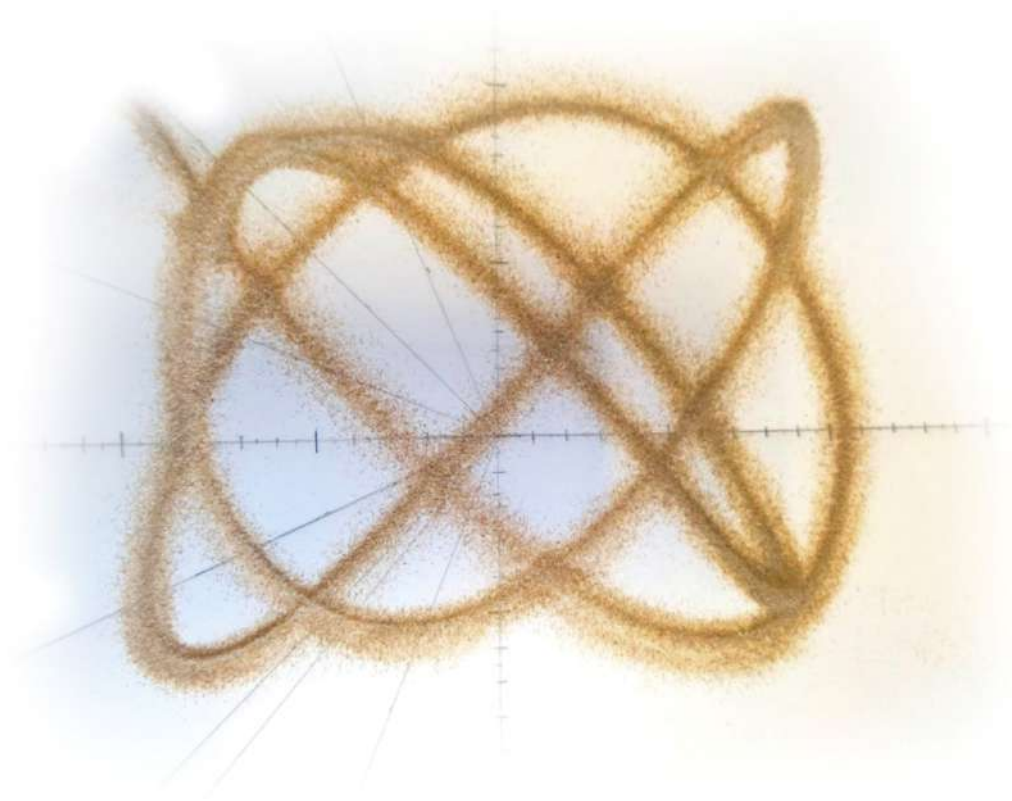


**ESTUDI DEL PÈNDOL SIMPLE,
LES CORBES DE LISSAJOUS
I EL MOVIMENT CAÒTIC DEL PÈNDOL DOBLE**



RESUM

Es presenta un estudi de tres pèndols: el pèndol simple, el pèndol amb dues freqüències simultànies i el doble. Els dos últims permeten estudiar dos conceptes que desperten interès i curiositat: les corbes de Lissajous i el moviment caòtic. D'altra banda, s'ha estudiat el pèndol simple ja que estableix les bases dels altres dos.

L'estudi dels pèndols s'ha enfocat, en els tres casos, d'una manera pràctica i experimental.

En el pèndol simple s'han demostrat experimentalment sis afirmacions que determinen el seu moviment.

El segon dels tres pèndols s'ha estudiat utilitzant un pèndol de sorra que ha permès fer múltiples representacions de les corbes de Lissajous.

En el cas del pèndol doble, l'estudi es centra en demostrar que realitza un moviment caòtic.

ABSTRACT

The project is a study of three pendulums: a simple one, a two simultaneous frequencies one and a double one. The second and third ones enable the study of two interesting concepts: the Lissajous curves and the chaotic movement. The simple pendulum is studied because it sets the bases of the other two.

The three studies are mainly practical and experimental.

For the simple pendulum there are six experimental demonstrations of different statements that describe its movement

The second pendulum was studied using a sand pendulum which has allowed the representation of multiple Lissajous curves.

In the double pendulum, the study is fundamentally a demonstration of the chaotic movement that it follows.

TAULA DE CONTINGUTS

INTRODUCCIÓ	5
1.- CONSTRUCCIÓ DE L'ESTRUCTURA	7
2.- EL PÈNDOL SIMPLE	12
2.1.- TEORIA	12
2.2.- PRÀCTIQUES	16
2.2.1.- Pràctica 1: Variació del període d'un pèndol en funció de la seva llargada (en amplituds inferiors als 20°)	17
2.2.2.- Pràctica 2: Variació del període d'un pèndol en funció de la seva llargada (en amplituds superiors a 20°)	28
2.2.3.- Pràctica 3: Comprovació que l'amplitud d'oscil·lació no influeix en el període d'un pèndol (en amplituds inferiors als 20°)	34
2.2.4.- Pràctica 4: Comprovació que la massa d'un pèndol no influeix en el seu període	38
2.2.5.- Pràctica 5: Conservació de l'energia mecànica en un pèndol simple	42
2.2.6.- Pràctica 6: Mesura del valor de la gravetat utilitzant un pèndol simple	54
3.- EL PÈNDOL DE SORRA: LES CORBES DE LISSAJOUS	70
3.1.- CONSTRUCCIÓ DEL PÈNDOL	70
3.2.- REPRESENTACIONS DE LA TREJECTÒRIA D'UN PÈNDOL SIMPLE	83
3.3.- TEORIA DE LES CORBES DE LISSAJOUS	94
3.3.1.- Descobriment i estudi	95
3.3.2.- Equacions	95
3.3.3.- Figures	96
3.4.- REPRESENTACIONS DE LES CORBES DE LISSAJOUS	98

4.- EL PÈNDOL DOBLE: MOVIMENT CAÒTIC	122
4.1.- TEORIA	122
4.2.- CONSTRUCCIÓ	125
4.3.- PRÀCTICA	131
CONCLUSIONS	139
FONTS DOCUMENTALS COMENTADES	142
ANNEX I: DEMOSTRACIÓ DE $\sin(\alpha) \cong \alpha$ (per α tendeix a 0)	147
ANNEX II: DIARI DE RECERCA	149
ANNEX III: DESPESES	152

AGRAÏMENTS

Agraeixo la col·laboració en la realització d'aquest treball al meu tutor del treball de recerca: Tomàs Agulló, i a la meva família.

Al primer li agraeixo l'ajuda a l'hora de definir el treball a partir de la idea inicial d'estudiar les corbes de Lissajous; i que m'hagi guiat al llarg de tot el procés indicant-me en tot moment quin havia de ser el següent pas i com enfocar-lo.

A la meva família els agraeixo la seva ajuda en tots aquells processos que no podia dur a terme sola.

Gràcies.

INTRODUCCIÓ

El treball que es presenta a continuació es divideix en tres parts, cadascuna corresponen a l'estudi d'un tipus de pèndol diferent. Els tres tipus de pèndol que s'han estudiat són: pèndols simples, pèndols amb dues freqüències diferents i pèndols dobles.

El tema del treball va ser escollit després de descartar diverses idees. Algunes de les idees descartades estaven relacionades amb els temes següents: els camps magnètics, els fractals, la proporcionalitat...

La idea de realitzar un estudi de diferents tipus de pèndol no es va concebre com a tal des d'un inici sinó que es va començar a pensar en ella al percebre que el concepte de pèndol era comú en diversos fenòmens que s'havien observat. S'havia tingut l'oportunitat de veure un pèndol doble en funcionament com a exemple de moviment caòtic; d'altra banda s'havien vist diversos vídeos de pèndols de sorra que representaven corbes de Lissajous. Els dos conceptes havien despertat curiositat i interès; de totes maneres cap dels dos s'havia plantejat com a possible objecte d'estudi de treball de recerca. Pensant en nous possibles temes pel treball es van acabar relacionat les dues idees i es va incloure l'estudi del pèndol simple ja que és la base dels altres dos.

El treball en sí és majoritàriament pràctic ja que es basa en l'experimentació amb els diferents pèndols. De totes maneres, s'inclou un apartat teòric per cada apartat pràctic on s'expliquen les bases dels conceptes posteriorment estudiats.

La recerca d'informació es va fer majoritàriament a través d'Internet. La informació es va trobar amb facilitat en múltiples pàgines web (excepte per certs conceptes molt específics) de manera que va poder ser contrastada. La informació s'ha extret principalment de pàgines web escrites en anglès, ja que aquestes solien ser més detallades que les escrites en català o castellà.

En l'apartat teòric del pèndol simple es parla del moviment que descriu i de les forces que el provoquen, alhora que s'introdueixen les fórmules utilitzades posteriorment.

L'apartat teòric del pèndol de sorra està dedicat a les corbes de Lissajous; les corbes que es representen utilitzant aquest pèndol. Es parla tant del seu descobriment i estudi com dels paràmetres que les determinen.

En el cas del pèndol doble, la part teòrica es centra en el moviment caòtic; s'explica què és, com es determina i com es pot observar en un pèndol doble.

L'estructura i contingut de les parts pràctiques del treball és la següent.

La primera part del treball, dedicada als pèndols simples, es subdivideix en sis pràctiques; cadascuna amb el seu propi objectiu, hipòtesis, resultats i conclusions. En les dues primeres pràctiques s'estudia la variació del període d'un pèndol simple en funció de la seva llargada (en la primera quan l'angle d'oscil·lació és inferior als 20° i en la segona quan és superior). En la tercera pràctica es comprova com l'amplitud d'un pèndol simple no influeix en el seu període. La quarta pràctica estudia els efectes de la variació de la massa en un pèndol simple; aquesta pràctica es va acabar relacionant amb la següent; en la qual s'estudia la conservació de l'energia mecànica en els pèndols utilitzats. En l'última pràctica es calcula el valor de la gravetat utilitzant els pèndols simples com a gravímetres.

La segona part del treball està dedicada a l'estudi de les corbes de Lissajous mitjançant un pèndol de sorra. Es van fer representacions de diverses corbes en funció de la relació entre les

frequències de cadascun dels eixos del pèndol i de la diferència de fase entre aquests. Es va acabar ideant un mètode per determinar la diferència de fase, que permetia obtenir la corba desitjada. Cada corba obtinguda s'ha comparat amb la teòrica per observar si s'ha mantingut la figura, han variat les dimensions, etc.

En l'apartat del pèndol doble l'objectiu principal era demostrar que realitza un moviment caòtic. Per fer-ho es van representar les diferents trajectòries (mitjançant fotografies amb un temps d'exposició llarg) que seguia el pèndol doble al ser deixat anar des de la mateixa posició inicial amb les mateixes condicions inicials. A més a més de demostrar que el pèndol realitza un moviment impredecible, es va estudiar l'efecte de canviar una de les fustes del pèndol.

A part dels estudis dels pèndol, en cada apartat s'inclou el procés de construcció de les estructures i pèndols utilitzats. Per exemple, prèviament a l'apartat del pèndol simple s'inclou el procés de construcció de l'estructura cúbica on es pengen els pèndols; estructura que també va ser pensada per poder-hi fer les representacions de les corbes de Lissajous i adjuntar-hi el pèndol doble. Pels dos altres tipus de pèndol s'inclou el procés de construcció de cadascun d'ells; des dels càlculs necessaris per establir les dimensions dels diferents pèndols de sorra fins a les dificultats que es van tenir a l'hora de construir el pèndol doble.

1.- CONSTRUCCIÓ DE L'ESTRUCTURA

EINES

- 2 esquadres
- Barrina
- Tornavís d'estrella
- Trepant de columna
- Trepant de mà
- Broca de fusta M6,5
- Cisalla de metall
- Martell
- Grapadora



MATERIAL

- 8 llistons de fusta (28x28 mm) de 80 cm
- 4 llistons de fusta (28x28 mm) de 74,4 cm
- Cola blanca
- 8 escaires d'1,8 cm d'amplada i 4,5 cm de llargada
- 32 visos
- 8 cargols M6 de 70 mm de llargada
- 8 femelles de papallona M6
- 16 volanderes M6
- 1 m² de reixa metàl·lica amb quadrats de 19x19 mm



PROCEDIMENT

1.- Enganxar amb cola blanca i l'ajuda de les esquadres dos llistons de 80 cm amb dos de 74,4 cm formant un quadrat de 80x80 cm. Repetir el procediment per formar dos quadrats iguals.



2.- Posar les escaires (quatre per quadrat); fixar-les amb quatre visos cadascuna.



3.- Marcar els forats per els cargols en els quatre llistons de 80 cm restants i en els punts corresponents dels quadrats.

4.- Fer els forats utilitzant els trepants.



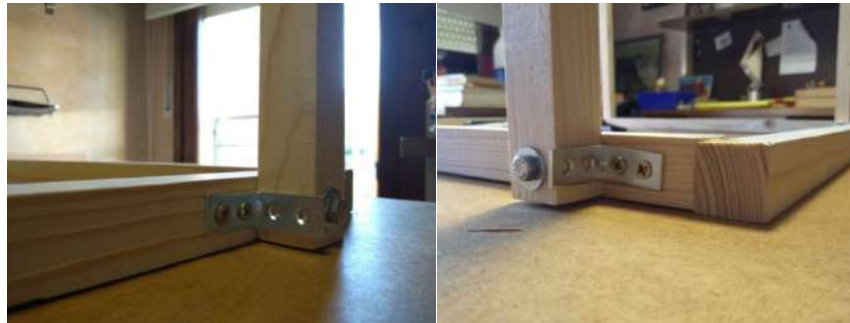
5.- Muntar l'estructura assegurant que les parelles* de forats coincideixin. Per cada forat passar-hi un cargol amb una volandera a cada banda de la fusta; cargolar la femella de papallona per fixar el cargol.

*Per evitar problemes a l'hora de fer encaixar els forats s'ha marcat cada forat dels llistons amb una lletra de la A a la H que coincideix amb la lletra d'un dels forats dels quadrats; els forats amb la mateixa lletra encaixen entre ells.



Representació en 3D i a escala de l'estructura; realitzada amb el programa *Print 3D*.

6.- Un cop es va tenir l'estructura muntada es va percebre que els cargols actuaven com a eix i permetien el moviment de l'estructura. Per evitar que es produís aquest moviment i donar més estabilitat a l'estructura es va decidir afegir quatre escaires exteriors que impedirien el moviment. Se'n van posar dues a cada cara del cub on hi ha cargols. Es van col·locar de manera que a cada cara en quedés una a la part superior i una a la inferior, i una a l'exterior i l'altra a l'interior. I a la cara oposada es van situar inversament.



7.- A continuació es va tallar la reixa perquè tingués la mida del quadrat és a dir 80 x 80 cm, es va fer utilitzant unes cisalles de metall.



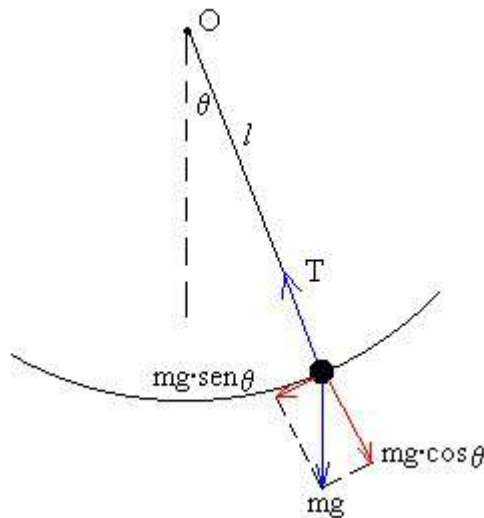
8.- L'últim pas va ser grapar la reixa a la cara superior del cub. Es va grapar aproximadament cada quatre quadrats. Finalment es va utilitzar el martell per assegurar que totes les grapes quedessin totalment introduïdes a la fusta.



2.- EL PÈNDOL SIMPLE

2.1.- TEORIA

Un pèndol simple és una massa suspesa verticalment mitjançant un fil inextensible la massa del qual es considera negligible.



En la figura anterior es simbolitza un pèndol simple ideal.

S'hi representen totes les forces que hi actuen; únicament el pes i la tensió. El pes es descompon en els seus dos components; el de l'eix y i el tangencial a la trajectòria del pèndol. L'única força que intervé en el moviment és el pes tangencial; és l'única força motriu. El component y del pes s'anul·la degut a la tensió del fil. Realment el moviment també es veu afectat per la força de fregament amb l'aire però aquesta no es té en compte en la representació anterior ja que el que s'hi representa és un pèndol simple ideal on es considera nul·la la fricció amb l'aire.

També hi veiem indicat l'angle (en aquest cas anomenat θ) i la trajectòria que segueix la massa (l'arc de circumferència de radi l).

Quan el fil està en vertical la massa es troba en la seva posició d'equilibri on la suma de les forces, i per tant l'acceleració, són iguals a zero (situació en la imatge de l'esquerra). Si, en canvi, el fil té un angle diferent a zero respecte la vertical, la suma de forces deixa de ser zero i, per tant, apareix una acceleració que intenta fer tornar el pèndol a la seva posició d'equilibri (situació en la imatge de la dreta).



El pèndol oscil·larà degut a l'acció de la gravetat; ho farà en un pla vertical i les oscil·lacions tindran lloc entre la posició inicial i la seva posició simètrica respecte la vertical del pèndol. El moviment pendular ideal sempre serà periòdic i, com veurem a continuació, s'aproximarà a un moviment harmònic simple quan oscil·li amb poca amplitud.

Una partícula o un sistema té un moviment harmònic simple quan oscil·la per l'acció de forces conservatives proporcionals a la distància de la partícula a la posició d'equilibri. Si un mòbil descriu un moviment harmònic, passa periòdicament pels mateixos punts de la seva trajectòria; es considera un moviment harmònic simple (MHS) quan, a més a més, el període del mòbil és constant.

Un pèndol simple real no realitzarà mai un moviment harmònic simple. Tot i això, quan oscil·la amb amplituds inferiors als 20° el seu moviment s'aproxima molt a un MHS; es així ja que per amplituds petites es pot fer l'aproximació $\sin(\alpha) \cong \alpha$ (la demostració d'aquesta expressió es troba en l'Annex I).

Per obtenir l'equació del moviment d'un pèndol simple real cal aplicar la segona llei de Newton $\sum F = m \cdot a$ a l'eix tangencial del pèndol obtenint $P_t = m \cdot a_t$ és a dir $-m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_t$. S'inclou el signe negatiu ja que els pes tangencial és una força recuperadora; té sentit oposat al desplaçament del cos. A partir d'aquesta equació i tenint en compte que en un moviment circular $a_t = l \cdot \theta$ on l és el radi (en aquest cas la longitud del fil) i θ és l'acceleració angular; s'obté la següent equació: $-m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot l \cdot \theta \longrightarrow l \cdot \theta + g \cdot \sin(\alpha) = 0$

Per angles inferiors als 20° , és a dir quan es considera que un pèndol simple real realitza un MHS, l'equació passa a ser la següent: $l \cdot \theta + g \cdot \alpha = 0$

L'acceleració tangencial (a_t) en un pèndol simple (quan aquest realitza un moviment harmònic simple) depèn de la gravetat (g), la longitud del fil (l) i la distància del punt a la vertical del punt d'equilibri (x).

$$a_t = -\frac{g}{l} \cdot x$$

La fórmula anterior és pot deduir aplicant la segona llei de Newton $\sum F = m \cdot a$ a l'eix tangencial del pèndol, arribant a la mateixa equació que permet determinar l'equació del moviment del pèndol. Aquesta equació és $-m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_t$. Com que considerem que $\sin(\alpha) \cong \alpha$ obtenim $-m \cdot g \cdot \alpha = m \cdot a_t$.

$$\alpha = \frac{x}{l} \quad \text{per tant} \quad -m \cdot g \cdot \frac{x}{l} = m \cdot a_t \quad \text{i} \quad a_t = -g \cdot \frac{x}{l} = -\frac{g}{l} \cdot x$$

El període (el temps en el qual es completa una oscil·lació; es retorna a la posició inicial en el mateix sentit) d'un pèndol simple quan realitza un MHS depèn únicament de la longitud del fil i de la gravetat; no hi influeix ni la massa ni l'amplitud de l'oscil·lació.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Per arribar a aquesta fórmula partim de la igualtat $-g \cdot \alpha = l \cdot \theta$ a la que hem arribat anteriorment fent l'aproximació $\sin(\alpha) \cong \alpha$ per angles inferiors als 20° . Sabem que la segona derivada d' α és θ

ja que θ és l'acceleració angular. Per tant: $-g \cdot \alpha = l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ i $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\alpha \cdot \frac{g}{l}$. Observem que la segona derivada d' α és menys ella mateixa multiplicada per una constant $\left(\frac{g}{l}\right)$; d'aquesta manera, qualsevol funció la segona derivada de la qual sigui menys ella mateixa multiplicada per $\frac{g}{l}$ serà igual a la funció α .

Sabem que $\frac{d^2}{dt^2}(\sin(t)) = -\sin(t)$ i per aconseguir que $-\sin(t)$ quedi multiplicat per una constant podem afegir l'arrel de la constant en la funció inicial com es mostra a continuació:

$$y = \sin(\sqrt{x} \cdot t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = \cos(\sqrt{x} \cdot t) \cdot \sqrt{x} = z \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\sin(\sqrt{x} \cdot t) \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = -\sin(\sqrt{x} \cdot t) \cdot x$$

d'aquesta manera podem determinar que $\alpha(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$.

Com que en un moviment harmònic simple $\alpha(t) = \sin(\omega \cdot t)$ determinem que $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ i sabem que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ arribem a la fórmula del període: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Dues altres característiques d'un pèndol simple quan oscil·la amb amplituds petites són:

- la longitud del tram de trajectòria recorregut pel pèndol i el seu desplaçament horitzontal tendeixen a igualar-se ja que la trajectòria es pot considerar horitzontal
- l'acceleració normal és menyspreable.

Les característiques i fórmules anteriors només es compleixen i són certes per amplituds iguals o inferiors als 20°. Per tant ens hem de preguntar com es comporta un pèndol per amplituds superiors als 20°; quan el seu moviment no s'aproxima a un MHS.

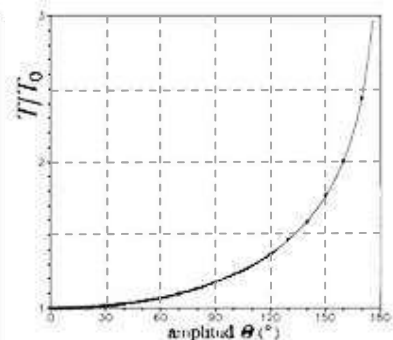
Per trobar l'equació que permet calcular el període d'un pèndol per qualsevol amplitud s'han de fer una sèrie de càlculs que impliquen integrals el·líptiques; degut a que no es disposa dels coneixements necessaris per realitzar aquests càlculs no s'ha pogut deduir la fórmula; aquesta és la solució que obtindríem si resolguéssim les integrals.

$$T(\theta) = T_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Introduint el valor de l'angle en aquesta equació obtenim els resultats expressats en la taula adjuntada a continuació. Per tant observem que l'angle, l'amplitud del pèndol, si que es té en compte a l'hora de determinar el període quan és superior als 20°. A la taula s'observa que realment en angles inferiors i iguals a 20° l'amplitud també afecta al període però aquesta variació es considera insignificant i negligible.

Periodo de oscilación «exacto» del péndulo simple para diversas amplitudes de oscilación.

θ	T/T_0	θ	T/T_0	θ	T/T_0	θ	T/T_0
0°	1.0000	20°	1.0076	40°	1.0313	100°	1.2322
2°	1.0001	22°	1.0093	44°	1.0381	110°	1.2953
4°	1.0003	24°	1.0193	48°	1.0457	120°	1.3729
6°	1.0007	26°	1.0131	52°	1.0541	130°	1.4693
8°	1.0012	28°	1.0152	56°	1.0632	140°	1.5945
10°	1.0019	30°	1.0174	60°	1.0132	150°	1.7737
12°	1.0027	32°	1.0199	70°	1.1021	160°	2.0075
14°	1.0038	34°	1.0225	80°	1.1375	170°	2.4393
16°	1.0049	36°	1.0253	90°	1.1804	180°	∞
18°	1.0062	38°	1.0282				



Concretament la taula ens mostra, per diferents angles, quina relació hi ha entre T_0 ; el valor que obtindríem si no tinguéssim en compte l'angle (és a dir, utilitzant la fórmula simplificada) i T que és el resultat que s'obté aplicant la fórmula suposadament correcta (tenint en compte l'amplitud).

2.- EL PÈNDOL SIMPLE

2.2.- PRÀCTIQUES

2.2.1.- PRÀCTICA 1

VARIACIÓ DEL PERÍODE D'UN PÈNDOL EN FUNCIÓ DE LA SEVA LLARGADA (EN AMPLITUDS INFERIORS ALS 20°)

La fórmula que permet calcular el període d'un pèndol (quan aquest realitza un moviment harmònic simple) mostra que el període és directament proporcional a la llargada del fil.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

OBJECTIU

L'objectiu en aquesta pràctica és verificar experimentalment que l'afirmació anterior és correcta; es a dir, comprovar si realment per angles inferiors a 20° (quan el moviment del pèndol es pot considerar un moviment harmònic simple) es compleix la fórmula anterior.

HIPÒTESI

La hipòtesi és que es podrà comprovar experimentalment que la fórmula de la periodicitat d'un pèndol simple quan descriu un MHS és correcta i, per tant, que el període d'un pèndol és directament proporcional a la llargada del seu fil.

Per realitzar les mesures s'utilitzaran dos mètodes explicats a continuació. Un dels mètodes suposa realitzar les mesures manualment mentre que en l'altre es realitzaran a través de vídeos. La hipòtesi és que el mètode dels vídeos serà el més precís.

PROCEDIMENT

S'estableixen una sèrie de llargades per les quals es calcula el període utilitzant la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Posteriorment, es mesuren experimentalment els períodes dels pèndols amb les llargades establertes. En totes les mesures cal mantenir una amplitud constant i inferior als 20° per tal que l'amplitud no es pugui entendre com la causa de la variació del període; tampoc s'ha de variar la massa per la mateixa raó.

CÀLCULS I MESURES

Per realitzar els càlculs cal crear un full de càlcul que, després d'introduir-hi la fórmula del període, calculi el valor teòric d'aquest a partir d'una llargada inicial prèviament determinada.

Posteriorment es realitzen les mesures experimentals. S'utilitzaran dos mètodes diferents amb la intenció de poder comparar-los entre ells i establir quin és el més precís. En els dos mètodes es mesura el temps que triga el pèndol a fer 5 oscil·lacions completes (5 períodes) i es divideix el resultat entre 5 per saber el valor d'un sol període del pèndol. La diferència és que en un cas es grava el pèndol oscil·lant (amb un cronòmetre al costat) i, observant la gravació en un programa d'edició de vídeos, es determina l'instant inicial i el final dels 5 períodes; mentre que en el segon mètode es realitzen les mesures manualment (s'inicia el cronòmetre quan es deixa anar el pèndol i s'atura passats 5 períodes).

La hipòtesis és que el mètode dels vídeos serà més precís ja que el programa d'edició permet avançar fotograma a fotograma; la velocitat del vídeo és de 24 FPS (fotogrames per segon); això ha de permetre determinar amb exactitud quin és l'instant en que comença i acaba cada període del pèndol.

S'ha decidit mesurar més d'un període alhora i dividir el resultat ja que mesurar un únic període, no utilitzant el recurs dels vídeos però sí manualment, és molt imprecís.

Cada mesura serà realitzada 5 vegades per, posteriorment, fer-ne la mitjana.

Un cop obtingudes les mesures s'introduiran al full de càlcul per tal de calcular els errors absolut i relatiu d'aquestes.

Per tal que el full de càlcul calculi el període s'hi ha introduït la fórmula següent: $=2*PI()*RAIZ(longitud\ del\ fil/9,807)$. El nombre Pi hi està expressat com una constant amb una precisió de 15 dígits. A la gravetat se li ha donat el valor de $9,807m/s^2$.

Per calcular l'error absolut realitzat en les mesures s'utilitza l'expressió $=ABS()$ que dona el resultat, en aquest cas de la diferència entre el valor teòric i el de la mesura, en valor absolut.

Per fer el càlcul de l'error relatiu s'indica al programa que faci la divisió entre l'error absolut i el valor teòric.

RESULTATS

Aquests resultats s'han obtingut fent les mesures del període amb un pèndol de les següents característiques.

AMPLITUD	15° aproximadament
MASSA DE L'ESFERA	200 g
DIÀMETRE DE L'ESFERA	6 cm
VOLUM DE L'ESFERA	113.097 cm ³
MASSA DEL FIL	0.4 g/m aproximadament
DIÀMETRE DEL FIL	1 mm
LONGITUDS DEL FIL (m)	0.3 / 0.4 / 0.5 / 0.6 / 0.7

Respecte els mètodes de mesura s'han utilitzat els dos explicats anteriorment.

MÈTODE 1 (VÍDEOS)						
LONGITUD DEL FIL (m)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
0,3	5,715	5,682	5,737	5,680	5,676	1,139
0,4	6,482	6,567	6,582	6,650	6,549	1,313
0,5	7,404	7,393	7,396	7,389	7,357	1,478
0,6	7,955	7,953	7,990	8,002	8,004	1,596
0,7	8,637	8,554	8,618	8,545	8,606	1,718

MÈTODE 2 (MANUALMENT)						
LONGITUD DEL FIL (m)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
0,3	4,785	5,741	5,640	5,736	5,714	1,105
0,4	6,454	6,474	6,564	6,504	6,352	1,294
0,5	7,392	7,342	7,262	7,283	7,248	1,461
0,6	7,918	7,925	8,015	7,964	7,933	1,590
0,7	8,442	8,696	8,604	8,489	8,603	1,713

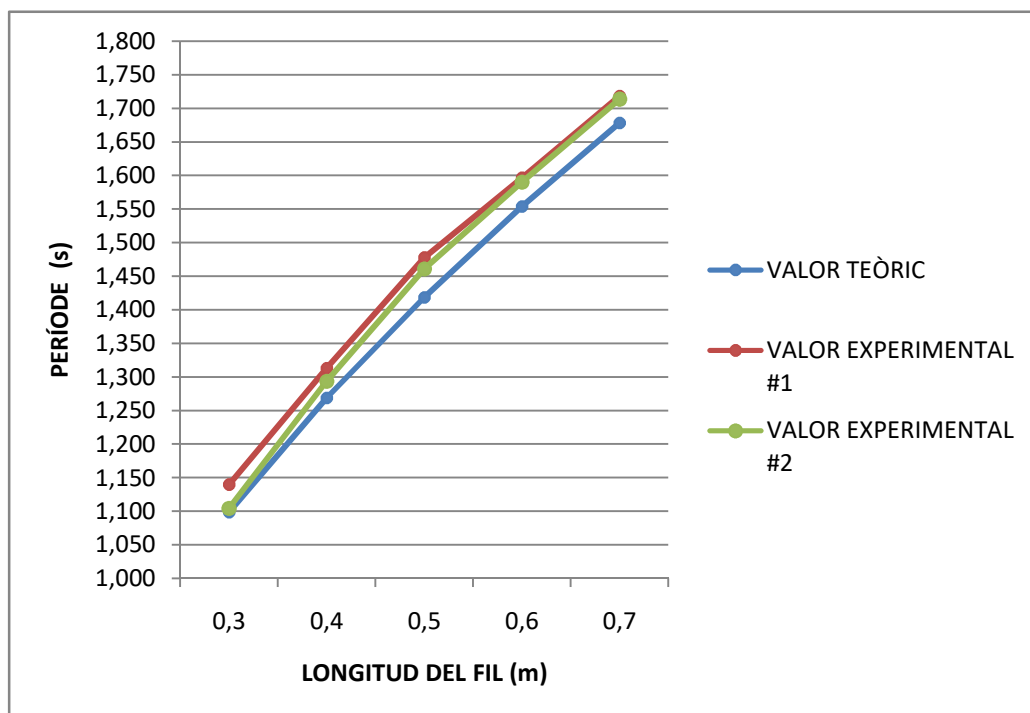
Es va provar una modificació del mètode manual, passant de mesurar 5 períodes a mesurar-ne 10, amb la intenció de detectar si hi havia alguna diferència destacable respecte a la precisió. Els resultats obtinguts es mostren en la pàgina següent i s'hi observa que els valors que s'obtenen mitjançant els dos mètodes són molt semblants en totes les mesures (la variació màxima és de 0,058 s). Degut a que la diferència és tant poc significativa i que la precisió és inferior en la mesura dels 10 períodes es tindran en compte els resultats obtinguts fent la mesura amb 5 períodes i en la resta de pràctiques ja no es faran les mesures de 10 períodes.

MANUALMENT (10 PERÍODES)						
LONGITUD DEL FIL (m)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
0,3	11,509	11,643	11,633	11,643	11,701	1,163
0,4	13,334	13,155	13,232	13,190	13,311	1,324
0,5	14,549	14,707	14,730	14,751	14,780	1,470
0,6	16,122	16,064	16,081	16,078	15,963	1,606
0,7	17,199	17,315	17,342	17,233	17,151	1,725

LONGITUD DEL FIL (m)	DIFERÈNCIA ENTRE 5 I 10 PERÍODES (S)
0,3	0,058
0,4	0,031
0,5	0,009
0,6	0,016
0,7	0,011

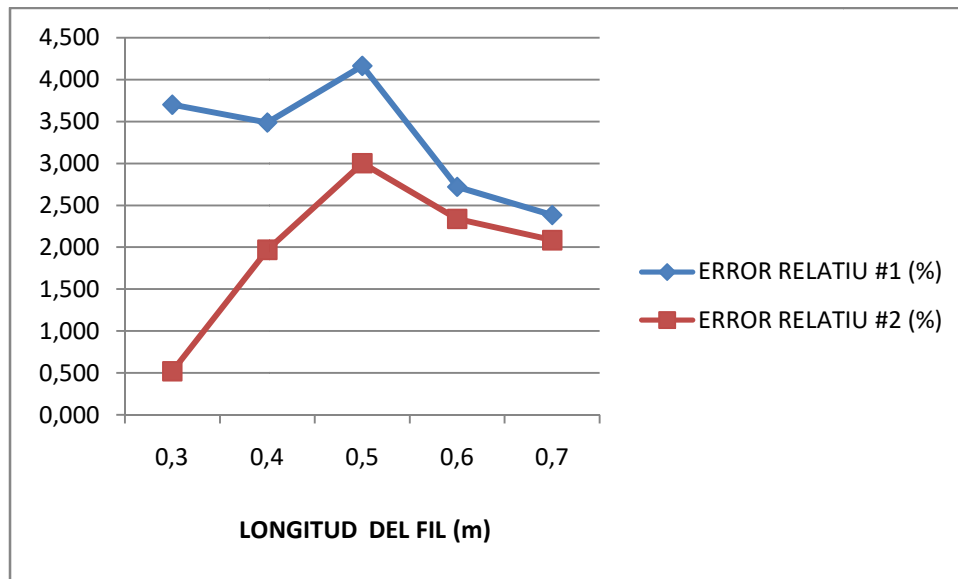
En el gràfic següent es comparen el període teòric amb els dos experimentals:

LONGITUD DEL FIL (m)	VALOR TEÒRIC DEL PERÍODE (s)	VALOR EXPERIMENTAL #1 (VÍDEOS) (s)	VALOR EXPERIMENTAL #2 (MANUALMENT) (s)
0,3	1,099	1,140	1,105
0,4	1,269	1,313	1,294
0,5	1,419	1,478	1,461
0,6	1,554	1,596	1,590
0,7	1,678	1,718	1,713



També es van comparar els errors relatius obtinguts en cada mètode de mesura:

LONGITUD DEL FIL (m)	ERROR RELATIU #1 (VÍDEOS) (%)	ERROR RELATIU #2 (MANUALMENT) (%)	DIFERÈNCIA ENTRE ELS ERRORS RELATIUS (%)
0,3	3,700	0,519	3,181
0,4	3,488	1,968	1,519
0,5	4,163	3,002	1,162
0,6	2,720	2,337	0,384
0,7	2,383	2,083	0,300



ANÀLISIS DELS RESULTATS I CONCLUSIONS

Els resultats obtinguts demostren la hipòtesi; és a dir, que el període d'un pèndol simple quan aquest realitza un moviment harmònic és proporcional a la llargada del seu fil. És així ja que mantenint constants la resta de variables del pèndol (massa i amplitud) s'observa com el pèndol augmenta el seu període proporcionalment a l'augment de la seva llargada.

Respecte la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, els resultats experimentals són proporcionals als que s'obtenen aplicant-la. A més, en tots els casos els errors relatius són inferiors al 5%; concretament el més alt és de 4,163 %.

Aquest resultats serien totalment correctes i els esperats si no fos per la comparació entre les mesures preses manualment i les preses mitjançant l'anàlisi de vídeos.

Es va decidir utilitzar els dos mètodes de mesura per poder comparar-los i establir quin era el més precís. La hipòtesis era que el mètode dels vídeos seria més precís ja que utilitzant-lo es pot determinar amb exactitud els instants inicial i final i, posteriorment, fer la diferència per obtenir el resultat. A més a més qualsevol mesura presa manualment sol tenir poca precisió, sobretot si és una mesura de temps, degut al temps de reacció humana (aspecte que no influeix en les mesures realitzades a través del vídeo).

Per totes aquestes raons els resultats obtinguts no són coherents; s'obtenen, en tots els casos, errors relatius més grans en les mesures realitzades a través dels vídeos que en les realitzades manualment.

Abans d'afirmar que les mesures manuals són més precises que les realitzades mitjançant vídeos s'intenta buscar una explicació coherent pels resultats

El primer que s'observa és que la diferència entre els errors relatius no és constant; tendeix a augmentar inversament a l'augment de la llargada del fil.

A partir d'aquesta observació es fa el següent raonament. Si les mesures s'haguessin realitzat en un pèndol simple ideal; els errors en les mesures realitzades amb vídeos tendrien a 0, d'altra banda, en les mesures manuals, els errors absoluts serien més o menys constants; ja que l'única causa d'error seria el temps de reacció humana (que es pot considerar constant en una mateixa persona prenent el mateix tipus de mesura). Per tant, la diferència entre els errors absoluts hauria de variar d'una manera semblant als errors de les mesures realitzades manualment; és a dir que hauria de ser més o menys constant.

Al comparar entre si els valors de la diferència entre errors absoluts s'observa que no són constants; entre el màxim i el mínim hi ha una variació de 0,030 (pels valors amb els quals s'està treballant és una xifra alta; el valor màxim és gairebé 7 vegades el mínim).

Observar aquesta diferència entre el que hauria de passar en un pèndol ideal i el que realment passa permet donar una explicació coherent pels resultats. L'error ha estat suposar que el pèndol en el qual s'han pres les mesures és un pèndol simple ideal que realitza un moviment harmònic simple; els resultats mostren que no és així. El pèndol en el que s'han realitzat les mesures es considera un pèndol físic però no un pèndol simple. Un pèndol físic és qualsevol cos rígid que pugui oscil·lar al voltant d'un eix fix. Per tant, un pèndol simple és un tipus concret de pèndol físic en el qual tota la massa es concentra en un dels seus extrems. Els pèndols que s'utilitzaran per realitzar les mesures no són pèndols simples ideals perquè no compleixen totalment aquesta última característica, a més a més hi actua la força de fregament amb l'aire.

Per tant, la hipòtesi plantejada era correcta: les mesures realitzades a través dels vídeos són més precises i representen millor la realitat; però la realitat s'allunya de ser un pèndol simple ideal. Les mesures manuals donaven menys error perquè els seus valors eren més semblants als teòrics tot i ser menys semblants a la realitat (menys precisos).

Un cop s'ha trobat una explicació coherent pels resultats es pot afirmar que la causa dels errors i, sobretot, de la seva incoherència, no han estat les mesures ni la seva realització sinó el mateix pèndol que no complia les característiques d'un pèndol simple ideal realitzant un moviment harmònic simple i, per tant, no es comportava com a tal. Analitzant aquesta afirmació és evident que els resultats mostraven errors i incoherències ja que s'estava comparant el període d'un pèndol simple ideal amb el d'un pèndol que s'allunyava molt d'aquestes característiques.

Un cop s'arriba a la afirmació anterior cal qüestionar-se com aconseguir que el pèndol en el qual es realitzin les mesures es comporti com un pèndol simple ideal per tal de poder repetir l'estudi augmentant-ne la precisió, exactitud i coherència.

Per aconseguir que un pèndol es comporti com un pèndol simple ideal cal que tingui les característiques d'aquest. Idealment un pèndol simple és una massa suspesa mitjançant un fil inextensible la massa del qual es considera negligible; a més a més l'única força que actua sobre la massa és el seu propi pes. No es podrà aconseguir que el pèndol amb el que treballi sigui un

pèndol simple ideal, una de les causes és la força de fregament amb l'aire, tot i això, es poden modificar algunes de les característiques del pèndol amb el que s'ha treballat fins ara per tal que sigui més semblant a un pèndol simple.

Cal analitzar quines de les següents característiques del pèndol es poden modificar.

AMPLITUD	15° aproximadament
MASSA DE L'ESFERA	200 g
DIÀMETRE DE L'ESFERA	6 cm
VOLUM DE L'ESFERA	113.097 cm ³
MASSA DEL FIL	0.4 g/m aproximadament
DIÀMETRE DEL FIL	1 mm
LONGITUDS DEL FIL (m)	0.3 / 0.4 / 0.5 / 0.6 / 0.7

L'amplitud del pèndol no influeix en si aquest realitza un moviment harmònic simple sempre que sigui inferior a 20°, en aquest cas és de 15°; no s'ha de modificar.

La massa de l'esfera tampoc afecta però el seu volum és bastant gran i pot influir en la força de fregament amb l'aire. Per tant, s'utilitzarà una esfera amb un diàmetre inferior, la massa també serà inferior però teòricament això no hauria d'influir.

El que es considera més significatiu i important de canviar és el fil. La massa del fil hauria de ser negligible; per aquesta raó s'ha decidit canviar-lo. El fil utilitzat fins ara era un fil sintètic (probablement de viscosa), inextensible i d'una massa molt reduïda però no negligible. Es passarà a utilitzar fil de cosir, igualment inextensible, però amb una massa i diàmetre inferiors. La reducció del diàmetre probablement també ajudarà a reduir la fricció.

D'aquesta manera les característiques del nou pèndol seran les següents:

AMPLITUD	15° aproximadament
MASSA DE L'ESFERA	20 g
DIÀMETRE DE L'ESFERA	2.5 cm
VOLUM DE L'ESFERA	8.181 cm ³
MASSA DEL FIL	Negligible
DIÀMETRE DEL FIL	0.5 mm aproximadament
LONGITUDS DEL FIL (m)	0.3 / 0.4 / 0.5 / 0.6 / 0.7

NOVA HIPÒTESI

Un cop realitzats els canvis en el pèndol s'espera obtenir uns nous resultats que permetin demostrar que la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ és la correcta a l'hora de calcular el període d'un pèndol simple quan realitza un moviment harmònic simple.

Tot i que els resultats obtinguts anteriorment ja han permès verificar aquesta hipòtesi, posteriorment s'ha mostrat que els resultats no són vàlids degut a que el pèndol en el que s'han realitzat les mesures no es comportava com un pèndol simple ideal. Degut a això, les conclusions a les que s'ha arribat sobre aquesta hipòtesi a través de l'anàlisi de les mesures realitzades en el pèndol anterior s'han de deixar de considerar correctes si ens referim a un pèndol simple ideal. La hipòtesi sobre si la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ és correcta en un pèndol simple ideal no ha estat demostrada.

Respecte la comparació entre els dos mètodes de mesura es manté la hipòtesi inicial. En aquest cas no hi hauria d'haver cap causa per una incoherència com la trobada en els resultats anteriors ja que s'ha modificat el pèndol per tal que les seves característiques siguin més similars a les d'un pèndol simple realitzant un moviment harmònic simple. D'aquesta manera, les mesures realitzades a través dels vídeos seran, com en la situació anterior, més fidels a la realitat que les preses manualment; la diferència és que en aquest cas la realitat serà més propera a un pèndol simple ideal de manera que els errors relatius dels valors experimentals obtinguts mitjançant els vídeos respecte als valors teòrics seran inferiors als errors relatius dels valors obtinguts manualment.

