primordial décrivant une quantité, et les modes dérivés de cette idée représentent la notion de quantité. Locke relie les idées antérieurement exposées de durée et d'expansion avec le mode complexe du nombre appelée « infini », une addition éternelle d'unités à la première unité.

[2] Il faut repérer la précocité de ces idées par rapport à Peano, l'un des mathématiciens ensemblistes qui posera les bases pour la construction de l'arithmétique à partir de ce même principe d'addition

> Number measures all measureables. This further is observable in number, that it is that which the mind makes use of in measuring all things that by us are measurable, which principally are expansion and duration; and our idea of infinity, even when applied to those, seems to be nothing but the infinity of number.
>
> LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698, [7] bk.II, ch.XVI, par. 8

De ce dernier extrait, on pourrait conclure qu'il existe une réciprocité entre le nombre, l'expansion et la durée, puisqu'on peut faire correspondre les modes de ces idées avec les modes du nombre, en résumé. Dans le XVe et XVIe chapitres, Locke fait des constantes mentions au mode incommensurable de l'expansion et de la durée (on dirait que ceci représenterait un infini physique spatial et l'éternité, respectivement). Il faut remarquer la dernière partie du fragment, *« even when applied to those [l'idée d'infini], seems to be nothing but the infinity of number. »* Ceci veut dire que lorsqu'on considère des quantités infinies dans le monde physique, il faut comprendre qu'elles ont un rapport très étroit avec l'idée de nombre. Ce faisant, ce qu'on est en train de dire est que ce que l'éternel exprime est juste un mode de l'idée de nombre puisque, du fait qu'on peut mesurer le temps, ce n'est pas trop difficile d'ajouter des unités de temps de façon indéfinie. Et ajouter des unités signifie modifier le mode d'un nombre. En synthèse, il conclut que les seules idées dont on peut considérer un mode infini sont celles d'expansion et de durée, car elles sont constituées par des parties et on peut modifier leur mode en répétant l'addition ou soustraction de parties. Les idées qui ne sont pas constituées par des parties ne peuvent pas être infinies (il met des exemples, dans ce cas, concernant à la saveur ou la blancheur), car elles ne peuvent pas être exprimées avec le nombre.

John Locke consacre une partie importante du XVIIe chapitre à parler de Dieu, de nos idées concernant l'infinité et l'éternité, et comment elles ont un rapport intime avec la même *définition* de Dieu. On le voit dans le prochain extrait :

> It is true, that we cannot but be assured, that the great God, of whom and from whom are all things, is incomprehensibly infinite: but yet, when we apply to that first and supreme Being our idea of infinite, in our weak and narrow thoughts, we do it primarily in respect to his duration and ubiquity; and, I think, more figuratively to his power, wisdom, and goodness, and other attributes, which are properly inexhaustible and incomprehensible.
>
> LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698,[7] bk.II, ch.XVII, par. 1

Il fait alors des exceptions dans le principe d'applications des modes infinis lorsqu'on parle des attributs et des qualités divines. Lui, il considère, comme il était accepté et répandu à l'époque, que les caractéristiques du Dieu que l'on supposait étaient toutes infinies. Par exemple, il dit que Dieu a une sagesse infinie, ce qui, dans l'entendement humain, ne peut pas se concevoir lorsque la sagesse n'est pas mesurable avec le nombre.

Cependant, cette mention de Dieu est juste un incise dans la totalité du texte. Locke considère, en suivant la tradition aristotélicienne et scolastique, que l'idée d'infini n'est pas positive[3]. L'idée d'infini spatial existe, selon lui, et se manifeste comme une idée négative. Pareil avec l'idée de l'indivisible. Il dit que ce sont des idées négatives puisqu'il faut les délimiter pour les mesurer, et les mesurer pour pouvoir y ajouter ou y soustraire une unité, étant ça ce qui empêche l'homme d'arriver à concevoir l'idée positive de l'incommensurable[4]. Par rapport a ce que, en mathématiques, on arrive à considérer comme entité positive, l'infinitésimal de Newton et Leibniz, Locke écrit cette sorte de prémonition décrivant la faiblesse mathématique de ce concept :

> What remains of smallness is as far from his thoughts as when he first began; and therefore he never comes at all to have a clear and positive idea.
>
> LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698,[7] bk.II, ch.XVII, par. 18

Les mathématiques, traitant toujours des concepts positifs et géométriques, imaginables, sautaient par dessus de leurs limites métaphysiques en considérant cette sorte de quantités.

Avec un très soutenu sarcasme, il se moque de l'absurdité de proposer des telles quantités :

> [...] whereby, if a man had a positive idea of infinite, either duration or space, he could add two infinities together; nay, make one infinite infinitely bigger than another—absurdities too gross to be confuted.
>
> LOCKE, John. *An Essay Concerning Human Understanding*, 1698, [7] bk.II, ch.XVII, par. 20

L'interprétation de ce dernier fragment est ouverte. Ceci semble un argument valide dans le sens aristotélicien de l'infini, mais avec le futur point de vue cantorien, on verra que la dernière partie est absolument discutable. Une déclaration qui n'a pas tout à fait été opportune, et que Cantor réfutera avec sa théorie de variétés.