RESULTATS #2

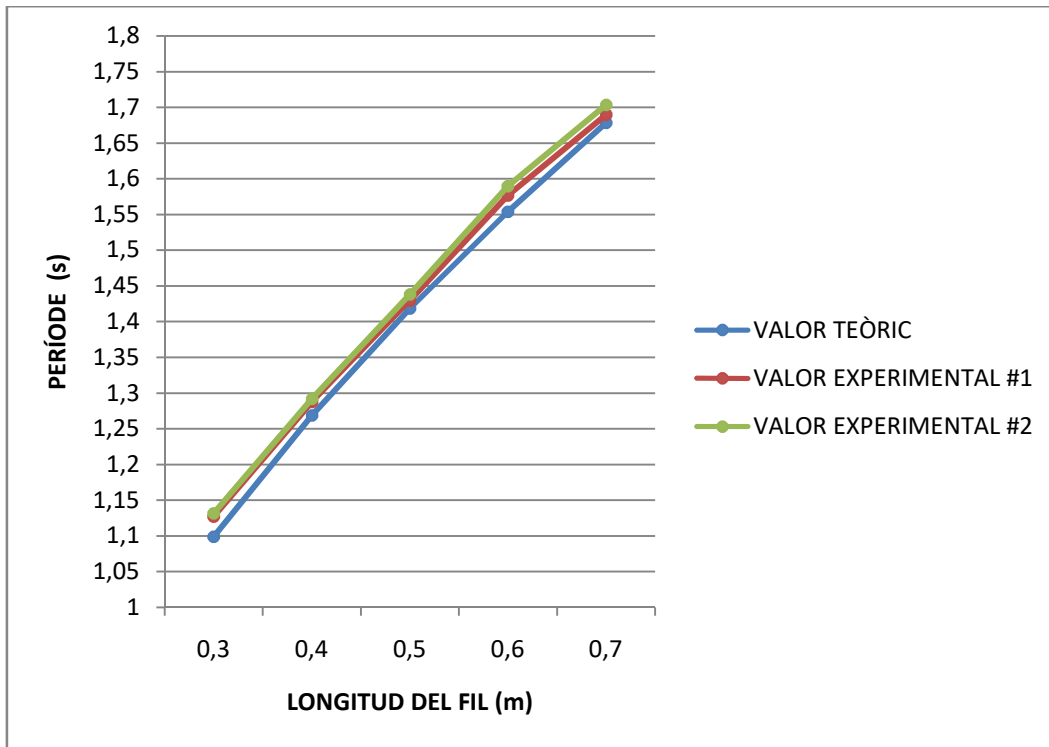
Les mesures que s'obtenen amb el pèndol modificat són les següents:

MÈTODE 1 (VÍDEOS)						
LONGITUD DEL FIL (m)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
0,3	5,644	5,636	5,631	5,641	5,630	1,127
0,4	6,433	6,431	6,439	6,454	6,433	1,288
0,5	7,171	7,119	7,170	7,163	7,118	1,430
0,6	7,887	7,890	7,888	7,870	7,885	1,577
0,7	8,387	8,471	8,483	8,438	8,454	1,689

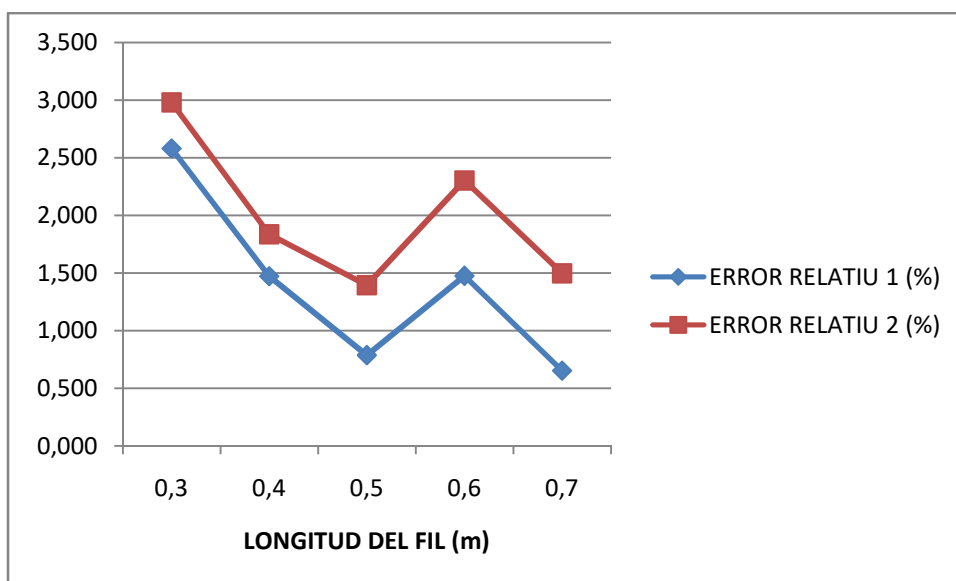
MÈTODE 2 (MANUALMENT)						
LONGITUD DEL FIL (m)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
0,3	5,676	5,634	5,711	5,644	5,627	1,132
0,4	6,399	6,496	6,512	6,472	6,427	1,292
0,5	7,173	7,184	7,146	7,250	7,204	1,438
0,6	7,901	7,955	8,001	7,914	7,971	1,590
0,7	8,435	8,525	8,588	8,463	8,577	1,704

A continuació s'inclouen les dues mateixes gràfiques que en les primers resultats però amb els valors corresponents:

LONGITUD DEL FIL (m)	VALOR TEÒRIC DEL PERÍODE (s)	VALOR EXPERIMENTAL #1 (VÍDEOS) (s)	VALOR EXPERIMENTAL #2 (MANUALMENT) (s)
0,3	1,099	1,127	1,132
0,4	1,269	1,288	1,292
0,5	1,419	1,430	1,438
0,6	1,554	1,577	1,590
0,7	1,678	1,689	1,704



LONGITUD DEL FIL (m)	ERROR RELATIU #1 (VÍDEOS) (%)	ERROR RELATIU #2 (MANUALMENT) (%)	DIFERÈNCIA ENTRE ELS ERRORS RELATIUS (%)
0,3	2,579	2,980	-0,400
0,4	1,470	1,836	-0,366
0,5	0,785	1,394	-0,609
0,6	1,474	2,303	-0,829
0,7	0,651	1,497	-0,846



ANÀLISIS DELS RESULTATS I CONCLUSIONS #2

Respecte a la comparació entre els dos mètodes de mesura, les modificacions en el pèndol han permès obtenir els resultats esperats. En totes les mesures s'han obtingut errors relatius inferiors en les realitzades utilitzant els vídeos.

Es pot afirmar que el mètode en el qual s'han realitzat les mesures mitjançant vídeos és el més precís; els errors relatius de les seves mesures no superen el 2,59% i la mitjana és de 1,39%. D'altra banda, tot i ser superior en tots els casos, l'error en les mesures manuals tampoc és molt significatiu, no supera el 3% i la mitjana és de 2%. La diferència entre els dos mètodes no és tant significativa com s'esperava, no supera l'1%, ja que les mesures manuals han resultat ser força precises.

Que hi hagi més error en les mesures manuals és degut al temps de reacció humana que, sobretot si els temps que es mesuren són molt breus, afecta clarament els resultats; evidentment no influeix en les mesures realitzades a través de vídeos.

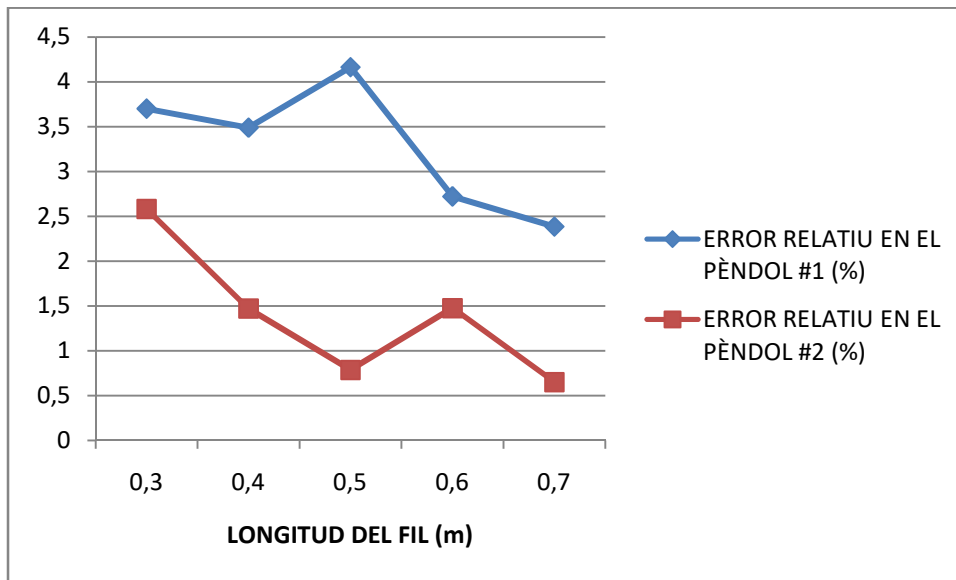
La diferència de precisió dels dos mètodes també es pot observar comparant les mesures de cada mètode entre elles. En una mateixa longitud del fil les mesures realitzades a través de vídeos es mantenen molt més constants que les realitzades manualment.

Degut a que els errors en les mesures són tant poc significatius, sobretot en les realitzades amb vídeos, es pot afirmar que la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ és l'adequada a l'hora de mesurar el període d'un pèndol simple que realitza un moviment harmònic simple. I, per tant, que el període d'un pèndol amb aquestes característiques depèn de la longitud del seu fil.

Els errors en les mesures preses mitjançant vídeos (que tot i ser més precises que les manuals continuen tenint error) es deuen a que el pèndol en el qual s'han realitzat les mesures no és un pèndol simple ideal; tot i que les modificacions realitzades respecte els primers resultats han estat significatives i han tingut el resultat esperat. Comparant els resultats amb els primers podem afirmar que aquest segon pèndol es comporta molt més com un pèndol simple realitzant un moviment harmònic simple per dues raons: la primera és que els resultats són coherents i mostren que el mètode de mesura més precís és del dels vídeos; la segona raó és la que va permetre determinar que en els resultats anteriors els errors eren causats principalment pel mateix pèndol: és la constància entre les diferències dels errors absoluts. Si comparem la variació màxima dels primers resultats (0,030s) amb la d'aquests (0,009s) s'observa una diferència significativa. Per tant, com que la diferència entre els errors absoluts és molt més constant podem determinar que el pèndol és molt més semblant a un pèndol simple ideal realitzant un moviment harmònic.

Per poder observar com la variació de les característiques del pèndol ha influït en els resultats; a continuació es mostra una comparació entre els errors relatius obtinguts en cadascun dels pèndols. S'han agafat els errors respecte les mesures realitzades mitjançant vídeos ja que s'ha considerat aquest mètode com el més fidel a la realitat.

LONGITUD DEL FIL (m)	ERROR RELATIU EN EL PÈNDOL #1 (%)	ERROR RELATIU EN EL PÈNDOL #2 (%)
0,3	3,700	2,579
0,4	3,488	1,470
0,5	4,163	0,785
0,6	2,720	1,474
0,7	2,383	0,651



En la gràfica s'observa clarament la disminució dels errors relatius en el pèndol #2 respecte el #1. Anteriorment ja s'han explicat les causes d'aquesta disminució però, bàsicament és que el segon pèndol es comporta molt més com un pèndol simple que el primer; i per tant, el seu període és significativament més semblant al teòric.

2.2.2.- PRÀCTICA 2

VARIACIÓ DEL PERÍODE D'UN PÈNDOL EN FUNCIÓ DE LA SEVA LLARGADA (EN AMPLITUDS SUPERIORS A 20°)

Com ja s'ha vist, per angles inferiors a 20°, existeix una fórmula simplificada que permet calcular el període del pèndol en funció de la seva llargada. Això es deu a que, per amplituds inferiors als 20°, es considera que el cos realitza un moviment harmònic simple.

Per amplituds superiors el cos no es comporta de la mateixa manera i, per tant, en aquesta situació la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ no és vàlida.

Per calcular el període de pèndols amb amplituds superiors als 20° s'utilitza una fórmula molt més complexa (que té en compte l'amplitud del pèndol) els resultats de la qual, teòricament s'apropen molt més a la realitat que els que obtindríem aplicant la fórmula simplificada.

OBJECTIU

En aquesta pràctica es pretén mesurar experimentalment el període d'un pèndol variant la longitud del fil però mantenint constant l'amplitud (que serà superior als 20°) i la massa. Un cop obtingudes les dades es compararan amb dos valors. El primer valor serà el que s'obtingria aplicant la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ suposadament no vàlida per fer aquest càlcul; i el segon serà el valor teòric suposat correcte. Aquest últim valor s'obté a través de la relació T/T_0 en l'angle corresponent (T és el valor teòric suposat correcte mentre que T_0 és el valor calculat a partir de la fórmula simplificada de la periodicitat).

HIPÒTESI

La hipòtesi en aquesta pràctica és que l'error de les mesures experimentals respecte als valors obtinguts a partir de la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ serà major que l'error de les mateixes mesures respecte els valors teòrics calculats a partir de la fórmula més complexa i suposada correcta.

Es creu que es podrà demostrar, a partir de les mesures experimentals, que la fórmula simplificada que s'utilitza per calcular el període en pèndols amb amplituds inferiors als 20° no és vàlida per amplituds superiors.

PROCEDIMENT

S'utilitzaran les mateixes llargades que en la pràctica anterior per tant no caldrà calcular el període utilitzant la fórmula simplificada una altra vegada. Si que s'haurà de fer el càlcul utilitzant la relació T/T_0 .

Les mesures experimentals es realitzaran utilitzant el mètode dels vídeos explicat en la pràctica anterior. A diferència de la pràctica anterior les mesures es faran únicament amb aquest mètode que ja s'ha determinat que és més precís; d'altra banda, la possibilitat que el pèndol en el qual es realitzin les mesures no es comporti com un pèndol simple està descartada ja que s'utilitzarà el segon pèndol de la primera pràctica. Aquest pèndol, tot i no ser un pèndol simple ideal, es comporta molt més com si ho fos que el pèndol utilitzat inicialment.

Un cop es disposi de totes les dades es compararan calculant els errors absolut i relatiu de les mesures respecte els dos valors teòrics per separat.

CÀLCULS

No és necessari realitzar el càlcul del període del pèndol utilitzant la fórmula de la periodicitat simplificada ja que ja es disposa dels resultats. D'altra banda, si que cal fer el càlcul utilitzant la fórmula no simplificada. Per fer-lo, en comptes d'utilitzar la fórmula en sí, s'utilitzarà el coeficient T/T_0 el qual, per un angle de 60° (el que s'utilitzarà per fer les mesures experimentals) té un valor de 1,0132.

Sabem que $\frac{T}{T_0} = 1,0132$ per tant $T = 1,0132 \cdot T_0$

Introduint aquesta equació al full de càlcul s'obtenen els valors teòrics del període del pèndol segons la fórmula no simplificada.

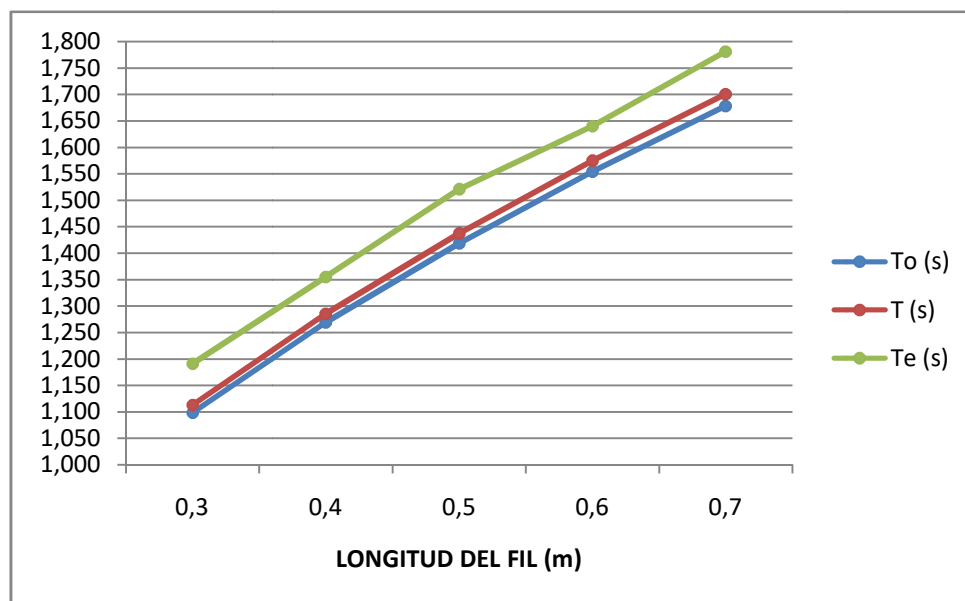
RESULTATS

Les mesures experimentals obtingudes són les següents:

LONGITUD DEL FIL (m)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
0,3	5,949	5,980	5,973	5,962	5,916	1,191
0,4	6,783	6,801	6,767	6,781	6,749	1,355
0,5	7,603	7,602	7,612	7,568	7,631	1,521
0,6	8,174	8,120	8,238	8,271	8,203	1,640
0,7	8,908	8,872	8,951	8,873	8,922	1,781

A continuació es comparen tres valors; el període segons la fórmula simplificada (T_0), el període teòric (T) i el període experimental (T_e).

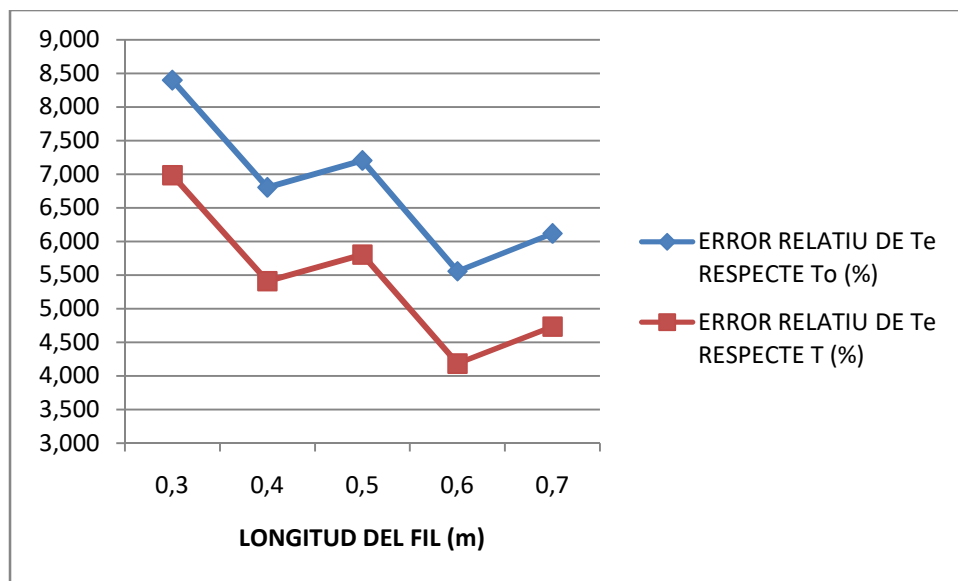
LONGITUD DEL FIL (m)	T_0 (s)	T (s)	T_e (s)
0,3	1,099	1,113	1,191
0,4	1,269	1,286	1,355
0,5	1,419	1,437	1,521
0,6	1,554	1,574	1,640
0,7	1,678	1,701	1,781



S'observa que els valors experimentals són, en tots els casos, més propers als teòrics (T) que als calculats a partir de la fórmula simplificada (T_0).

A continuació es comparen els errors relatius del valor experimental respecte el valor calculat a partir de la fórmula de la periodicitat (T_0) i respecte el valor teòric (T).

LONGITUD DEL FIL (m)	ERROR RELATIU DE T_e RESPECTE T_0 (%)	ERROR RELATIU DE T_e RESPECTE T (%)
0,3	8,396	6,984
0,4	6,801	5,409
0,5	7,200	5,804
0,6	5,557	4,182
0,7	6,116	4,733



Els errors superiors són els que s'han calculat respecte als valors obtinguts mitjançant la fórmula simplificada.

ANÀLISIS DELS RESULTATS I CONCLUSIONS

Els resultats obtinguts mostren que la hipòtesi plantejada és correcta. L'error de les mesures experimentals respecte els valors que s'obtenen aplicant $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ és, en tots els casos, superior al de les mesures experimentals respecte el valor teòric suposat correcte que s'obté aplicat la fórmula de la periodicitat no simplificada.

Això ens indica que, com es va suposar, utilitzant la fórmula no simplificada a l'hora de calcular el període d'un pèndol quan la seva amplitud és superior als 20° s'obtenen resultats més precisos.

També s'observa que la diferència entre els valors teòrics augmenta amb la longitud del fil. Aplicant la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ s'obtenen uns valors (T_0) que augmenten amb l'augment de la llargada del fil; com que la relació T/T_0 es manté constant independentment de la llargada i és superior a 1; la diferència entre aquests dos valors augmenta de la mateixa manera que T_0 . Per aquesta raó cal tenir en compte que com més llargada tingui el fil del pèndol més diferència hi haurà entre el valor teòric correcte i l'obtingut utilitzant la fórmula simplificada.

Respecte a la comparació entre els errors relatius, la diferència entre els dos es manté constant: 1,392 % de mitjana.

Els errors respecte el valor de la fórmula simplificada són bastant significatius, entre 5,557% i 8,396% amb una mitjana de 6,814%.

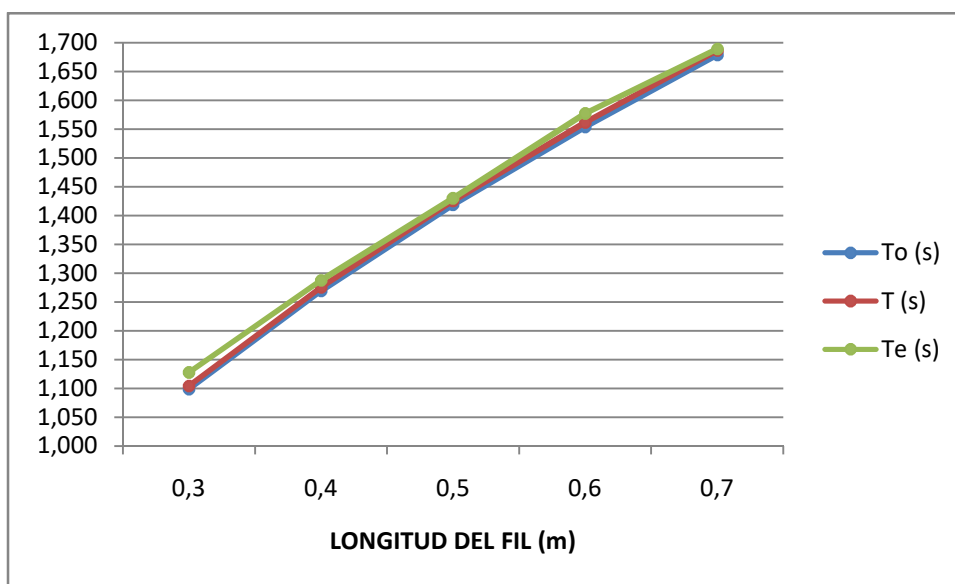
Els errors relatius de les mesures respecte el valor teòric correcte són inferiors, entre 4,182% i 6,984% amb una mitjana de 5,422% de manera que la hipòtesi queda demostrada. Tot i que aquests errors relatius són inferiors que els obtinguts amb la fórmula simplificada; són molt més significatius que els obtinguts en la pràctica anterior (en els segons resultats) on la mitjana d'error és de 1,392%.

S'ha arribat a la conclusió que aquesta diferència entre les pràctiques es deu a l'amplitud del pèndol. S'ha passat de 15° a 60° de manera que la distància que recorre el pèndol ha passat a ser de 18,326 cm a 73,304 cm (quan la longitud del pèndol és de 70 cm). Aquest canvi provoca que augmenti el treball de la força de fregament. Degut a això el pèndol va reduint la seva amplitud més ràpidament i no actua tant com un pèndol simple ideal. Si l'angle hagués estat inferior l'error també ho hauria estat.

Un cop acabada aquesta pràctica es va voler comprovar quina diferència hi hauria entre calcular el període fent servir la fórmula simplificada i utilitzant la fórmula complexa per amplituds inferiors a 20° .

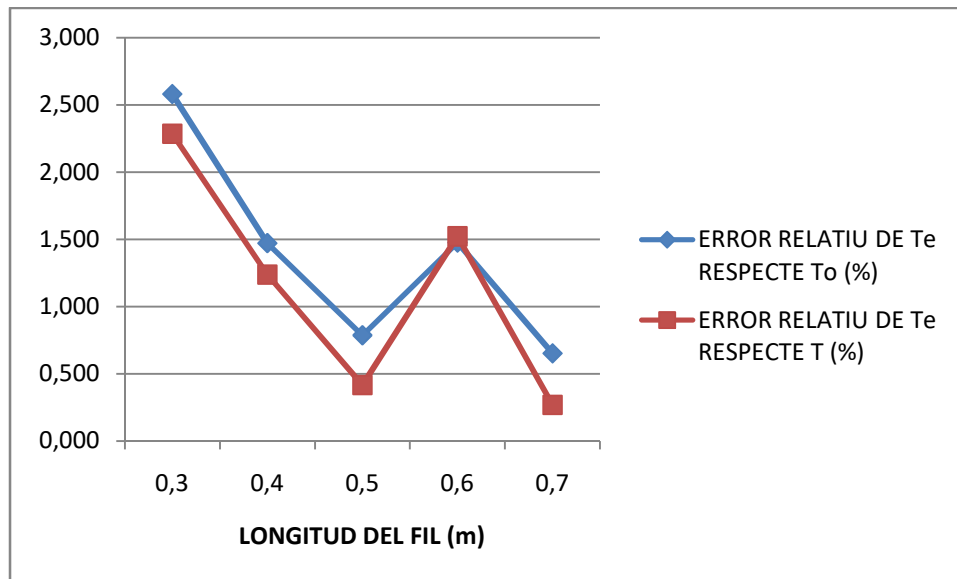
Substituint els valors experimentals pels obtinguts en la primera pràctica (mesures mitjançant vídeos en el pèndol modificat) i tenint en compte que per una amplitud de 16° (aproximadament la del pèndol de la primera pràctica) la relació T/T_0 és de 1,0049 es van obtenir els resultats següents:

LONGITUD DEL FIL (m)	T_0 (s)	T (s)	T_e (s)
0,3	1,099	1,104	1,127
0,4	1,269	1,275	1,288
0,5	1,419	1,425	1,430
0,6	1,554	1,562	1,577
0,7	1,678	1,687	1,689



També es van comparar els errors relatius:

LONGITUD DEL FIL (m)	ERROR RELATIU DE T_e RESPECTE T_0 (%)	ERROR RELATIU DE T_e RESPECTE T (%)
0,3	2,579	2,285
0,4	1,470	1,238
0,5	0,785	0,417
0,6	1,474	1,522
0,7	0,651	0,269



Es pot observar que la diferència entre T i T_0 és molt menys significativa. Per 60° la diferència mitjana era de 0,018 s i per 15° és només de 0,007 s. Com en el cas anterior, es compleix que la diferència entre T i T_0 augmenta amb la longitud del fil.

Tal com s'esperava, l'error relatiu respecte els valors obtinguts utilitzant la fórmula no simplificada és inferior al de la fórmula simplificada però la diferència és molt menys significativa que en el pèndol de 60° ; la mitjana és de 0,494 %. Els valors dels errors en generar també són molt inferiors de manera que es compleix la hipòtesi sobre que l'increment de fregament en els cosso produeix un augment significatiu dels errors.

Si l'amplitud encara hagués estat inferior la diferència entre T i T_0 també hauria estat inferior fins que, quan l'angle tendís a zero, els dos valors serien pràcticament iguals fent innecessari l'ús de la fórmula complexa. D'aquesta manera es justifica el que s'ha estat dient referent a l'aplicació de la fórmula complexa per amplituds petites.

Com a conclusió final, aplicar la fórmula complexa aporta uns resultats molt més precisos per qualsevol angle; tot i que per angles que tendeixen a zero la diferència entre la precisió de la fórmula complexa i la simplificada és poca. Per tant, per amplituds petites, si es busca un resultat sense molta precisió, utilitzar la fórmula simplificada és molt més còmode; en canvi, si el resultat ha de ser molt exacte, és més adequat utilitzar la fórmula complexa.

2.2.3.- PRÀCTICA 3

COMPROVACIÓ QUE L'AMPLITUD D'OSCIL·LACIÓ NO INFLUEIX EN EL PERÍODE D'UN PÈNDOL (EN AMPLITUDS INFERIORS ALS 20°)

Aquesta pràctica es basa en el fet que en la fórmula que determina la periodicitat d'un pèndol per amplituds inferiors als 20° no hi apareix l'amplitud del pèndol. Per tant, podem afirmar que per angles iguals o inferiors als 20° l'amplitud del pèndol no fa variar el seu període significativament. És important especificar que aquesta afirmació no la podem fer per angles superiors als 20° ja que en aquests casos cal aplicar la fórmula complexa que sí que té en compte l'amplitud del pèndol.

OBJECTIU

L'objectiu de la pràctica és demostrar que la variació de l'amplitud no influeix en el període d'un pèndol quan oscil·la amb amplituds de 20° o inferiors. És a dir, que si en un pèndol que compleixi la característica anterior es manté constant la longitud del fil i la massa (teòricament aquesta no influeix en el període d'un pèndol però mantenint-la constant es descarta com a possible causa de les variacions) el període del pèndol no variarà significativament.

HIPÒTESI

En aquest cas la hipòtesi és que es podrà demostrar que per angles inferiors a 20° l'amplitud d'un pèndol no afecta significativament el seu període; és creu que molt possiblement els valors del període variaran però que la diferència serà mínima.

Per tant, es podrà afirmar que per amplituds petites no és necessari utilitzar la fórmula de la periodicitat complexa ja que tenir en compte l'amplitud no provoca una gran diferència en els resultats que s'obtenen..

PROCEDIMENT

Es faran les mesures del període d'un pèndol variant l'amplitud d'aquest entre els 0° i 20°; mantenint la longitud del fil constant. Les mesures es realitzaran mitjançant vídeos seguint el mateix procediment que en les pràctiques anteriors. Un cop obtingudes les mesures es compararan amb el valor teòric i entre elles per veure si han variat significativament.

CÀLCULS I MESURES

Al full de càlcul s'ha d'introduir el valor teòric d'un pèndol de longitud 50 cm que oscil·la amb una amplitud igual o inferior als 20° (ja que aquestes són les característiques del pèndol que s'utilitzarà); aquest valor ha estat calculat prèviament.

També s'hi introdueixen les fórmules (iguals que en la primera pràctica) que permeten al programa calcular els errors absolut i relatiu de les mesures experimentals.

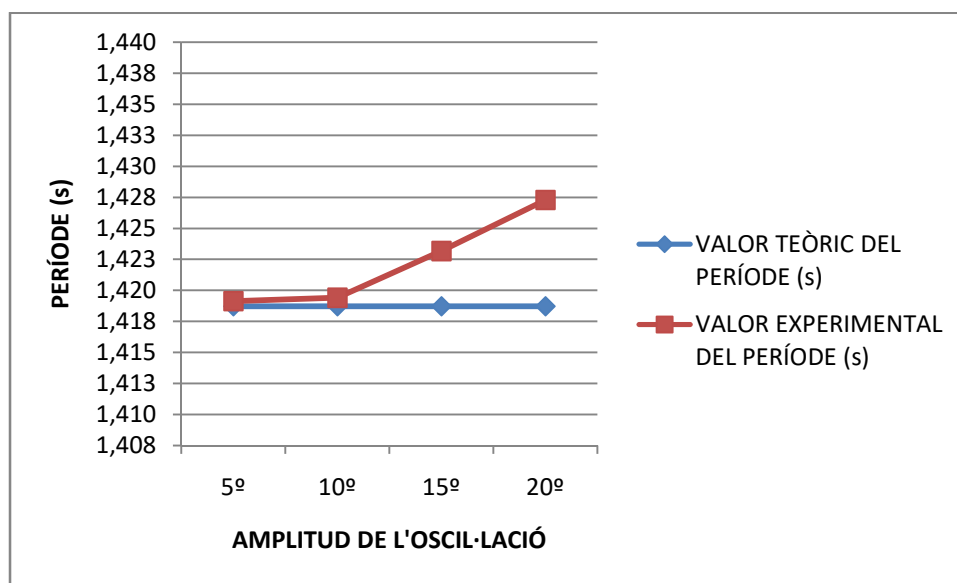
RESULTATS

Com en la resta de pràctiques es va començar realitzant les mesures experimentals i es va seguir el procediment explicat anteriorment.

AMPLITUD DE L'OSCIL·LACIÓ	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
5°	7,063	7,117	7,124	7,116	7,058	1,419
10°	7,117	7,083	7,119	7,034	7,132	1,419
15°	7,114	7,135	7,118	7,094	7,118	1,423
20°	7,074	7,167	7,171	7,202	7,068	1,427

A continuació es van comparar entre elles i amb el valor teòric:

AMPLITUD	VALOR TEÒRIC DEL PERÍODE (s)	VALOR EXPERIMENTAL DEL PERÍODE (s)
5°	1,419	1,419
10°	1,419	1,419
15°	1,419	1,423
20°	1,419	1,427



Tot i que aparentment la diferència entre el valor teòric i l'experimental per l'amplitud de 20° és molta, cal tenir en compte l'escala del gràfic (la variació entre cada valor de període és només de 0,002s).

ANÀLISI DELS RESULTATS I CONCLUSIONS

El resultat obtingut mostren que, tal com s'esperava, per angles inferiors a 20° l'amplitud no és significativa en el valor del període.

Per amplituds de 5° i 10° l'error és mínim, negligible. Per aquestes amplituds el sinus és molt proper al mateix angle ja que l'angle és molt petit. Evidentment, l'error és superior per 10° que per 5°, ja que hi ha més diferència entre el valor del sinus i el de l'angle.

Tot i també ser poc significatiu, l'error per la mesura de 15° és molt superior que el de 10°; això indica que el sinus cada vegada tendeix menys a l'angle; el mateix s'observa per 20°, on l'error encara és més significatiu. *Els valors dels errors relatius es troben en la taula de la pàgina següent; són els errors relatius 1.*

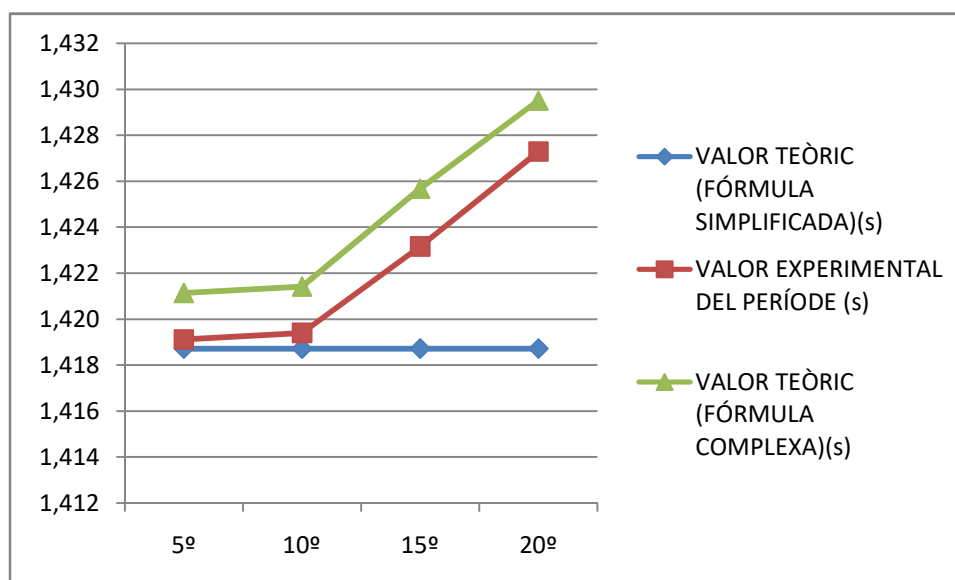
Es pot afirmar que per amplituds iguals o inferiors a 20° no és necessari tenir en compte l'angle ja que els resultats experimentals varien mínimament, la variació màxima és de 0,008s.

Tot i poder fer l'afirmació anterior, aplicant la fórmula de la periodicitat que té en compte l'amplitud s'haurien d'obtenir els resultats teòrics amb més precisió. Aquest valor es pot calcular segons la relació T/T_0 que varia segons l'amplitud. És va decidir fer els càlculs per comprovar-ho.

Es van utilitzar les relacions T/T_0 per amplituds de 6°, 10°, 16° i 20° (només s'han trobat definides cada 2°; per aquesta raó no s'ha pogut utilitzar la relació exacta per amplituds de 5° i 15°). Els valors que s'obtenen augmenten amb l'amplitud però la variació és mínima: la diferència entre el valor més alt (el de 20°) i el més baix (el de 5°) és de 0,008s; igual que la obtinguda en els resultats experimentals.

En la gràfica de continuació és comparen els valors del període experimental, teòric utilitzant la fórmula simplificada i teòric utilitzant la fórmula complexa.

AMPLITUD	VALOR TEÒRIC (FÓRMULA SIMPLIFICADA)(s)	VALOR EXPERIMENTAL DEL PERÍODE (s)	VALOR TEÒRIC (FÓRMULA COMPLEXA)(s)
5°	1,419	1,419	1,421
10°	1,419	1,419	1,421
15°	1,419	1,423	1,426
20°	1,419	1,427	1,430

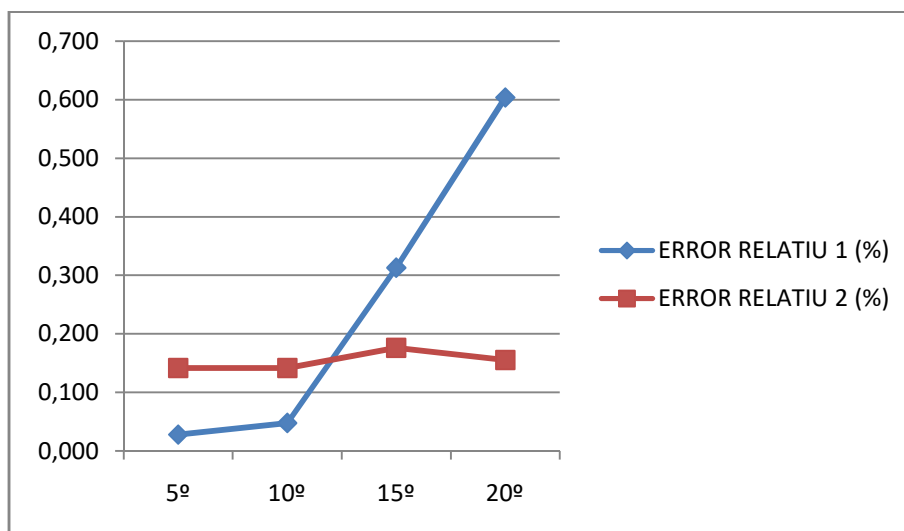


S'observa que la variació en el valor experimental és proporcional a la del valor teòric obtingut mitjançant la fórmula complexa.

Les conclusions que es poden extreure són les següents. Aplicar la fórmula complexa, tot i ser innecessari (per angles inferiors a 20°), permet obtenir resultats més precisos.

L'increment de precisió s'observa en la reducció de la mitjana d'error relatiu; ha passat de 0,248% a 0,154%. També s'observa que a més a més de ser més baixos, els errors relatius de la fórmula complexa (*errors relatius 2*) són molt més constants; la variació màxima és molt inferior.

AMPLITUD	ERROR RELATIU 1 (%)	ERROR RELATIU 2 (%)
5°	0,028	0,142
10°	0,048	0,142
15°	0,313	0,176
20°	0,603	0,155



En aquest gràfic destaca que per les amplituds de 5° i 10° la fórmula simplificada és més precisa; l'error relatiu és inferior. S'ha pogut entendre que com més tendeix a 0 l'angle més correcte i precís és utilitzar la fórmula simplificada i que hi ha un punt (al voltant dels 12°) en el qual la fórmula complexa passa a ser més precisa.

Per angles més superiors, degut a l'augment de la diferència entre l'angle i el seu sinus, la fórmula simplificada és significativament més errònia que la complexa. Es pot comprovar que la variació és molt ràpida, la diferència entre els errors per l'amplitud de 20° és molt superior a la de 15°.

Una altra manera de veure-ho és que, com s'ha comprovat, l'error en la fórmula complexa sempre es mantindrà més o menys constant, mentre que el de la fórmula simplificada varia (augmentant significativament amb l'augment de l'amplitud). Per tant hi ha unes certes amplituds (quan l'angle tendeix a 0°) per les quals l'error de la fórmula simplificada és inferior al 0,154% (l'error mitjà de la fórmula complexa); però per la resta d'amplituds l'error de la fórmula simplificada és molt superior i la complexa és molt més precisa. Aquesta és la raó per la qual es diu que la fórmula complexa és més precisa; perquè ho és per molts més angles que la simplificada.

Tot i les afirmacions anteriors cal tenir en compte que, almenys fins a 20°, els errors que s'obtenen al utilitzar la fórmula simplificada són mínims. Per aquesta raó es considera correcte utilitzar-la fins a una amplitud d'aproximadament 20°.

2.2.4.- PRÀCTICA 4

COMPROVACIÓ QUE LA MASSA D'UN PÈNDOL NO INFLUEIX EN EL SEU PERÍODE

En la fórmula de la periodicitat d'un pèndol no hi apareix la massa d'aquest; per tant, analitzant aquesta afirmació, podem afirmar que la massa d'un pèndol no influeix en el període d'aquest. És important destacar que la massa no apareix ni en la fórmula simplificada ni en la més complexa; per tant no influeix encara que el pèndol no realitzi un moviment harmònic simple.

OBJECTIU

En aquesta pràctica es pretén demostrar que, encara que variï la massa, si en un pèndol tant l'amplitud com la longitud del fil es mantenen constants el període no variarà. És a dir que la massa del pèndol no influeix en el seu període.

HIPÒTESI

Es creu que les mesures experimentals permetran demostrar que la massa no influeix en el període del pèndol quan la longitud del fil i l'amplitud es mantenen constants; es a dir, que s'obindrà el mateix valor de període en els pèndols amb diferents masses.

PROCEDIMENT

Mantenint una longitud del fil constant i la mateixa amplitud en totes les mesures; es variarà la massa del pèndol realitzant les mesures del període en cada cas. L'amplitud pot ser qualsevol mentre sigui constant per la raó explicada anteriorment.

Les mesures es realitzaran mitjançant el mètode dels vídeos; en un pèndol amb les característiques següents.

AMPLITUD	15° aproximadament
MASSES (g)	4 / 20 / 60 / 160 / 200
MASSA DEL FIL	negligible
DIÀMETRE DEL FIL	0,5 mm aproximadament
LONGITUD DEL FIL	0,5 m

Un cop efectuades les mesures es compararan entre elles i amb el valor teòric del període.

CÀLCULS I MESURES

No va caldre calcular el període teòric del pèndol ja que ja havia estat calculat en pràctiques anteriors; és el resultat d'aplicar la fórmula simplificada de la periodicitat (es treballa amb una amplitud inferior als 20°) per un pèndol de 50 cm de longitud.

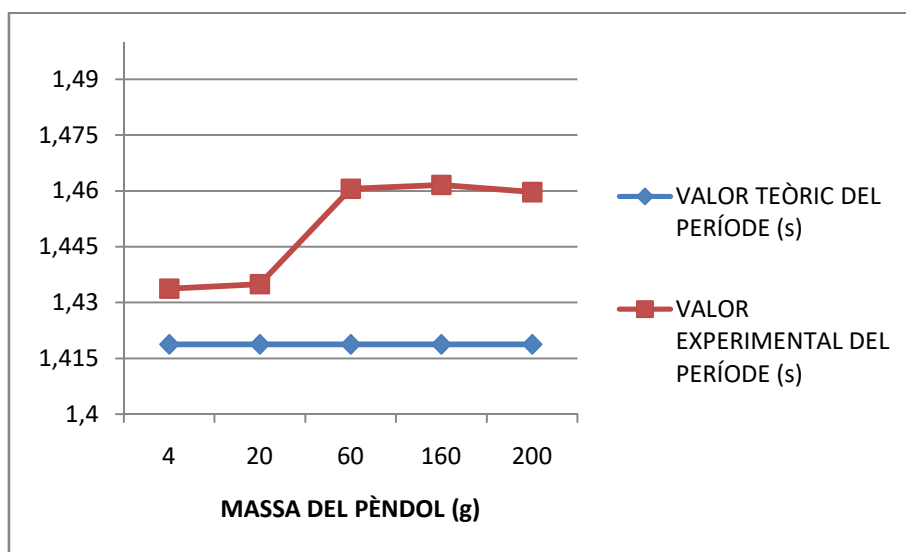
S'introdueixen, al full de càlcul, les operacions necessàries per tal de calcular l'error absolut i el relatiu de les mesures. I es realitzen les mesures experimentals a través de vídeos; fent la mitjana de cinc resultats experimentals.

RESULTATS

Primerament es van realitzar les mesures experimentals obtenint els resultats següents:

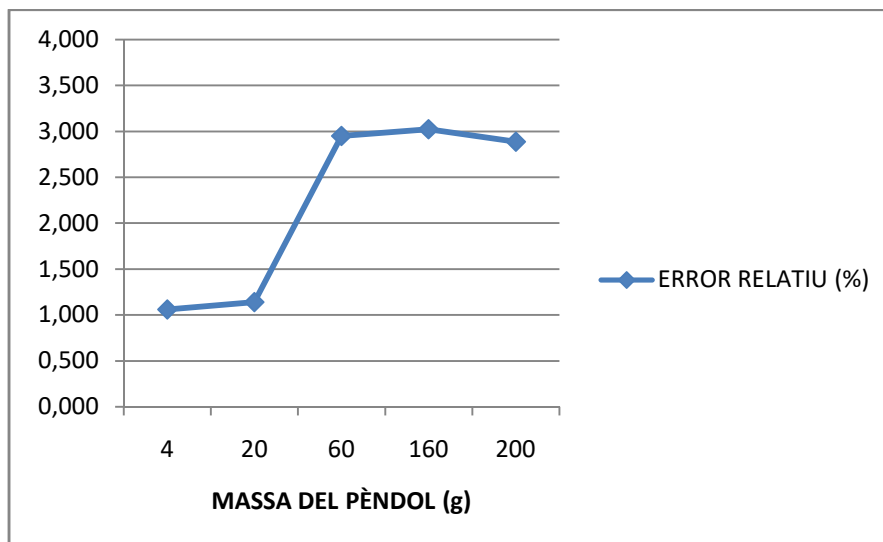
MASSA DEL PÈNDOL (g)	MESURA 1 (s)	MESURA 2 (s)	MESURA 3 (s)	MESURA 4 (s)	MESURA 5 (s)	PERÍODE (s)
4	7,148	7,168	7,167	7,160	7,201	1,434
20	7,168	7,236	7,118	7,202	7,149	1,435
60	7,303	7,299	7,313	7,311	7,288	1,461
160	7,278	7,358	7,276	7,344	7,284	1,462
200	7,264	7,285	7,318	7,319	7,306	1,460

En el gràfic següent es comparen els valors experimentals amb el teòric:



A continuació es comparen els errors relatius entre ells:

MASSA DEL PÈNDOL (g)	ERROR RELATIU (%)
4	1,060
20	1,142
60	2,949
160	3,022
200	2,887



ANÀLISIS DELS RESULTATS I CONCLUSIONS

Els resultats obtinguts mostren que la hipòtesi és correcta ja que la massa del pèndol no influeix significativament en el seu període. El valor de les mesures per les diferents masses ha variat, però molt lleugerament. Una manera de comprovar-ho és a partir dels errors relatius: aquests varien molt poc entre ells i a la vegada són molt baixos; la mitjana de variació és de 2,212% i l'error més alt és de 3,022% (tot i ser el més alt continua sent poc significatiu).

També s'observa que les variacions que s'han produït en el període al variar la massa del pèndol no són proporcionals; és a dir que aquestes dues variables no tenen relació entre elles (les lleugeres variacions que s'observen no són proporcionals a les masses).

S'observa una diferència significativa entre els valors del període de les dues masses més petites i els de les altres tres. Els primers dos valors són 1,434 i 1,435; mentre que els altres tres són 1,461 / 1,462 i 1,460. Evidentment, la diferenciació es manté en els errors relatius.

Una possible causa d'aquesta diferenciació podria ser que a partir d'un cert valor la massa influís en el resultat fent augmentar l'error de les mesures. Aquesta hipòtesi és poc plausible; ja que no existeix cap fórmula que mostri que la massa podria tenir alguna influència en el període, tampoc hi ha cap explicació teòrica que ho pugui defensar.

Una altra possible causa de les variacions del període podria ser el volum de l'esfera però havent-lo calculat (*valors a la pàgina següent*) no sembla que hi hagi una relació directa entre les dues variables; de totes maneres s'hi manté la diferenciació entre els dos primers valors i els altres tres.

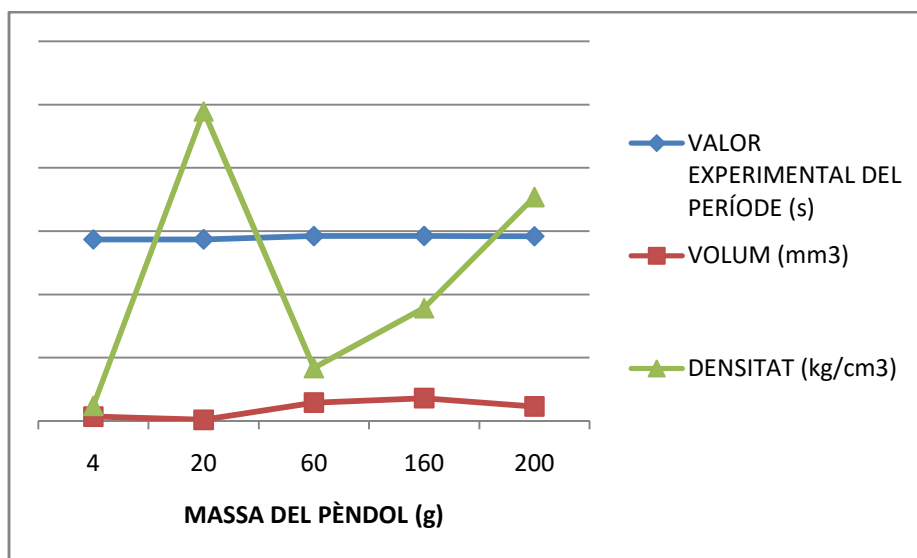
El volum és una causa més plausible que la massa degut a que s'observa una certa proporcionalitat entre les dues magnituds. Tot i això, la proporcionalitat no es manté en els dos valors inferiors (en aquest cas l'error podria ser degut a una altra causa).

A continuació s'adjunten els valors del volum junt amb els d'altres magnituds de cadascun dels pèndols.

	PÈNDOL 1	PÈNDOL 2	PÈNDOL 3	PÈNDOL 4	PÈNDOL 5
MASSA (kg)	4	20	60	160	200
DIÀMETRE (cm)	4	2,5	6,5	7	6
RADI (cm)	2	1,25	3,25	3,5	3
VOLUM (cm³)	33,510	8,181	143,793	179,594	113,097
DENSITAT (kg/cm³)	0,119	2,445	0,417	0,891	1,768

També es va comprovar si existia alguna relació entre la densitat de les esferes i el període del pèndol (es va plantejar la densitat com a una altra possible causa); els resultats mostren clarament que no existeix cap relació ja que en els valors de la densitat no hi ha cap diferenciació entre els dos primers valors i els altres tres de manera que és evident que tampoc hi ha cap proporcionalitat respecte els períodes.

En la gràfica de continuació s'hi ha representat el període, el volum i la densitat de cada pèndol. El que es pretén és poder comparar com varien cadascuna de les tres variables en funció del pèndol; no s'ha donat importància ni als valors ni a les unitats. Els volums s'han passat a mm³ per fer els valors més propers als de les altres dues variables.



S'observa que la variació del període és molt més semblant a la del volum que a la de la densitat. Per aquesta raó, i havent descartat la massa com a possible causa, l'explicació més plausible és que el volum influeixi mínimament en el període (tenint en compte que hi hauria una altra causa d'error com per exemple un cert error en les mesures experimentals). Caldria arribar a entendre perquè existeix aquesta relació en el cas que es determinés que realment la causa de la variació és el volum de l'esfera.

Una altra possible causa de la variació podria ser el fregament; en pràctiques anteriors s'ha vist com el fregament del pèndol amb l'aire influeix en els resultats ja que provoca que el pèndol deixi d'actuar com un pèndol simple ideal. Com més fregament hi hagi menys es comportarà el pèndol com un pèndol ideal i, per tant, més error hi haurà en les mesures experimentals. Per calcular el valor de la força de fregament en cada pèndol cal calcular la variació de l'energia mecànica; que és igual al treball de la força de fregament. Aquests càlculs s'efectuaran en la pràctica següent.

2.2.5.- PRÀCTICA 5

CONSERVACIÓ DE L'ENERGIA MECÀNICA EN UN PÈNDOL SIMPLE

Idealment en un pèndol simple s'hauria de conservar l'energia mecànica ja que no hi actua cap força no conservativa. Aquest sistema ideal suposa que la força de fregament del pèndol amb l'aire és nul·la.

Quan un pèndol no oscil·la al buit, com els utilitzats per fer les mesures, hi actua una força de fregament (no conservativa) amb l'aire que afecta la conservació de l'energia mecànica.

OBJECTIU

En aquesta pràctica l'objectiu és calcular la força de fregament que actua sobre pèndols amb diferents característiques i explicar a què es deuen les variacions, si és que n'hi ha.

HIPÒTESI

La hipòtesi d'aquesta pràctica és que en cada pèndol s'obté una pèrdua d'energia i, per tant, una força de fregament diferents. El valor de cada força variarà segons diverses característiques del pèndol, es creu que algunes d'aquestes característiques influents en la pèrdua d'energia mecànica poden ser el volum i el material del cos.

PROCEDIMENT

En cadascun dels pèndols es calcularà l'energia mecànica en dos punts. El primer serà a l'inici, quan es deixa anar el cos. L'altre punt serà passats cinc períodes; quan el pèndol torni (teòricament) a la seva posició inicial. En aquests dos instants la velocitat del pèndol és 0, per tant l'energia mecànica és igual a l'energia potencial i només és necessari conèixer l'altura del cos per determinar-la.

Es calcularà l'increment d'energia mecànica en cinc períodes i es dividirà el resultat entre cinc per guanyar precisió i exactitud; és el mateix procediment que s'ha estat seguint en les pràctiques anteriors a l'hora de calcular el període.

Un cop calculades les dues energies mecàniques es pot obtenir el treball de la força de fregament ja que és igual a la diferència entre l'energia mecànica final i la inicial. Sabent el treball que fa la força i la distància en la que actua (la longitud de l'arc de circumferència que recorre el pèndol) es pot calcular el valor de la força de fregament.

CÀLCULS I MESURES

Al full de càlcul s'hi introdueixen les característiques (massa, diàmetre, radi i volum de l'esfera) dels cinc pèndols que s'utilitzaran per realitzar les mesures.

	PÈNDOL 1	PÈNDOL 2	PÈNDOL 3	PÈNDOL 4	PÈNDOL 5
MASSA (g)	4	20	60	160	200
DIÀMETRE (cm)	4	2,5	6,5	7	6
RADI (cm)	2	1,25	3,25	3,5	3
VOLUM (cm ³)	33,510	8,181	143,793	179,594	113,097

Com s'ha explicat anteriorment, en els dos punts on es mesurarà l'energia mecànica aquesta és igual a l'energia potencial del punt. Per aquesta raó, al full de càlcul s'hi introdueix la fórmula de l'energia potencial ($E_p = m \cdot g \cdot h$) per calcular l'energia mecànica. La gravetat s'hi introdueix amb el valor $9,807 \text{ m/s}^2$; la massa és la respectiva en cada pèndol i l'altura és la mesura experimental que es realitzarà utilitzant el mètode del vídeos.

En el mateix full de càlcul s'hi calcula l'increment d'energia mecànica ($\Delta E_m = E_{m_f} - E_{m_o}$) que és igual al treball de les forces no conservatives, en aquest cas únicament el fregament.

Coneixent el treball que realitza una força és pot conèixer el seu valor; ja que $W = F \cdot d \cdot \cos(\alpha)$. El valor de la força és l'única incògnita ja que sabem que $\alpha = 180^\circ$ (la força de fregament sempre actua en sentit contrari al moviment del mòbil) i podem calcular el desplaçament com a la longitud de l'arc de circumferència determinat per la longitud i amplitud del pèndol.

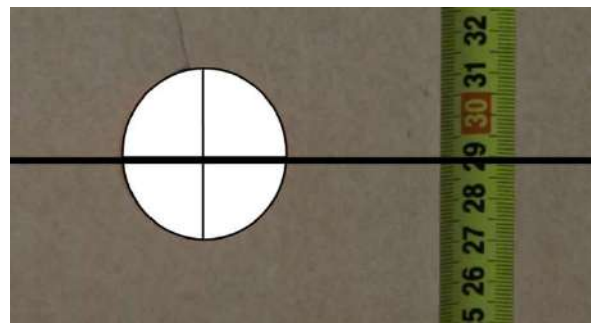
Per realitzar les mesures experimentals es va seguir el mateix procediment que en les pràctiques anteriors substituint el cronòmetre per una cinta mètrica que permetés determinar l'altura del pèndol en el punt on la seva velocitat és 0 m/s.

Les mesures experimentals s'han realitzat seguint el mateix procediment que en les pràctiques anteriors; s'ha utilitzant un programa d'edició de vídeos (*Filmora 9*) que permet anar avançant en el vídeo fotograma a fotograma, d'aquesta manera es pot determinar amb facilitat els instants inicial i final.

L'única diferència entre aquesta pràctica i les anteriors ha estat que en aquesta la mesura no només depèn de determinar el valor del cronòmetre en un instant concret, sinó que s'ha de mesurar la posició del pèndol. A més a més, degut a que els valors en la cinta mètrica són més petits que els del cronòmetre; realitzant els vídeos amb mateix enquadrament que en les pràctiques anteriors els números no s'apreciaven i no es podia determinar la posició.

Per aquesta raó en aquesta pràctica va caldre gravar tots els vídeos ampliant la zona on el pèndol seria en l'instant en el qual la seva velocitat era de 0 m/s. La mateixa ampliació que era necessària perquè es poguessin veure els números provocava que aquests moltes vegades es desenfoquessin; dos dels cinc vídeos es van haver de repetir.

Un cop determinat l'instant en el qual la velocitat del pèndol era de 0 m/s (utilitzant el programa d'edició de vídeos) es feia una captura de pantalla i es determinava l'altura en que es trobava el centre de l'esfera; com es mostra en la imatge.



Per fer els càlculs de l'energia mecànica el que es pretenia fer era calcular una altura mitjana (a partir de cinc mesures) inicial i final per cada pèndol. Finalment s'ha decidit fer el càlcul de l'increment d'energia mecànica cinc vegades en cada pèndol i fer la mitjana d'aquests valors.

En el pèndol 5 va caldre calcular l'increment d'energia mecànica en deu períodes en comptes de en cinc ja que en cinc períodes la variació de l'altura no era apreciable en la cinta mètrica. El resultat obtingut en 10 períodes es va dividir entre dos per poder-lo comparar amb la resta.

RESULTATS

A continuació s'adjunten les mesures obtingudes en cada pèndol:

PÈNDOL 1	ALTURA 1 (m)	ENERGIA MECÀNICA 1 (J)	ALTURA 2 (m)	ENERGIA MECÀNICA 2 (J)	INCREMENT Em
	0,299	11,729	0,297	11,650	-0,078
	0,291	11,415	0,289	11,337	-0,078
	0,288	11,317	0,286	11,238	-0,078
	0,289	11,337	0,287	11,258	-0,078
	0,285	11,179	0,283	11,102	-0,078
	0,291	11,396	0,289	11,317	-0,078

PÈNDOL 2	ALTURA 1 (m)	ENERGIA MECÀNICA 1 (J)	ALTURA 2 (m)	ENERGIA MECÀNICA 2 (J)	INCREMENT Em
	0,301	59,038	0,300	58,842	-0,196
	0,300	58,842	0,299	58,645	-0,196
	0,304	59,626	0,303	59,430	-0,196
	0,300	58,940	0,299	58,743	-0,196
	0,299	58,645	0,298	58,449	-0,196
	0,301	59,018	0,300	58,822	-0,196

PÈNDOL 3	ALTURA 1 (m)	ENERGIA MECÀNICA 1 (J)	ALTURA 2 (m)	ENERGIA MECÀNICA 2 (J)	INCREMENT Em
	0,271	159,461	0,270	158,873	-0,588
	0,270	158,873	0,269	158,284	-0,588
	0,269	158,284	0,268	157,696	-0,588
	0,270	159,167	0,269	158,579	-0,588
	0,270	158,873	0,269	158,284	-0,588
	0,270	158,932	0,269	158,343	-0,588

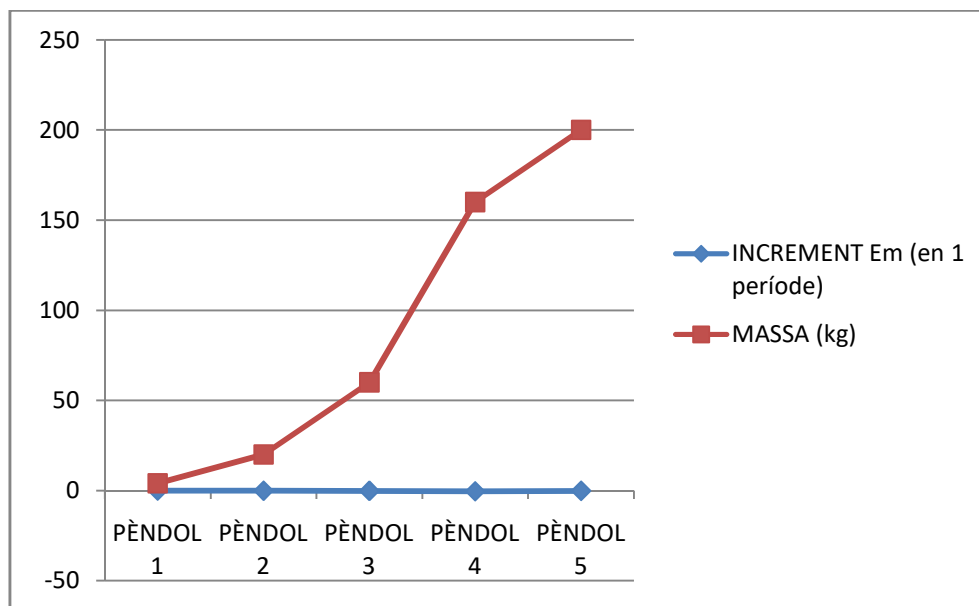
PÈNDOL 4	ALTURA 1 (m)	ENERGIA MECÀNICA 1 (J)	ALTURA 2 (m)	ENERGIA MECÀNICA 2 (J)	INCREMENT Em
	0,261	409,540	0,260	407,971	-1,569
	0,257	403,263	0,256	401,694	-1,569
	0,264	414,247	0,263	412,678	-1,569
	0,256	401,694	0,255	400,125	-1,569
	0,264	414,247	0,263	412,678	-1,569
	0,260	408,598	0,259	407,029	-1,569

PÈNDOL 5	ALTURA 1 (m)	ENERGIA MECÀNICA 1 (J)	ALTURA 2 (m)	ENERGIA MECÀNICA 2 (J)	INCREMENT Em (en 10 períodes)	INCREMENT Em (en 5 períodes)
	0,255	500,157	0,254	499,17	-0,980	-0,490
	0,260	510,944	0,260	509,964	-0,980	-0,490
	0,263	516,828	0,263	515,848	-0,980	-0,490
	0,263	515,848	0,262	514,867	-0,980	-0,490
	0,264	518,790	0,264	517,809	-0,980	-0,490
	0,261	512,513	0,261	511,533	-0,980	-0,490

CONCLUSIONS

En cada pèndol s'ha obtingut una pèrdua d'energia mecànica diferent i el primer que s'observa és que l'increment d'aquesta no és proporcional a la massa del pèndol. Per exemple, en el pèndol de 200 g l'increment és inferior que en els de 60 i 160 g.

	INCREMENT Em (en 1 període)	MASSA (g)
PÈNDOL 1	-0,015	4
PÈNDOL 2	-0,039	20
PÈNDOL 3	-0,117	60
PÈNDOL 4	-0,313	160
PÈNDOL 5	-0,098	200

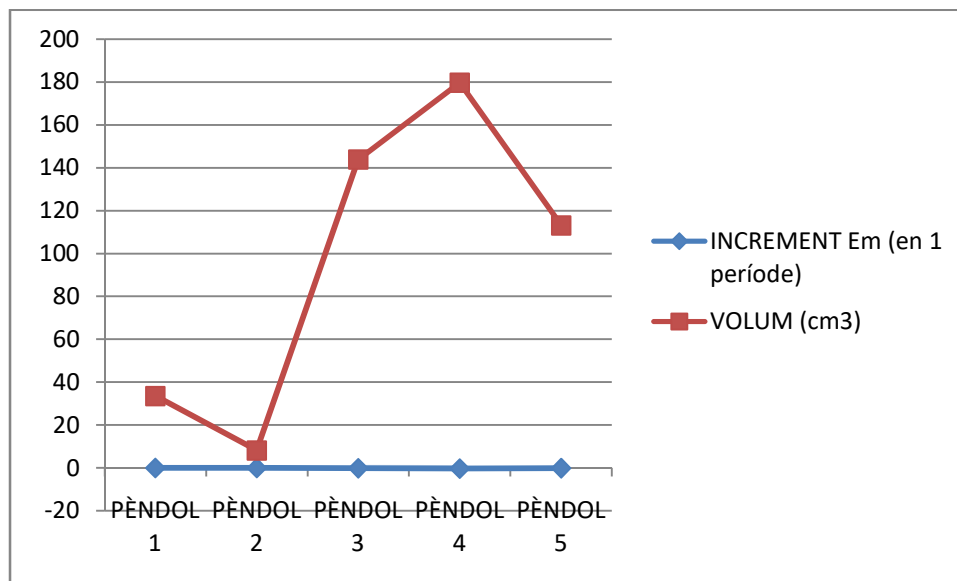


En el gràfic no s'aprecia la variació de les pèrdues d'energia mecànica degut a la gran diferència entre aquests valors i els de les masses dels pèndols 4 i 5; si que s'observa la no proporcionalitat.

El següent que es va observar és que el volum del pèndol de 200 g també és inferior al dels de 60 i 160 g. A més a més, tant en la pèrdua d'energia mecànica com en els volums de les esferes hi ha una diferència significativa entre els valors dels pèndols 1 i 2 respecte els altres tres, que són molt superiors.

L'única característica que no permet afirmar que l'increment d'energia mecànica depèn del volum de l'esfera és que la pèrdua d'energia és superior en el segon pèndol mentre que el volum del primer és el més gran.

	INCREMENT Em (en 1 període)	VOLUM (cm3)
PÈNDOL 1	-0,015	33,510
PÈNDOL 2	-0,039	8,181
PÈNDOL 3	-0,117	143,793
PÈNDOL 4	-0,313	179,594
PÈNDOL 5	-0,098	113,097

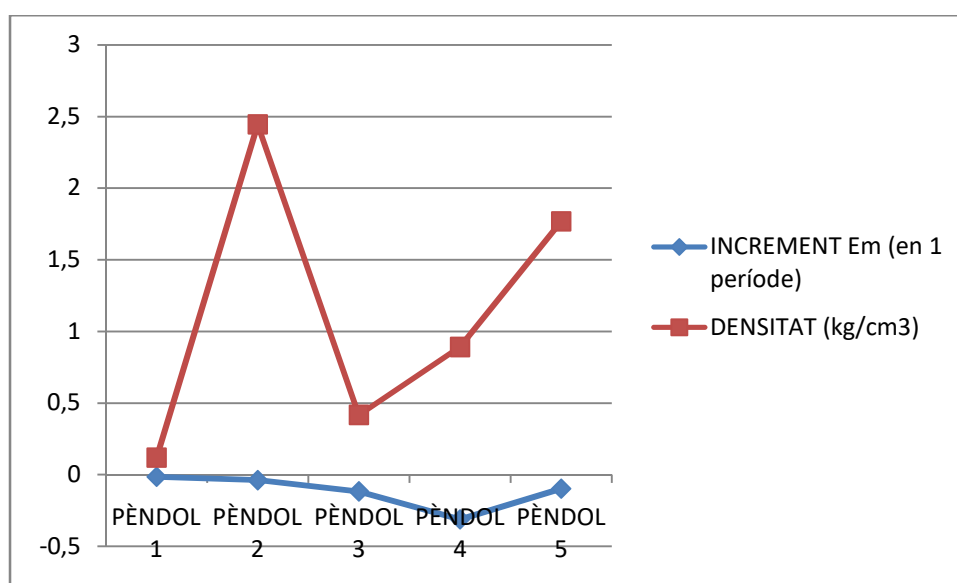


Tal com s'ha plantejat en la hipòtesi és possible que la pèrdua d'energia mecànica depengui de diverses característiques del cos i no només d'una. Degut a que el fil utilitzat és el mateix en tots els casos es descarta que cap característica d'aquest pugui influir en la variació de la pèrdua d'energia mecànica. També s'ha vist com la massa no hi influeix i que el volum pot ser que sí que ho faci. Tot i això, hi hauria d'haver com a mínim alguna altra característica de l'esfera que hi influís ja que s'ha vist que no totes les variacions es poden descriure a partir del volum.

A continuació es va pensar que una altra característica que podria influir en la pèrdua d'energia és que algunes esferes tenen el seu interior buit mentre que altres són compactes. Les esferes que tenen l'interior buit són la 1 i la 3; això afecta a la seva densitat. Aquestes dues esferes tenen una densitat molt inferior a la resta.

Al analitzar la variació entre els valors de la pèrdua d'energia en funció de la densitat s'observa que el fet que la pèrdua d'energia mecànica fos inferior en l'1 que en el 2; aspecte que no es podia explicar tenint en compte el volum de les esferes; podria tenir relació amb la densitat. La densitat també és proporcional en els pèndols 3 i 4 però no en el 5. La densitat del 5 és molt superior a les del tres i el quatre; en canvi, la pèrdua d'energia és inferior.

	INCREMENT Em (en 1 període)	DENSITAT (kg/cm ³)
PÈNDOL 1	-0,0156912	0,119
PÈNDOL 2	-0,039228	2,445
PÈNDOL 3	-0,117684	0,417
PÈNDOL 4	-0,313824	0,891
PÈNDOL 5	-0,09807	1,768



S'observa que tant el volum com la densitat de les esferes són variables parcialment proporcionals a la pèrdua d'energia mecànica dels pèndols però que en les dues hi ha valors que no són proporcionals.

Aquesta observació planteja diverses opcions:

- Tot i que cap de les dues variables per elles soles poden explicar les variacions en la pèrdua d'energia pot ser que les dues hi influeixin i que al tenir en compte les dues alhora es pugui explicar les variacions.
- Pot ser que hi hagi una tercera variable que s'hagi de tenir en compte, junt amb el volum i la densitat de les esferes, per tal de donar una explicació dels resultats obtinguts.
- També pot ser que la proporcionalitat entre les dues variables i la pèrdua d'energia no signifiqui que hi influeixin i que les variacions estiguin causades per alguna altra variable diferent que no tingui cap relació amb el volum i la densitat.

Davant d'aquest tres plantejaments el primer que es fa és pensar quina podria ser la tercera variable que influís en la pèrdua d'energia mecànica. Des d'un primer moment es descarta la primera opció ja que, és poc probable que utilitzant únicament aquestes dues variables es pugui donar una explicació a les variacions.

La tercera variable, que podria influir en la pèrdua d'energia, tal com s'ha plantejat en la hipòtesi, és el material de l'esfera.

Les cinc esferes són totes de materials diferents i cada material té diferent coeficient de fregament amb l'aire segons les característiques de la seva superfície.

A continuació s'analitzaran els diferents materials i s'intentarà relacionar les seves característiques amb les pèrdues d'energia com a conseqüència del fregament amb l'aire. S'estudiarà la rugositat de les superfícies ja que es la característica que intervé principalment en el fregament..

Per analitzar la rugositat el primer que es va fer va ser fer-ho visualment i a través del tacte. Es van comparar les esferes entre si per establir un ordre de més llisa a més rugosa. Es va començar comparant les esferes 1 i 2 establint que la 2 era la més llisa de les dues.

2	1	-	-	-
---	---	---	---	---

A continuació es va determinar que la 3 era més rugosa que les dues anteriors; igual que la quatre. D'entre aquestes dues, es va establir que la més rugosa era la tres.

2	1	4	3	-
---	---	---	---	---

Es va poder determinar que l'esfera 5 era més llisa que la 1 però no si era més llisa que la 2.

2 / 5	1	4	3
-------	---	---	---

Per tal d'obtenir uns resultats menys subjectius es va pensar en fer les comparacions seguint un mètode que permetés que fossin més precises. Existeixen uns dispositius anomenats rugosímetres que utilitzant un palpador de diamant ofereixen una lectura de la rugositat; i també hi ha altres mètodes que utilitzen ones de llum per fer les mesures. Al no disposar de cap d'aquests recursos es va pensar que una manera de poder comparar els relleus seria pintant la superfície de les esferes i, com si es tractés de tampons, estampar les superfícies en un full.

Es va decidir provar aquest mètode. Per dur-lo a terme només va ser necessari disposar d'un full de paper, de les cinc esferes i d'un retolador. Es va decidir utilitzar un retolador de tinta líquida ja que es va creure que els resultats serien millors però a continuació és va repetir el procediment utilitzant un retolador convencional i els resultats també van ser bons.

Per obtenir les mostres es pintava amb el retolador una zona petita (d'uns 2 cm²) de la superfície de l'esfera. A continuació es feia rodar l'esfera per sobre del full de paper de manera que la tinta quedés estampada. Era important que no hi hagués un excés de tinta ja que això impediria obtenir una bona representació del relleu. Els resultats que es van obtenir van ser els següents:

PÈNDOL 1



PÈNDOL 2



PÈNDOL 3



PÈNDOL 4



PÈNDOL 5



Un cop obtingudes les mostres es va passar a analitzar-les. És fàcil observar que la més rugosa és la número 3. A continuació segueixen la 1 i la 4. Per establir quina de les dues és més llisa es té en compte que el relleu de la 1 és molt uniforme mentre que el de la 4 té diverses irregularitats. De manera que, tot i que són molt semblants, es determina que la 1 és més llisa que la 4 ja que en aquesta última la superfície no sempre és uniforme.

Per últim queden les dues esferes més llises, la 2 i la 5 (a ull nu no es va poder determinar quina de les dues era més llisa) però en el paper sí que es pot. S'estableix que la 5 és lleugerament més llisa ja que el traç és sempre més constant.

5	2	1	4	3
---	---	---	---	---

Un cop obtingut aquest ordre es va observar que no coincidia amb el de la força de fregament; és a dir que el 5 no és el que té menys fregament ni el 3 el que més. L'ordre de menys força de fregament a més és $1 < 2 < 5 < 3 < 4$.

A partir d'aquesta observació es va entendre que la rugositat de les superfícies no permetia determinar la força de fregament que experimentava cada cos, sinó que tenia relació amb el coeficient de fregament del material en concret amb l'aire.

És evident que analitzant el relleu de les superfícies no es va poder obtenir un valor del coeficient de fregament; entre altres, perquè hi ha altres variables que cal tenir en compte a l'hora de calcular-lo.

Com que moltes d'aquestes variables (sobretot les relacionades amb l'aire) es van mantenir constants en els cinc pèndols, la rugositat d'aquest es converteix en la variable que més fa variar els coeficients de fricció.

Per tal d'obtenir la força de fregament el coeficient s'ha de multiplicar per una força; en un pèndol simple aquesta força és el component y del pes o la tensió de la corda (les dues forces són iguals en valor absolut). Aquesta afirmació ens permet observar que la massa influeix en la força de fregament.

En un principi es va dir que la massa no feia variar la força de fregament ja que no es va observar cap proporcionalitat entre els dues variables. No es va trobar cap proporcionalitat ja que els coeficients de fricció amb l'aire de cada esfera eren diferents; si les esferes haguessis estat del mateix material si que s'hauria pogut observar una proporcionalitat entre la massa i la variació de la conservació de l'energia mecànica.

Per tant, les variacions en la força de fregament depenen, tal com es va plantejar en la hipòtesi, de més d'una variable. En la hipòtesi es va dir que una d'aquestes variables seria el material del cos, com s'ha comprovat. L'altra variable que es va anomenar en la hipòtesi va ser el volum però s'ha arribat a la conclusió que en comptes del volum és la massa la que influeix. Es creu que el volum podria ser una de les variables que influeix a l'hora de calcular el coeficient de fregament (degut a la proporcionalitat trobada); però no s'ha pogut demostrar.

A continuació s'explicaran els resultats tenint en compte la rugositat del cos i la seva massa. No s'ha pogut incloure cap gràfica ja que no es disposen dels valors del coeficient de fregament; només es coneix l'ordre de creixement / decreixement.

El pèndol amb més força de fregament és el 5. Aquest resultat és totalment coherent ja que és el segon amb una massa més gran i també és el segon més rugós. No podria haver estat superat

per cap altre ja que el més rugós de tots, el tres, té una massa 100g més petita (que és una variació molt considerable; és un 62,5% menys de massa); a més a més l'esfera amb una massa més gran és la més llisa.

També s'observa que entre la 4 i la 1, que tenen una rugositat semblant, la 4 té molt més fregament ja que la seva massa és molt més gran; la massa de la 1 és la més petita (amb una diferència significativa) i això provoca que, tot i que no sigui la més llisa, tingui la força de fregament més baixa.

La més llisa (la 5), tot i tenir poc fregament, en té molt més que la 2 (la segona més llisa). Això és degut a que la massa de la 5 és deu vegades més gran que la de la 2.

L'esfera 3 té una força de fregament superior a la 5 tot i que aquesta última té una massa més del doble de gran. Això és degut a que la 3 és la més rugosa amb diferència.

Un cop realitzada aquesta pràctica es van poder extreure conclusions referents a la pràctica anterior on es va plantejar que les lleugeres variacions en els valors del període podrien ser causades per la variació de la força de fregament en cadascun d'ells. La hipòtesi que es va plantejar és la següent: com més fregament hi hagi menys es comportarà el pèndol com un pèndol ideal i, per tant, més error hi haurà en les mesures experimentals.

NOVES CONCLUSIONS DE LA PRÀCTICA 4

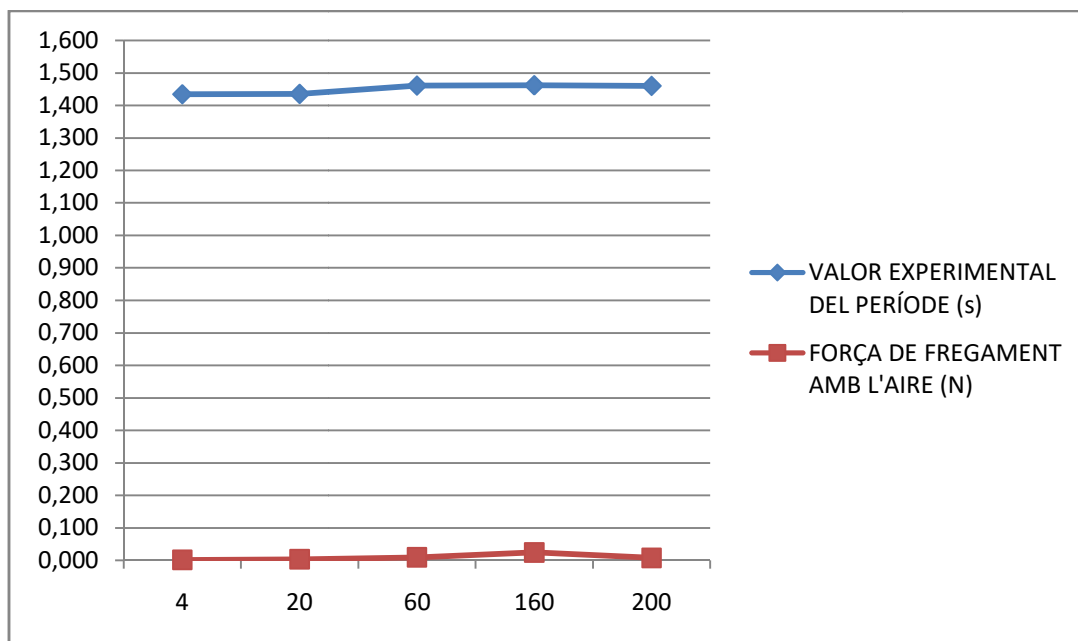
Com s'ha comentat anteriorment, els valors experimentals del període obtinguts en la pràctica 4 es poden diferenciar en dos grups: els dels pèndols 1 i 2 (amb els valors 1,434s i 1,435s) i el dels pèndols 3, 4 i 5 que tenen valors superiors i també molt semblants entre sí (1,461s / 1,462s i 1,460s). L'ordre creixent dels valors és $1 < 2 < 5 < 3 < 4$.

Després de plantejar diverses hipòtesis sobre quina podria ser la causa de les variacions es va acabar plantejant que com que la força de fregament influeix en el període del pèndol i és diferent en cada pèndol, podria ser la causa de les variacions en els valors experimentals del període.

Els resultats obtinguts en la pràctica 5 han permès demostrar aquesta hipòtesi ja que s'observa que en els valors de la força de fregament es manté el mateix ordre creixent que en els resultats del període.

A continuació s'adjunta el gràfic en el qual s'observa la semblança entre la variació del període i la del fregament.

MASSA DEL PÈNDOL (g)	VALOR EXPERIMENTAL DEL PERÍODE (s)	FORÇA DE FREGAMENT AMB L'AIRE (N)
4	1,434	0,001
20	1,435	0,003
60	1,461	0,009
160	1,462	0,024
200	1,460	0,007



S'observa la diferenciació dels valors de la fricció en dos grups, tot i que no és tan visible com en els valors experimentals del període. També s'observa una única incoherència; el valor 4 del fregament és significativament superior als 3 i 5; en els períodes el valor 4 també és més gran però la diferència no es tant significativa. Tot i les dues afirmacions anteriors es pot concloure que existeix una semblança entre la variació de les dues variables.

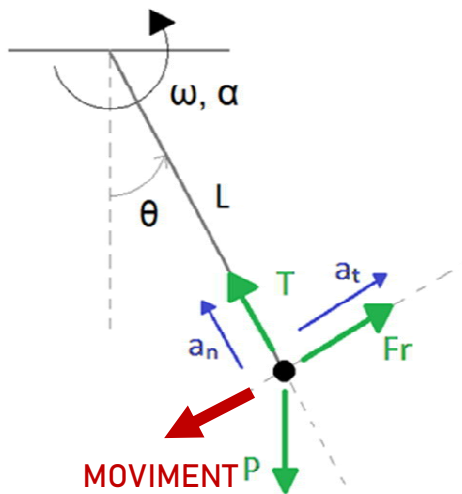
Aquesta proporcionalitat permet afirmar que el fregament és la causa de la lleugera variació en els valors obtinguts. Així, es descarten la resta d'hipòtesis en les quals en plantejava que les variacions podrien haver estat causades pel volum o per la densitat de les esferes.

El fet que com més força de fregament experimenti el pèndol, més augmenti el seu període es deu a que el fregament és una força actua en la mateixa direcció que el moviment però en sentit contrari.

Per explicar l'increment en els períodes cal recórrer a la segona llei de Newton: $\sum F = m \cdot a$.

L'única força que, en un pèndol ideal, actua en la direcció del moviment i permet que el pèndol adquireixi una certa acceleració és el component x del pes del cos.

$$P \cdot \sin(\theta) = m \cdot a$$



Com s'ha dit, la força de fregament actua en sentit contrari al moviment del pèndol, per aquesta raó:

$$P \cdot \sin(\theta) - F_f = m \cdot a$$

Com més gran sigui la força de fregament, inferior serà l'acceleració que el cos adquireix (en l'eix x). Una acceleració inferior provocarà que la velocitat que adquireixi el cos també sigui inferior; d'aquesta manera, com que l'espai a recórrer no varia significativament, el cos trigarà més temps a recórrer-lo. L'espai a recórrer és el mateix per cada pèndol ja que l'amplitud es manté constant en tots.

Es podria pensar que la massa, que multiplica l'acceleració en la segona llei de Newton i que és diferent en cadascun dels pèndols utilitzats, podria fer variar el valor de l'acceleració que adquireix cada pèndol. No és així ja que es simplifica.

$$P \cdot \sin(\theta) - F_f = m \cdot a$$

$$P \cdot \sin(\theta) - N \cdot \mu = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin(\theta) - m \cdot g \cdot \mu = m \cdot a$$

$$m \cdot g (\sin(\theta) - \mu) = m \cdot a$$

$$g (\sin(\theta) - \mu) = a$$

2.2.6.- PRÀCTICA 6

MESURA DEL VALOR DE LA GRAVETAT UTILITZANT UN PÈNDOL SIMPLE

Com que l'acceleració de la gravetat apareix en la fórmula de la periodicitat d'un pèndol; si es coneix el període i la longitud del fil del pèndol en qüestió es pot calcular la gravetat del punt on s'ha realitzat la mesura ja que la gravetat passa a ser l'única incògnita.

Fins als anys 30 els pèndols van ser la base de la gravimetria. En les primeres mesures es situava un pèndol simple davant del pèndol d'un rellotge. Els pèndols de rellotge no es mouen únicament degut a la gravetat, sinó que mantenen el seu període gràcies al impuls que els hi transmet el moviment del mateix rellotge.

El que es feia per realitzar la mesura era ajustar la longitud del pèndol fins que es sincronitzava amb el del rellotge; d'aquesta manera s'obtenien les mesures del període (el del rellotge) i de la longitud del fil i es podia calcular la gravetat simplement aplicant la fórmula.

Per fer aquest tipus de mesures, el pèndol de rellotge que es solia utilitzar era un pèndol de segons, és a dir, un pèndol amb un període de dos segons; un segon per oscil·lació. A finals del segle XVII es va establir com a mesura estàndard de la força de la gravetat, la longitud d'un pèndol en sincronia amb el pèndol de segons d'un rellotge; evidentment el valor variava segons la localització.

HISTÒRIA DE LA MESURA DEL VALOR DE LA GRAVETAT MITJANÇANT PÈNDOLS SIMPLES

1620 – Francis Bacon proposa utilitzar un pèndol per mesurar la gravetat. També suggereix estudiar si la gravetat varia amb l'alçada.

1644 – Marin Mersenne determina la longitud d'un pèndol de segons. En aquell moment encara no existien els rellotges de pèndol; per fer la mesura va comparar l'oscil·lació d'un pèndol amb el temps que trigava un cos a caure una distància coneguda. Va obtenir una mesura de 0,99 m.

1669 – Jean Picard fa la mesura de la longitud d'un pèndol de segons utilitzant un rellotge de pèndol i obté 0,993 m.

1672 – Jean Richer observa la variació de la gravetat a diferents punts de la terra; concretament fa les mesures (utilitzant un rellotge amb un pèndol de segons) a Caiena (Guaiana Francesa) i a París. Observa que per mantenir el període del pèndol de Caiena ha de reduir la longitud del fil respecte el de París.

1687 – Isaac Newton explica al seu llibre Principia Mathematica que la Terra és lleugerament ovalada degut a la força centrífuga de la seva rotació; concretament és més plana als pols. És per això que un punt amb una latitud superior és més proper al centre de la Terra i té una gravetat superior. També demostra que si la llargada d'un pèndol es manté constant, encara que es canviï el seu material, el període segueix sent el mateix i que, per tant, la força produïda per la gravetat és proporcional a la massa del cos.

Posteriorment van anar sorgint nous instruments que permetien mesurar la gravetat amb més precisió. La majoria dels nous gravímetres també eren pèndols però més sofisticats que els pèndols simples; això permetia fer correccions en les mesures segons les condicions en les quals s'havien pres. També es van idear nous mètodes per mesurar la llargada del pèndol amb més exactitud. Per tot això els pèndols simples com a gravímetres van quedar obsolets i van ser

substituïts per altres mecanismes com: el pèndol de Kater, els pèndols invariables, el pèndol Repsold-Bessel o el gravímetre de Gulf.

OBJECTIU

En aquesta pràctica es pretén fer una estimació del valor de la gravetat utilitzant un pèndol simple com a gravímetre.

HIPÒTESI

Coneixent el període d'un pèndol i la seva llargada només cal aïllar la gravetat de la fórmula del període per trobar el seu valor; per tant, els resultats haurien de ser força precisos. D'altra banda, en les mesures experimentals del període d'un pèndol simple s'ha obtingut un cert error causat principalment per la força de fregament amb l'aire. Aquest error podria veure's representat en el valor de la gravetat que s'obtingui; la hipòtesi sobre aquesta afirmació és que els dos errors seran proporcionals.

PROCEDIMENT

S'utilitzaran mesures experimentals realitzades anteriorment que s'hagin realitzat en un pèndol simple que oscil·li amb una amplitud inferior als 20° i utilitzant el mètode dels vídeos.

Posteriorment s'aplicarà la fórmula següent tenint en compte, en cada cas, la mesura del període i la llargada del pèndol.

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Aquesta fórmula s'obté a partir de $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (la fórmula de la periodicitat d'un pèndol simple que s'utilitza quan aquest oscil·la amb amplituds inferiors als 20°).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$$

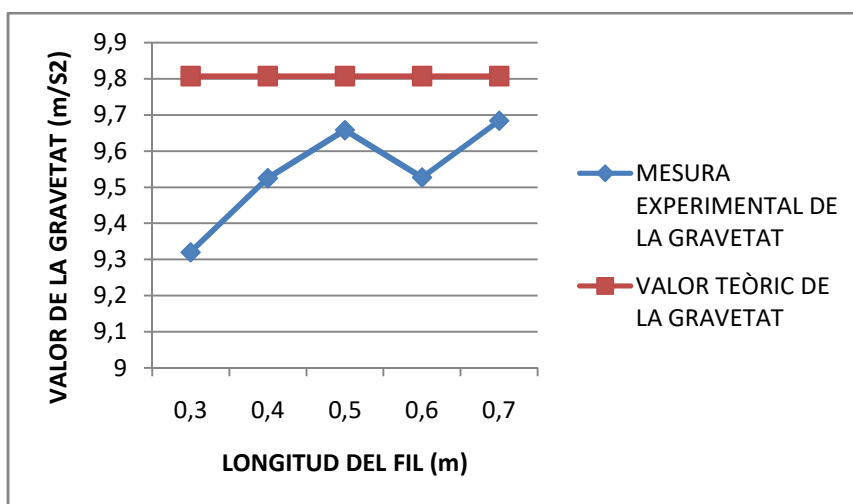
Un cop obtinguts els resultats per les diferents mesures experimentals, es farà la mitjana i es calcularà l'error d'aquesta respecte el valor mitjà de la gravetat a la Terra (9,807 m/s²).

També es compararà, per cada mesura, l'error que es va obtenir en la mesura amb el que s'ha obtingut a l'hora de fer el càlcul del valor de la gravetat per determinar si hi ha alguna proporcionalitat.