[3] Locke utilise très souvent le qualificatif de « positif » pour désigner des idées particulières directement concevables par l'homme. Selon lui, les idées négatives sont des idées indéterminées, dont on comprend le sens mais qu'on ne peut pas imaginer directement.

[4] Voir l'étymologie du mot: incommensurable veut dire « ce qui n'est pas mesurable », en faisant référence à l'infini numérique que cette qualité non-mesurable représente.

5.3 Commentaire à propos de Cantor

Les travaux de Cantor on été déterminants pour les mathématiques. Toutefois, la plupart de ces œuvres sont très inaccessibles par son antiquité et les traiter en version originale devient une tâche quasi impossible. La vision de Cantor a déjà été abordée dans le chapitre 4 du cadre historique, et à cause de cela on ne va pas y revenir.

Cependant, il faut commenter que Cantor avait été très critiqué pour ne pas avoir suivi la ligne aristotélicienne, et dans le préface de son travail *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* s'excuse littéralement. Il dit qu'il a été obligé de sauter par dessus de la tradition, en même temps qu'il commentait que ses travaux allaient totalement contre ses croyances. Et le fait est que Georg Cantor était un homme avec des convictions religieuses très fortes. La tradition aristotélicienne promulguée par les deux penseurs abordés dans cette partie du travail était encore très présente dans l'esprit et la pensée de Cantor sous la forme d'un préjugé qu'il a osé casser. On peut même voir qu'il explicite cette idée dans une sorte de classification des nombres consistant aux *finis, suprafinis* et *absolus.* Selon lui, ce qu'il étudie sont les nombres suprafinis, qui ne sont pas du tout l'absolu, puisque cette idée d'absolu est celle que Descartes et Locke lient avec Dieu. C'est-à-dire, que l'intellect humain ne peut que comprendre les nombres finis et les nombres qui dépassent cette classification, mais ce que les humain ne vont jamais faire c'est de comprendre l'absolu. Enfin, Cantor résume cette idée dans la prochaine maxime en langue latine :

> Omnia seu finita seu infinita definita sut et excepto Deo ab intellectu determinari possunt.
>
> CANTOR, Georg *Grundlager einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883,[3] par. 5

Cantor a été une figure très révolutionnaire dans le monde mathématique et philosophique, mais on peut voir qu'il réserve encore l'infini à Dieu de la même façon que Descartes. L'idée scolastique de l'impossibilité de comprendre des quantités non-finies est désormais cassée, mais avec des limites : l'absolu ne pourra jamais être compris.

Partie IV

Conclusions

Conclusions

Ce travail est devenu une grande formation dans le sujet et sans doute une augmentation de ma plasticité mentale. Ce progrès quant à la capacité d'abstraction représente aussi une sorte de préparation quant aux études postérieurs en mathématiques que je prétends suivre. Par rapport aux objectifs techniques du travail, comme la rédaction du travail avec un nouveau logiciel (OverLeaf) ou l'apprentissage du langage LaTeX , ils ont été tous accomplis. Quant aux aspectes linguistiques, je suis fier d'avoir pu rédiger un travail si important dans une langue étrangère. Dans ce qui concerne l'hypothèse de partie, qui abordait le sujet de si «*les mathématiques pouvaient donner des réponses par rapport à l'infini, et la logique suffisait à le comprendre*», on peut dire qu'elle a été partiellement confirmée. Voyons quelques observations par rapport aux résultats de l'investigation :

- La question de l'infini n'a pas été résolue, et elle restera ouverte pendant que les humains serons des humains.
- Même si la conception de l'infini a beaucoup évolué et progressé grâce à la logique, on ne peut (pour le moment) comprendre l'absolu. Malgré cela, nous avons réussi à théoriser sur les quantités et les nombres transfinis, ce qui, il y a quelques siècles, on ne pourrait pas avoir fait.
- On a découvert la pertinence de la philosophie dans les mathématiques lors des constants appels à des abstractions douteuses qui ont eu lieu avant l'arrivée de la logique mathématique de la part de Hilbert et les formalistes.

Cette investigation a suivi une ligne et une méthodologie scientifique malgré le fait que la plupart de ce travail ait une thématique plutôt philosophique. Vu que c'était impossible de contribuer avec des mathématiques nouvelles, et qu'une des missions implicites de ce travail était celle de donner un nouvel avis sur quelque sujet, le travail a été finalement conduit plus par la voie de la philosophie que par la voie des mathématiques.