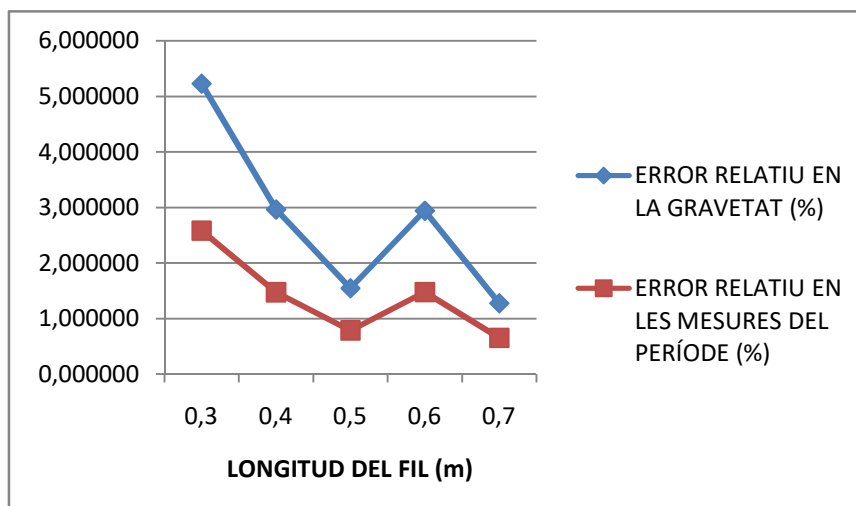
RESULTATS

Càlculs realitzats amb els valors de la pràctica 1:

PRÀCTICA 1	MESURA EXPERIMENTAL DE PERÍODE (s)	LLARGADA DEL FIL (m)	MESURA EXPERIMENTAL DE LA GRAVETAT (m/s ²)	VALOR TEÒRIC DE LA GRAVETAT (m/s ²)
	1,127	0,3	9,320	9,807
	1,288	0,4	9,524	9,807
	1,430	0,5	9,657	9,807
	1,577	0,6	9,527	9,807
	1,689	0,7	9,683	9,807

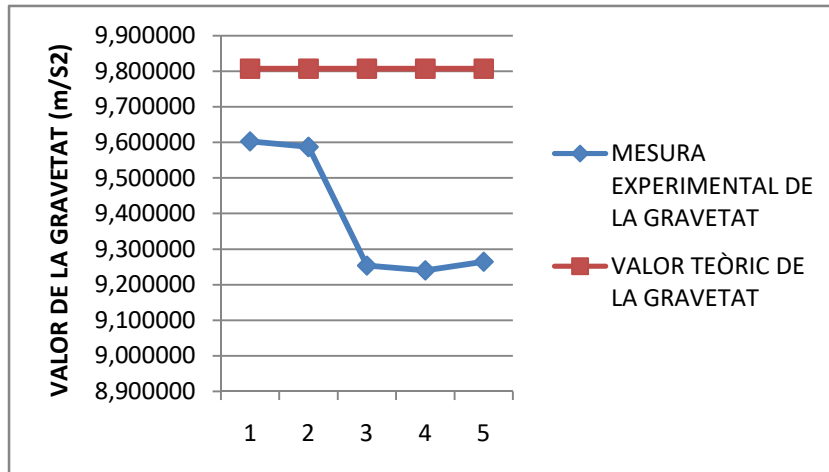


PRÀCTICA 1	LLARGADA DEL FIL (m)	ERROR RELATIU EN LA GRAVETAT (%)	ERROR RELATIU EN LES MESURES DEL PERÍODE (%)
	0,3	5,224	2,579
	0,4	2,962	1,470
	0,5	1,545	0,785
	0,6	2,938	1,474
	0,7	1,274	0,650

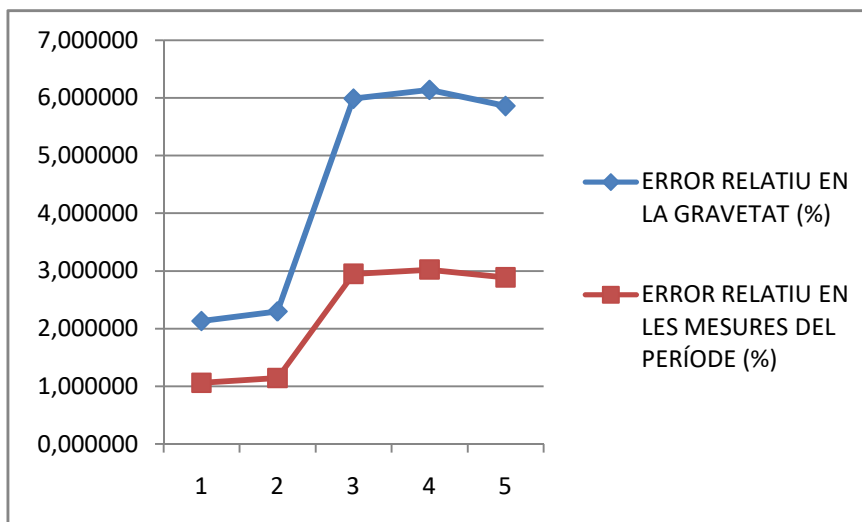


Càlculs realitzats amb els valors de la pràctica 3:

PRÀCTICA 3	MESURA EXPERIMENTAL DE PERÍODE (s)	LLARGADA DEL FIL (m)	MESURA EXPERIMENTAL DE LA GRAVETAT (m/s ²)	VALOR TEÒRIC DE LA GRAVETAT (m/s ²)
	1,434	0,5	9,602	9,807
	1,435	0,5	9,586	9,807
	1,461	0,5	9,253	9,807
	1,462	0,5	9,240	9,807
	1,460	0,5	9,264	9,807

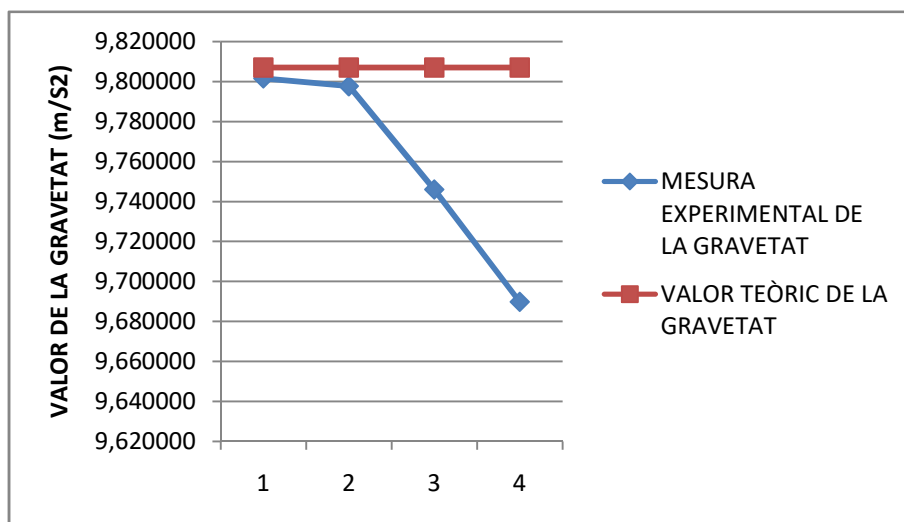


PRÀCTICA 3	ERROR RELATIU EN LA GRAVETAT (%)	ERROR RELATIU EN LES MESURES DEL PERÍODE (%)
	2,131	1,060
	2,296	1,141
	5,985	2,949
	6,136	3,022
	5,857	2,887

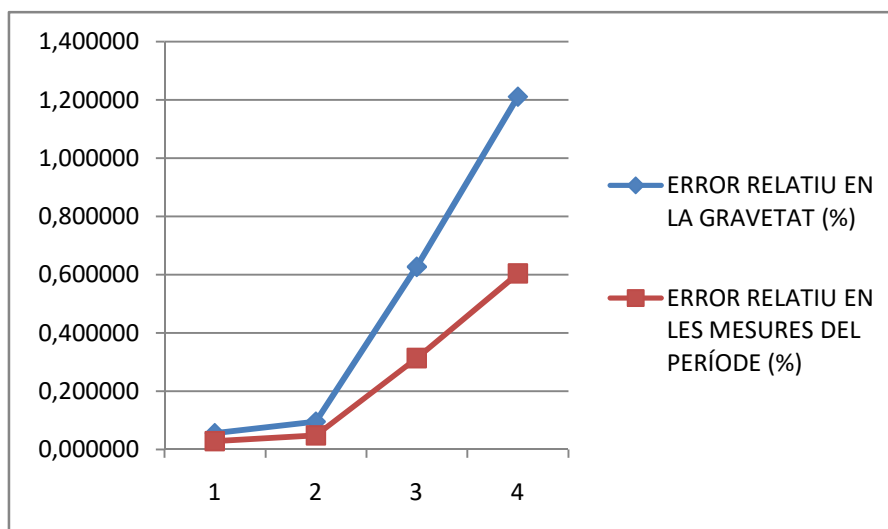


Càlculs realitzats amb valors de la pràctica 5:

PRÀCTICA 5	MESURA EXPERIMENTAL DE PERÍODE (s)	LLARGADA DEL FIL (m)	MESURA EXPERIMENTAL DE LA GRAVETAT (m/s ²)	VALOR TEÒRIC DE LA GRAVETAT (m/s ²)
	1,419	0,5	9,801	9,807
	1,419	0,5	9,797	9,807
	1,423	0,5	9,745	9,807
	1,427	0,5	9,689	9,807

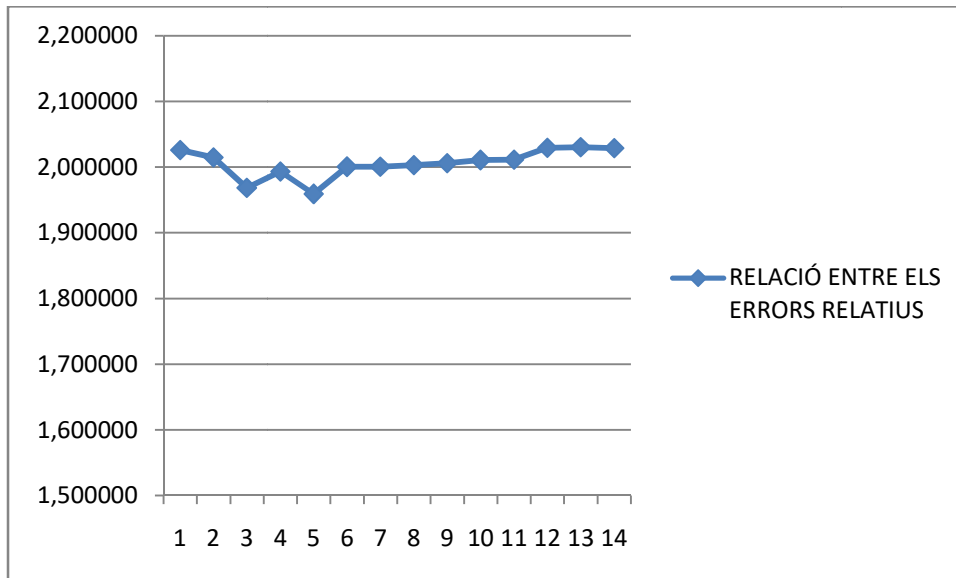


PRÀCTICA 5	ERROR RELATIU EN LA GRAVETAT (%)	ERROR RELATIU EN LES MESURES DEL PERÍODE (%)
	0,056	2,579
	0,095	1,470
	0,626	0,785
	1,210	1,474



ANÀLISIS DELS RESULTATS I CONCLUSIONS

El primer que s'ha observat en els resultats és que, tal com es va plantejar en la hipòtesi, l'error en la mesura és proporcional al que s'obté al calcular el valor de la gravetat. La variació és més o menys constant en tots els casos; l'error relatiu es duplica.



S'ha fet el càlcul en totes les mesures i la mitjana de la relació *error relatiu en el càlcul de la gravetat / error relatiu de les mesures* que s'obté és de 2,006. El valor més gran és 2,030 i el més petit 1,959; per tant, la variació màxima respecte la mitjana és de 0,0469.

Observant la fórmula utilitzada per calcular el valor de la gravetat: $g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$; s'ha arribat a la conclusió que la causa d'aquest augment tant significatiu en l'error és causat perquè el període (la mesura que conté un cert error) està elevada al quadrat.

També es creu que cap dels valors és exactament 2, ja que una part de l'error en les mesures prové de la longitud del fil. El que passa és que l'error en la longitud és molt poc significatiu i, a més a més, la magnitud no s'eleva al quadrat per calcular la gravetat. La variació de les relacions al voltant de 2 depèn de com de significatiu és l'error de la longitud del pèndol en cada cas.

Es va voler comprovar que al elevar al quadrat un valor amb un cert error, el seu error es duplica. Primer es va fer el càlcul amb uns valors concrets però diferents als de la pràctica; es va considerar una mesura que donava 4 amb un error relatiu del 2%:

$$4 + \left(\frac{2 \cdot 4}{100} \right) = 4,08 \qquad 4 - \left(\frac{2 \cdot 4}{100} \right) = 3,92$$

Al elevar cadascun d'aquests valors al quadrat s'obté 16,6464 i 15,3664 respectivament; al elevar al quadrat el valor sense error s'obté 16.

A continuació es va calcular l'error relatiu en els dos valors, respecte el valor sense error.

$$Ea = |16 - 16,6464| = 0,6464 \qquad Ea = |16 - 15,3664| = 0,6336$$

$$Er = \frac{0,6464}{16} \cdot 100 = 4,04\% \qquad Er = \frac{0,6336}{16} \cdot 100 = 3,96\%$$

En fer la mitjana respecte els dos valors s'obté un error relatiu del 4%; l'error relatiu inicial s'ha duplicat.

Es va fer el mateix càlcul però canviant els valors; 50 amb un error relatiu inicial del 3%.

$$50 + \left(\frac{3 \cdot 50}{100} \right) = 51,5 \qquad 50 - \left(\frac{3 \cdot 50}{100} \right) = 48,5$$

Al elevar al quadrat s'obté: 2652,25 i 2352,25.

$$\begin{aligned} E_a &= |2500 - 2652,25| = 152,25 & E_a &= |2500 - 2352,25| = 147,75 \\ E_r &= \frac{152,25}{2500} \cdot 100 = 6,09\% & E_r &= \frac{147,75}{2500} \cdot 100 = 5,91\% \end{aligned}$$

La mitjana d'aquests dos errors relatius és del 6%; el doble de l'error relatiu inicial.

A continuació es volia demostrar que la duplicació de l'error relatiu es produeix per qualsevol nombre. Per fer-ho s'ha agafat un valor x amb un error relatiu de $y\%$ i s'han seguit els mateixos passos que en els dos casos anteriors. Per fer demostracions matemàtiques en les quals es vol demostrar que el resultat és el mateix per qualsevol valor, cal utilitzar o símbols (lletres); això, tot i ser necessari per fer la demostració, dificulta molt els càlculs.

Cal tenir en compte que en aquesta demostració: $x \in \mathbb{R} \ // \ y \in \mathbb{N}$

Es va començar aplicant el % d'error a x ; obtenint les dues expressions següents:

$$x + \frac{x \cdot y}{100} \qquad x - \frac{x \cdot y}{100}$$

Al elevar el valor sense error al quadrat obtenim x^2 ; a continuació s'ha elevat les dues expressions anteriors (els valors que contenen el % d'error) al quadrat:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{x \cdot y}{100} \right)^2 &= x^2 + \frac{x^2 \cdot y^2}{10000} + \frac{2 \cdot x^2 \cdot y}{100} = x^2 + \frac{x^2 \cdot y^2}{10000} + \frac{x^2 \cdot y}{50} \\ \left(x - \frac{x \cdot y}{100} \right)^2 &= x^2 + \frac{x^2 \cdot y^2}{10000} - \frac{2 \cdot x^2 \cdot y}{100} = x^2 + \frac{x^2 \cdot y^2}{10000} - \frac{x^2 \cdot y}{50} \end{aligned}$$

Com en els casos anteriors, el següent pas és calcular l'error absolut d'aquests dos últims valors

respecte al valor sense error. Per fer-ho és millor utilitzar les expressions simplificades $\left(x + \frac{x \cdot y}{100} \right)^2$ i $\left(x - \frac{x \cdot y}{100} \right)^2$;

$$E_a = \left| x^2 - \left(x + \frac{x \cdot y}{100} \right)^2 \right| = \left| \left(2x + \frac{x \cdot y}{100} \right) \cdot \left(- \frac{x \cdot y}{100} \right) \right| = \frac{x \cdot y}{100} \cdot \left(2x + \frac{x \cdot y}{100} \right)$$

$$E_a = \left| x^2 - \left(x - \frac{x \cdot y}{100} \right)^2 \right| = \left| \left(2x - \frac{x \cdot y}{100} \right) \cdot \left(\frac{x \cdot y}{100} \right) \right| = \frac{x \cdot y}{100} \cdot \left(2x - \frac{x \cdot y}{100} \right)$$

Tot i que en els dos casos anteriors (amb valors) s'han calculat els errors relatius i posteriorment se n'ha fet la mitjana; s'ha decidit que en aquesta situació és farà la mitjana dels errors absoluts i

posteriorment es calcularà l'error relatiu d'aquest valor mitjà. El resultat no es veurà afectat per aquest canvi d'ordre. La raó que porta a fer-lo és facilitar els càlculs; l'error relatiu només haurà de ser calculat per un valor.

La mitjana dels dos errors absoluts és:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{x \cdot y}{100} \cdot \left(2x + \frac{x \cdot y}{100}\right)\right) + \left(\frac{x \cdot y}{100} \cdot \left(2x - \frac{x \cdot y}{100}\right)\right)}{2} = \\ & = \frac{\left(\frac{x \cdot y}{100} \cdot \frac{200x + x \cdot y}{100}\right) + \left(\frac{x \cdot y}{100} \cdot \frac{200x - x \cdot y}{100}\right)}{2} = \\ & = \frac{\left(\frac{200x^2 \cdot y + x^2 \cdot y^2}{10000}\right) + \left(\frac{200x^2 \cdot y - x^2 \cdot y^2}{10000}\right)}{2} = \\ & = \frac{\frac{400x^2 \cdot y}{10000}}{2} = \frac{\frac{x^2 \cdot y}{25}}{2} = \frac{x^2 \cdot y}{50} \end{aligned}$$

Per últim es calcula l'error relatiu tenint en compte que l'error absolut és $\frac{x^2 \cdot y}{50}$ i el valor teòric x^2 :

$$Er = \frac{\frac{x^2 \cdot y}{50}}{x^2} \cdot 100 = \frac{y}{50} \cdot 100 = 2y$$

Al elevar al quadrat s'ha passat de tenir un error relatiu del $y\%$ a un error del $2y\%$; es pot afirmar que per qualsevol valor de x i de y , sempre que $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{N}$, l'error relatiu és duplicarà al elevar x al quadrat.

Un cop feta aquesta demostració podem afirmar que la relació entre els errors relatius de la pràctica és causada per l'elevació al quadrat del valor del període.

Continuant amb l'anàlisi dels resultats de la pràctica, el primer que es va fer va ser fer una mitjana de totes les mesures del valor de la gravetat; el resultat que es va obtenir va ser de $9,564 \text{ m/s}^2$; l'error relatiu d'aquest valor és de $2,546\%$.

Es va comparar l'error relatiu mitjà en els valors de la gravetat, $2,589\%$, amb l'error relatiu mitjà en les mesures, $1,358\%$; es pot observar com es manté la duplicació de l'error; la relació és de $1,906$.

Tenint en compte que l'error en el valor de la gravetat que s'obté és proporcional a l'error en la mesura utilitzada a l'hora de calcular-lo, es va pensar que seria fàcil poder obtenir un valor més exacte de la gravetat utilitzant les mesures amb menys error.

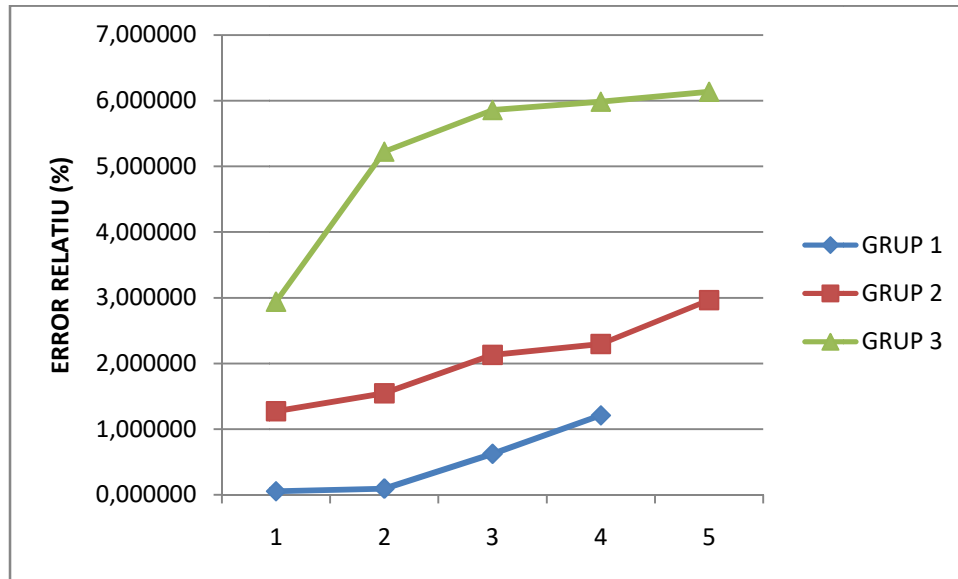
Es van fer els càlcul separant els valors segons la pràctica en la qual es van obtenir. Tant en la pràctica 1 com en la 3 l'error en el valor de la gravetat va augmentar respecte l'obtingut anteriorment en fer la mitjana. Això és degut a que l'error relatiu mitjà de les mesures en aquestes

dues pràctiques, 1,392% i 3,022% respectivament, és en els dos casos superior al mitjà de totes les mesures.

Evidentment, en la pràctica 5, la situació és contrària. Els errors relatius en les mesures són molt baixos; la mitjana és de 0,248%. Això permet obtenir un valor de la gravetat de 9,758, que només té un 0,497% d'error relatiu respecte el valor teòric.

A continuació es van separar les mesures segons l'error relatiu en elles. Degut a que les mesures seleccionades per fer aquesta pràctica són 14 es van fer tres grups, un de 4 mesures i dos de 5.

En el gràfic següent es poden comparar els errors relatius en cada grup:



Les quatre mesures amb un error relatiu més baix són les quatre que es van obtenir en la pràctica 5; per tant els resultats són els que ja s'han comentat referents a aquesta pràctica.

L'error relatiu mitjà en les mesures del segon grup és de 1,022%; de manera que l'error en el valor de la gravetat és aproximadament de 2,044%. S'observa com l'error mitjà augmenta significativament respecte el primer grup però, tot i així, continua sent inferior a l'error obtingut en fer la mitjana de totes les mesures.

En el tercer grup l'error és molt més significatiu (d'una mitjana del 5,228%), s'obté un valor de la gravetat de 9,321 m/s².

També s'ha observat que en la mesura amb un error relatiu més baix, del 0,028%, s'obté un valor de la gravetat de 9,801 m/s²; aquest valor només té un 0,056% d'error respecte el valor de la gravetat mitjà a la Terra.

Tot i que l'error en aquesta mesura és molt baix és va pensar que un part d'aquest és deu a que s'està comparant el valor experimental amb un valor teòric que és una mitjana de la gravetat a la Terra i no el valor real en el punt on s'ha realitzat la mesura experimental. Això va portar a fer el càlcul d'aquest últim valor per comprovar si l'error de les mesures es reduïa.

La fórmula següent permet calcular el radi de la Terra en un punt concret coneixent-ne la latitud (L).

$$R = (0.9983271 + 0.0016764 \cdot \cos(2 \cdot L) - 0.0000035 \cdot \cos(4 \cdot L)) \cdot 6378.14$$

El càlcul es farà per la ciutat d'Igualada. Igualada és troba a 41,581° de latitud.

Substituint a la fórmula anterior s'obté que el radi de la Terra a la localització on s'han realitzat les mesures és de 6368,765 m.

Un cop es coneix el radi de la Terra en un punt, es pot calcular el valor de la gravetat utilitzant la fórmula $g = \frac{M \cdot G}{R^2}$. M, la massa de la terra, és 5,972·10²⁴ kg. G, la constant de la gravitació universal, té un valor de 6,674·10⁻¹¹ N·m²/kg².

Al realitzar el càlcul s'obté un valor de la gravetat de 9,826 m/s²; aquest valor sembla molt més alt del que hauria de ser, comparant-lo amb valors de la gravetat en diferents punts de la Península Ibèrica que s'han trobat en diferents pàgines web.

La Corunya	9,805 m/s ²
Pamplona	9,803 m/s ²
Barcelona	9,803 m/s ²
València	9,801 m/s ²
Granada	9,797 m/s ²
Madrid	9,802 m/s ²

Al observar que el valor obtingut no semblava correcte es va realitzar el mateix càlcul per la ciutat de Barcelona que es troba a 41,383° de latitud. El radi obtingut en aquest cas, va ser de 6368,837 m. El valor de la gravetat de la ciutat de Barcelona va donar molt superior al esperat; 9,826 m/s².

Degut a que totes les fórmules i constants semblaven correctes; es va continuar la recerca intentant trobar una resposta a aquesta incoherència en els valors obtinguts. Es va acabar trobant una pàgina web la qual, introduint-hi els valors de la latitud, la longitud i l'altitud d'un punt, calculava una sèrie de magnituds relacionades amb la gravetat i les definia.

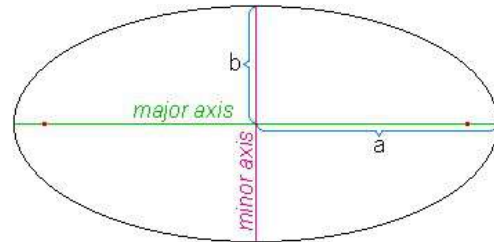
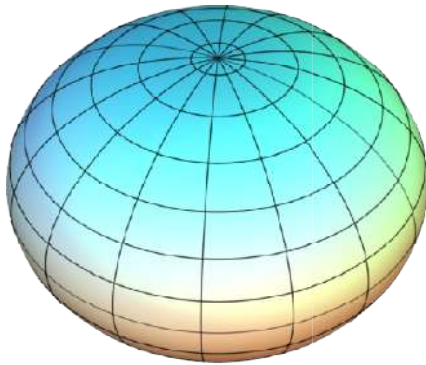
Al introduir les dades en aquesta web una de les magnituds tenia un resultat semblant al que s'ha calculat mentre que una altra tenia com a resultat un valor semblant al que s'esperava obtenir; gràcies a les explicacions que la mateixa pàgina ofería es va entendre la diferència entre els dos valors.

El valor que s'ha calculat, 9,826 m/s², és l'acceleració gravitacional "pura" (en el punt on s'ha calculat). Aquesta variable només té en compte la massa de la Terra i el radi calculat.

El que es volia calcular, en canvi, és l'acceleració gravitacional efectiva; que té en compte l'acceleració centrífuga del cos (en aquest cas la Terra). La mateixa web mostra la fórmula que permet calcular la gravetat efectiva a partir de la latitud d'un punt de la Terra.

La fórmula és la utilitzada per calcular l'acceleració efectiva en un el·lipsoide de revolució (un esferoide). La Terra, degut a la seva rotació, no és una esfera perfecte sinó que és un esferoide; per aquesta raó s'utilitza aquesta fórmula a l'hora de calcular la seva l'acceleració efectiva.

Concretament, la Terra és un esferoide oblat; té l'eix polar més curt que l'equatorial.



La fórmula que mostra la web i que permet calcular l'acceleració gravitacional efectiva a la Terra és la següent:

$$g_o = \frac{a \cdot g_e \cdot \cos(L)^2 + b \cdot g_p \cdot \sin(L)^2}{\sqrt{a^2 \cdot \cos(L)^2 + b^2 \cdot \sin(L)^2}}$$

g_o	gravetat efectiva en un punt de latitud L	
L	latitud	41,581°
a	semieix major de la Terra (radi a l'Equador)	6378,137 m
b	semieix menor de la Terra (radi als pols)	6356,752 m
g_e	acceleració de la gravetat efectiva a l'Equador	9,780 m/s ²
g_p	acceleració de la gravetat efectiva als pols	9,832 m/s ²

Substituint totes les dades a la fórmula s'obté una gravetat efectiva de 9,803 m/s².

Tot i que aquest valor de la gravetat és força precís; per calcular-lo només s'ha tingut en compte la latitud. L'altura sobre el nivell del mar també influeix en la gravetat; un increment de l'altura suposa una disminució de l'acceleració de la gravetat. El canvi que suposa la variació de l'altura no és molt significatiu però s'ha de tenir en compte.

El valor calculat és el de la gravetat en un punt que es troba a la mateixa latitud que Igualada però al nivell del mar; Igualada, en canvi, es troba a 313 m sobre el nivell del mar.

Per calcular el valor de l'acceleració de la gravetat tenint en compte els metres sobre el nivell del mar s'utilitza la fórmula següent; obtinguda de la mateixa pàgina web:

$$g_h = g_o \cdot \left[1 - \frac{2}{a} \cdot (1 + f + m - 2 \cdot f \cdot \sin(L)^2) \cdot h + \frac{3}{a^2} \cdot h^2 \right]$$

g_h	gravetat efectiva en un punt de latitud L i altura h	
g_o	gravetat efectiva en un punt de latitud L	9,803 m/s ²
L	latitud	41,581° // 0,726 rad
h	altura sobre el nivell del mar	313 m
a	semieix major de la Terra (radi a l'Equador)	6378,137 m
b	semieix menor de la Terra (radi als pols)	6356,752 m
f	$f = \frac{a - b}{a}$	3,353 · 10 ⁻³ m
ω	velocitat angular de la rotació de la Terra	7,292 · 10 ⁻⁵ rad/s
$G \cdot M$	G = constant de la gravitació universal M = massa de la Terra	3,986 · 10 ¹⁴ m ³ /s ²
m	$m = \frac{\omega^2 \cdot a^2 \cdot b}{G \cdot M}$	3,449 · 10 ⁻¹² rad ²

Un cop disposem de totes les dades es poden substituir a la fórmula anterior i calcular el valor exacte de la gravetat a Igualada.

La pàgina web en la qual s'ha trobat la informació i les fórmules està programada per calcular els resultats; ho fa utilitzant les fórmules que s'hi expliquen i a partir de les dades que s'hi introdueixen. Introduir-hi les dades que s'han utilitzat per fer els càlculs ha permès poder comparar els resultats obtinguts. En els dos casos, tant al calcular g_o com g_h , s'han obtingut els mateixos resultats que en la web; de manera que es poden descartar els possibles errors de càlcul.

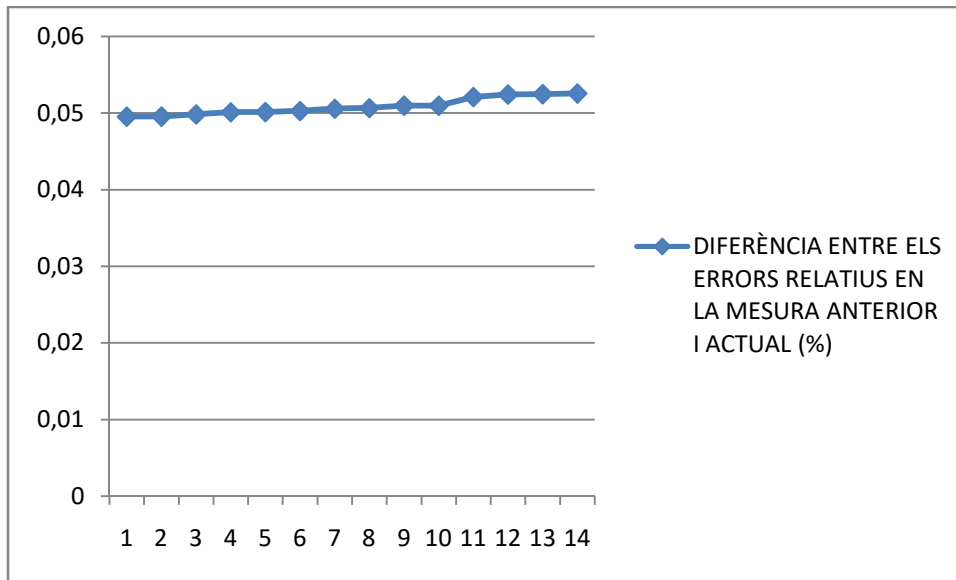
El valor g_o (9,803 m/s²) es va calcular correctament la primera vegada. g_h , en canvi, el primer cop que es va calcular va donar un resultat diferent al de la pàgina web. Poder comparar el resultat amb el calculat per la web, va permetre saber que probablement s'havia produït un error de càlcul. Es va detectar l'error comés i el nou resultat obtingut coincidia amb el de la web de manera que, després de comprovar-lo una última vegada; es va donar com a correcte. El valor que s'ha obtingut per g_h és 9,802 m/s².

Els resultats de g_o i g_h no s'han donat com a correctes només pel fet que coincidissin amb els de la web, sinó que també s'ha tingut en compte que són coherents respecte valors trobats en altres pàgines web. Per exemple, s'ha trobat que el valor de la gravetat a Barcelona és de 9,803 m/s². Tenint en compte que Barcelona es troba en una latitud de 41,3825°, molt semblant a la d'Igualada, i que la seva altura sobre el nivell del mar mitjana és de 12 m; és coherent que la gravetat efectiva de la ciutat sigui molt semblant a g_o a Igualada (la gravetat en un punt de latitud 41,581° i 0 m sobre el nivell del mar). Una altra ciutat amb una latitud semblant (de 40,419°), és Madrid; s'observa com la seva gravetat efectiva és inferior a la de Barcelona, és de 9,802 m/s², la

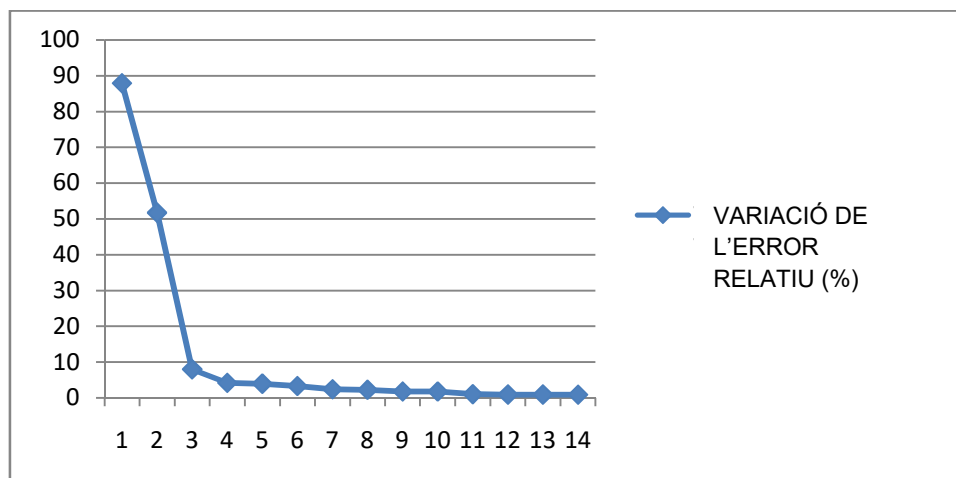
raó principal d'aquesta variació és que Madrid es troba a 667 m.s.n.m; tot i que la lleugera diferència de les latituds també influeix en la variació.

Un cop calculat el valor exacte de la gravetat a Igualada és pot analitzar la manera com fa variar els resultats de la pràctica.

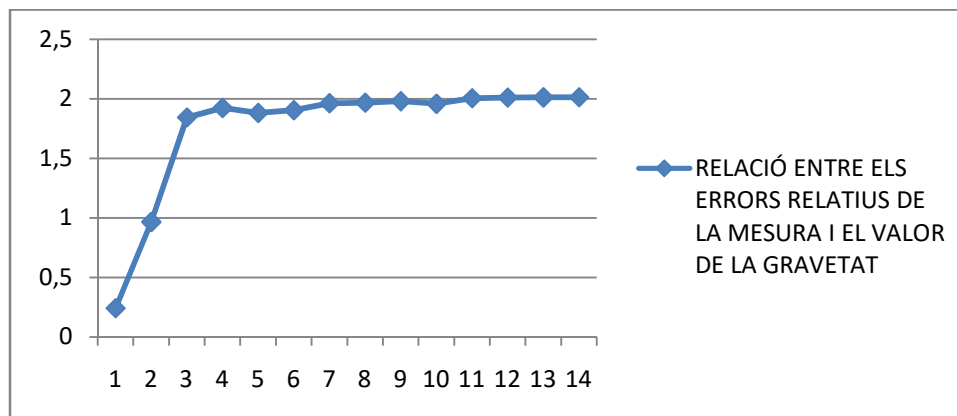
Al realitzar els càlculs prenent com a valor teòric g_h , s'observa com els errors relatius han disminuït en totes les mesures d'una manera constant. Tots els errors relatius han disminuït de l'ordre de 0,05%.



Aquest increment de -0,05 és poc significant en les mesures que tenen més error relatiu; tot i això, és perceptible i fa variar els resultats. En la mesura amb l'error relatiu més gran; la variació del valor teòric només ha suposat una disminució del 0,856% respecte el valor inicial. En canvi, en les mesures que tenien un error relatiu més baix, la variació en el valor experimental ha estat molt significativa; concretament, en la mesura amb l'error relatiu més baix la disminució ha estat d'un 87,878% respecte el valor inicial. En el gràfic següent s'observa la variació en tant per cent.



També s'observa que la relació entre l'error relatiu de la mesura del període utilitzada i el del valor calculat s'ha mantingut per tots els valors excepte per dos. La relació hauria de ser que l'error relatiu en la mesura es duplica; però en dos valor és molt inferior. Els dos valors en els quals la relació no s'ha mantingut són els dos que tenen un error relatiu més baix; a més a més, la relació és inferior a 1 aspecte que indica que en comptes d'augmentar, l'error relatiu ha disminuït. En cap altre cas la relació és inferior a 1; les següents més baixes són de 1,8 que és proper a 2 i per tant es consideren dins del marge acceptable.



Per explicar la incoherència dels dos valors més baixos s'ha de tenir en compte el què s'ha comentat anteriorment referent a l'error en la longitud del fil. Com més baix és l'error relatiu en la mesura del període més significatiu hi és l'error en la longitud del fil (ja que, tot i no haver estat mesurat i considerar-se negligible, és molt probable que es mantingui més o menys constant en totes les mesures). Per tant, la raó per la qual no es manté la relació és que no s'ha tingut en compte que una part de l'error en la mesura està causada per l'error en la longitud del fil i que aquesta part no es duplica ja que la magnitud no s'eleva al quadrat. En la resta de valors la relació és molt propera a 2 ja que l'error causat per la longitud del pèndol hi és menys significatiu.

Respecte a l'observació feta anteriorment sobre com s'ha mantingut constant la diferència entre els primers errors relatius i els calculats a partir del nou valor teòric; es poden extreure les conclusions següents. Que la variació es mantingués constant ha provocat que en els valors més alts tingués molta menys importància que en els més baixos (com es mostra en la segona gràfica de la pàgina anterior). Si ens centrem en el valor més baix; l'error en la mesura ha disminuït un 87,878%. En el segon valor més baix l'error s'ha reduït un 51,692%. En el tercer la disminució ja només és de 7,945% i va disminuint de manera que en el quart valor és de 4,139% i en l'últim és només de 0,856%. La diferència més significativa és entre el segon i el tercer valor i provoca que en els dos primers la variació sigui molt més significativa que en la resta.

Canviant el valor teòric per un de més precís, s'ha aconseguit que l'error de la mesura amb menys error sigui només del 0,007%.

Aquest tant per cent d'error és negligible, de manera que es pot concloure que el mètode utilitzat és adequat i permet obtenir valors molt exactes. Concretament, l'exactitud d'aquest depèn únicament de la correcta realització de les mesures.

Probablement es devia deixar d'utilitzar els pèndols simples per mesurar la gravetat ja que els nous gravímetres permetien fer les mesures amb més exactitud i, potser, d'una manera més senzilla.

D'altra banda, s'ha pensat que coneixent l'error en la mesura del període (que es pot calcular fàcilment a partir d'un valor teòric o de la mitjana de diverses mesures) i sabent que aquest es

duplica al elevar la magnitud al quadrat; és podria arribar a calcular l'error relatiu en la mesura experimental de la gravetat i determinar quin seria el valor sense aquest tant per cent d'error provocat per la mesura; a part de l'error en la mesura de període, també s'hi podria tenir en compte el de la mesura de la longitud del pèndol.

S'ha seguit aquest procediment per dues mesures la amb menys error i la amb més error, tenint únicament en compte l'error en la mesura del període (no s'ha tingut en compte el de la longitud del seu fil). El què s'ha fet ha estat duplicar l'error en la mesura i calcular quin seria el valor de la gravetat sense aquest tant per cent d'error.

S'ha calculat l'error relatiu dels valors experimentals obtinguts mitjançant aquest mètode respecte el valor teòric mitjà de la gravetat ($9,807 \text{ m/s}^2$) i respecte el valor teòric de la gravetat a Igualada ($9,802 \text{ m/s}^2$).

En el primer cas, els resultats han estat els esperats; els dos errors s'han reduït molt significativament. El valor amb més error ha passat de tenir-ne un 6,136 % a només un 0,086%. L'error relatiu en el valor amb menys error no s'ha reduït tant com en el segon (ha disminuït un 0,0563%) però, degut a que l'error inicial ja era molt baix, s'obté un error negligible de $7,969 \cdot 10^{-6} \%$. També s'ha comparat la mitjana dels dos valors experimentals inicials amb la dels dos valors un cop s'ha tingut en compte l'error causat en les mesures. La mitjana d'error ha passat de ser del 3,096% a ser del 0,043%. Pel valor teòric de $9,807 \text{ m/s}^2$, es pot afirmar que tenir en compte l'error causat en les mesures permet obtenir resultats molt més exactes.

En el cas en el qual es pren $9,802 \text{ m/s}^2$ com a valor teòric, els resultats han estat diferents. Tot i que la mitjana d'error entre els dos valors s'ha reduït molt significativament passant de 3,045% a 0,043% i que l'error en els segon valor ha disminuït de 6,084% a 0,037%; en el primer valor l'error ha augmentat. Aquest error, que inicialment era de 0,007% augmenta fins a 0,049%. Aquest resultat és coherent tenint en compte que ja s'ha vist que en aquesta situació no es produeix la duplicació de l'error de la mesura; al duplicar-lo s'està augmentant l'error.

Tot i que en un dels valors l'error ha augmentat; s'ha vist que tenir en compte l'error que provoquen les mesures permet obtenir uns resultats molt més precisos (la mitjana dels error s'ha reduït en els dos casos). Que en els valors amb un error inicial molt més alt l'error relatiu s'hagi reduït molt més que en els que inicialment ja tenien un error baix; porta a concloure que, seguir aquest mètode en el qual es té en compte l'error provocat per les mesures, permet obtenir uns resultats més constants amb uns errors relatius baixos. De manera que s'evita obtenir un únic resultat molt precís i la resta de resultats amb errors relatius molt més alts; ja que tots els valors s'igualen reduint la mitjana d'error.

Com a conclusió final de la pràctica; és possible calcular el valor de la gravetat utilitzant pèndols simples i es poden arribar a obtenir valors molt precisos. Els resultats que s'obtenen són el valor de la gravetat en el punt concret de la Terra on s'han realitzat les mesures i no el valor mitjà de la gravetat a la Terra.

Si es vol calcular el valor de la gravetat en un punt concret de la Terra utilitzant un pèndol simple (suposant que el valor no s'ha calculat seguint cap altre mètode i que, per tant, no existeix un valor teòric), el procediment més adequat, segons el que s'ha vist en aquesta pràctica, és el següent:

- 1.- Realitzar les mesures del període d'un pèndol (que no superi una amplitud de 20°). És important que l'error en la longitud del pèndol sigui mínim, negligible; per tal de no cometre tant error a l'hora de duplicar-lo posteriorment

- 2.- Calcular l'error relatiu de les mesures a partir d'un valor teòric o de la mitjana dels valors obtinguts; cal tenir en compte l'error comés en la longitud del pèndol o considerar-lo negligible.
- 3.- Duplicar l'error relatiu obtingut.
- 4.- Utilitzant la fórmula simplificada de la periodicitat d'un pèndol i les dades del període i la longitud del fil, fer el càlcul del valor de la gravetat.
- 5.- En cadascun dels valors obtinguts restar-hi el resultat de multiplicar-lo per l'error relatiu (en tant per 1) degut a la mesura utilitzada. D'aquesta manera s'elimina tot l'error derivat de la mesura del període utilitzada.
- 6.- Fer la mitjana dels valors obtinguts

3.- EL PÈNDOL DE SORRA: LES CORBES DE LISSAJOUS

3.1.- CONSTRUCCIÓ

S'ha decidit construir un pèndol de sorra ja que permetrà estudiar la trajectòria d'un pèndol simple; a més a més, s'utilitzarà el mateix sistema per representar les corbes de Lissajous.

En totes les pràctiques realitzades anteriorment les mesures s'han realitzat en un pèndol simple que descrivia una trajectòria rectilínia; és a dir, que el moviment només es desenvolupava en un eix de coordenades. La representació que s'hauria obtingut utilitzant un pèndol de sorra hauria estat una línia recta, sense pendent respecte l'eix de d'abscisses. Utilitzant el pèndol de sorra es podran representar trajectòries més complexes.

Hi ha diverses maneres de construir un pèndol de sorra; es pot utilitzar un embut, una ampolla o qualsevol altre recipient que tingui un forat a la base (per permetre el flux de la sorra).

D'altra banda, tot i que es coneix com a pèndol de sorra, no és necessari que s'utilitzi sorra ja que hi ha altres substàncies semblants, per exemple la sal o el sucre, que poden funcionar igualment. També es pot utilitzar pintura o qualsevol altre substància d'una consistència semblant; substàncies més líquides no servien ja que no mantindrien la forma i no es podria observar la trajectòria.