Le cadre mathématique est une synthèse de tous les concepts en théorie des ensembles (chirurgicalement choisis) qu'on devait connaître avant de passer à comprendre certains concepts de la pensée de Cantor, et c'est la partie dont la rédaction et investigation ont résulté plus stimulantes.

Le travail a aussi servi à éclaircir quelques doutes par rapport aux études supérieures, en étant une expérience déterminante quant à la décision de ma carrière. Avec ceci, on peut dire que le travail est devenu important dans un niveau personnel puisque j'ai appris beaucoup d'aspects, liés bien sûr au sujet, comme la magnitude de la passion envers les mathématiques ou l'appréciation de la beauté de cette discipline. En fait, je me suis plutôt rendu compte de cela. Pour conclure,

Références bibliographiques

[1] BEZHANISHVILI, Guram et LANDRETH, Eachan [sans date]. *An Introduction To Elementary Set Theory* [en ligne] Disponible à l'adresse: `https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Pengelley_projects/Project-5/set_theory_project.pdf` [Consulté le 17 octobre 2020]

[2] BOYER, Carl, 1968. *A History Of Mathematics*. New York : John Wiley & Sons, Inc. Wiley International Edition. ISBN : 0-471-09373-4 [en ligne] Disponible à l'adresse: `http://www.math.pitt.edu/~sph/1230/Boyer-AHistoryOfMathematics.pdf` [Consulté le 19 septembre 2020]

[3] CANTOR, Georg, 1883. *Grundlager einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig : Teubner, 1883 (Traduction à l'espagnol et commentaires de BARES, J. et CLIMENT, J.) [en ligne] Disponible à l'adresse: `https://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf` [Consulté le 28 septembre 2020]

[4] DESCARTES, René, 1644. *Principia philosophiæ* (Traduction au français de l'abbé Picot, 1647 ; texte de l'édition Alguié) [en ligne] Disponible à l'adresse: `http://www.philotextes.info/spip/IMG/pdf/principes_i.pdf` [Consulté le 20 novembre 2020]

[5] IVORRA, Carlos [sans date] *Lógica y teoría de conjuntos* [en ligne] Disponible à l'adresse: `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf` [Consulté le 7 octobre 2020]

[6] KUNNEN, Kenneth, 1980. *Studies in logic and the foundations of mathematics*. Amsterdam : Elsevier Science B.V. ISBN: 0-444-86839-9 [en ligne] Disponible à l'adresse: `http://blacaman.tripod.com/cursos/pdf/2012-2_0941.pdf` [Consulté le 9 octobre 2020]

[7] LOCKE, John, 1690. *An Essay Concerning Human Understanding* [en ligne] (Notes de BENNET, Jonathan, 2017, disponible à l'adresse : `https://www.earlymoderntexts.com/assets/pdfs/locke1690book2.pdf` [Consulté le 22 novembre 2020]) (Document de The Pennsylvania State University, 1999, disponible à l'adresse `http://www.philotextes.info/spip/IMG/pdf/essay_concerning_human_understanding.pdf` [Consulté le 21 novembre 2020])

[8] PIÑEIRO, Gustavo Ernesto, 2018. *El infinito en matemáticas: CANTOR, Lo incontable es lo que cuenta.* Villatuerta : RBA. Grandes Ideas de la Ciencia. ISBN: 978-84-473-9527-9

[9] RECALDE, Luis Cornelio, [sans date]. *La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.* [en ligne] Disponible à l'adresse: `https://www.redalyc.org/pdf/468/46812106.pdf` [Consulté le 20 septembre 2020]

[10] RODRÍGUEZ, Carlos, 2017. *Demostrando la infinitud de los números primos* [en ligne] Santander: Universidad de Cantabria. Travail de fin de degré. Disponible à l'adresse: `https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/12330/Rodriguez%20San%20Emeterio%20Carlos.pdf?sequence=1&isAllowed=y` [Consulté le 25 septembre 2020]

[11] WALLACE, David, 2013. *Todo y más: una breve historia al infinito.* Villatuerta: RBA. ISBN: 978-84-473-9527-9

Les figures utilisées dans la réalisation de ce travail on été extraites de :

- Figure 1.1- `http://maximebonin.blogspot.com/2009/11/le-carre-des-oppositions-logiques.html`

  [Consulté le 23 août 2020]

- Figure 1.2- `https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Aktumen/Polygon.html`

  [Consulté le 8 septembre 2020]

- Figure 1.3- figure originale

- Figure 2.1- `https://samjshah.com/2008/04/30/cavalieris-principle/`

  [Consulté le 27 septembre 2020]

- Figure 2.2- `https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calcI/defnoflimit.aspx`

  [Consulté le 8 octobre 2020]

- Figure 4.1- `https://www.nagwa.com/es/worksheets/496124907356/`

  [Consulté le 26 octobre 2020]

- Figure 4.2- figure originale