En un principi es va decidir utilitzar una ampolla de plàstic d'un litre per construir-lo. Per triar l'ampolla les característiques que es van tenir en compte són:

- La seva superfície havia de ser el màxim de llisa per evitar que la sorra quedés acumulada en algun punt concret i per permetre que el flux fos constant.
- El plàstic havia de ser el màxim de rígid per que es pogués foradar i penjar aguantant el pes de la sorra.

El primer que es va fer va ser tallar l'ampolla aproximadament per la meitat utilitzant un cúter.

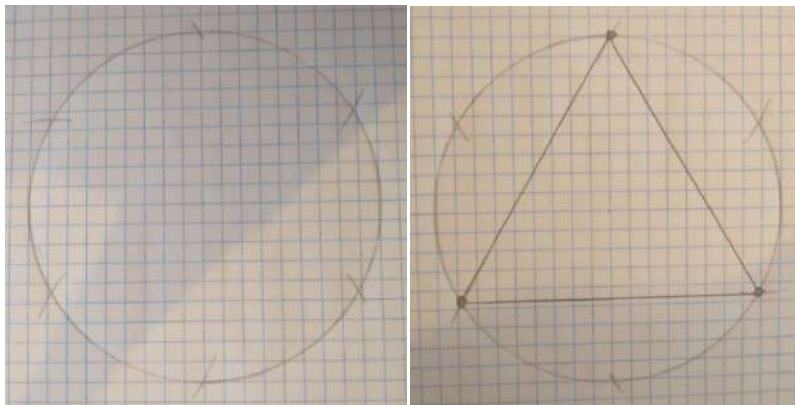


Després es va foradar el tap de l'ampolla.

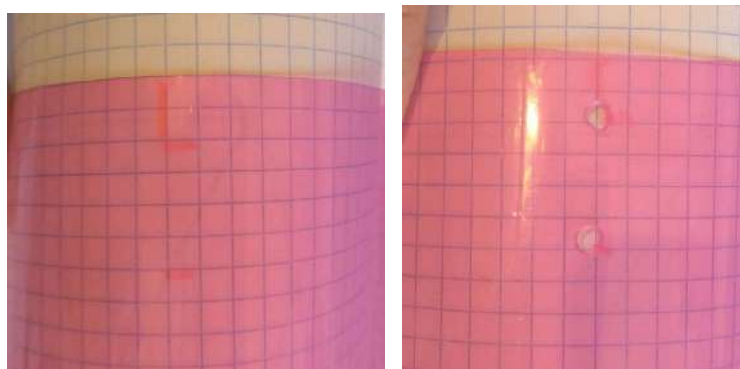


A continuació es van fer tres forats al costat oposat que permeten penjar l'ampolla. Realment només caldria fer dos forats, però fer-ne tres augmenta l'estabilitat de l'ampolla evitant que es balancegi. Els tres forats estan distribuïts en la circumferència separats al màxim un de l'altre, de manera que si s'unissin els tres punts es formaria un triangle equilàter; d'aquesta manera s'aconsegueix el màxim d'estabilitat.

Per determinar la posició dels tres forats es va dibuixar un triangle equilàter inscrit en una circumferència del mateix radi que l'ampolla (4,5 cm). Per fer-ho es dibuixa la circumferència i s'hi marquen sis punts equidistants. Tres d'aquests punts (no consecutius) són els que determinen un triangle equilàter.

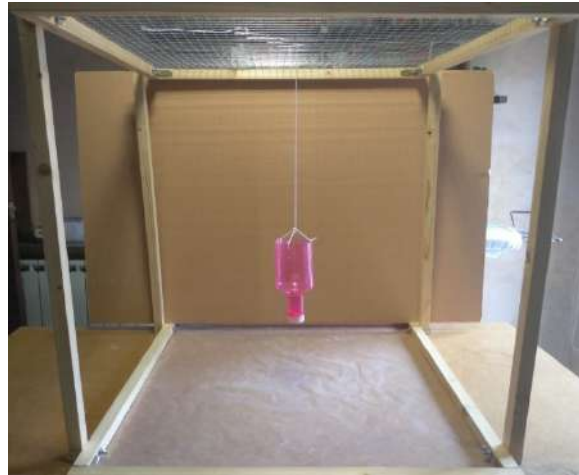


Es marca la posició de cadascun dels tres forats en l'ampolla i es decideix fer-ne tres a 1 cm del marge i tres, en les mateixes posicions, però a 3 cm. Això permetrà ajustar l'altura de l'ampolla en cas que sigui necessari.



A continuació es passen els cordills pels forats, de manera que queden tres cordills de 10 cm que surten d'un punt central i arriben un a cada forat de l'ampolla. D'aquest punt central surt un quart cordill que és el que va lligat a la reixa de l'estructura.

Per últim es retalla un quadrat de plàstic de 74 x 74 cm per posar a la base de l'estructura. Tenir aquest plàstic a la base permetrà que la sorra utilitzada per marcar la trajectòria del pèndol pugui ser recollida amb facilitat.



A continuació es planteja quina substància utilitzar. Les opcions són sorra de platja, sucre, sal i pols de marbre.



Sorra de platja



Sucre



Sal



Pols de marbre

Es va començar fent proves amb sal i sucre. Es van obtenir millors resultats utilitzant sucre, ja que la sal quedava compactada i no fluïa pel forat. Pot ser que depengui del tipus de sal utilitzat i que un altre tipus funcioni correctament. De totes maneres, els resultats obtinguts amb el sucre tampoc van ser òptims ja que degut a la mida dels grans aquests quedaven bastant dispersat en el plàstic, la trajectòria no quedava perfectament definida.

Per augmentar la definició es va pensar utilitzar una substància formada per grans més petits; per tant es van provar tant la pols de marbre com sorra de la platja. Abans de ser utilitzades les dues substàncies es van rentar utilitzant aigua, tot i que amb intencions diferents. La pols de marbre es va rentar amb l'objectiu d'eliminar les partícules més petites, ja que aquestes es dispersaven en l'aire cada cop que es manipulava la substància. Al afegir l'aigua, les partícules més pesades van precipitar mentre que les més lleugeres van quedar suspeses en el líquid. Mitjançant el mètode de decantació es van poder eliminar aquestes partícules més petites. La sorra es va rentar seguint el mateix mètode que la pols de marbre amb un objectiu diferent; en aquest cas el que es pretenia era eliminar impureses (fulles, algues, trossos de fusta, plàstics...). La major part d'aquestes impureses que contenia la sorra i que haguessin dificultat o impedit el correcte funcionament del pèndol es van poder separar de la sorra amb facilitat gràcies a la sedimentació d'aquesta.

La pols de marbre va donar uns resultats semblants a la sal, per tant no es podia utilitzar. Posteriorment es va provar la sorra que, tot i fluir més que la pols de marbre no tenia un flux constant i també es dispersava com els sucre.

Es va plantejar si variant la mida del forat del tap de l'ampolla millorarien els resultats. En principi, si es reduís la seva mida augmentaria la precisió del dibuix. Es va provar utilitzant les quatre substàncies però que el forat fos més petit dificultava encara més el flux de la substància a través seu, impedit que el traç fos constant. A continuació es va provar d'augmentar la mida del forat; els resultats que es van obtenir van ser que el flux era més constant en totes les substàncies però el traç continuava sent imprecís.

Observant que al inclinar lleugerament l'ampolla s'obtenia un flux més constant es va plantejar si la forma d'aquesta influïa en el flux. Aquest fet s'explicaria degut a que la forma cilíndrica de l'ampolla no condueix la substància fins el forat sinó que facilita que la substància es compacti.

Es va plantejar utilitzar un embut. El primer que es va fer va ser, sense utilitzar el pèndol, comprovar si utilitzant un embut de paper s'obtindria un flux constant. Els millors resultats es van obtenir fent un paperina i tallant-li la punta (fent-ho així es pot controlar l'amplada del forat amb facilitat). Un dels inconvenients que va suposar utilitzar una paperina era que, al enrotllar el paper, es formen diverses capes. Aquestes capes dificultaven el flux de la substància per dues raons: la substància s'acumulava entre elles sense arribar al forat, i la mateixa acumulació dificultava el pas de la substància a través de l'orifici. De totes maneres, aquests inconvenients es podien solucionar fàcilment; per exemple, enganxant les diverses capes entre elles.



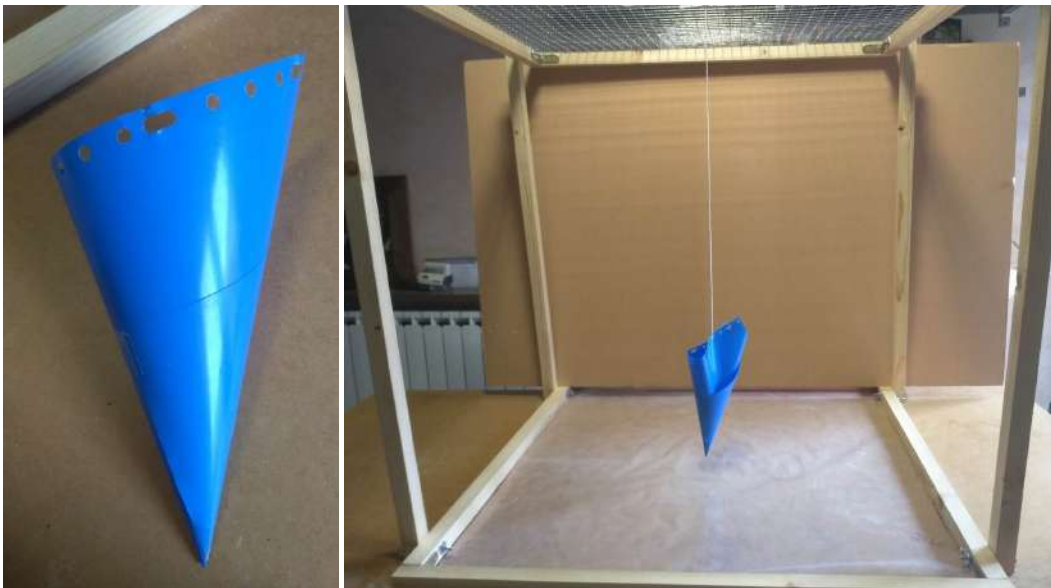
L'altre inconvenient és que un full de paper convencional no té una superfície completament llisa, de manera que entre aquesta i la substància hi ha fregament. Tot i que el fregament no és molt important, sí que influeix en el flux. Es va pensar que si es mantenia la forma d'embut (que ja s'havia comprovat que era més

adequada que la de l'ampolla utilitzada inicialment) però es canviava el material, es podrien obtenir millors resultats.

Es va pensar en quins materials podrien ser útils a l'hora de millorar el flux, disminuint el fregament. El primer que es va pensar va ser en canviar el tipus de paper; per exemple, utilitzar un paper setinat. Una segona idea va ser utilitzar directament un plàstic, ja que les superfícies de la majoria de plàstics acostumen a ser molt llises. Es podria utilitzar una bossa de plàstic tallant-li una de les puntes o simplement, utilitzar un plàstic una mica més rígid que el d'una bossa per fer un embut.

Es va decidir provar aquesta última opció i es va fer un embut utilitzant un separador de plàstic. Es va creure que aquest plàstic seria el més adequat per diverses raons:

- Rigidesa: és suficientment rígid perquè se'n pugui fer un embut i en mantingui la forma. Si fos menys rígid (per exemple com una bossa de plàstic) no mantindria la forma d'embut i això podria dificultar el flux de la substància. D'altra banda, si fos més rígid, no se'n podria fer un embut.
- Rugositat: la seva superfície és molt llisa de manera que el fregament amb la substància és mínim.
- Mida: al tenir la mida d'un A4, l'embut resultant no és massa petit. Si fos massa gran es podria retallar però no és el cas.
- Forats: en un principi es pretenia retallar la zona dels forats però han resultat ser útils per penjar l'embut formant el pèndol.



El primer que es va fer va ser provar si l'embut funcionava sense penjar-lo; els resultats van ser satisfactoris per les tres substàncies provades: sucre, pols de marbre i sorra. No es va fer la prova amb la sal degut als resultats obtinguts anteriorment.

A continuació es va penjar el pèndol i es van trobar dificultats amb el sucre; tot i que amb les altres dues substàncies el flux va ser constant.

D'aquesta manera es van solucionar els inconvenients trobats al utilitzar l'ampolla de plàstic i l'embut de paper.

A continuació es va afrontar la definició del traç. Per obtenir un traç el màxim de precís es va decidir apropar el pèndol a la superfície de la taula de manera que la distància que la substància hauria de recórrer fos menys i, per tant, no es pogués dispersar tant ni arribés amb tanta velocitat a la superfície. En comparació, el traç obtingut al utilitzar sorra era lleugerament més definit que l'obtingut amb la pols de marbre.



En les imatges anteriors s'observa que, independentment de la substància, el traç és més definit sobre un full de paper que sobre un plàstic. Això és degut al fregament.

Per l'embut es necessita que el fregament sigui mínim per tal que la substància flueixi sense dificultat; per aquesta raó és preferible utilitzar un plàstic. En canvi, a la superfície on ha de quedar la trajectòria dibuixada, hi ha d'haver un cert fregament que impedeixi que la substància es dispersi. Aquesta és la raó per la qual, en la superfície, s'obtenen millors resultats utilitzant un paper.

Es va decidir utilitzar com a superfície una cartolina blanca (per tal que contrastés amb el color de la sorra); si es decidís fer alguna representació amb la pols de marbre s'utilitzaria una cartolina negra. De totes maneres, la cartolina sempre es situa sobre el plàstic ja que aquest facilita molt la recollida de la substància utilitzada.

A continuació es va plantejar si modificant la mida del forat de l'embut la precisió milloraria. La hipòtesi era que al reduir el diàmetre del forat s'aconseguiria més precisió.

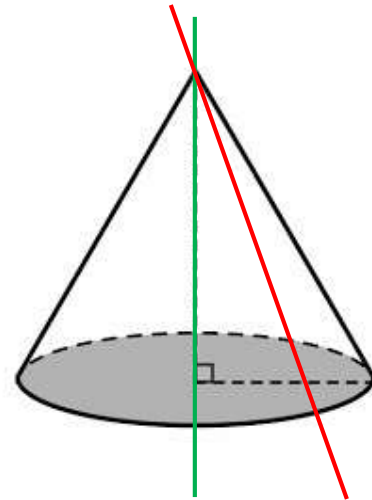
Es van començar a fer proves. Els primers resultats que es van obtenir van ser que un forat d'un diàmetre inferior o igual a 1 mm impedia el pas de la substància (tant de la sorra com de la pols de marbre). Aquests resultats són semblants als obtinguts anteriorment al reduir la mida del forat de l'ampolla, i per això són coherents.

A continuació es va decidir anar augmentant el diàmetre del forat per observar com variava la definició del traç.

Al començar a fer les primeres proves es va trobar una dificultat que impedia obtenir uns resultats correctes. Depenent de la forma i orientació de l'embut el forat no quedava sempre alineat amb el fil. És necessari que quedin alineats ja que la sorra ha de seguir la trajectòria exacta que seguiria l'extrem del fil en cas que no hi hagués l'embut. Si no estan alineats la trajectòria que queda representada és diferent a la que segueix el suposat pèndol del qual s'està representant la trajectòria.

La solució que es va trobar va solucionar un altre problema també causat per la forma de l'embut. Aquest segon problema té certa relació amb el primer però també hi influeix la uniformitat de l'embut. Si l'embut utilitzat no és simètric respecte l'eix marcat pel fil, al girar sobre ell mateix pot fer variar la trajectòria del pèndol. L'embut gira al voltant del seu eix central degut a la inèrcia del moviment i, si no és simètric respecte aquest eix, el gir no és uniforme i afecta la trajectòria del pèndol.

Aquesta necessitat de simetria respecte l'eix central s'explica a partir de la figura d'un con. Si s'agafa un con com el de la figura i és fa girar al voltant del seu eix central (color verd) aquest no altera la seva forma, es manté uniforme. En canvi, si el mateix cos es fes girar al voltant de l'eix vermell (un eix no central) el gir no seria uniforme degut a que el con no és simètric respecte a aquest eix. Una altra manera de veure-ho seria que si el con gira al voltant del seu eix central no ens adonem que gira mentre que si ho fa al voltant d'un altre eix el moviment s'observa amb facilitat.











Un gir uniforme, en el qual la forma de l'embut es mantingués, no afectaria a la trajectòria del pèndol. Per tant, la solució és aconseguir que l'embut sigui un con i que el fil quedi al centre d'aquest.

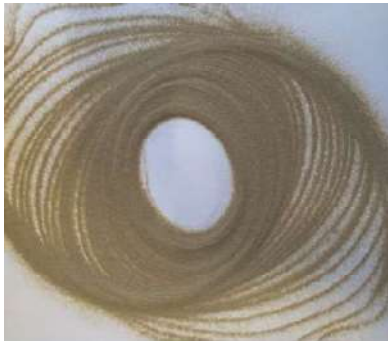







Es va decidir que abans de fer un embut cònic procurant que el fil hi quedés al centre, es farien una sèrie de representacions per tal d'analitzar com varia el traç de la sorra depenent del diàmetre del forat de l'embut. Per tant, en aquestes representacions, no és important la trajectòria que segueixi el pèndol ni la que queda representada, sinó la definició d'aquesta. Que el forat i el fil estiguin alineats no afectarà els resultats.

A més a més, s'havia observat que per variar la mida del forat s'havia de variar la forma de l'embut. Això provoca que per fer proves amb diferents embuts i alhora mantenir una alineació del fil amb el forat de l'embut, s'hauria de modificar contínuament la posició del fil. Es va decidir que seria millor determinar primer el diàmetre més adequat i, posteriorment, construir l'embut de manera que el seu forat i el fil quedessin alineats.

Es van realitzar diverses representacions utilitzant tant sorra com pols de marbre amb la intenció de comparar-ne els resultats i poder determinar el diàmetre més adequat.

El diàmetre més petit és de 2 mm ja que un diàmetre inferior impedeix o dificulta el flux constant de la substància.

DIÀMETRE DEL FORAT (aprox.)		
2 mm	SORRA	
		
	POLS DE MARBRE	
		
3 mm	SORRA	
		
	POLS DE MARBRE	
		

4 mm	SORRA	
		
	POLS DE MARBRE	
		
5 mm	SORRA	
		
	POLS DE MARBRE	
		

Com s'ha dit prèviament, diàmetres inferiors a 2 mm impedeixen el flux constant de la substància. Tot i que el diàmetre de 2 mm va permetre el flux de la sorra, no va permetre el de la pols de marbre. Això és degut a que els grans d'aquesta, tot i ser més petits que els del sucre i la sal, són més grans que els de la sorra. Realment en la pols de marbre els grans són bastant irregulars de manera que n'hi ha que tenen una mida inferior als de la sorra, de totes maneres el fet que hi hagi de més grans impedeix el flux a través del forat de 2 mm de diàmetre.

S'observa que el traç de la sorra a través del forat de 2 mm és molt fi però alhora és poc precís. En els traços més exteriors la sorra queda tant dispersa que gairebé no es poden percebre. La dispersió va disminuint però es manté de manera que tots els traços queden poc definits individualment. Aquesta poca definició es deu a la poca quantitat de sorra que cau en cada punt. Els pocs grans que cauen es dispersen i no marquen el traç. Com més velocitat té el pèndol menys temps passa a cada punt i menys quantitat de sorra hi cau. Això explica la disminució de la definició quan la velocitat del pèndol és més gran; en els traços més exteriors.

Al comparar les representacions obtingudes amb un diàmetre de 2 mm respecte un de 3, s'observa que en aquest últim cada traç està molt més ben definit; és a dir, que no hi ha tanta sorra dispersa. Això es deu a que cau més sorra en cada punt, el cabal és més gran. De totes maneres, s'observa que els traços exteriors continuen sent poc perceptibles i que la sorra hi queda molt dispersa.

A partir de 3 mm es va poder obtenir un flux constant amb la pols de marbre. El traç que s'obté és menys precís que l'obtingut amb la sorra; és comparable a l'obtingut amb la sorra amb el forat de 2 mm.

Amb el forat de 4 mm les línies exteriors queden completament definides (amb la sorra), però l'augment de cabal que permet que això passi també provoca que es perdi definició en les línies interiors. Quan el pèndol passa diverses vagades per un mateix punt la sorra es comença a acumular ràpidament i es perd la definició de les línies.

El traç de la pols de marbre és més prim i comparable al de la sorra per un forat de 3 mm. De totes maneres, comparant-lo amb el de la sorra de 3 mm, hi ha més dispersió dels gran degut a la seva mida superior.

En el forat de 5 mm el primer que es va observar va ser que la sorra s'acabava ràpidament degut a l'augment de cabal.

Tant en la sorra com en la pols de marbre el traç és tant gruixut que de seguida s'acumula i no permet percebre algunes de les línies.

En la pols de marbre el traç és lleugerament més prim ja que una gran part dels grans queden dispersats.

Després d'analitzar els resultats obtinguts s'ha arribat a diverses conclusions. La primera és que un forat més gran de 5 mm permetria obtenir unes línies exteriors més definides però que la sorra s'acumularia ràpidament sense permetre diferenciar les línies que estiguessin més juntes entre elles.

També s'ha determinat que els dos millors diàmetres per obtenir un traç precís són 3 i 4 mm (al utilitzar la sorra). El de 3 mm és més adequat per obtenir detall però no permet percebre les línies més exteriors. En canvi, el de 4 permet percebre millor les línies exteriors però es perd la definició de les línies que estan més juntes entre ells.



En el cas de la pols de marbre amb un forat de 4 mm de diàmetre és com s'obtenen els millors resultats. Amb 3 i 5 mm els traços no estan tant definits; ja sigui perquè cau poca quantitat o perquè en cau massa.

Per tant, depenent de la substància i de la figura que es vulgui representar s'utilitzarà una mida de forat diferent. Per la pols de marbre sempre serà de 4 mm i per la sorra també s'utilitzarà el de 4 mm excepte quan es vulgui obtenir més precisió i detall.

Un cop determinades les característiques que ha de tenir l'embut: cal que sigui cònic, que els seu forat sigui de 4 mm i que la direcció del fil correspongui amb la de l'eix central del con; es comença la seva construcció.

Per aconseguir que l'embut tingui forma de con i un forat de 4 mm de diàmetre es farà un embut amb el forat corresponent i es retallarà la part sobrant per aconseguir la forma de con. A continuació s'adjunten les fotografies del procediment que es va seguir fins a obtenir l'embut amb les característiques necessàries.

Es van fer dos forats per tal de poder lligar el fil a l'embut. La idea inicial d'utilitzar els forats ja presents en el separador no es va poder dur a terme ja que la majoria d'aquest van quedar retallats; la resta no estaven en la posició correcta per poder penjar l'embut. Els forats es van realitzar amb una foradadora de paper.

	
1.- Embut inicial amb un forat de 4 mm de diàmetre.	2.- Línia circular al voltant de l'embut que marca la base del con. Es retallarà l'embut seguint la línia marcada.



3.- Embut retallat amb forma de con.



4.- Marca del punt on s'ha de realitzar el forat.



5.- Realització del forat utilitzant una foradadora.



6.- Embut final que es penjarà amb el fil.

Un cop obtingut l'embut cònic es va penjar del fil per formar el pèndol. Per penjar-lo es va passar el fil pels dos forats i es va lligar en un dels dos.

3.- EL PÈNDOL DE SORRA: CORBES DE LISSAJOUS

3.2.- REPRESENTACIÓ DE LA TRAJECTORIA D'UN PÈNDOL SIMPLE

Tot i que el pèndol de sorra s'ha construït amb la intenció principal de representar les corbes de Lissajous també es pot utilitzar per representar la trajectòria d'un pèndol simple.

S'ha decidit fer una sèrie de representacions de la trajectòria d'un pèndol simple que realitzi diversos moviments no només lineals.

HIPÒTESI

Si el pèndol es manté oscil·lant en un mateix pla de l'espai la trajectòria representada serà una recta. Aquesta recta pot ser horitzontal, vertical o tenir una certa inclinació.

Si les oscil·lacions del pèndol són circulars la trajectòria representada per la sorra no serà un cercle sinó un espiral. Això és degut als efectes de la força de fregament que actua sobre el pèndol. La força de fregament que hi actua probablement és bastant significativa degut a la presència de l'embut.

Els efectes de la força de fregament en la representació d'una recta provocaran que aquesta vagi disminuint la seva longitud.

Si en comptes de ser circular, la trajectòria és el·líptica la representació serà un espiral però mantenint la forma de l'el·lipse inicial.

PROCEDIMENT I RESULTATS

Per fer les representacions de la trajectòria d'un pèndol simple s'ha utilitzat l'embut construït anteriorment. Es creu que l'embut amb un forat de 4 mm és el més adequat per diverses raons. La primera és que permetrà obtenir bons resultats tant amb la sorra com amb la pols de marbre en cas que es volguessin utilitzar les dues substàncies. També s'ha tingut en compte que en aquestes representacions el detall no és el més important sinó que es pretén observar la trajectòria globalment i observar-hi els efectes de la fricció.

Al principi es van trobar algunes dificultats a l'hora d'aconseguir una recta. No s'aconseguia obtenir una recta ja que el pèndol no es mantenia oscil·lant en un sol pla sinó que rotava lleugerament. L'angle de rotació era poc però afectava als resultats impeding que la representació fos la que teòricament s'havia d'obtenir.



En la imatge anterior s'observa la lleugera rotació que adquiria el pèndol i, tot i que no s'hi representa una recta si que s'hi pot observar clarament l'efecte del fregament; la longitud de la "recta" es va reduint considerablement en cada període.

Es van pensar en dues possible causes de la rotació que adquiria el pèndol; la rotació de l'embut sobre si mateix i el llançament del pèndol.

La primera teòricament no hauria d'afectar al moviment del pèndol ja que a l'embut se li ha donat especialment forma de con per evitar que això passi. Al arribar a aquesta conclusió es va descartar la rotació de l'embut com a causa. De totes maneres es va pensar que seria millor evitar-la per aconseguir un moviment més uniforme. Es va detectar que la causa d'aquesta rotació era que el fil es cargolava i que al deixar-lo pendular s'anava descargolant provocant el gir de l'embut. Per evitar-ho, abans de cada llançament és deixarà descargolar el fil.

La segona possible causa és el llançament manual del pèndol. Al llançar el pèndol amb les mans, per molt que s'intenti evitar, se li dona una certa inèrcia. Aquesta inèrcia gairebé mai serà en la direcció que hauria de seguir el pèndol i això provoca la rotació d'aquest. S'han detectat dues causes que fan variar la direcció del pèndol: la posició de la mà i la manera com es deixa anar el pèndol (l'ordre amb el qual els dits deixen d'estar en contacte amb l'embut i la rapidesa amb que ho fan). Coneixent aquestes causes es va intentar evitar-les, no hi ha cap manera de deixar anar el pèndol sense que es produeixin. L'única manera d'evitar-les seria no tocar el pèndol en el moment del llançament. Es va decidir posar a prova aquesta hipòtesi fent que en comptes d'aguantar-lo amb la mà s'aguantés recolzat en un objecte. Es va utilitzar un regle que en el moment desitjat es movia ràpidament; evitant que influís en la trajectòria del pèndol.

Portar a terme aquestes modificacions en els procés de llançament va permetre reduir significativament la rotació del pèndol; els resultats obtinguts van ser els següents.



En la primera imatge el pèndol només ha realitzat un període; això permet observar la recta. S'hi observen dos traços, cadascun correspon a un sentit. Que els dos traços no coincideixin amb exactitud indica que ja hi ha una certa rotació.

En la segona imatge el pèndol ha realitzat més períodes. Al comparar aquesta imatge amb la primera que es va obtenir, es pot veure com l'angle de rotació ha disminuït considerablement gràcies als canvis realitzats.

A continuació és van realitzar la representació de diverses rectes amb un cert pendent; el resultats van ser iguals que al representar rectes horitzontals/verticals.



En la segona imatge s'observa que una de les rectes està "doblada". Això es deu a que en el llançament es va dirigir el pèndol en una trajectòria lleugerament el·líptica en comptes de recta.

Un cop realitzades aquestes representacions es va pensar si hi hauria alguna manera d'evitar la rotació encara present del pèndol; és a dir, quina n'era la causa. Tot i que la poca rotació no semblava important es va pensar que era millor evitar-la ja que podria afectar els resultats d'altres representacions més complexes.

La causa que es va pensar és que en el llançament el regle no es retirava prou ràpidament de manera que influïa en la trajectòria. Aquesta possible causa es va descartar ja que el regle, al ser una sola peça, deixava d'estar en contacte amb l'embut en tots els punts gairebé en el mateix moment.

Al haver descartat l'única causa plantejada es va decidir observar el pèndol per tal d'intentar detectar la causa. El que es va observar va ser que el fil es mantenia recte, per tant que la causa de la rotació era l'embut. El primer que es va plantejar va ser que els forats que permeten penjar-lo del fil no havien estat realitzats correctament; però després es va entendre quin havia estat l'error comés.

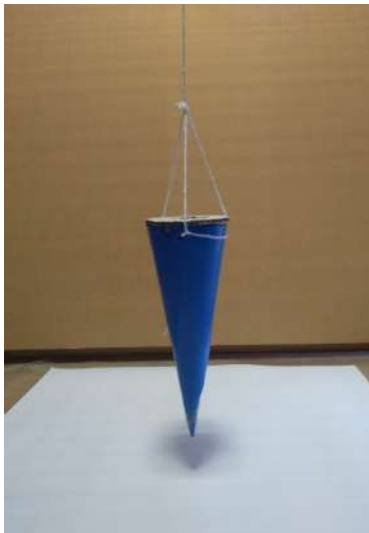
La hipòtesi anterior que deia que la rotació de l'embut sobre si mateix afectava a la rotació del pèndol era correcta i l'argument que es va utilitzar per descartar-la, falç. Es va dir que el gir de l'embut no podia afectar al moviment del pèndol ja que aquest s'havia construït amb forma cònica. El que no s'havia tingut en compte és que al penjar l'embut a través dels forats aquests s'unien al centre i la forma de con no es mantenia (perdia la seva uniformitat).

En la imatge s'observa com la part superior (la base del con) que hauria de ser circular passa a tenir una forma d'infinít. Aquesta forma, al no ser uniforme, afecta a la trajectòria del pèndol. La no-uniformitat de l'embut es pot evitar aconseguint que tingui forma de con (el que es pretenia des d'un principi). Es va pensar en augmentar el nombre de forats pels quals es passava el fil però, el material de l'embut sempre es deformarà si s'hi lliga el fil directament. L'únic que calia era mantenir la forma circular



de la base i una manera de fer-ho seria retallar un cercle de cartró del diàmetre corresponent que actués com a base del con donant-li estabilitat.

Es va intentar aquesta última idea. El diàmetre de la base del con fa 7,4 cm de manera que en una cartró es va retallar una circumferència de 3,7 cm de radi. També es va decidir modificar el mètode utilitzat per penjar l'embut, passant de dos forats a tres. D'aquesta manera s'aconsegueix més estabilitat. Per determinar la situació dels tres forats es va fer servir el mètode utilitzat per realitzar-los a l'ampolla de plàstic inicial. Per últim, es va fer una forat al cercle de cartró per tal de poder introduir la sorra a l'embut amb més facilitat.



A continuació es va decidir provar si les representacions que s'obtenien havent fet aquestes modificacions eren millors que les anteriors.



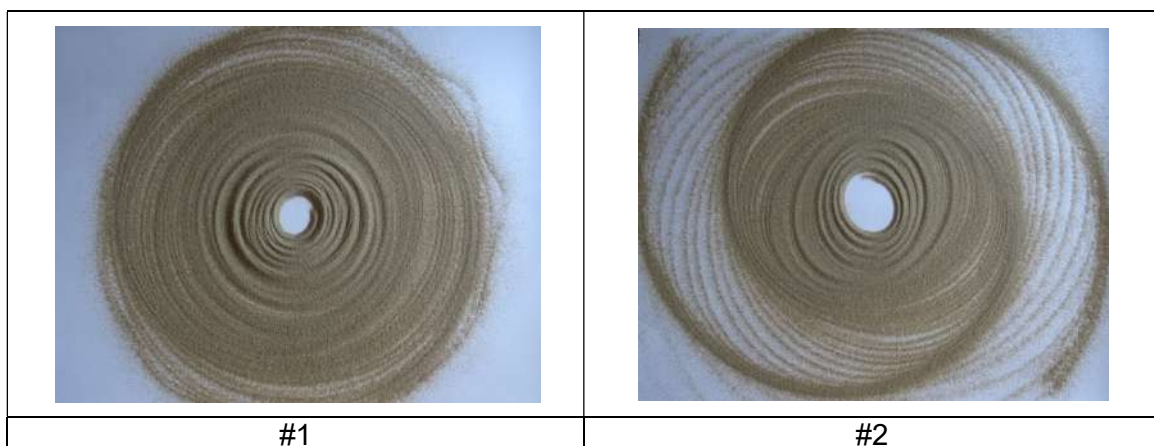
Aquestes són dues rectes que es van poder representar amb el pèndol de sorra. Tot i que el pèndol hi ha realitzat més d'un període no s'hi observa cap indicati de rotació.

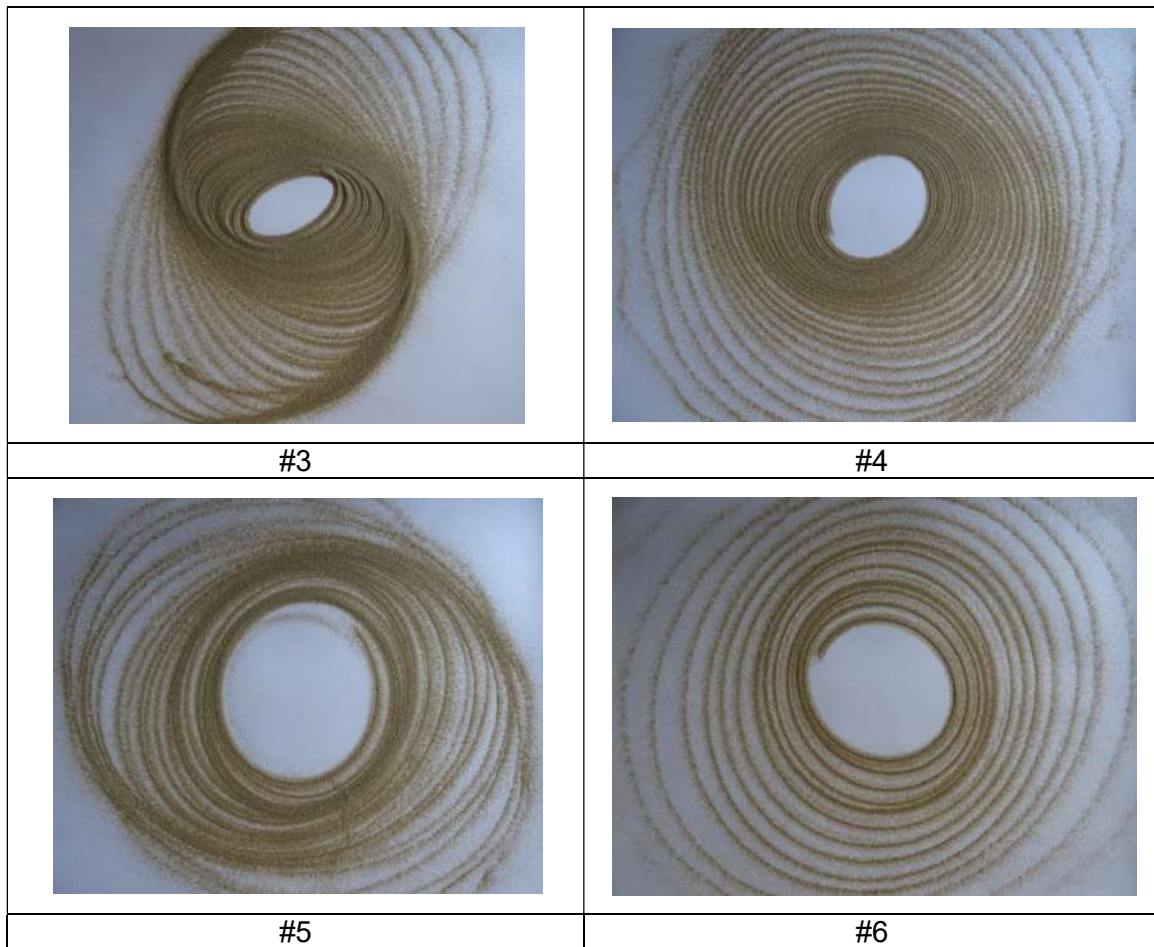
A continuació s'adjunta una imatge d'una representació anterior a les últimes modificacions junt a una realitzada posteriorment per facilitar la comparació.



En la primera imatge, la anterior a les modificacions, s'hi observa clarament la rotació que experimentava el pèndol. En comparació amb aquesta, les rectes de la segona imatge tenen molt menys angle de rotació, de manera que es pot afirmar que la no-uniformitat de l'embut era una causa d'aquesta certa rotació. Tot i així, les rectes de la segona imatge són lleugerament irregulars; sobretot la de l'esquerra. Aquestes irregularitats són causades per l'acumulació de la sorra que és molt difícil que es distribueixi proporcionalment. Les irregularitats es concentren al centre de la línia ja que degut a la disminució de la longitud en cada període, en aquesta zona s'hi acumula molta més sorra que als extrems. També s'observa que el traç de les línies de la segona imatge és més doble que el de la primera; això és degut a que l'embut estava situat a més alçada de la superfície de manera que la sorra quedava més dispersa.

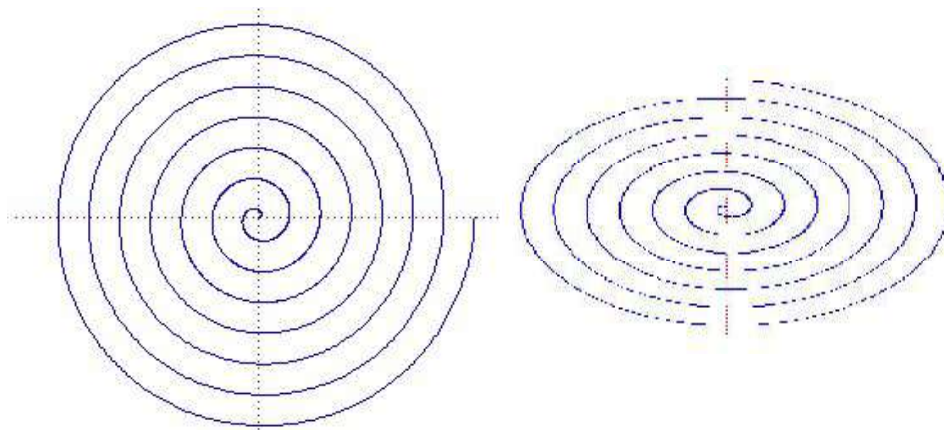
Un cop realitzades les representacions de rectes, és va passar a representar trajectòries circulars descrites per un pèndol simple. A continuació s'adjunten les imatges de sis representacions obtingudes.





Totes les representacions s'han realitzat utilitzant l'embut amb un forat de 4 mm de diàmetre; d'aquesta manera s'ha pogut obtenir un traç definit en els cercles més exteriors. S'ha observat que el forat d'aquest diàmetre provoca que es perdi precisió quan la separació entre els traços és poca. Els millors exemples d'aquesta pèrdua de precisió són la imatge 1, 2 i 3. En les altres tres imatges la sorra no ha quedat tant acumulada de manera que tots els traços queden més definits.

La hipòtesi inicial era que en moviments circulars la trajectòria que quedaria dibuixada seria un espiral que seguiria la forma inicial. És a dir que si la forma inicial era el·líptica el pèndol aniria dibuixant un espiral en el seu interior mantenint la forma exterior (com s'observa en les imatges següents).



Tot i que la hipòtesi respecte les trajectòries que descriuen un cercle s'ha complert; la referent a les el·lipses no.

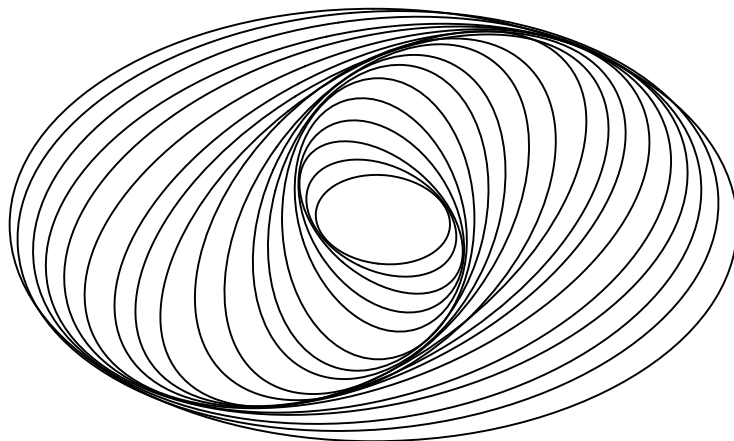
Un aspecte que s'ha observat i que cal tenir en compte és que com més circular és la trajectòria més es compleix la hipòtesi. En la imatge 1, que és la més circular, s'observa clarament com el pèndol ha seguit una trajectòria espiral mantenint la forma inicial (un cercle). Després de la 1, les dues imatges que tenen una trajectòria més circular són la 4 i la 6. En les dues s'observa com la trajectòria forma un espiral a l'interior del cercle/el·lipse inicial mantenint-ne, aproximadament, la forma.

Les tres imatges que encara no s'han comentat; la 2, la 3 i la 5; mostren unes trajectòries molt diferent a les que s'havien predit. En elles hi ha una figura inicial que es manté i va reduint la seva mida a causa de la fricció (aquesta part correspon amb la hipòtesis ja que es va formant un espiral seguint la forma inicial) però el traç no es manté en l'orientació inicial sinó que adquireix una rotació.

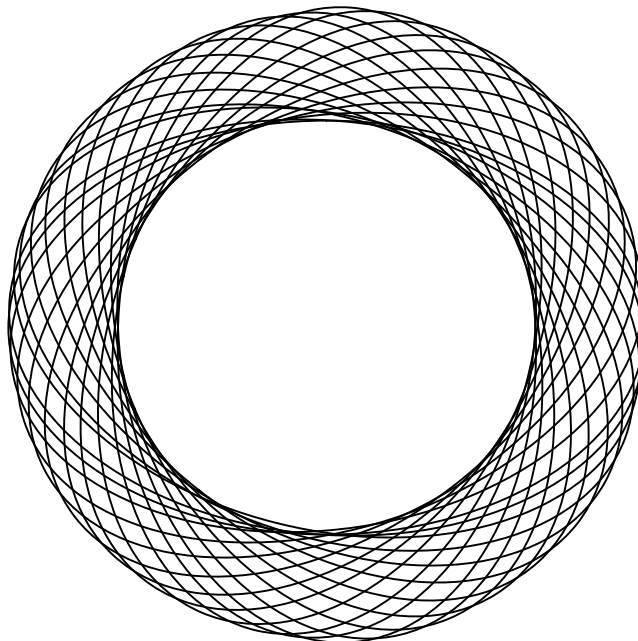
A continuació em vaig adonar que el que passava no era que en unes imatges hi hagués una rotació i en les altres no sinó que en unes es percebia i en les altres no. Si la forma exterior és un cercle la rotació de la figura no es percep ja que un cercle és igual independentment de la seva orientació; en canvi, en el cas d'una el·lipse la rotació es fa evident. Per aquesta raó; s'havia comentat que com més circular era la trajectòria més es mantenia la forma inicial. Realment la forma inicial sempre es manté però en varia l'orientació.

També es va observar que, curiosament, el traç mai es creuava. És a dir que a causa de la fricció la mida de l'el·lipse s'anava reduint i s'impedia que, tot i la rotació que experimentava, superés l'àrea definida pel traç anterior. Per intentar entendre millor aquestes idees s'han realitzat unes representacions esquemàtiques de les trajectòries que s'han obtingut i de les que s'haguessin obtingut si no hi hagués fregament. En aquest últim cas la mida de l'el·lipse inicial no s'hauria reduït de manera que s'acabaria formant un cercle.

Per fer la representació es va dibuixar una el·lipse, es va copiar, se'n va reduir lleugerament la mida, es va situar centrada respecte la primera el·lipse i es va rotar fins que les línies de les dues el·lipses van coincidir en dos punts oposats. A continuació es va copiar la segona el·lipse (la rotada) i es va repetir el procediment fins a aconseguir una el·lipse girada 180° respecte la inicial.



A continuació es va fer la representació del que passaria si no hi hagués fregament. Es va repetir el procediment sense reduir la mida de l'el·lipse.



En aquest cas s'observa com el perímetre de la figura final no el determina la primera el·lipse; les el·lipses es creuen entre elles.

Tot i que ara s'ha entès el moviment que realitza el pèndol encara no se sap perquè es produeix aquest gir de la figura inicial.

Analitzant els vídeos gravats mentre es feien les representacions es va pensar que la causa del gir de la figura inicial podria ser la inèrcia que adquireix el pèndol.

D'altra banda, es va decidir fer una gravació del mateix pèndol realitzant una trajectòria el·líptica però amb una massa fixa per descartar la variació de la massa com a possible causa de la rotació de la figura.

Per fer aquesta prova es va utilitzar el pèndol amb l'embut i no un amb una esfera per evitar variacions en la força de fregament i per aconseguir treballar amb una massa semblant. Com que per fer les representacions no s'havia mesurat la massa del pèndol i la quantitat de sorra que s'hi introduïa era aproximada (variava en cada representació) es va decidir que es posaria a l'embut una quantitat de sorra semblant a les que s'havien posat per fer les representacions; i per aconseguir que la massa no variés simplement es va tapar el forat de l'embut.

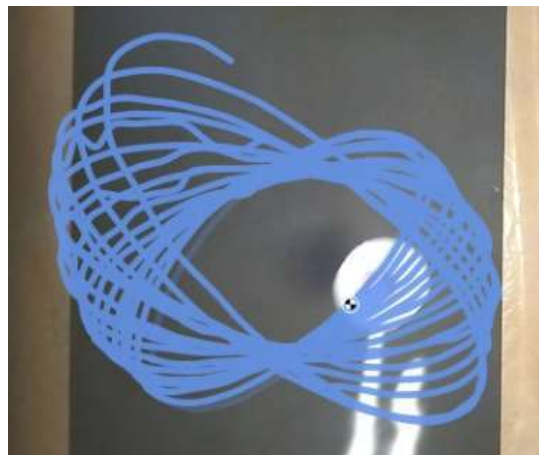
Es va fer la gravació i es va poder comprovar que el comportament era el mateix independentment de la variació de la massa. Aquesta observació és lògica tenint en compte que anteriorment s'ha demostrat que la massa no influeix en el període d'un pèndol; de totes maneres calia comprovar-ho perquè podria ser que sí que influís en la trajectòria que segueix.

La rotació no quedava representada però es percebia mirant el vídeo. De totes maneres, es va voler intentar aconseguir una imatge de la trajectòria per poder-la adjuntar a continuació. Es va trobar una aplicació que permetia seguir la trajectòria d'un punt en un vídeo. L'aplicació es diu *Kinovea*. Es va intentar que el programa seguís la trajectòria del pèndol utilitzant els vídeos

gravats. El problema era que en el pèndol no hi havia cap element contrastat de la resta que fos fàcil de seguir i el programa de seguida perdia el punt de manera que no quedava representada la trajectòria correcta.

Es va decidir repetir el vídeo incorporant un element de contrast al centre del pèndol. Això va permetre al programa seguir la trajectòria del punt amb més precisió. La imatge de continuació és del tros de trajectòria que va quedar més ben definit.

L'avantatge de la representació que s'obté utilitzant l'aplicació respecte la que s'obté utilitzant la sorra és que es manté la precisió de les línies ja que no hi ha una acumulació de sorra que interfereixi en els resultats. D'altra banda, els avantatges de la representació amb sorra són que s'eviten traços irregulars com els de la part superior esquerra de la imatge i que el traç mai queda interromput (en la imatge el traç no continua perquè el programa va deixar de detectar el punt del centre del pèndol).



En la imatge es veu que el pèndol adquireix la mateixa rotació per una massa variable que per una fixa. L'única diferència és que les dimensions de l'el·lipse es redueixen més lentament de manera que hi ha creuaments de línies.

El fet que en la representació amb massa constant s'observés una reducció de les dimensions més lenta que quan la massa és variable porta a concloure el següent.

En el pèndol amb massa variable no és només el fregament el que provoca una disminució de les dimensions sinó que la variació de la massa també hi afecta (com menys massa menys energia mecànica tindrà el cos).

Observar que amb una massa fixa també es produeix la rotació de la figura va permetre descartar que aquesta depengués de la variació de la massa o que aquesta hi afectés.

Es va determinar que el moment d'inèrcia del cos era molt probablement la causa ja que és present en el cos independentment de si la massa és fixa o variable.

La fórmula que permet calcular el moment d'inèrcia varia en funció del cos. Tot i no poder deduir-la, es va trobar la fórmula corresponent a un con l'eix de rotació del qual es situa en el seu centre de massa (la figura aproximada de l'embut del pèndol). La fórmula és la següent: $I = \frac{3}{10} m \cdot r^2$.

Independentment del quocient de la massa; observem que el moment d'inèrcia és el producte de la massa pel radi al quadrat.

Això ens indica que depèn de la massa i del radi però que la importància d'aquest és molt superior.

Es va plantejar la següent hipòtesi sobre la possible causa de la rotació en la trajectòria el·líptica d'un pèndol simple.

Com que el radi de l'el·lipse va disminuint com a conseqüència dels efectes del fregament (probablement la variació de la massa també hi afecta) el moment d'inèrcia que el pèndol experimenta també es redueix. Aquesta variació de la inèrcia fa variar els valors tant del moment angular com del parell motor; i el fet que no es conservi el moment angular pot ser la causa de la rotació.

De totes maneres aquesta hipòtesi no s'ha pogut demostrar (possiblement no es certa); es va plantejar degut a que es va creure que podia existir una relació entre el moment d'inèrcia i la conservació del moment angular amb el moviment el·líptic d'un pèndol simple.

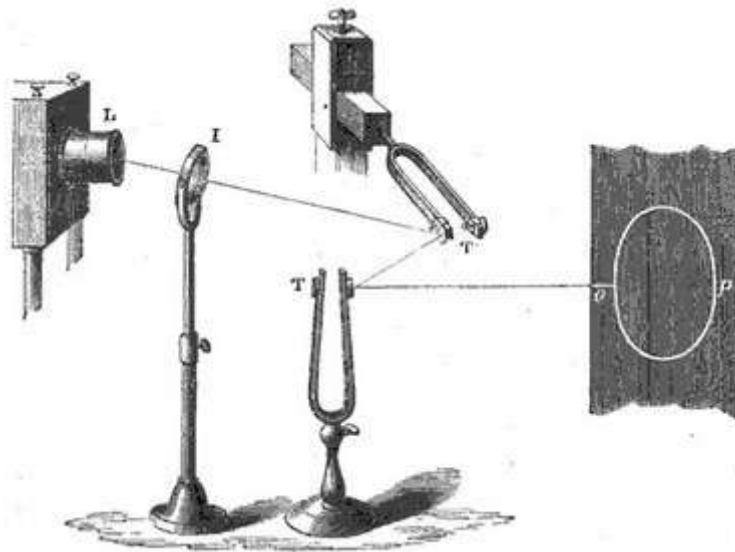
3.- EL PÈNDOL DE SORRA: LES CORBES DE LISSAJOUS

3.3.- TEORIA DE LES CORBES DE LISSAJOUS

3.3.1.- DESCOBRIMENT I ESTUDI

Les corbes de Lissajous van ser investigades per primera vegada el 1815 per Nathaniel Bowditch; per aquesta raó també són conegudes com corbes de Bowditch. El seu nom més habitual el deuen a Jules Antoine Lissajous qui les va estudiar independentment i amb molt més detall entre el 1857 i el 1858.

Per intentar representar-les Lissajous va realitzar un experiment que consistia en reflectir un raig de llum en un mirall enganxat en un diapasó i a continuació en un altre mirall (situat perpendicularment al primer) en contacte amb una altre diapasó de diferent freqüència. El raig creava una figura la forma de la qual depenia de la freqüència i amplitud de les vibracions dels diapasons.



Aquesta és la raó per la qual les corbes de Lissajous es van utilitzar durant molts anys (abans que s'inventessin els mesuradors digitals) per mesurar la freqüència de sons i senyals de ràdio. Una senyal de freqüència coneguda s'aplicava en un eix de l'oscil·loscopi (l'instrument utilitzat) i en l'altre eix (normalment el vertical) s'aplicava la freqüència que es volia mesurar. L'oscil·loscopi produïa una corba de Lissajous que permetia determinar la relació existent entre les dues freqüències.

Posteriorment, Lissajous va construir un pèndol de sorra per representar les corbes i estudiar-les amb més facilitat.

3.3.2.- EQUACIONS

Les corbes de Lissajous són la representació gràfica del sistema d'equacions format per les dues equacions paramètriques següents:

$$x = A \sin(at + \delta)$$

$$y = B \sin(bt)$$

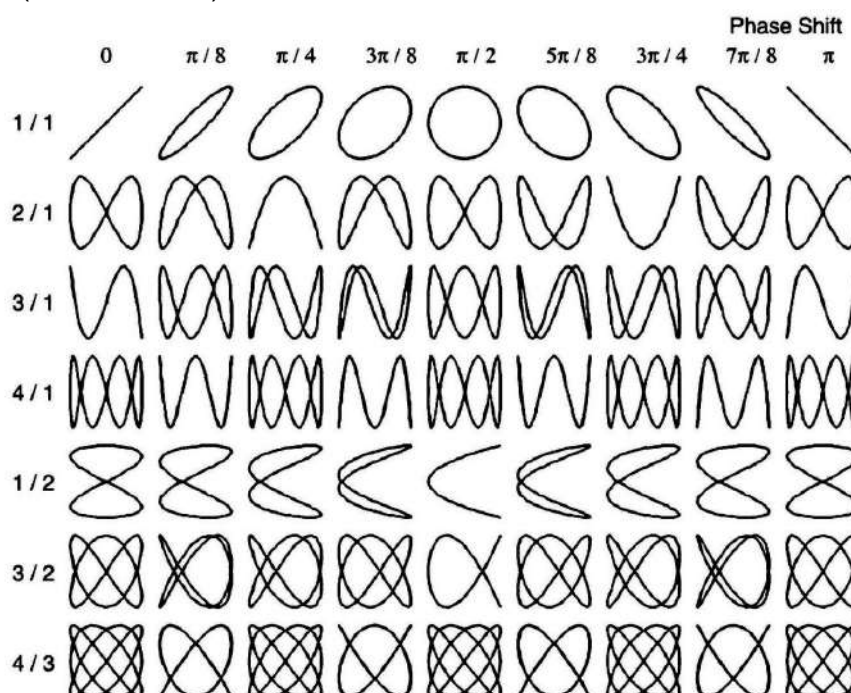
Aquestes dues equacions descriuen un moviment harmònic complex; es a dir, un moviment lineal format per la superposició de dos o més moviments harmònics simples. Tot i que els moviments harmònics simples sempre són periòdics un moviment harmònic complex només ho serà quan les freqüències dels moviments harmònics simples que el formen siguin múltiples racionals. Es a dir que la corba només es tancarà si a/b és un nombre racional.

3.3.3.- FIGURES

En les taules de continuació s'adjunten els valors que ha de prendre cada paràmetre en funció de la figura que es vulgui representar. La taula inclou les figures més bàsiques que es poden considerar corbes de Lissajous. Són figures molt simples i conegudes per tothom.

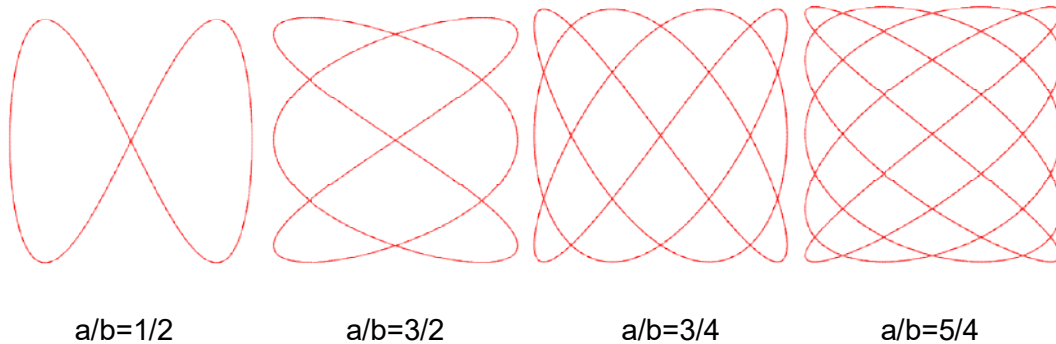
RELACIÓ ENTRE LES FREQUÈNCIES (a/b)	DIFERÈNCIA DE FASE (δ en rad)	FIGURA
1	0	Línea (bisectriu del primer i el tercer quadrants)
1	π	Línea (bisectriu del segon i el quart quadrants)
1	$\pi/2$	El·lipse
1	$\pi/2$ i $A=B$	Cercle
2	$\pi/4$	Paràbola negativa
2	$3\pi/4$	Paràbola positiva

Altres relacions i diferències de fase produeixen corbes més complexes que, com ja s'ha dit, només es tanquen si a/b és un nombre racional. En la imatge següent es poden observar la majoria de corbes que es poden obtenir en funció de la relació entre freqüències (eix vertical) i la diferència de fase (eix horitzontal).



Visualment, per exemple en la representació de les corbes utilitzant un pèndol de sorra, s'observa que:

- la relació a/b determina el nombre de "lòbuls" en la figura: a els horitzontals i b els verticals.



- A/B determina la relació amplada / alçada; es a dir que no influeix en la figura que es dibuixa sinó en les dimensions aquesta. Per exemple: $A/B=2$ produeix una figura que és el doble d'ampla que d'alta. Per aquesta raó quan en una el·lipse $A=B$ s'obté un cercle.

- δ determina l'angle de rotació aparent de la figura; l'angle de rotació que tindria la figura si fos tridimensional.

3.- EL PÈNDOL DE SORRA: LES CORBES DE LISSAJOUS

3.4.- REPRESENTACIONS DE LES CORBES DE LISSAJOUS

Després de realitzar les representacions de trajectòries d'un pèndol simple s'ha decidit començar a estudiar les corbes de Lissajous.

Per aconseguir un moviment harmònic complex (el que representen les corbes de Lissajous) cal superposar dos moviments harmònics simples.

Tot i que el concepte de superposar dos moviments harmònics simples sembla molt complex, es produeix en un pèndol simple quan realitza un moviment circular o un moviment rectilini amb un cert pendent respecte els eixos de coordenades.

Tots els moviments d'un pèndol simple representats utilitzant el pèndol de sorra són, excepte els coincidents amb els eixos, moviments harmònics complexos.

Aquests moviments harmònics complexos es produeixen degut a que el moviment oscil·latori d'un pèndol simple en un eix és un moviment harmònic simple. En els moviments circulars i els rectilinis amb pendent es combina el moviment oscil·latori en l'eix de les abscisses amb el de les ordenades; es combinen dos moviments harmònics simples.

Tenint en compte això es pot afirmar que al representar el moviment d'un pèndol simple (excepte quan es representaven recte sense pendent) ja s'estaven representant "corbes de Lissajous"; el moviment descrit pel pèndol simple en aquestes casos era un moviment harmònic complex.

Les diferents corbes de Lissajous s'aconsegueixen variant la relació entre les freqüències dels moviments harmònics simples. Per fer-ho s'ha d'aconseguir que la freqüència en un eix sigui diferent de la de l'altre. La freqüència d'un pèndol ve determinada per la longitud del seu fil.

En un pèndol simple la relació entre els dues freqüències és 1 (són iguals); la llargada del pèndol no varia segons l'eix en el qual oscil·la.

Per aconseguir que la llargada del pèndol sigui diferent en un eix que en l'altre cal utilitzar dos fils. Un s'ha de lligar a la reixa superior per els dos extrems; l'altre va lligat en el primer com es veu en la imatge.

D'aquesta manera s'aconsegueix que la freqüència del pèndol variï segons si oscil·la en l'eix vertical o l'horitzontal. En un eix la llargada del fil és des de l'embut fins a la reixa mentre que en l'altre és des de l'embut fins al punt on passa d'un fil a dos. Com que el període és proporcional a la llargada del fil i la freqüència és la inversa del període; en l'eix on el fil és la distància total la freqüència serà inferior que en l'altre eix (on la llargada del fil només és una part de la llargada total).



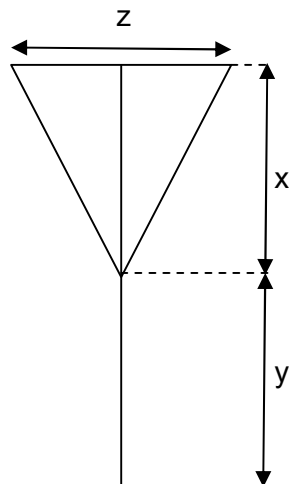
A continuació es va establir la llargada que havia de tenir cadascun dels fils per tal d'obtenir diverses corbes de Lissajous.

La distància entre la reixa de la qual el penja l'embut i la superfície on queda dibuixada la trajectòria és de 80 cm. Per tant, el pèndol ha de tenir una llargada inferior a 80 cm; de totes maneres, no pot ser molt més inferior ja que com més gran és la distància entre el forat de l'embut i la superfície, més es dispersa la sorra i menys definides queden les línies.

La distància que hi hauria d'haver entre el forat de l'embut i la superfície haurien de ser 1 o 2 cm; de manera que la llargada del pèndol no hauria de ser molt inferior als 78 cm.

Cal tenir en compte que la distància y no és només el fil vertical sinó que també inclou l'embut i la zona on s'ajunten els tres fils que surten de l'embut. S'ha mesurat que la distància des del forat de l'embut fins al punt on s'ajunten els tres fils és de 32 cm. Per tant per mesurar la llargada del fil vertical caldrà restar 32 cm al valor de y que s'hagi calculat.

Calcular la longitud del segon fil serà més complex ja que x és l'altura. La longitud del fil dependrà de la distància z . S'ha establert $z = 28$ cm com a mesura estàndard; però es pot canviar en qualsevol moment.



En un full de càlcul s'han realitzat els càlculs de la llargada de cadascun dels dos fils per les relacions (entre les dues freqüències) següents: $1/2$ / $3/4$ / $2/3$ / $3/4$ i $4/5$. Cal tenir en compte que la figura que s'obtindrà serà la mateixa per totes les fraccions equivalents i que en una relació inversa s'obté la mateixa figura però amb una orientació diferent (és indiferent si la relació és $2/3$ que si és $3/2$). Com que aquesta última afirmació es basa en la informació que s'ha trobat per Internet, posteriorment es comprovarà experimentalment si és correcta. El que es pretén comprovar no és si les fraccions equivalents produeixen la mateixa figura (és evident que ho faran ja que la relació es manté) sinó la segona part de l'afirmació; la que es refereix a les fraccions inverses.

Per calcular la longitud dels fils primer cal calcular els valors de x i y en funció de les freqüències a i b . a serà la freqüència en l'eix y (el més llarg) i b en l'eix x .

Com que la freqüència és la inversa del període:

$$a = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x+y}{g}}}$$

$$b = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{y}{g}}}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x+y}{g}} = \frac{1}{a}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{y}{g}} = \frac{1}{b}$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{g}} = \frac{1}{a \cdot 2 \cdot \pi}$$

$$\sqrt{\frac{y}{g}} = \frac{1}{b \cdot 2 \cdot \pi}$$

$$x+y = \frac{g}{a^2 \cdot 4 \cdot \pi^2}$$

$$y = \frac{g}{b^2 \cdot 4 \cdot \pi^2}$$

$$x = \frac{g}{a^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} - y$$

Aquestes van ser les fórmules que es van introduir al full de càlcul per tal de calcular x i y .

Al principi no es sabia com calcular els valors de a i b per tal que mantinguessin la relació establerta. Com que els dos valors eren desconeguts era molt difícil trobar els valors correcte. Finalment es va pensar que realment els dos valors no tenen perquè ser desconeguts.

Com que a és la freqüència en l'eix y ; l'eix y és el de la llargada més gran ($x+y$), i la freqüència es pot determinar a partir de la llargada: coneixent el valor de $x+y$ és pot determinar el valor de a . Es va determinar que la llargada total del pèndol seria de 79 cm i es va calcular la freqüència d'un pèndol d'aquesta llargada; 0,056 Hz.

Per tant el valor de a quedava definit com una constant en tots els pèndols. Coneixent a , calcular b només suposava tenir en compte la relació entre els dos valors.

Les relacions de 1 / 2 / 3 i 4 no van suposar cap problema i es va obtenir els valors de la x i la y simplement aplicant les fórmules.

En les relacions fraccionàries s'obtenia una y molt superior a 79 cm i, per tant, una x negativa. Es va intentar buscar la causa d'aquest resultats incoherent. Es va pensar que una de les operacions devia ser incorrecta; es van revisar i no era així (a més a més les operacions eren les mateixes que s'havien utilitzat en les relacions enteres).

Al no trobar cap causa es va plantejar què provocava que la longitud y tingués un valor tant alt. Llavors es va entendre que l'error era en el càlcul de la freqüència b . Tot i que el càlcul en sí era correcte, era impossible. Degut a que la relació entre els freqüències era fraccionària, el valor que s'obtenia de b era inferior al de a . La freqüència és inversament proporcional a la llargada del fil de manera que una freqüència més petita requereix que el fil sigui més llarg. Com que la llargada $x+y$

és la màxima i correspon a la de l'eix y , la freqüència a ha de ser la més petita. Obtenir un valor de b inferior al de a suposaria que la llargada y hauria de ser més gran que $x+y$; és un resultat impossible.

Per tant, l'explicació dels errors és que per una banda s'estava dient que la relació b/a era un enter positiu (que b era més gran o igual que a) mentre que per l'altra banda s'estava dient que la mateixa relació era un nombre decimal inferior a 1 (es a dir, que a era més gran que b). Els resultats eren impossibles ja que s'havia preestablert que en l'eix de la freqüència a la llargada era la màxima.

Hi ha dues maneres de solucionar aquest problema. La primera (la que s'ha dut a terme en el full de càlcul) és mantenir la fracció però que en comptes de ser b/a sigui a/b ; així s'aconsegueix que a continuï sent inferior. En l'altra manera es manté la relació com a b/a però es passa a considerar que b és la freqüència en l'eix més llarg, en el pèndol això suposaria un gir de 90° .

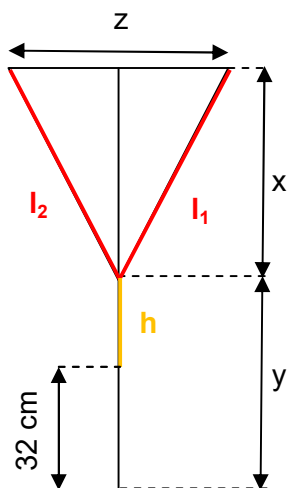
En els dos casos el resultat és el mateix, són mètodes diferents. L'únic que es fa és fer els canvis necessaris perquè el què digui la fracció sigui coherent amb la realitat.

Gràcies a aquestes observacions es va poder argumentar l'afirmació feta anteriorment en la qual es considerava que una relació inversa era equivalent ja que la figura que traçava era la mateixa figura però en una orientació diferent. Realment l'afirmació era correcta, però estava mal plantejada.

Semblava que digués que (treballant amb un mateix pèndol en la mateixa posició) s'obtidria per $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ i $\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$ la mateixa corba però amb una orientació diferent. Això no és cert ja que en una igualtat es defineix que l'eix y (en el qual la freqüència és a) el pèndol té la llargada total i que b és la freqüència en l'eix x , en el qual el pèndol fa una llargada inclosa en la del a . Com que la primera igualtat diu que el valor de a és inferior al de b ; l'afirmació sobre les inverses no és possible ja que la posició del pèndol queda determinada en la primera igualtat i, sense variar-la, la segona igualtat (que diu que el valor de a és superior al de b) és impossible ja que la llargada en l'eix y haurà de continuar sent la màxima.

L'única manera d'obtenir resultats en una relació inversa és intercanviar els eixos; és a dir, passar a dir que b és la freqüència en l'eix y . Aquesta consideració requereix haver de canviar la posició del pèndol, girant-lo 90° . Com que el pèndol es manté igual però es gira, dibuixarà la mateixa figura però amb diferent orientació.

Un cop es va haver tingut en compte aquesta consideració es van poder obtenir els valors de x i y per cada relació. Tot i així, conèixer aquests valors no permetria construir el pèndol, s'havia de calcular la longitud que havien de tenir els dos fils.



Per calcular la longitud de l es va utilitzar el Teorema de Pitàgores tenint en compte que s'havia decidit que $z = 28$ cm.

$$l_1 = l_2 = \sqrt{x^2 + 14^2}$$

$$l = l_1 + l_2 = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 14^2}$$

Al valor de l se li afegiran 30 cm per tal de disposar de fil suficient per penjar el pèndol a la reixa.

Per calcular la longitud de h només era necessari restar 32 cm del valor de y : $h = y - 32$.

Tots els càlculs es van realitzar utilitzant el full de càlcul i les unitats són totes cm. Els resultats, que es poden observar en la taula següent, s'han arrodonit a 1 decimal ja que els estris de mesura utilitzats tenen una apreciació de mm.

RELACIÓ ENTRE LES FREQUÈNCIES (a/b)	a (Hz)	b (Hz)	x (cm)	y (cm)	l (cm)	h(cm)
1	0,056	0,056	0,0	79,0	0	47,0
1/2	0,056	0,112	59,2	19,7	121,8	-12,3
1/3	0,056	0,168	70,2	8,8	143,2	-23,2
1/4	0,056	0,224	74,1	4,9	150,7	-27,1
2/3	0,056	0,084	43,9	35,1	92,1	3,1
3/4	0,056	0,075	34,6	44,4	74,6	12,4
4/5	0,056	0,070	28,4	50,6	63,4	18,6
5/6	0,056	0,067	24,1	54,9	55,8	22,9

L'única dificultat trobada és que el valor de la y en tres casos és inferior a 32 cm.

Es va observar que aquests 32 cm es podrien reduir fins a uns 10 cm; això solucionaria el problema pel valor de $y = 19,75$ cm. Segurament es podria arribar a reduir fins a 8,8 cm que és el segon valor de y inferior a 32 cm. El tercer valor és 4,9 cm un embut d'aquesta mida no tindria prou capacitat per la sorra de manera que no és factible. En cas que es decidís utilitzar aquest últim pèndol es podrien buscar altres recursos per fer les representacions de la trajectòria; per exemple, fent una fotografia amb un temps d'exposició llarg es podria observar la trajectòria seguida per un LED situat a l'extrem del pèndol.

Es va decidir començar fent les representacions amb els pèndols en els quals la y era superior a 32 cm.

Concretament es va començar amb el pèndol $a/b=2/3$. El fil superior havia de fer 92,1 cm i l'inferior 3,1 cm. Un cop es va tenir muntat el pèndol (amb l'embut de 32 cm) es van començar a obtenir corbes de Lissajous.

El que es va observar va ser que no sempre s'obtenia la mateixa corba i que variava segons la posició inicial.

Realment, les corbes que s'obtenien eren diferents unes de les altres degut a la diferència de fase. S'havia observat que al canviar la posició inicial canviaven les corbes ja que, probablement la variació de la posició inicial provoqui la variació de la diferència de fase.

Es van comparar les corbes obtingudes amb les referències trobades a Internet i les imatges coincidien, eren semblants.

Tot i que (variant la diferència de fase, és a dir, variant la posició inicial) s'aconseguien les diferents corbes no es sabia com ni perquè variava el valor de la diferència de fase. Es va decidir estudiar la diferència de fase en les diferents corbes obtingudes per tal de poder saber com variar la diferència de fase i tenir més control a l'hora de representar la resta de corbes.

El primer que es va fer va ser buscar informació sobre la diferència de fase. Es va acabar trobant una pàgina on s'explicava com mesurar la diferència de fase de dues senyals.

Concretament mostrava com calcular el valor si les dues senyals (moviments harmònics simples) tenien la mateixa amplitud i la mateixa freqüència (és a dir, en un pèndol simple que realitza un moviment el·líptic). De totes maneres, vaig pensar que el procediment a seguir seria el mateix independentment de si les freqüències eren iguals o diferents.

Per obtenir el valor de δ es substitueixen la resta d'incògnites en les equacions que descriuen el moviment.

$$x = A \sin(at + \delta)$$

$$y = B \sin(bt)$$

A i B (l'amplitud de la corba en cada eix) es poden mesurar un cop s'ha representat la corba utilitzant uns eixos de coordenades dividits en unitats.

x i y, es a dir, les coordenades en un punt es poden determinar fàcilment en un punt d'intersecció amb els eixos.

En la pàgina web no es mostrava com determinar les freqüències ja que, en el cas de la web, eren iguals i s'acabaven simplificant. Llavors es va pensar que anteriorment s'havien calculat els valors per determinar les longituds dels fils; per tant, no eren una incògnita.

El procediment que es seguia en la pàgina web no es va poder utilitzar ja que es basava en la igualtat de les freqüències per resoldre el sistema. Es va haver de seguir un procediment més extens en el qual es resolvia el sistema (de dues equacions i amb dues incògnites) per substitució de la següent manera:

Es comença trobant el valor del temps, l'única incògnita en l'equació de la y:

$$y = B \cdot \sin(bt)$$

$$\sin(bt) = \frac{y}{B}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{B}\right) = bt$$

$$\frac{bt}{b} = t$$

Un cop es coneix el valor de t l'única incògnita en la primera equació és δ .

$$x = A \cdot \sin(at + \delta)$$

$$\sin(at + \delta) = \frac{x}{a}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = at + \delta$$

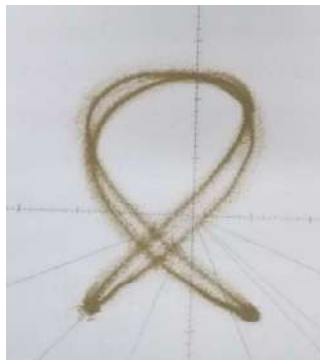
$$at + \delta - at = \delta$$

Totes les fórmules es van introduir en un full de càlcul per tal de poder calcular el valor de la diferència de fase per cada corba un cop introduïts els valors.

Per comprovar si els càlculs eren correctes es va fer la prova suposant que la corba representada era un cercle. Per representar un cercle les freqüències en els dos eixos han de ser iguals (per exemple 1 i 1), les amplituds també han de ser iguals (per exemple 10 i 10) i les coordenades d'un punt conegut poden ser $x=10$ quan $y=0$. El resultat obtingut va ser $\pi/2$; ja que aquesta és la diferència de fase en un cercle. Per tant el mètode era correcte.

A continuació es van realitzar noves representacions de corbes utilitzant el pèndol $a/b=2/3$. La diferència respecte les anteriors era que es controlava la posició inicial. Per fer-ho es van dibuixar els eixos de coordenades i rectes a $-22,5^\circ$, -45° , $-67,5^\circ$, $-112,5^\circ$, -135° i $-157,5^\circ$; així es podia determinar en quina recta es trobava la posició inicial del pèndol.

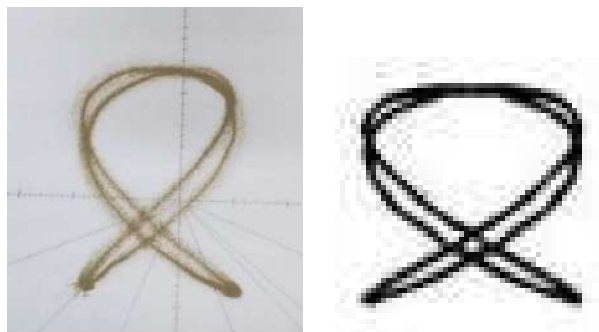
La primera diferència de fase que es va calcular va ser la de la corba següent:



Aquesta és la corba de Lissajous que s'obté en deixar anar un pèndol amb una relació de freqüències $2/3$ la posició inicial del qual es troba a $5\pi/4$ rad. Es va calcular una diferència de fase de $0,339$ rad. En diferents exemples d'Internet s'ha trobat representacions de les corbes de Lissajous en funció de la diferència de fase que s'utilitzaran per comprovar que els resultats siguin coherents. Com que en els exemples d'Internet els radians no estan expressats en decimals sinó en forma de múltiples i submúltiples de π ; a continuació es mostren els valors de les fraccions en forma decimal per fer més fàcil la comparació amb els valors obtinguts.

0	0	$5\pi/8$	1,963
$\pi/8$	0,393	$3\pi/4$	2,356
$\pi/4$	0,785	$7\pi/8$	2,749
$3\pi/8$	1,178	π	3,142
$\pi/2$	1,571		

El valor més semblant al 0,339 obtingut és $\pi/8$; i la figura obtinguda és semblant a la que teòricament s'hauria d'obtenir en un pèndol $a/b=2/3$ i $\delta= \pi/8$.



Aquest fet ens portaria a concloure que des d'aquesta posició s'adquireix la diferència de fase $\pi/8$. De totes maneres es va preferir fer els càlculs per altres corbes obtingudes abans de treure unes conclusions.

A continuació es va voler calcular la diferència de fase de les dues figures següents degut a que s'havia observat que eren semblants però la seva orientació era contrària.

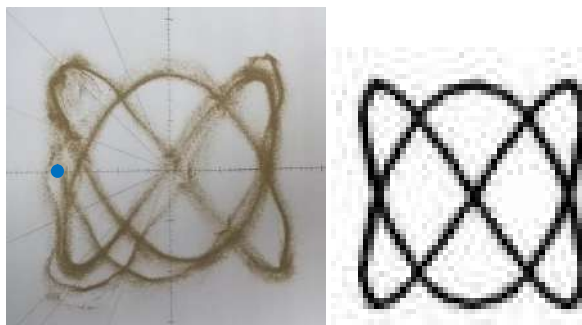


Al fer els càlculs s'obté, per la primera imatge, una diferència de fase de 0,263 rad i per la segona una de 0,426 rad. S'observa que el segon valor és de l'ordre de $\pi/2$ superior al primer s'obté al multiplicar el primer per $\pi/2$ i es pensa que pot tenir relació amb la posició inicial. En les imatges s'ha marcat la posició inicial del pèndol i s'observa com les línies en les quals es situen els dos punts formen un angle de 90° , és a dir, $\pi/2$ rad.

A continuació s'observa, en les taules trobades per Internet, que les figures amb una diferència de fase de 0 a $\pi/2$ rad es repeteixen de $\pi/2$ a π rad però invertides respecte l'eix vertical. Aquest gir sobre l'eix vertical possiblement s'ha produït en les dues corbes anteriors, de totes maneres no és gaire clar. El gir que s'observa és respecte l'eix horitzontal. La causa del gir horitzontal és possiblement que en la primera corba es va aplicar una certa força en l'instant inicial. Sembla que l'aplicació d'aquesta força hagi provocat una variació en la figura que queda representada però no hagi influït en la diferència de fase, (conclusió que es coherent ja que la posició inicial és la mateixa).

També s'observa que la primera figura és significativament més gran que la segona; s'ha arribat a la conclusió que la distància del punt de llançament fins al centre és proporcional a l'amplitud de la figura.

Es va voler analitzar una última corba obtinguda amb el mateix pèndol, ja que aquesta era la que teòricament s'obtenia amb una diferència de fase de 0 rad.



La posició inicial d'aquesta corba es troba en l'eix y ; tot i això no es pot arribar a cap conclusió degut a que per obtenir-la es va aplicar una força al pèndol; com en la primera de les dues corbes anteriors. Si simplement s'hagués deixat anar l'embut des del punt inicial, la representació hagués estat una recta.

Analitzant les quatre corbes de Lissajous obtingudes amb el pèndol $a/b=2/3$ s'ha arribat a les conclusions següents:

- La mida de les representacions (les amplituds) varien segons la distància entre la posició inicial del pèndol i el punt $(0,0)$. La variació de les amplituds no fa variar la figura.
- Si les rectes on es troben les posicions inicials de dues figures són perpendiculars entre sí; es representarà la mateixa figura però invertida respecte l'eix vertical.
- Aplicar una força inicial al pèndol provoca que la figura que s'obté sigui diferent a la que s'obtindria si simplement es deixés anar des del mateix punt. L'aplicació d'una força no afecta a la diferència de fase.

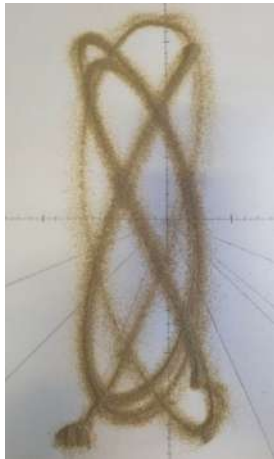
També s'ha observat que existeix alguna relació entre la diferència de fase i la posició inicial però encara no s'ha pogut determinar quina és.

Com que es vol seguir estudiant aquesta suposada relació entre δ i la posició inicial; s'ha decidit repetir el que s'ha dut a terme amb el pèndol $a/b=2/3$ però variant la relació entre les freqüències.

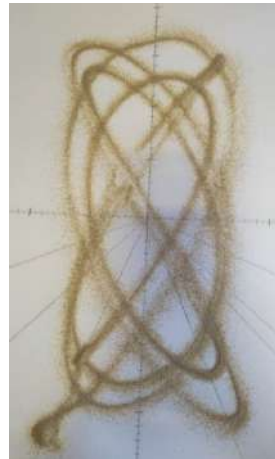
S'ha decidit continuar amb el pèndol $a/b=3/4$ perquè, teòricament, amb aquest pèndol només es poden obtenir dues corbes clarament diferenciades; aspecte que potser facilitarà l'extracció de conclusions.

Les imatges de continuació mostren les corbes obtingudes en deixar anar el pèndol $a/b=3/4$ des de diverses posicions inicials.

1



2



3



4



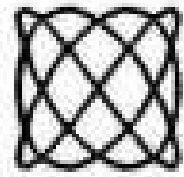
Els punts inicial de les quatre corbes són diferents i independentment d'això les corbes són semblants; és a dir que els pèndols han seguit trajectòries semblants però amb amplituds diferents. S'ha observat que la hipòtesis en la qual es deia que les amplituds variaven segons la distància del punt inicial al punt (0,0) no és realment correcta. L'amplitud A varia segons la distància del punt a l'eix x mentre que la B és proporcional a la distància del punt inicial i l'eix y.

Les quatre posicions inicials pertanyen a les rectes que es troben a $\pi/4$ i $\pi/8$ de l'eix y; de totes maneres, al deixar anar el pèndol des d'un punt pertanyent a la recta que es troba $3\pi/8$ també s'obtenia una figura com les anteriors. El problema era que en aquest últim cas, l'amplitud A era massa petita per poder apreciar totes les línies.

A continuació es va voler calcular la diferència de fase en les quatre corbes. Els resultats van ser els següents:

1	0,214
2	0,220
3	0,479
4	0,551

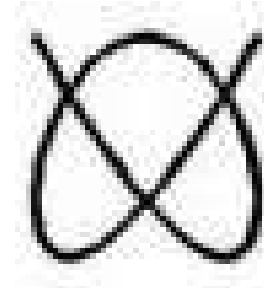
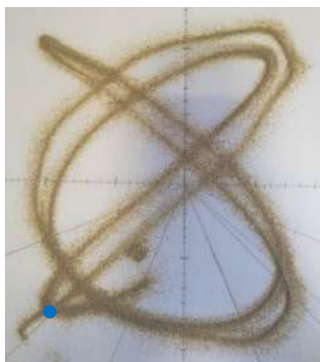
S'observa com els valors 3 i 4 són el doble (aproximadament) que els 1 i 2. Per aquest pèndol, la figura que s'obtenia amb una diferència de fase $\pi/4$ i una $\pi/2$ era la mateixa (la de la imatge); $\pi/2$ és el doble de $\pi/4$. Això explica per què les figures amb una diferència de fase són iguals que les que tenen una diferència de fase doble. Tot i així, cap de les quatre figures anteriors és igual a la que teòricament s'obtidria si δ fos $\pi/2$ o $\pi/4$. La causa és que els valors de la diferència de fase en les quatre corbes anteriors no coincideixen ni amb $\pi/2$ ni amb $\pi/4$.



Els valors obtinguts, però, si que es poden considerar semblants a dos dels valors obtingut amb l'altre pèndol: 0,263 rad i 0,426 rad.

Això pot significar que en cada línia s'obté un valor de δ i, per tant, que es podrien determinar diversos punts on δ tingués un valor concret (una fracció de Pi) per obtenir representacions comparables a les corbes que s'han trobat per Internet.

D'altra banda, s'ha considerat important destacar que les corbes del pèndol $a/b=3/4$ que no es van poder obtenir deixant-lo anar des de cap posició inicial coincident amb les rectes dibuixades; si que es van poder obtenir donant al pèndol una certa força inicial.



S'observa com les figures són bastant coincidents amb la teòrica; la diferència més significativa són els diferents traços causats pels efectes de la fricció. També s'observa que les dues representacions estan invertides respecte l'eix vertical; teòricament la causa d'aquest gir sobre l'eix vertical és que les posicions inicials es situen en rectes perpendiculars; aquesta observació ja s'ha fet anteriorment i sembla que es manté en els diferents pèndols.

Es va decidir comprovar si els valors de la diferència de fase corresponien amb els teòrics, que haurien de ser $\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$ o $7\pi/8$. La hipòtesis és que no coincidiran degut a que per obtenir aquestes corbes es va aplicar una força inicial; deixant anar els pèndols des del punts corresponents s'obtidrien corbes diferents.

De la primera corba la diferència de fase calculada és de 0,551 rad i el de la segona 0,507 rad. Els valors obtinguts no coincideixen amb els que teòricament s'haurien d'obtenir en aquestes corbes (no coincideixen amb cap valor de la taula). Els resultats són els esperats ja que per obtenir-les es va aplicar una certa força. Es va observar que els valors obtinguts si que coincidien amb els obtinguts en corbes amb una posició inicial pertanyent a la mateixa recta; aquest fet també s'ha observat anteriorment (els valors de la diferència de fase es mantenen més o menys constants en la mateixa recta). El fet d'aplicar una força inicial provoca que la corba obtinguda sigui diferent però no afecta a la diferència de fase.

0	0
$\pi/8$	0.392699
$\pi/4$	0.785398
$3\pi/8$	1.178097
$\pi/2$	1.570796
$5\pi/8$	1.963495
$3\pi/4$	2.356194
$7\pi/8$	2.748893
π	3.141593

Després d'haver realitzat representacions amb dos pèndols diferents i haver-ne analitzat els resultats tenint en compte les diferències de fase, encara no s'ha aconseguit un dels objectius d'aquesta part del treball; relacionar la diferència de fase amb la posició inicial per tal de tenir control sobre la corba que s'obtindrà.

Es va plantejar que si tal com s'havia observat en les representacions, cada angle tenia un valor de δ concret; es podrien acabar trobant les rectes en les quals la diferència de fase era una fracció de π .

De totes maneres es va decidir buscar més informació sobre el concepte de fase ja que la idea que la diferència de fase depengués de l'angle no semblava correcta. A més a més s'havia observat que, pels diferents pèndols els valors de la diferència de fase en cada angle variaven lleugerament.

La informació que es va trobar va ser que un moviment harmònic simple (el que realitza un pèndol simple oscil·lant en un pla) recorre 2π rad en cada cicle / període. I que la fase són els radianes que ha recorregut en funció del temps; concretament la fase és el producte de la freqüència pel temps.

D'aquesta manera es va entendre que la diferència de fase la provoca la diferència de freqüència entre els dos eixos (ja que el temps és constant).

Per plantejar el mètode que s'ha utilitzat es va tenir en compte que la fase és equivalent a l'angle recorregut (l'amplitud de l'oscil·lació) i la diferència de fase és la relació que hi ha entre les fases inicials dels dos eixos del pèndol. Calia evitar que en cada llançament s'hagués de mesurar l'amplitud en cada eix tenint en compte la diferència de fase; de manera que es va plantejar el mètode següent.

Si en cadascun dels eixos es marquen les diferents fases del pèndol en aquell eix; es pot calcular la diferència de fase entre dos punts i deixar anar el pèndol des del punt on coincideixen les rectes paral·leles als eixos que passen per els dos primers punts.

Per provar si aquesta hipòtesi era vàlida es treballar amb el pèndol $a/b=3/4$. No es sabia com determinar la posició de les diferents fases en cada eix, per això es van plantejar diferents mètodes possibles.

El primer mètode que es va plantejar va ser dividir l'amplitud del pèndol (entenent amplitud com al doble de la seva llargada) en parts iguals; per exemple en 16 parts de manera que cada part fos $\pi/16$ rad. Les parts en els dos eixos serien diferents degut a que l'amplitud en cada eix és diferent. Aquest mètode, però, no és correcte ja que s'està considerant la fase com una longitud que varia en funció del temps, i no és així.

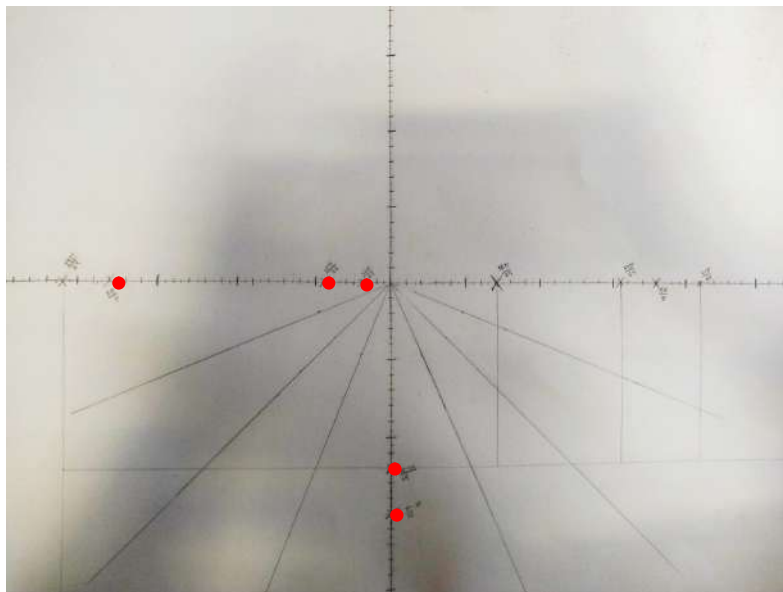
Després es va pensar en el mètode que s'ha acabat utilitzant; que és més complex. El que es va fer va ser traspasar els angles a l'eix. És a dir, calia situar el pèndol en una posició (sobre un dels eixos) en la qual la seva amplitud coincidís amb una fracció de π rad (per facilitar els càlculs posteriors). A continuació s'havia de marcar, sobre l'eix corresponent la posició de l'extrem de l'embut; és a dir, s'havia de marcar el punt en l'eix que es trobava just a sota de l'extrem de l'embut quan el pèndol tenia una amplitud (fase) determinada. Al punt corresponent (que representava una fase concreta del pèndol en l'eix) se l'anomenava el valor de la fase en el punt. Aquest procediment es va repetir per diversos valors i en cadascun dels eixos.

El que s'observava era que encara que la diferència entre els valors de les fases es mantingués constant la distància entre els punts anava augmentant a mesura que la fase s'apropava a $\pi/2$ rad (fase que es troba al punt (0,0)).

Un cop es van tenir una sèrie de valors marcats és van traçar rectes paral·leles als eixos de coordenades que passessin per cadascun dels punts. Per determinar una diferència de fase només calia buscar dos valors, un pertanyent a cada eix, entre els quals hi hagués la diferència desitjada; el pèndol s'havia de deixar anar des del punt d'intersecció de les dues rectes corresponents a les fases determinades.

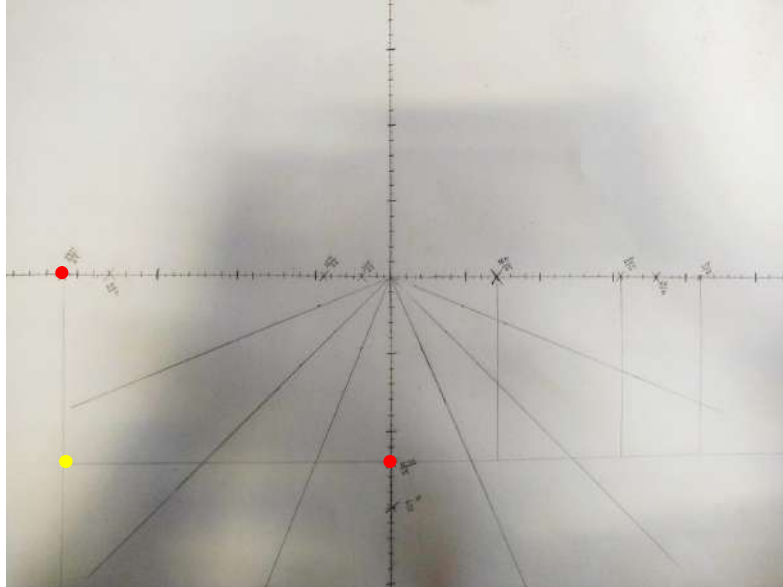
Un dels aspectes que es van observar va ser que els punts de l'eix on el pèndol té una llargada parcialment la total variarien en cada pèndol.

Es va començar treballant amb el pèndol $a/b=3/4$ el primer que es va fer va ser marcar una sèrie de punts, diferents fases, en cadascun dels eixos. Els punts que es van marcar van ser: $3\pi/8$ rad en l'eix x i $31\pi/64$ rad i $15\pi/32$ rad en els dos eixos.

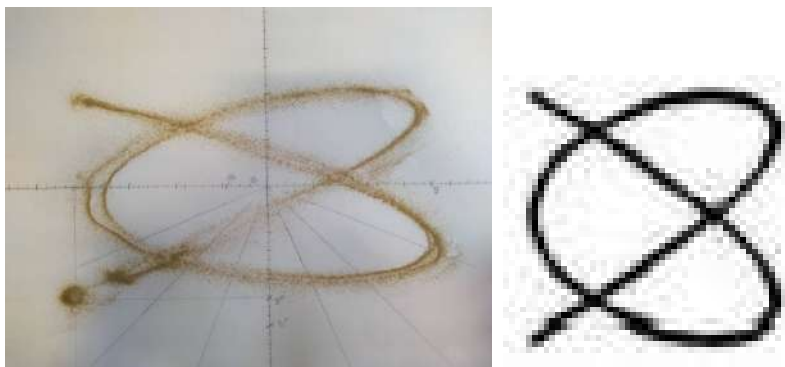


A continuació es va observar que en comptes de buscar la diferència de fase entre dues fases ja determinades seria més fàcil agafar una fase d'un eix i determinar quina hauria de ser la fase en l'altre eix en funció de la diferència de fase que es volgués obtenir.

Es va seguir aquest mètode i es va buscar quina hauria de ser la fase en l'eix x per tal que la diferència de fase fos $\pi/8$ si la fase en l'eix y és $31\pi/64$ rad. Es va calcular que la fase en l'eix x hauria de ser $23\pi/64$ (una diferència de $8\pi/64$ rad). D'aquesta manera es va poder determinar el punt des del qual s'hauria de deixar anar el pèndol per obtenir la corba amb una diferència de fase de $\pi/8$.



A continuació és pot comparar la corba obtinguda amb la teòrica:

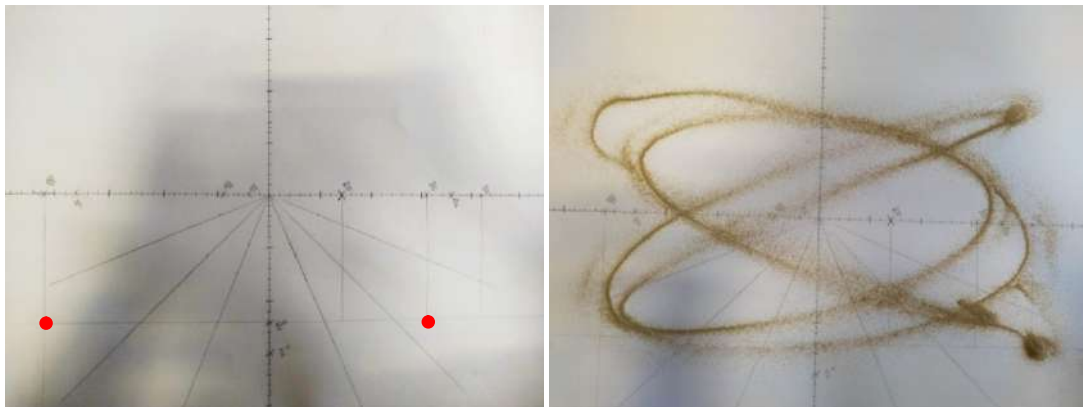


S'observa clarament que són la mateixa figura; l'única diferència són les proporcions. La teòrica té la mateixa amplada que alçada; en canvi, la obtinguda experimentalment és significativament més llarga que ampla. Com s'ha explicat anteriorment l'amplitud de la corba en cada eix depèn de la distància del punt inicial de la corba a cadascun dels eixos. En la imatge s'observa com la distància del punt a l'eix y és molt més gran que la del mateix punt a l'eix x. Per tant, la variació de les mides només depèn de la situació del punt respecte als eixos i es pot afirmar que la corba obtinguda és la que s'esperava.

A continuació es va voler calcular la diferència de fase per comprovar que és $\pi/8$ rad. El resultat que es va obtenir va ser 0,412 rad, resultat que es pot considerar correcte tenint en compte que $\pi/8 = 0,393$ rad.

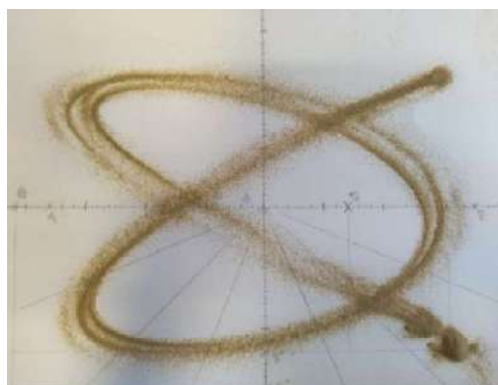
Un cop obtinguda aquesta corba es va plantejar si deixant anar el pèndol des d'un punt simètric a l'anterior s'obtidria la mateixa corba però amb una orientació diferent.

Es va passar la posició inicial del tercer quadrant al quart amb la hipòtesi que s'obtidria una corba igual a l'anterior però girada respecte l'eix vertical. La corba que es va obtenir no va ser l'esperada.



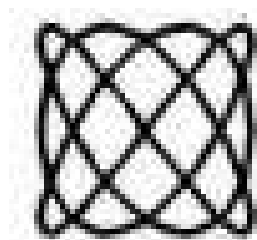
Tot i que la corba si que es va girar sobre l'eix vertical semblava que la diferència de fase de fase no era la correcta. Es va calcular la diferència de fase en el segon punt, era de $10\pi/64$. L'error que s'havia comés era que en l'eix x s'havia marcat el punt simètric respecte el punt central, $32\pi/64$ rad, però el que realment s'hauria hagut de considerar com a punt central és $31\pi/64$ rad (la fase en l'eix y). Això explica perquè la diferència de fase era $2\pi/64$ rad superior al què hauria de ser.

Per solucionar-ho es va considerar com a punt central $31\pi/64$ rad i es va obtenir la corba següent; la descrita en la hipòtesi.



Respecte la corba inicial, l'única diferència que s'observa (sense tenir en compte el gir sobre l'eix vertical) és la diferència en les proporcions. Tot i que l'alçada de les dues corbes és la mateixa (el punt en l'eix y no ha variat), la segona és molt menys ampla que la primera degut a la variació de la fase en l'eix x.

A continuació es va voler representar l'altra possible corba que es pot obtenir amb un pèndol $a/b=3/4$. S'obté amb una diferència de fase de $0 / \pi/4$ i $\pi/2$ rad.



Amb el pèndol que s'estava utilitzant no va ser possible aconseguir una diferència de fase de $\pi/2$ rad degut a les dimensions limitades de la superfície on es representen les corbes. Es van poder obtenir tres representacions amb $\delta=0$ rad i una amb $\delta= \pi/4$ rad.

A continuació es poden comparar les tres representacions obtingudes amb una diferència de fase de 0 rad. La diferència entre les tres és el valor de la fase i , consegüentment, les dimensions. En la primera imatge les fases són de $31\pi/64$; en la segona de $15\pi/32$, i en la tercera de $14\pi/32$. Les dimensions són, respectivament: 6x22 cm; 8x28 cm; 20x30cm.



En la primera imatge l'amplada no és suficient per què es pugui observar la figura; aquest va ser el motiu pel qual es va decidir repetir la figura amb fases més grans. En la segona i tercera figura s'observa clarament la relació entre la freqüència de cada eix i els lòbuls de la figura. En aquest pèndol la relació entre freqüències és de 3/4; s'observa com en l'amplada de la corba hi ha tres lòbuls mentre que en l'alçada n'hi ha quatre.



S'ha dit que també es va poder obtenir una representació de la corba amb una diferència de fase de $\pi/4$ rad. Les dimensions d'aquesta corba eren de 56x30 cm aproximadament; degut a la gran amplitud inicial que havia de tenir el pèndol, aquest adquiria molta velocitat. Degut a l'alta velocitat els traços no van quedar ben definits i la corba obtinguda no es podia apreciar bé; per aquesta raó la imatge no s'ha inclòs en el treball.

Després de representar diverses corbes utilitzant aquest nou mètode per determinar la posició inicial, s'ha arribat a diverses conclusions.

La primera és que no serà possible obtenir representacions de les corbes amb una diferència de fase molt gran. La raó és que encara que la fase en un eix sigui molt petita la de l'altre eix haurà de ser molt gran; aspecte que provocarà que no es pugui incloure en la superfície on es representen les corbes o, en cas que si que s'hi pugui incloure, que el pèndol agafi una velocitat massa alta per què quedi un traç definit. De totes maneres; aquest fet no té relació amb el mètode per determinar la diferència de fase inicial.

Les conclusions que sí que tenen relació amb el mètode són que permet:

- Relacionar la diferència de fase d'una corba amb a seva posició inicial.
- Determinar la trajectòria que seguirà el pèndol prèviament al llançament.
- Reproduir una corba infinites vegades.

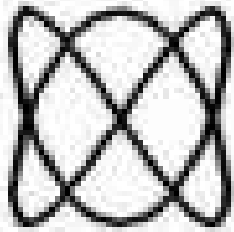
Es va decidir representar altres corbes de Lissajous variant la relació entre les freqüències del pèndol.

El següent pèndol del qual es van voler representar les corbes va ser el $a/b=2/3$. D'aquest pèndol ja s'havien representat corbes anteriorment però no utilitzant aquest nou mètode que permet determinar la diferència de fase. Les diferències que es pretenen observar utilitzant el nou mètode són que es podran obtenir la gran majoria de corbes, que les figures coincidirán en tots els casos amb les teòriques i que les corbes es podran repetir.

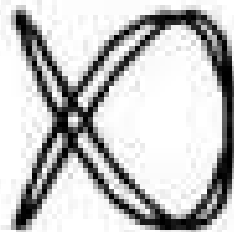
Es va decidir que es farien les representacions de les corbes amb una diferència de fase de 0 rad, $\pi/8$ rad, $\pi/4$ rad i (si fos possible) $3\pi/8$ rad.

Havent canviat les longituds dels fils per aconseguir la relació $a/b=2/3$, és van marcar en l'eix horitzontal les fases (es van haver de tornar a marcar ja que aquest és l'eix en el qual la freqüència varia). Anteriorment s'ha dit que en l'altre eix no és necessari tornar a marcar les fases ja que la freqüència no varia.

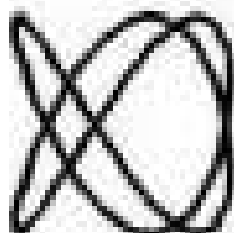
Es van començar a fer les representacions, però els resultats no van ser els esperats; a continuació es poden comparar les corbes obtingudes amb les teòriques.



$\delta=0$ rad



$\delta= \pi/8$ rad



$\delta= \pi/4$ rad

La diferència de fase $3\pi/8$ rad no es va poder aconseguir degut a les dimensions limitades del pèndol i l'estructura.

Al observar que les corbes obtingudes no eren les esperades és va pensar que probablement s'havia comés un error. Les longituds dels fils i les fases en l'eix horitzontal eren correctes. Això va portar a comprovar si en l'eix vertical també ho eren, s'esperava que si que ho fossin degut al que s'ha explicat anteriorment referent a la no variació de la freqüència en aquest eix. Al comprovar-ho es va observar que no eren correctes. En un principi no es sabia la causa d'aquest fet; però es va acabar deduint que al variar les longituds dels fils, la longitud total també havia variat

lleugerament. Tot i que la variació era molt poca, de màxim mig centímetre, afectava a les fases. La variació de la posició de les fases era significativa degut a la mateixa llargada del fil; si des d'un principi la llargada hagués estat inferior la variació no hagués estat tant significativa. Cal dir que teòricament aquesta variació no s'hauria d'haver produït.

Per solucionar el problema es van marcar les fases en els punts correctes de l'eix vertical i es van repetir les representacions.

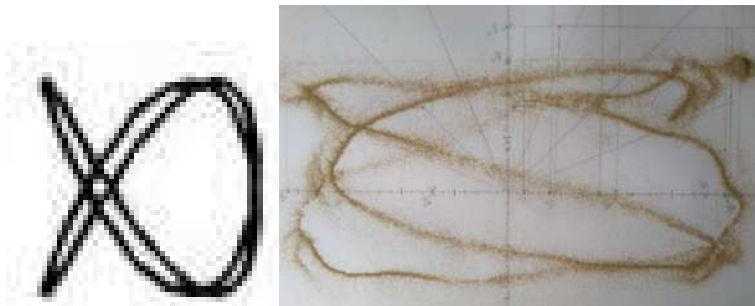
Es va aconseguir representar correctament la corba amb una diferència de fase de 0 rad:



S'observa una diferència en les dimensions però la figura es manté. També s'observa com en un eix hi ha tres lòbuls i en l'altre dos; aquest és el resultat esperat en un pèndol amb freqüència $2/3$.

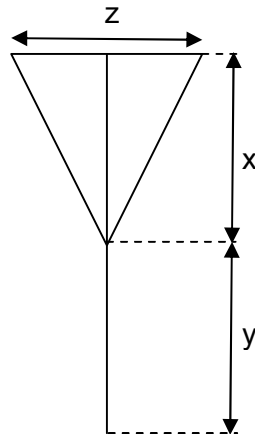
No es va poder representar la corba amb una diferència de fase de $\pi/4$ rad ja que degut als canvis de posició quedava fora de les dimensions de l'estructura.

La corba amb $\delta = \pi/8$ rad si que es va poder representar i, tot i que els resultats van millorar respecte els anteriors, tampoc es va aconseguir la corba teòrica:

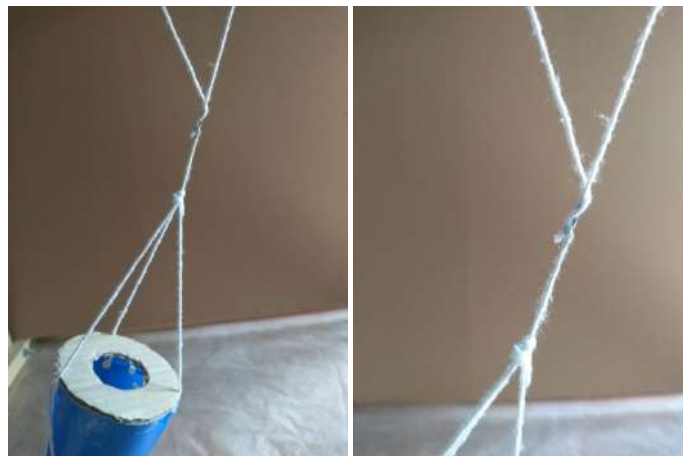


L'explicació que es dona a que no fos possible obtenir una representació correcta d'aquesta corba es deu a les dimensions de la pròpia corba respecte les del pèndol.

En aquest pèndol en concret, la longitud y és tan sols de 3 cm ja que la freqüència en l'eix horitzontal ha de ser molt baixa. Això provoca dificultats a l'hora de representar corbes amb una amplitud horitzontal gran. Aquest és el cas de la corba $\delta = \pi/4$ rad.



El que s'ha observat que passa és que quan el pèndol es troba en els punts de màxima amplitud respecte l'eix horitzontal, un dels dos fils superior es cargola al voltant de l'altre.



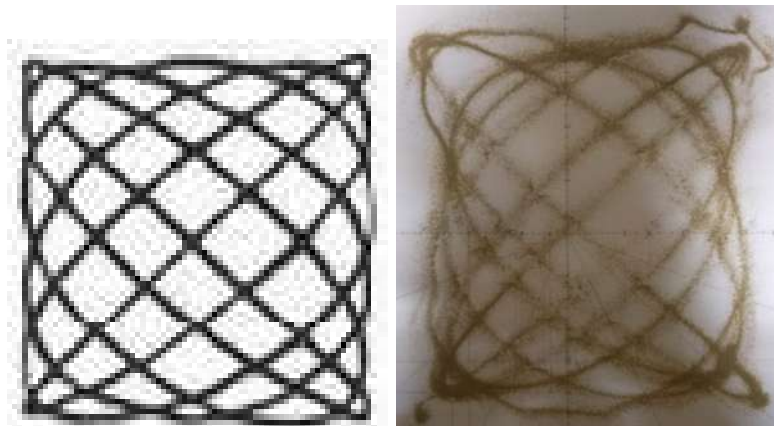
Que això passi fa alterar la trajectòria i no permet obtenir la corba esperada; a més a més és inevitable. Aquest fet no va afectar la representació de la corba amb diferència de fase de 0 rad ja que les amplituds en aquesta no eren tant grans i el pèndol es comportava amb normalitat.

Es creu que sí que va afectar a les representacions de la pàgina 116 provocant vibracions en el pèndol que es perceben en les representacions.

Al no haver pogut obtenir més d'una representació amb el pèndol $a/b=2/3$ és va decidir intentar obtenir més representacions amb un altre pèndol; és a dir, tornar a variar la relació entre les freqüències.

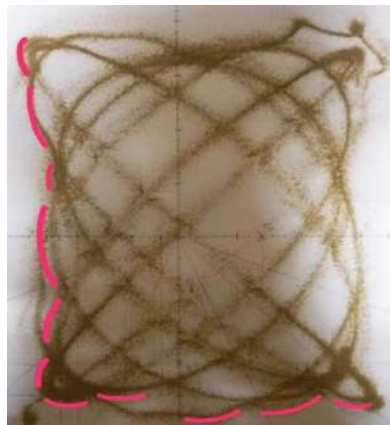
Es va decidir fer la prova amb el pèndol $a/b=5/6$ i es va començar ajustant les longituds dels fils. A continuació es van marcar les fases en cadascun dels eixos i es van començar a fer les representacions.

La primera corba que es va representar va ser la de diferència de fase de 0 rad. A continuació es pot comparar la corba obtinguda amb la teòrica:



El primer que s'observa és que hi ha una variació en les dimensions però que és molt lleugera. Un altre aspecte que s'observa és que en la representació és difícil comptar els lòbuls de la figura en cada aresta del rectangle. El què ha passat és que alguns lòbuls han quedat "dins" dels altres; de manera que és difícil determinar quins s'han de comptar i quins no. Possibles causes d'aquest fet són que el pèndol no és ideal (hi ha fregament), que la relació entre les freqüències no és exacta, que la diferència de fase tampoc és exacta...

En la imatge de continuació s'han marcat els lòbuls per mostrar que la figura obtinguda és equivalent a la teòrica. Degut a que la relació entre les freqüències del pèndol és $a/b=5/6$ en una aresta hi ha d'haver 6 lòbuls i en l'altra 5.



La imatge permet observar els lòbuls en cada aresta i visualitzar el que s'ha explicat sobre els efectes del fregament i les altres causes d'error. Per exemple; en l'aresta horitzontal, el segon lòbul començant per l'esquerra va quedar "dins" del tercer ja que va ser traçat quan el pèndol havia perdut una certa quantitat d'energia mecànica. Un altre exemple el trobem en l'eix vertical on el segon lòbul, comptant des de la base, també es troba a l'interior d'un altre.

L'altre corba que es va poder obtenir amb aquest pèndol va ser la de $\delta = \pi/8$ rad.



S'observa una gran diferència en les dimensions de la corba obtinguda respecte la teòrica. En la representació, l'amplitud horitzontal és molt més gran que la vertical; de manera que la figura és molt més llarga que ampla.

També s'observa que hi ha alguns traços dobles; això és degut a que per aconseguir la representació de la fotografia és van haver de realitzar dos llançaments. El que passava en aquesta corba, que ja s'havia produït anteriorment, era que degut a la gran amplitud el pèndol agafava molta velocitat. El fet que agafés tanta velocitat provocava que molts dels traços quedessin poc marcats ja que la poca sorra que queia es dispersava; és van realitzar dos llançaments del pèndol per tal que tota la trajectòria quedés ben definida.

El fet que havia impedit la representació de certes corbes en el pèndol anterior; que un fil es cargolés sobre l'altre; no es produïa en aquest pèndol ja que la longitud y era molt més gran que en el pèndol anterior.

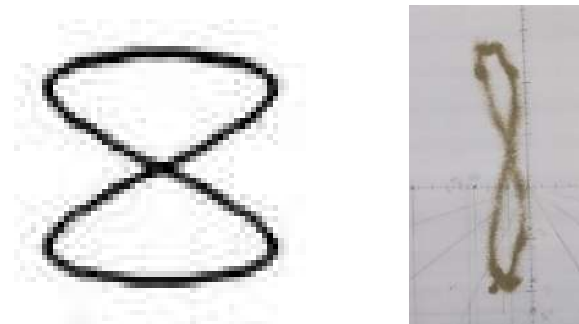
Es va decidir fer unes últimes representacions utilitzant el pèndol de sorra; aquest cop d'unes corbes més simples. Concretament es va decidir representar les corbes amb una diferència de fase $a/b=1/2$. La dificultat a l'hora de representar aquestes corbes és que no es pot utilitzar l'embut que s'havia utilitzat fins ara. Com ja s'ha explicat anteriorment en alguns pèndols (incloent el $a/b=1/2$) la longitud y havia de ser inferior a la de l'embut utilitzat fins el moment. El que caldrà fer per tal de poder representar les corbes següents; serà construir un nou embut amb una longitud inferior.

Anteriorment s'ha determinat que per aquest pèndol en concret la longitud y ha de ser de 19,7 cm; per tant, es farà un embut d'uns 12 cm. A aquesta longitud hi caldrà afegir uns 5 cm dels fils lligats a l'embut. De totes maneres aquests valors són aproximats i un cop construït l'embut es determinarà la longitud de fil que cal afegir.

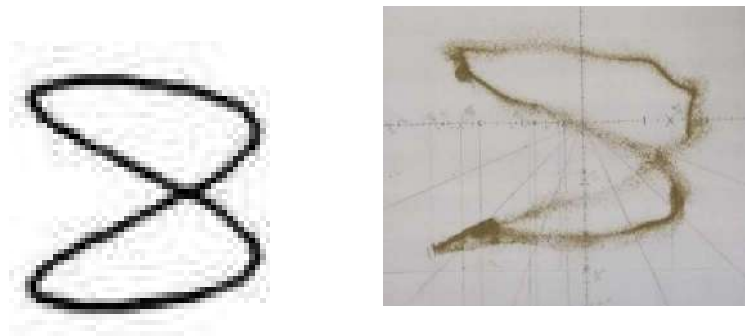
Per construir l'embut de dimensions reduïdes es va seguir el mateix procediment que per l'anterior només modificant l'amplitud del con, que es va augmentar per tal que tingués capacitat suficient per la sorra. Es va poder reutilitzar el cartró utilitzat com a base de l'embut anterior ja que el diàmetre de la base del nou con només era lleugerament inferior a la de l'anterior.

Un cop construït l'embut es va mesurar que la seva longitud junt amb la dels fils que el sostenen és de 18 cm. S'ha calculat que el fil vertical ha de ser de 1,7 cm i prèviament ja s'havia calculat que el fil superior ha de ser de 121,8 cm.

Es van poder obtenir les representacions següents; corresponents a una diferència de fase de 0 i $\pi/8$ rad respectivament. A continuació es poden comparar les corbes obtingudes amb les teòriques:



En aquesta corba, la de diferència de fase de 0 rad, s'observa clarament una variació de les dimensions; en la corba representada l'amplada és molt inferior a l'alçada, mentre que en la teòrica els dos costats són iguals entre sí. També s'observa que la representació no és perfecta en el sentit que el punt d'intersecció no és al centre de la corba. Les causes d'aquesta imperfecció (i d'altres imperfeccions en corbes anteriors) poden ser moltes; algunes són les següents: efectes del fregament, possible inexactitud al determinar la posició de les fases, possible inexactitud al determinar les longituds dels fils, altres característiques pròpies del pèndol (per exemple la massa del fil), etc.

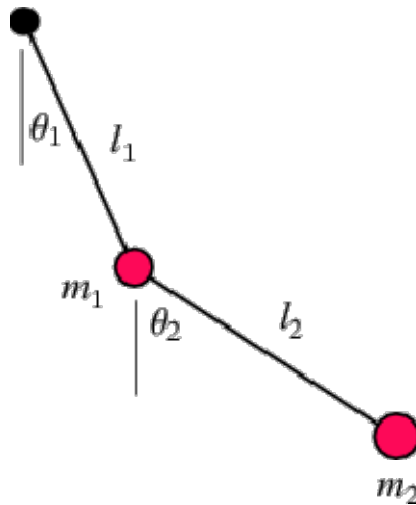


En la imatge anterior s'ha representat la corba amb diferència de fase $\pi/8$ rad i s'observa com la corba obtinguda és molt semblant a la teòrica. La semblança no s'observa només en la figura en sí, sinó que també s'observa en les dimensions. Ha coincidit que la posició inicial del pèndol es trobava a una distància de l'eix x molt semblant a la distància que es trobava el mateix punt de l'eix y; això ha permès obtenir una figura amb una amplada i alçada semblants.

4.- EL PÈNDOL DOBLE: MOVIMENT CAÒTIC

4.1.- TEORIA

Un pèndol doble pla és un sistema físic format per dos pèndols simples en el mateix pla; un pèndol amb un segon pèndol penjat de l'extrem del primer.



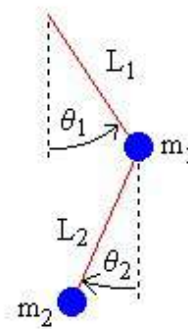
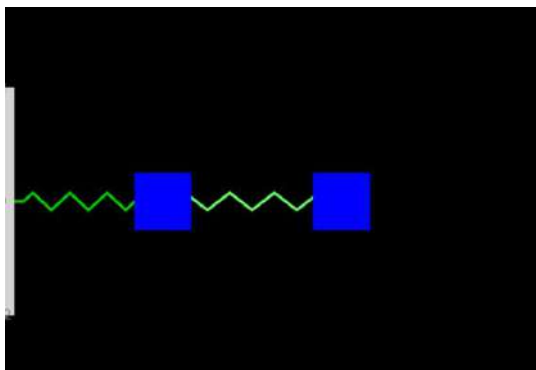
Idealment un pèndol doble hauria de consistir en dues masses (m_1 i m_2) unides per dos cables rígids de massa negligible i llargades l_1 i l_2 . En el cas d'un pèndol doble ideal les equacions de la seva posició són:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \sin(\theta_1) & x_2 &= l_1 \cdot \sin(\theta_1) + l_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ y_1 &= -l_1 \cdot \cos(\theta_1) & y_2 &= -l_1 \cdot \cos(\theta_1) - l_2 \cdot \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

El moviment d'un pèndol doble pla el descriuen dues equacions diferencials ordinàries acoblades (és a dir, equacions diferencials que s'han de resoldre conjuntament).

Quan el sistema rep prou energia mecànica inicial (determinada per l'altura i/o velocitat inicials) el moviment de pèndol és caòtic.

En canvi, per angles petits (és a dir quan els sistema té poca energia mecànica inicial), el moviment del pèndol doble és lineal i es comporta igual que un sistema format per dues masses i dues molles (el que s'observa en la imatge).



El moviment que descriu el sistema de dues molles (i el pèndol doble quan rep poca energia mecànica inicial) el determinen dues funcions, sinus i cosinus. Aquestes dues funcions són les que generen les corbes de Lissajous.

S'ha dit que quan un pèndol doble rep suficient energia descriu un moviment caòtic. En matemàtiques i física, que un sistema o moviment sigui caòtic no significa que sigui aleatori o arbitrari; sinó que qualsevol petita diferència en les seves condicions inicials produirà que els resultats siguin completament diferents, és a dir, que és pràcticament imprevisible. Si es coneixen les condicions inicials del sistema amb exactitud i aquestes es mantenen constants, el seu moviment es pot descriure.

Aquesta sensibilitat a les condicions inicials característica de qualsevol sistema o moviment caòtic es coneix popularment com l'Efecte papallona: es diu que l'aleteig d'una papallona pot fer variar el clima a l'altra punta del planeta.

Per tant, tot i que el moviment d'un pèndol doble està determinat per les lleis físiques, té una aparença aleatòria degut a la seva sensibilitat a les condicions inicials: la fricció amb l'aire, l'alçada inicial, la temperatura ambient, etc.

Una altra característica que diferencia un pèndol simple d'un de doble, és que les oscil·lacions d'aquest últim no són isocròniques. L'isocronisme en un pèndol indica que el seu període és indiferent a l'amplitud de les seves oscil·lacions. El període d'un pèndol doble varia segons la seva amplitud, depenent de la trajectòria que segueixi.

L'isocronisme va ser descobert per Galileu cap a l'any 1581; va observar una làmpada suspesa del sostre que oscil·lava reduint la seva velocitat (i per tant la seva amplitud) però que mantenia el seu període. A partir d'aquesta observació va arribar a concloure que el període d'un pèndol depenia de la seva longitud. Al 1673 Huygens va basar-se en aquesta afirmació per determinar l'equació de la periodicitat d'un pèndol simple per amplituds petites.

4.- EL PÈNDOL DOBLE: MOVIMENT CAÒTIC

4.2.- CONSTRUCCIÓ

La construcció del pèndol doble es va començar amb el disseny. Per fer-lo es van tenir en compte diversos models de pèndols dobles a partir d'imatges i vídeos trobats per Internet.

De pèndols construïts manualment i que fossin semblants a la idea que ja es tenia pensada se'n van trobar dos; molt semblants entre ells.

Dels dos exemples trobats per Internet no se'n va tenir en compte el material utilitzat ni les mides; el que es va analitzar van ser els mecanismes.

Un pèndol doble es construeix utilitzant coixinets ja que aquests permeten el moviment pendular de les peces a l'hora que no generen fricció.

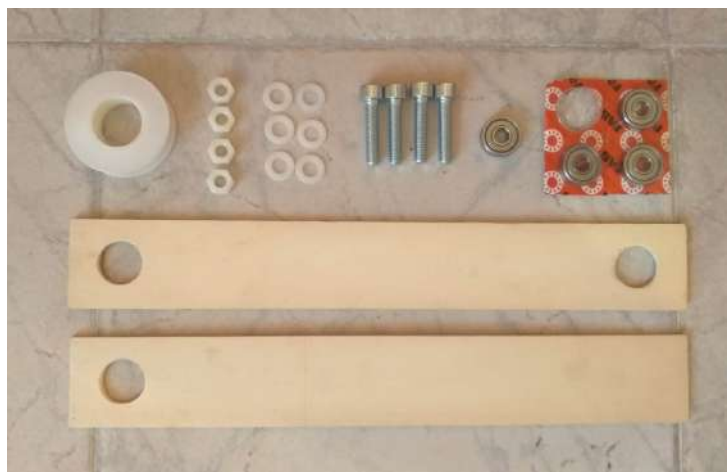
Per fer d'eixos s'utilitzen cargols que passen per l'interior dels coixinets; han d'encaixar amb el forat sense permetre el moviment del coixinet. Com que el coixinet ha de quedar fixat en l'eix, l'ajustament hauria de ser amb serratge. Aconseguir aquest tipus d'ajustament és complicat ja que requereix molta precisió tant en les dues peces com en el muntatge. Aquesta dificultat és la raó per la qual s'utilitzen cargols i no un eix cilíndric qualsevol; utilitzar cargols permet fixar el coixinet amb dues femelles en comptes d'intentar aconseguir un ajustament amb serratge.

En els exemples d'Internet es va observar que era necessari eliminar la fricció que generarien les femelles en contacte amb el coixinet. Per fer-ho s'utilitzaven mètodes diferents; el que es va decidir utilitzar va ser col·locar una volandera entre les dues peces metàl·liques. Les volanderes no podien ser d'acer ja que si ho fossin no solucionarien el problema; es va trobar que existien volanderes de niló i es va pensar que el plàstic faria la funció de reduir el fregament. Al final es van acabar utilitzant femelles també de niló de manera que l'ús de les volanderes no hagués estat tant necessari; d'altra banda, utilitzar volanderes continua sent important per separar els element entre si.

El següent pas en la construcció va ser adquirir el material necessari.

MATERIAL

- 2 fustes de 33,2cm x 4,7 cm x 4mm
- 2 cargols M8
- 3 femelles M8 de niló
- 6 volanderes M8 de niló
- 3 coixinets de 22 mm de diàmetre
- Cinta de tefló



EINES

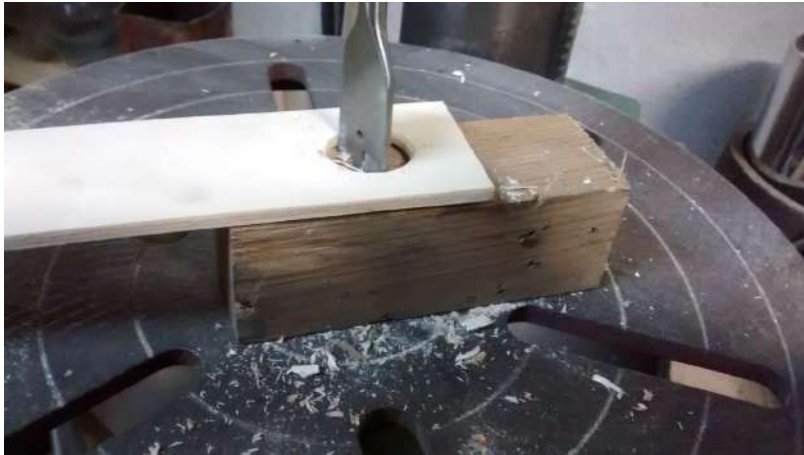
- Trepant de columna
- Broca de 22 mm de diàmetre



PROCEDIMENT

El primer pas en la construcció del pèndol doble va ser fer els forats pels coixinets. En una fusta només n'hi havia d'haver un mentre que en l'altre era necessari fer-ne un a cada extrem. Els tres forats es van fer deixant un marge de 1,5 cm en el costat de 33,2cm i centrats respecte al costat de 4,7cm.

Els forats es van realitzar utilitzant una broca de 22 mm de diàmetre; el mateix diàmetre que els coixinets.

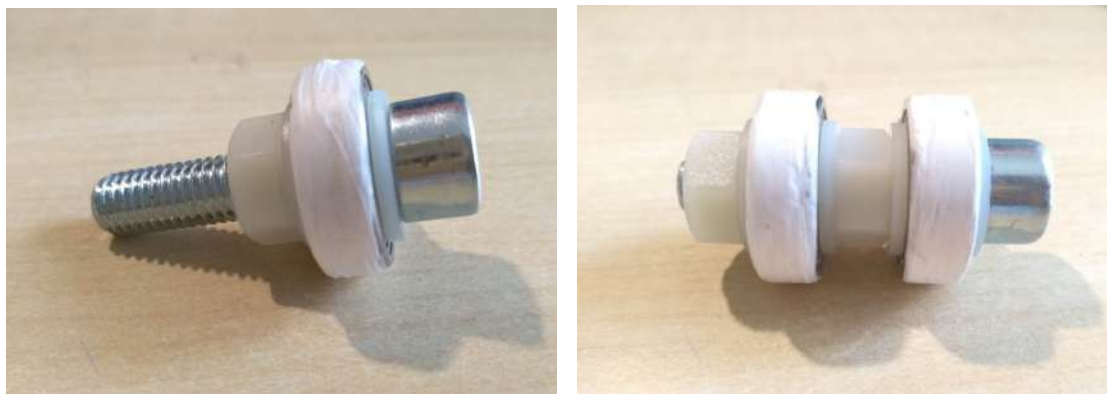


Un cop fets els forats s'hi van posar els coixinets. Aquests havien de quedar fixats en la fusta de manera que no hi hagués gens de joc entre les dues peces. Per aconseguir això hauria estat millor utilitzar una broca lleugerament més petita que els coixinets; però la següent broca més petita era de 18 mm. Al haver utilitzat una broca de 22 mm hi havia un cert joc entre el coixinet i la fusta. Per solucionar aquest problema es va decidir utilitzar cinta de tefló. La cinta va permetre augmentar lleugerament el diàmetre dels coixinets de manera que quedessin fixats en els forats.



A continuació es va muntar l'estructura. En un pèndol doble hi ha dos eixos (en aquest cas, dos cargols) en el superior només hi ha un coixinet, mentre que en el segon (que és la unió dels dos pèndols) n'hi van dos.

A cada costat del coixinet s'hi posa una volandera de niló i tot queda fixat amb una femella. En el cargol on hi ha dos coixinets, aquests queden separats per una femella (i dues volanderes).



Es van fer algunes proves per veure si funcionaven els mecanismes (sense analitzar el moviment que realitzava el pèndol). Es va observar que l'estructura tenia poca estabilitat i també que s'aturava ràpidament.

Es va pensar que la causa de la poca estabilitat eren les fustes. Les fustes utilitzades eren molt lleugeres i alhora molt primes; potser utilitzant unes fustes més pesades s'aconseguiria més estabilitat. També es va pensar que el gruix podria influir-hi ja que els coixinets tenien més gruix que les fustes de manera que no hi quedaven fixats totalment, era fàcil que es desplaçessin. Si s'utilitzaven fustes més gruixudes s'aconseguiria que els coixinets hi quedessin a l'interior de manera que el seu moviment es dificultés

Es van utilitzar unes fustes més gruixudes i més pesades. En aquesta taula es comparen les característiques principals de les fustes anteriors respecte les noves.

	FUSTES #1	FUSTES #2
LONGITUD	33,3 cm	33,3 cm
AMPLITUD	4,7 cm	5,4 cm
GRUIX	0,4 cm	1 cm
MASSA	24 g	114 g
VOLUM	62,604 cm ³	179,82 cm ³
DENSITAT	0,38336209 g/cm ³	0,6339673 g/cm ³

Les noves fustes es van tallar de la mateixa llargada que les anteriors. El gruix i l'amplitud són més grans, de manera que el volum gairebé s'ha triplicat. Tot i que el volum hagi augmentat tant, la densitat també ho ha fet degut a que la massa ha augmentat més que el volum. El que es buscava era un augment de gruix i de pes; i s'ha aconseguit.

Les fustes es van foradar de la mateixa manera que s'havia fet en les anteriors; en el mateix punt i utilitzant la mateixa eina.

Que les fustes fossin més gruixudes va ajudar a fixar els coixinets. D'altra banda, degut a l'augment del pes de les fustes els mecanismes estaven sotmesos a forces més grans; era necessari que fossin encara més estables.

Es va pensar que per augmentar l'estabilitat potser era necessari modificar el recurs de les cintes de tefló. El tefló s'havia utilitzat per augmentar el diàmetre dels coixinets però, tot i que aquesta no era la seva funció inicial, també es va observar que era necessari per impedir el lliscament entre l'acer del coixinet i la fusta. Per tant, es va pensar que utilitzant un material que encara reduís més el lliscament amb la fusta; s'aconseguiria una millor fixació dels coixinets i, per tant, més estabilitat en l'estructura.

Aquest material que havia d'augmentar l'estabilitat havia de ser algun tipus de goma. Es va pensar en un globus. La goma d'un globus seria el material ideal ja que té un cert gruix (per augmentar el diàmetre dels coixinets), el seu lliscament amb la fusta seria mínim i, a més a més, ja té una forma circular.

La part estreta del globus es va tallar en cercles de l'amplada aproximada del coixinet. Aquests cercles tenen un diàmetre inferior al del coixinet de manera que al posar-los al voltant d'aquest queden fixats.

Aquest mètode va donar resultat ja que, un cop fixades, entre els coixinets i les fustes ja no hi havia cap tipus de lliscament.

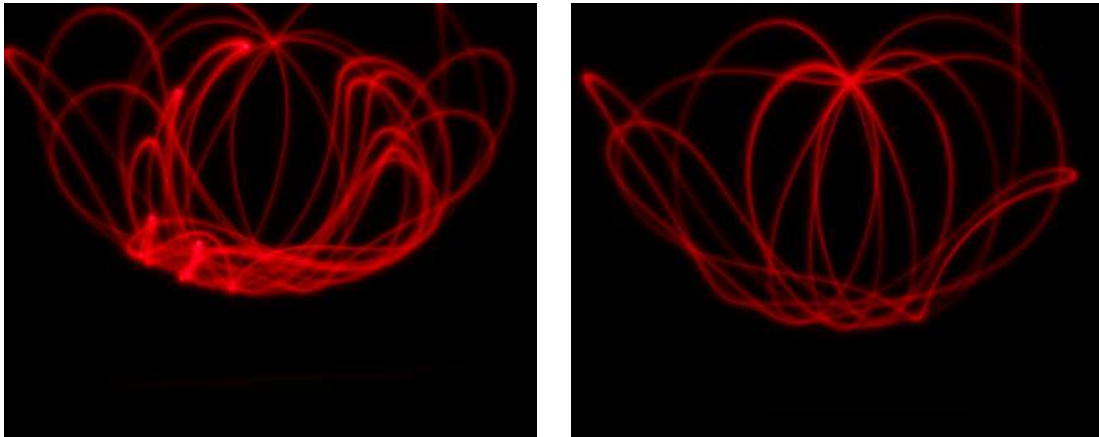
Un cop es va tenir el pèndol muntat es va buscar un suport. La idea que es va acabar duent a terme va ser la següent. El cargol superior del pèndol es passava a través d'un forat M8 fet en un llistó de fusta d'aproximadament 2,5 cm de gruix. Utilitzant una femella, el pèndol doble quedava fixat al llistó. El llistó es va incorporar a l'estructura cúbica de fusta utilitzada en l'estudi del pèndol simple i les representacions de les corbes de Lissajous. Per fer-ho, simplement es va unir a una de les quatre arestes superiors mitjançant dos serjants.

Havent fixat el pèndol en l'estructura cúbica el primer que es va observar va ser una millora dels resultats. El pèndol es mantenia molta més estona oscil·lant. Les causes no era una diferència en la força de fregament, ja que aquesta s'havia mantingut constant. Es va arribar a la conclusió que la millora es devia al fet que el nou suport era fix. En les proves fetes anteriorment per comprovar si el pèndol funcionava el pèndol l'aguantava jo mateixa o una altra persona. Involuntàriament, al agafar el pèndol amb les mans fèiem forces en contra les que ens feia el pèndol provocant que s'aturés més ràpidament.

Un cop el pèndol va estar muntat, es va voler fer una prova canviant la fusta inferior per la que s'havia utilitzat anteriorment (la més lleugera); la fusta superior es va mantenir. El que es va observar va ser un altre increment en el temps d'oscil·lació; si més no, en el temps que el pèndol es comportava caòticament. No durant tot el temps d'oscil·lació el pèndol descriu un moviment caòtic, a mesura que va perdent energia mecànica i es va aturant, el moviment passa a ser previsible.

A continuació es va decidir buscar un mètode adequat per enregistrar el moviment caòtic. La idea era utilitzar un LED situat a l'extrem del pèndol, d'aquesta manera, fent una fotografia amb una temps d'exposició llarg, es podria observar el moviment.

Es van realitzar les primeres fotografies situant el LED a l'extrem del pèndol. La fusta inferior que es va utilitzar va ser la que té més massa. A continuació es pot comparar una fotografia amb temps d'exposició 15s respecte una amb temps d'exposició 8s.



El que es va observar en aquestes imatges va ser que amb un temps d'exposició de 15 s en algunes zones els traços quedaven massa superposats i no es podien apreciar tots correctament. En la imatge amb temps d'exposició 8 s s'observa una diferència significativa ja que el temps no és suficient perquè quedin molts traços superposats però sí per observar el moviment caòtic que realitza el pèndol. També s'observa la correcció de la posició de la càmera.

Veient que amb el mètode de les fotografies amb una temps d'exposició llarg s'obtenien uns bons resultats, es va decidir que aquest seria el mètode que s'utilitzaria.

4.- EL PÈNDOL DOBLE: MOVIMENT CAÒTIC

4.3.- PRÀCTICA

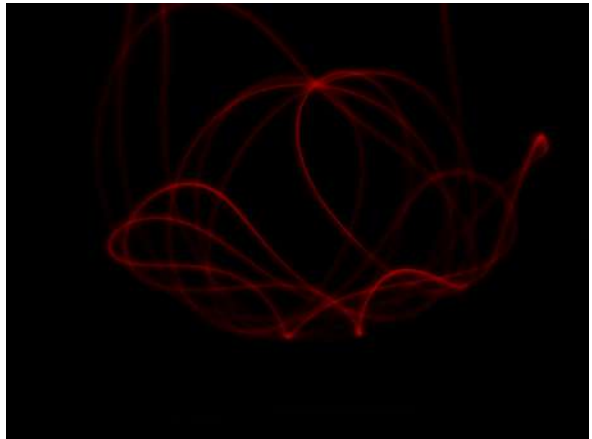
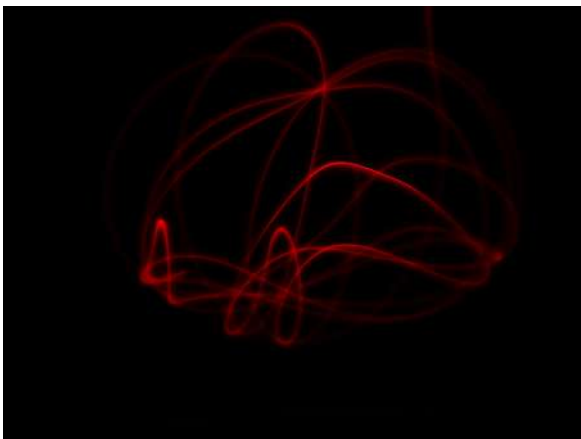
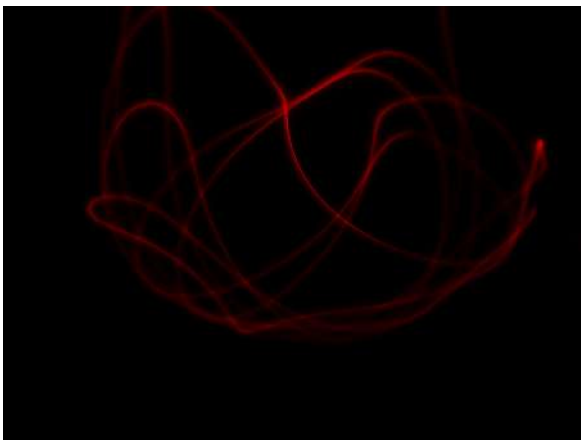
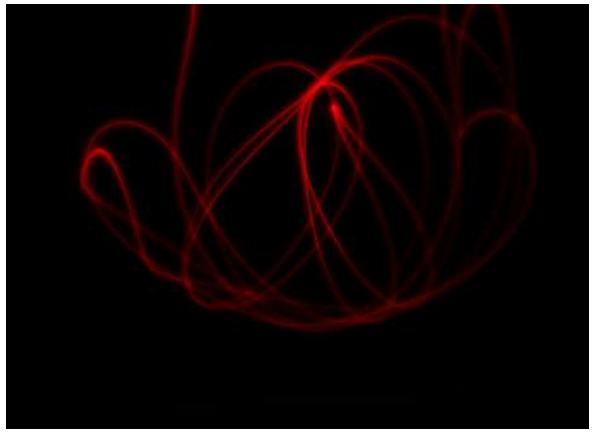
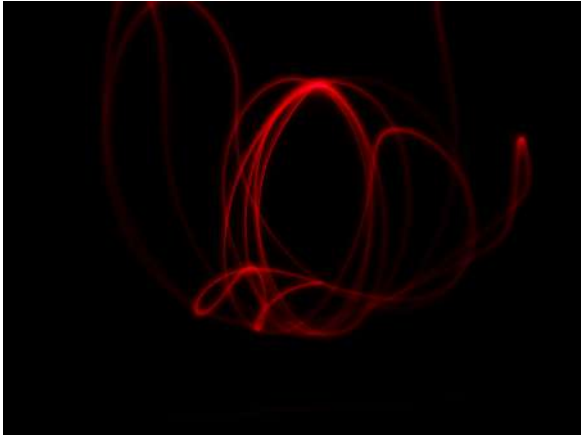
L'objectiu d'aquesta part del treball és demostrar què el pèndol doble realitza un moviment caòtic. Per fer-ho es deixarà anar el pèndol des de la mateixa posició inicial diverses vegades i es compararan les fotografies obtingudes. La hipòtesi és que totes les fotografies seran diferents entre elles.

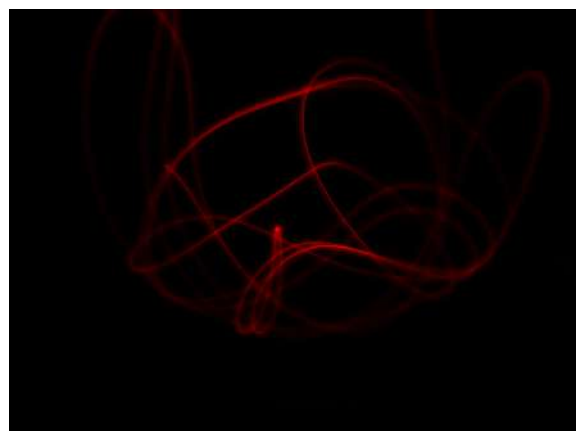
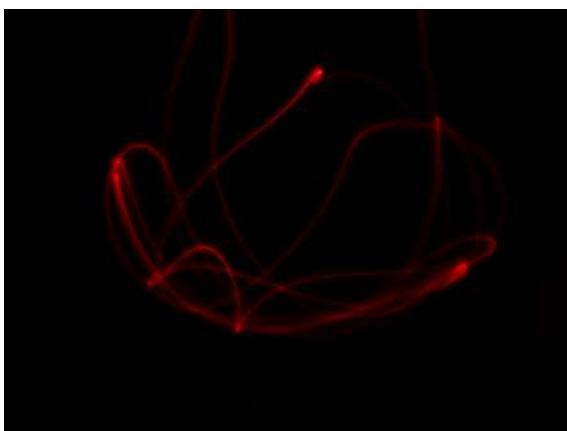
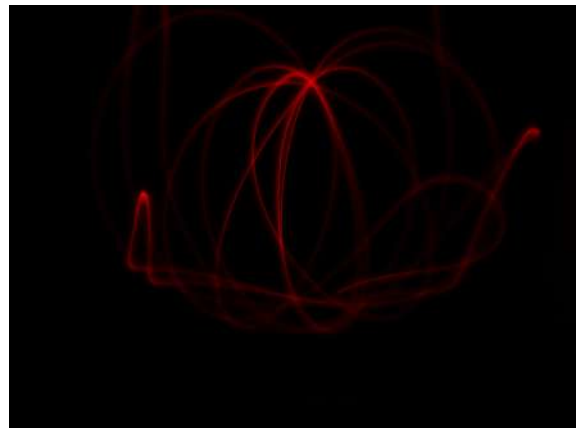
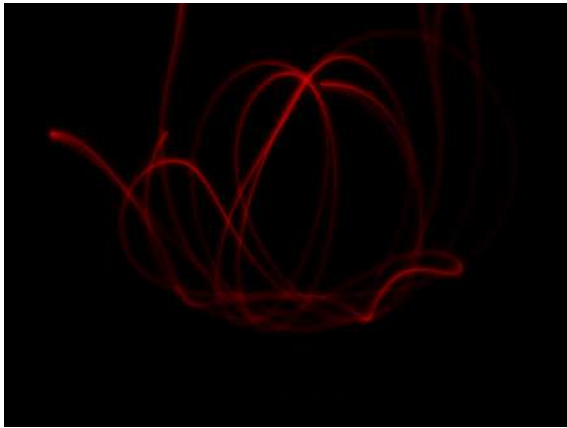
D'altra banda es vol comparar el moviment de l'extrem del pèndol amb el del punt central (el punt d'articulació entre els dos pèndols simples).

Per demostrar que el pèndol descriu un moviment caòtic (impredictible), es va determinar una posició inicial fàcil de reproduir. La posició inicial que es va determinar va ser situar el primer pèndol simple horitzontalment i el segon formant un angle de 90° respecte el primer (com s'observa en la imatge).



Es van realitzar 10 fotografies del moviment del pèndol. Les deu es van realitzar amb les mateixes característiques: el mateix pèndol (amb les fustes de més massa), la mateixa càmera en la mateixa posició, el mateix temps d'exposició (8s), la mateixa posició inicial; a més a més es van fer les deu seguides en el mateix espai (no es pot considerar que hi hagi hagut canvis en les condicions atmosfèriques o en la força de fregament amb l'aire).



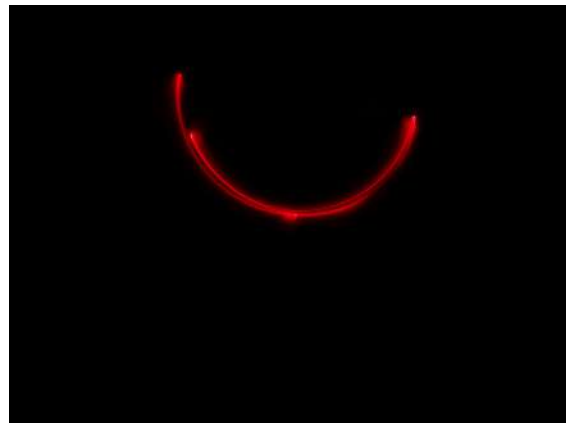
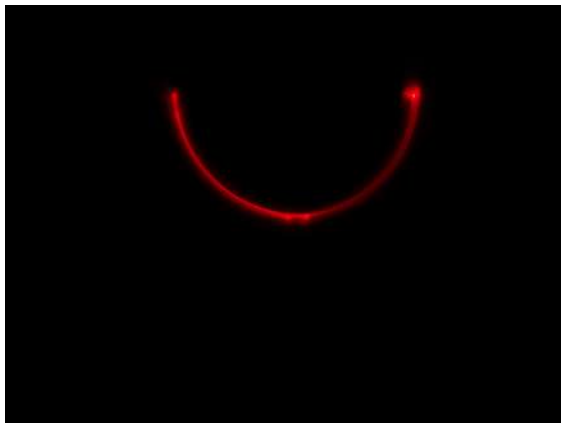
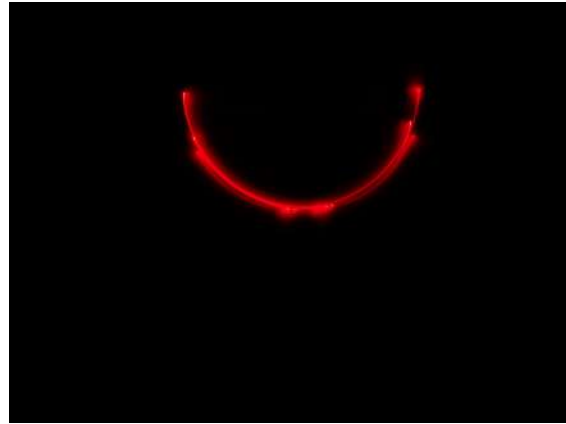
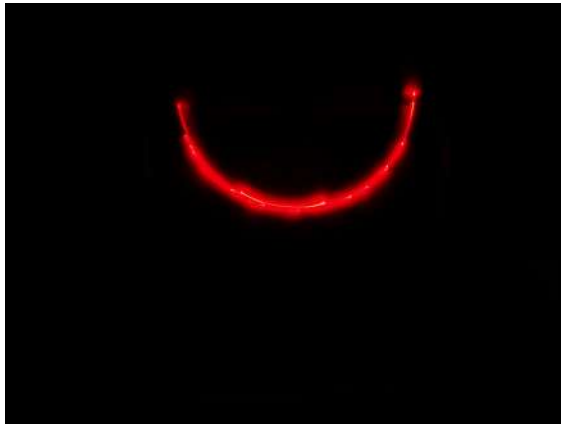


En les imatges anteriors s'observa que cada trajectòria és diferent; per tant, es pot concloure que el moviment d'un pèndol és impredecible (caòtic) encara que es llanci amb les mateixes condicions inicials i que les condicions en tots els moviments es mantinguin.

Com s'ha explicat anteriorment, el moviment d'un pèndol doble realment sí que és predecible; es pot arribar a descriure. Tot i així, degut a la seva sensibilitat a les condicions inicials, la seva trajectòria varia completament per qualsevol lleugera variació, per més petita que sigui, en les condicions inicials.

Per tant, si el pèndol ha recorregut trajectòries totalment diferents és degut a que les condicions inicials han variat lleugerament. El més possible és que el què variés fos la posició inicial (encara que la variació fos imperceptible per l'ull humà). També pot ser que hi influís lleugerament la manera de deixar-lo anar; és molt difícil que una persona realitzi un moviment de la mateixa manera múltiples vegades.

A continuació és mostren imatges obtingudes deixant anar el pèndol des de la mateixa posició que anteriorment i amb les mateixes condicions però situant el LED, no a l'extrem, sinó al punt central del pèndol (el punt d'articulació).



En les quatre imatges s'hi observa un arc d'aproximadament 180°. Aquesta observació és lògica ja que el que es representa és la trajectòria que segueix l'extrem del pèndol superior; que és un pèndol simple. Tot i això es pot determinar clarament que no es tracta d'un pèndol simple usual degut a les "irregularitats" en la mateixa trajectòria. Si es tractés d'un pèndol simple com els estudiats anteriorment observaríem com, partint d'un semicercle inicial, l'amplitud d'aquest aniria disminuint regularment amb el temps degut als efectes del fregament.

Es pot considerar que la segona imatge és la més semblant a la que s'obtidria amb un pèndol simple ja que és simètrica respecte l'eix vertical. De totes maneres s'observa com l'amplitud no disminueix regularment.

Es pot concloure que en l'extrem del primer pèndol simple el moviment també és caòtic (impredictible) degut a l'existència del segon pèndol.

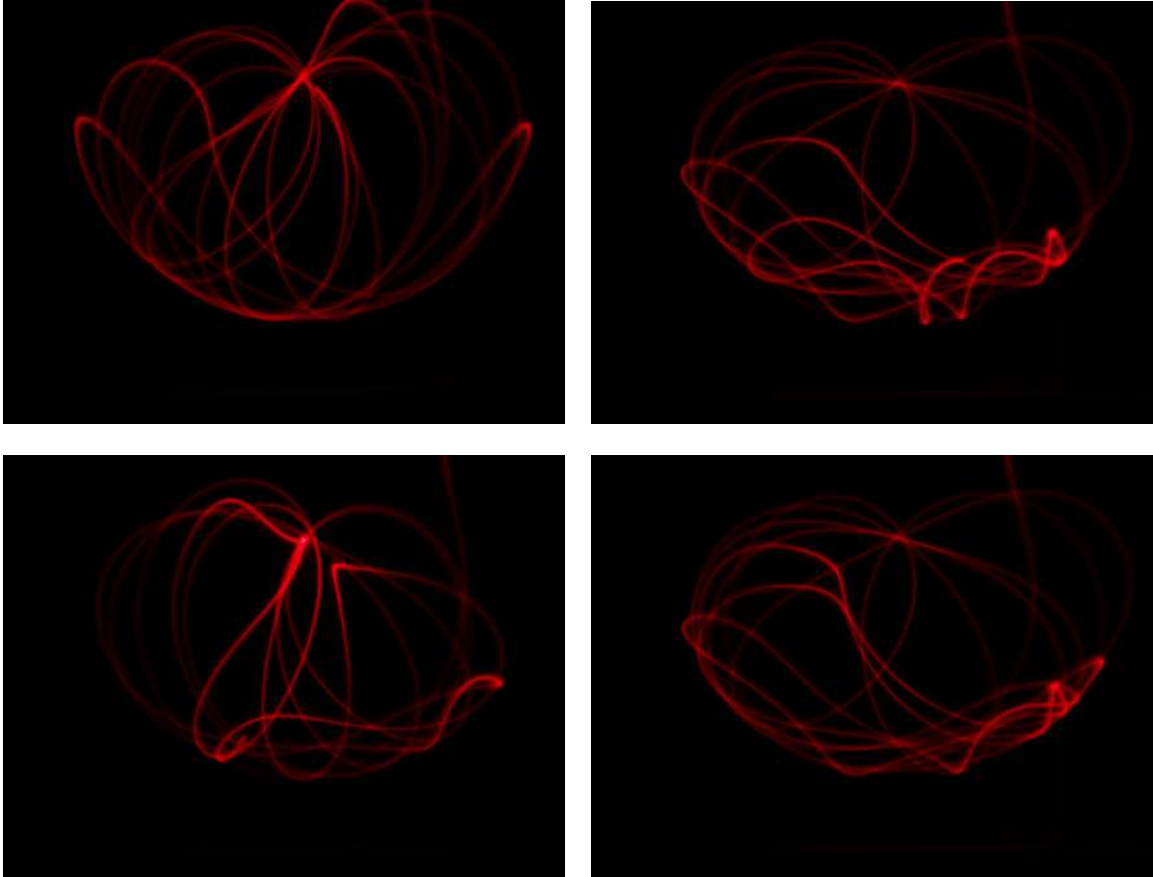
L'últim aspecte que es volia estudiar sobre el pèndol doble és un comentat anteriorment. Durant el procés de construcció del pèndol es va observar que canviant la fusta inferior per una més lleugera el moviment caòtic del pèndol era més llarg; el pèndol no perdia energia tant ràpidament.

El que es va fer va ser realitzar quatre fotografies de la trajectòria seguida pel pèndol amb la fusta més lleugera. L'únic aspecte que es va modificar va ser la fusta en sí; és va mantenir el punt de

llançament i el temps d'exposició. La intenció era poder compara les trajectòries obtingudes amb les obtingudes amb el pèndol anterior.

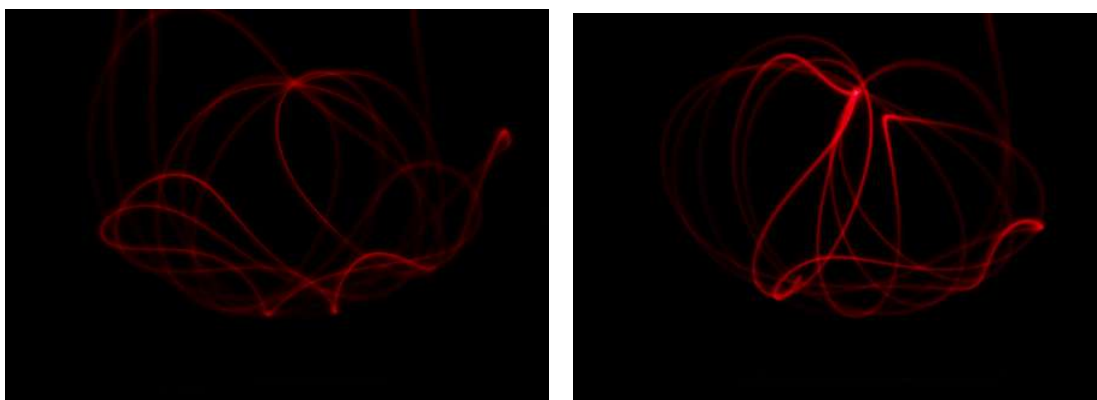
Per aquest pèndol no es van realitzar fotografies de la trajectòria del punt central ja que s'obtindria la mateixa representació que en el pèndol anterior; un semicercle.

A continuació s'adjunten les quatre fotografies obtingudes:



Observant les quatre imatges es pot observar que, tot i la variació de la fusta, el pèndol segueix tenint un comportament caòtic. En les dues imatges de la dreta s'observa una certa similitud; tot i així hi ha diferències. Tot i que dues trajectòries siguin molt semblants entre elles; sempre s'acabaran produint certes diferències que provocaran que el moviment sigui impredecible.

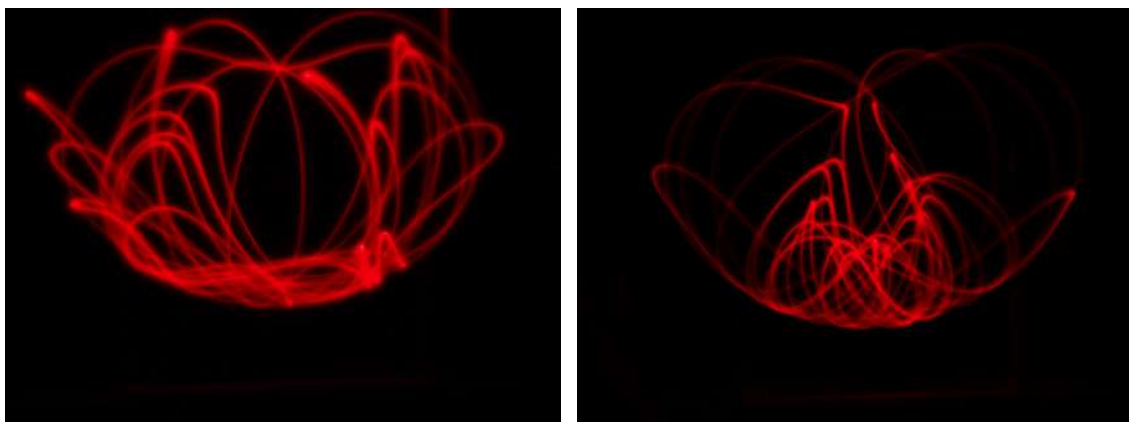
A continuació trobem una fotografia obtinguda amb el pèndol inicial i una de les més recents amb l'objectiu de poder comparar-les; les dues han estat escollides aleatòriament:



La primera imatge és la obtinguda amb el pèndol inicial i la segona la del pèndol amb la fusta lleugera. Es creia que es podria observar una diferència significativa però no és així; no es pot observar cap diferència (a excepció de les trajectòries que són diferents perquè el moviment és caòtic). La hipòtesi era que en la segona imatge hi hauria més girs; més traços. En realitat, al comparar el conjunt de les primeres fotografies amb el de les segones; sí que s'observa un cert increment de girs (més moviment) en les segones. Tot i així la variació és molt lleu.

Cal tenir en compte que anteriorment s'ha dit que el que s'observava al canviar la fusta, era un increment del temps en el qual és moviment del pèndol és caòtic i no que el moviment sigui més ràpid. Al fer la comparació de les dues imatges anteriors s'ha comparat la rapidesa del moviment (quin havia realitzat més girs, recorregut més espai, en 8 s). La comparació correcte seria amb un temps més llarg; quan un dels pèndols (teòricament el primer) comencés a perdre energia.

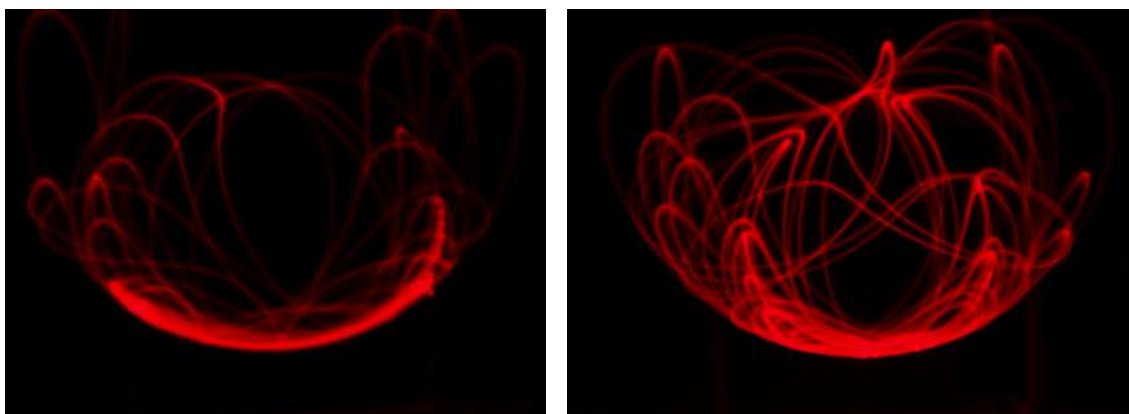
Es va fer la comparació amb un temps de 15 s:



Tampoc s'observa una diferència gaire significativa ja que els dos moviments continuen sent caòtics. Tot i així en el primer es comença a observar una certa uniformitat.

Per poder demostrar la hipòtesi era necessari poder comparar dues fotografies on el moviment (almenys en un dels pèndols) hagués perdut l'energia suficient per deixar de ser caòtic.

El que es va fer va ser realitzar dues noves fotografies, una amb cada pèndol, amb el temps d'exposició màxim que permet la càmera amb la qual s'ha realitzat totes les fotografies anteriors. Aquest temps d'exposició màxim és de 30s. S'han obtingut les dues imatges següents:



La primera imatge s'ha obtingut amb el pèndol amb la fusta de més massa; s'observa el moviment caòtic del pèndol però el que destaca és un fragment de la circumferència en el qual el pèndol ha

estat oscil·lant un cop ha perdut massa energia mecànica per continuar mantenint el moviment caòtic.

En la segona imatge, obtinguda canviant la segona fusta per la més lleugera, el que s'observa és "més moviment caòtic"; és a dir, que el moviment caòtic ha estat més llarg. Tot i així també s'observa que el pèndol havia començat a realitzar un moviment predictable, no caòtic, ja que els últims traços mostren una oscil·lació d'una amplitud determinada.

Amb un temps d'exposició de 30 s s'ha pogut demostrar la hipòtesi; al reduir la massa de la fusta inferior el pèndol conserva més la seva energia mecànica de manera que el moviment caòtic es manté durant més temps.

No s'ha pogut determinar la causa de la diferència en el comportament dels dos pèndols; però s'ha suposat es següent. Es va observar que al tenir menys massa el pèndol inferior adquiria més acceleració (degut a que la força que transmet el primer pèndol simple al segon es manté més o menys constant); aquest fet d'adquirir més acceleració podria ser la causa de la millor conservació de l'energia mecànica.

Si a més a més de la segona fusta s'hagués canviat la primera no s'hauria pogut observar aquest increment de temps realitzant un moviment caòtic. La raó és que la força transmesa pel primer pèndol al segon s'hagués reduït proporcionalment a la reducció de la massa; s'haurien mantingut les mateixes proporcions que en el pèndol amb les dues fustes pesades.

CONCLUSIONS

Tots els resultats obtinguts en les parts pràctiques del treball han estat analitzats en els seus apartats respectius. A més de l'anàlisi dels resultats s'han redactat unes conclusions també en cada apartat. En cadascuna de les conclusions s'hi comenta si s'han assolit els objectius o no, i si les hipòtesis han estat demostrades. En cas que no s'hagin assolit els objectius, es planteja quines en són les causes o si caldria modificar els mètodes mitjançant els quals s'han obtingut els resultats. Si els resultats no corresponen amb les hipòtesis, s'intenta determinar si aquestes van ser incorrectament plantejades o bé si són els resultats els que no són correctes; i la raó per què no ho són.

En les pràctiques del pèndol simple, els apartats de l'anàlisi dels resultats i les conclusions s'identifiquen amb el títol corresponent. A diferència, en la pràctica del pèndol de sorra i del pèndol doble no s'ha fet una separació per apartats sinó que s'han extret les conclusions a mesura que s'anaven obtenint els resultats.

Degut a que, com s'ha explicat, els resultats ja han estat analitzats; en aquest apartat del treball es farà un comentari sobre si s'han assolit els objectius generals alhora que s'analitzarà el procés de realització del treball.

La idea inicial del treball era centrar-lo en les corbes de Lissajous i fer un breu estudi del pèndol simple per introduir alguns dels conceptes: l'amplitud d'oscil·lació, el període... El pèndol doble s'afegiria com un annex o com un apartat secundari (com a exemple de moviment caòtic).

Posteriorment es va acordar amb el tutor dedicar més espai del treball al pèndol simple i començar fent l'estudi d'aquest. La raó és que el concepte és més simple i fonamental, i que les mesures es podrien realitzar amb facilitat.

L'objectiu conjunt de les sis pràctiques del pèndol simple era demostrar experimentalment algunes de les seves bases. Es va estudiar si el període d'un pèndol varia segons la llargada del seu fil, la seva massa o la seva amplitud. També es van calcular els efectes de la fricció en diferents pèndols.

Inicialment en les pràctiques del pèndol simple no s'inclouïa la de la mesura del valor de la gravetat. Aquesta última pràctica es va afegir posteriorment.

Els resultats obtinguts van permetre demostrar experimentalment que les hipòtesis de cada pràctica eren correctes, de manera que l'objectiu d'estudiar el moviment d'un pèndol simple i els paràmetres que el determinen es va assolir. Cal dir que algunes de les pràctiques es van ampliar a mesura que es van anar obtenint resultats; per exemple; en la primera es va plantejar una nova hipòtesi després d'haver demostrat que la inicial havia estat incorrectament plantejada.

La segona part del treball; la dedicada a l'estudi de les corbes de Lissajous; es va començar estudiant com construir el pèndol de sorra alhora que es cercava informació sobre les corbes de Lissajous i el moviment harmònic complex. A diferència que en la primera part, en aquesta no s'havien preestablert unes pràctiques ni el procediment que es seguiria. No havia estat possible fer-ho ja que prèviament al seu estudi es desconeixia el concepte del moviment harmònic complex i les corbes de Lissajous i, per tant, no es podia determinar quins paràmetres es podrien estudiar i quins no.

L'objectiu era poder determinar quina corba es representaria segons els paràmetres del pèndol. El procediment que es va seguir inicialment es basava en l'observació. Es representava una corba; es determinaven els seus paràmetres i s'intentava relacionar-los amb la seva posició inicial. Finalment es va poder comprovar que aquest mètode no permetia obtenir els resultats esperats.

Per obtenir els resultats que es van acabar obtenint; es va utilitzar un mètode per determinar la diferència de fase en funció de la posició inicial. Es va assolir l'objectiu inicial de poder determinar la corba que es representaria però, a diferència del que s'esperava inicialment, diverses corbes no es van poder representar degut a limitacions del mateix pèndol.

L'estudi del pèndol doble va ser relativament senzill ja que no es va trobar cap dificultat a l'hora de demostrar que realitza un moviment caòtic. La complexitat d'aquest apartat del treball resideix en la construcció del pèndol: en les diverses modificacions que es van haver de fer per reduir el fregament entre les peces i millorar l'estabilitat del conjunt.

Tot i que, com s'ha exposat en els últims tres paràgrafs, els objectius del treball s'han assolit; hi ha alguns punts en concret que no es van poder desenvolupar, principalment per falta de coneixements. Per exemple; no es va poder explicar perquè el pèndol simple adquireix una certa rotació quan descriu una trajectòria circular (tot i que es va plantejar una hipòtesi); i tampoc es van poder demostrar moltes de les fórmules ja que les demostracions requerien aplicar mètodes de derivació i integració complexos dels quals no es tenia coneixement.

Aquesta falta de coneixements també es va percebre a l'hora d'estudiar diferents conceptes; principalment el moviment harmònic simple i el complex. D'aquest dos conceptes no se n'havia sentit a parlar prèviament i inicialment no va ser fàcil entendre què era cada paràmetre de les equacions i quins eren els seus efectes en el moviment dels pèndols.

També en relació al desenvolupament del treball, una de les dificultats que es va trobar principalment a l'inici del projecte va ser que no es disposava de cap guió o índex detallat amb tots els apartats que acabarien formant el treball. Sí que s'havia determinat un índex general però no s'hi havia pogut especificar què s'estudiaria en cada apartat o quin procediment es seguiria pels motius explicats anteriorment relacionats amb el desconeixement dels conceptes.

Molts dels apartats, procediments i mètodes es van anar determinant a mesura que s'avançava en el treball i s'entien més els conceptes que s'estaven estudiant. Apartats o procediments que exemplifiquen el què s'ha explicat són: l'apartat de mesura del valor de la gravetat (que es va afegir un cop es va conèixer la fórmula de la periodicitat del pèndol simple), el mètode de determinació de la diferència de fase, o l'estudi de la trajectòria que descriu un pèndol simple mitjançant el pèndol de sorra.

Com a conclusió general; s'han pogut assolir els objectius inicials en cadascun dels apartats del treball tot i que els procediments a seguir s'han anat modificant a mesura que s'ha anat avançant en el procés.

FONTS DOCUMENTALS COMENTADES

PÈNDOL SIMPLE

Definició i característiques generals

El Péndulo.

<www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/no_lineales/pendulo2/pendulo2.html>.

Péndulo Simple. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<es.wikipedia.org/wiki/Péndulo_simple>.

PÉREZ, Ricardo. *El péndulo: un clásico que no pasa de moda.* Cienciorama

<http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/484_cienciorama.pdf>

Moviment harmònic simple

Amplitud Oscilaciones y Fuerzas En Péndulo a Partir De Ángulo.

<www.fisicalab.com/apartado/mas-y-pendulos>.

Longitud De Péndulo Conocida Frecuencia En M.a.s.

<www.fisicalab.com/apartado/dinamica-mas#contenidos>.

Moviment Harmònic Simple. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<ca.wikipedia.org/wiki/Moviment_harmònic_simple#MHS_amb_trajectòria_circular:_pèndol>.

CONSERVACIÓ DE L'ENERGIA MECÀNICA EN UN PÈNDOL SIMPLE

Rugositat i com mesurar-la

Rugosímetre. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<ca.wikipedia.org/wiki/Rugosímetre>.

Surface Roughness Measurement: Essential for Technology. zygo | Metrology Business Center. <www.zygo.com/?/met/profilers/surfaceroughnessmeasurement.htm>.

MESURA DE LA GRAVETAT UTILZANT PÈNDOLS SIMPLES

Pèndol simple com a gravímetre

Pendulum | Gravity measurement. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<en.wikipedia.org/wiki/Pendulum#Gravity_measurement>.

Valors de la gravetat en diferents ciutats

Local gravity chart. Montana State University | Department of Physics.

<www.physics.montana.edu/demonstrations/video/1mechanics/demos/localgravitychart.html>.

Calculadora del valor de la gravetat en qualsevol punt de la Terra i fórmules utilitzades per fer els càlculs

WaBis. Earth Gravity Calculator.

<walter.bislins.ch/bloge/index.asp?page=Earth+Gravity+Calculator>.

REPRESENTACIONS DE LA TRAJECTÒRIA D'UN PÈNDOL SIMPLE

Moment d'inèrcia en un pèndol simple

Péndulo físico y momentos de inercia. Departamento de Física Aplicada | Universidad de Castilla-La Mancha | Escuela Técnica Superior Ing. Agrónomos.
<https://previa.uclm.es/profesorado/ajbarbero/Practicas/06_Pendulo_fisico.pdf>

Inercia Rotacional. Khan Academy.

<es.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/torque-tutorial/a/rotational-inertia>.

Momento De Inercia. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<[es.wikipedia.org/wiki/Momento de inercia](https://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inercia)>.

CORBES DE LISSAJOUS

Descobrimet i estudi

Figures de Lissajous.

<http://www.iessantanyi.cat/exposiciomatematicues/web2008/cartells/a3_Lissajous.pdf>.

Lissajous Figure. Encyclopædia Britannica, Inc. | *Britannica, The Editors of Encyclopaedia.*

<www.britannica.com/science/Lissajous-figure>.

Equacions que les determinen

Lissajous Curve. Wolfram MathWorld.

<mathworld.wolfram.com/LissajousCurve.html>.

Lissajous Curve. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve>.

Figuras de Lissajous: dibujando el sonido. Epsilones.

<www.epsilones.com/paginas/historias/historias-038-lissajous-1-dibujando.html>.

Moviment harmònic complex

Moviment Harmònic Complex. Wikipedia, Wikimedia Foundation.

<ca.wikipedia.org/wiki/Moviment_harmònic_complex>.

Diferència de fase

Medida De La Frecuencia y Del Desfase De Dos Seales.

<www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/lissajous/lissajous.htm>.

PÈNDOL DOBLE

Definició i informació relativa al seu moviment

Double Pendulum. Math24.

<www.math24.net/double-pendulum/>.

WEISSTEIN, Eric. *Double Pendulum*. Eric Weisstein's World of Physics | Scienceworld.wolfram.com.

<scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>.

Double Pendulum. Wikipedia, Wikimedia Foundation

<en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum>.

ANNEXOS

ANNEX I: DEMOSTRACIÓ DE $\sin(\alpha) \cong \alpha$ (per α tendeix a 0)

Comparació entre el valor d'un angle i el seu sinus.

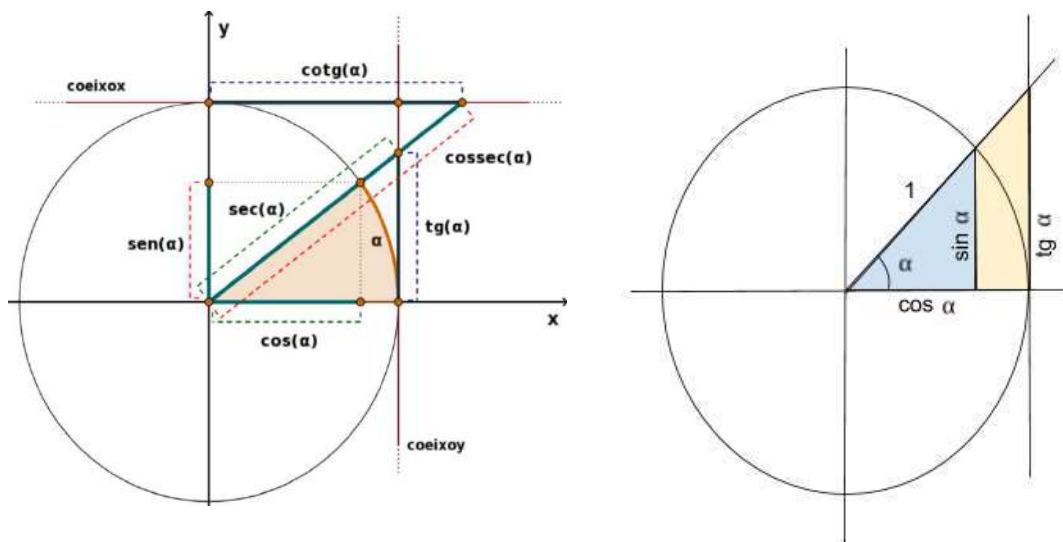
Θ (°)	Θ (rad)	sen Θ	dif. %	Θ (°)	Θ (rad)	sen Θ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$$

La igualtat $\sin(\alpha) \cong \alpha$ s'obté a partir del límit trigonomètric $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$.

Si demostrem aquest límit sabem que per α tendeix a 0, $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ tendeix a 1 i, per tant, $\sin(\alpha)$ tendeix a α ; que és el que volem demostrar.

Per fer la demostració del límit trigonomètric anterior hem de tenir en compte la circumferència trigonomètrica.



Observant la segona de les figures anteriors podem afirmar:

àrea del triangle blau < àrea sector circular < àrea del triangle groc (triangle blau + àrea groga)

sabent que l'àrea d'un triangle és $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ i que una de les fórmules per calcular l'àrea d'un sector circular és $A = \frac{\text{radi}^2 \cdot \alpha}{2}$ obtenim:

$$\frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\tan(\alpha)}{2}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) < \alpha < \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) < \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

és a dir, dues igualtats:

$$\cos(\alpha) < \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \qquad \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} < \frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \cos(\alpha) < \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

que ens mostren que la funció $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ es troba compresa entre la $\cos(\alpha)$ i la $\sec(\alpha)$

Quan una funció es troba compresa entre dues altres funcions podem determinar el seu límit en un punt si coneixem el límit de les dues altres funcions en el mateix punt i els dos límits són iguals entre si. Per tant busquem el límit per α tendeix a 0 de $\cos(\alpha)$ i $\sec(\alpha)$.

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos(\alpha) = 1$
aquest límit és molt visual a la circumferència trigonomètrica ja que sabem que el $\cos(\alpha)$ s'hi representa com el catet horitzontal del triangle i es veu clarament que com més petit sigui l'angle més gran és el $\cos(\alpha)$ fins arribar al seu màxim; el radi de la circumferència.

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sec(\alpha) = 1$
tot i que la funció $\sec(\alpha)$ no creix inversament a l'angle com la $\cos(\alpha)$, a la circumferència trigonomètrica també es pot observar que quan l'angle tendeix a 0 la secant, la hipotenusa del triangle que té per catets el radi i la $\tan(\alpha)$, tendeix a 1. També es pot arribar a aquesta afirmació amb el Teorema de Pitàgores ja que la hipotenusa al quadrat és la suma dels catets al quadrat i quan α tendeix a 0 un dels catets, la $\tan(\alpha)$, tendeix a 0 mentre que l'altre, el radi de la circumferència trigonomètrica, continua sent 1.

Com que els dos límits són iguals podem determinar el límit per α tendeix a 0 de qualsevol funció compresa entre les dues; per tant:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$$

ANNEX II: DIARI DE RECERCA

21/03/2019 – Entrega de la fitxa del Treball de Recerca al tutor. En l'esquema es descriu una primera part on es parla de diferents tipus de pèndols i de les corbes de Lissajous; i una segona part centrada en l'estudi del comportament del pèndol de sorra.

24/04/2019 – Primera trobada amb el tutor. S'explica la idea del treball i s'acorda començar amb la recerca d'informació i amb la construcció i estudi del pèndol simple.

06-12/05/2019 – Es comença la recerca d'informació sobre les corbes de Lissajous i el disseny de l'estructura del pèndol.

13-19/05/2019 – Es continua la recerca d'informació tot i que aquest cop es busca informació sobre el pèndol simple (s'ha pensat que és prioritari buscar primer la informació sobre el pèndol simple ja que es començarà estudiant aquest tipus de pèndol). Paral·lelament a la recerca d'informació, s'acaba el disseny de l'estructura i es compra tot el material necessari per construir-la.

20/05/2019 – Es construeixen els dos quadrats de 80 x 80 cm que seran la base i la cara superior de l'estructura del pèndol.

21/05/2019 – S'avança la teòrica del pèndol simple i es posen escaires als quadrats de fusta.

23/05/2019 – S'acaba la teòrica del pèndol simple.

27/05/2019 – Es fan els forats pels cargols i es munta l'estructura per primera vegada.

12/06/2019 – Es comença a treballar en el desenvolupament de la pràctica sobre la variació del períodes segons l'amplitud del pèndol.

16-17/06/2019 – Es fan les demostracions de la fórmula de l'acceleració i de $\sin x = x$ (quan x tendeix a 0). Es treballa en la fitxa de la pràctica començada el dia 12. S'amplia la teòrica del pèndol simple; una de les coses que s'ha afegit és el comportament del pèndol per amplituds superiors als 20° .

18/06/2019 – Es comença la fitxa de la pràctica 2 i s'acaba la construcció de l'estructura del pèndol.

19/06/2019 – Es treballa en la teòrica sobre la mesura de la gravetat i en la fitxa de la construcció de l'estructura. Es comença a fer els primers intents de penjar un pèndol a l'estructura.

21/06/2019 – Es fan les fitxes de les pràctiques 3 i 4.

25/06/2019 – Es fa la fitxa de la pràctica 5 i una representació en 3D de l'estructura.

27/06/2019 – Trobada amb el tutor (primera trobada que consta en el dossier de seguiment del treball).

28/06/2019 – Es fan les primeres mesures de la pràctica 1 i s'extreuen les primeres conclusions. S'estableix l'índex provisional.

01/07/2019 – Es fan les segones mesures de la primera pràctica i s'acaben les conclusions.

03/07/2019 – S'acaba de redactar la teòrica del pèndol simple i de la mesura de la gravetat utilitzant pèndols simples.

05/07/2019 – Es fan les mesures i es comencen les conclusions de la segona pràctica.

09/07/2019 – S'envia l'índex provisional al tutor per tal que verifiqui que és correcte. Es fan les mesures de la quarta pràctica i s'analitzen els resultats de la segona.

16/07/2019 – Es comença a preparar el pèndol de sorra i es fan les primeres proves. També es treballa en la teòrica del pèndol doble.

18/07/2019 – Es fan les mesures i càlculs de la pràctica de calcular la gravetat. S'acaben de redactar les conclusions de la pràctica 4. S'envia un correu al tutor per explicar que s'ha estat fent i plantejar què s'ha de fer a continuació.

24/07/2019 – S'avança la teòrica tant del pèndol doble com de les corbes de Lissajous.

26/07/2019 – Es fan les gravacions de la pràctica 5.

27/07/2019 – A partir de les gravacions, es fan les mesures de la pràctica 5 i es planteja la construcció del pèndol doble.

30/07/2019 – Es comença a redactar les conclusions tant de la pràctica 5 com de la mesura de la gravetat.

02/08/2019 – S'adquireix el material necessari per construir el pèndol doble i es comença a construir-lo fent els forats en la fusta i muntant les estructures dels coixinets.

03/08/2019 – S'acaben les conclusions de la mesura de la gravetat; s'hi ha afegit el càlcul de la gravetat a Igualada i la demostració que al elevar un valor al quadrat el seu error es duplica.

29/08/2019 – S'avança en la construcció tant del pèndol doble com del de sorra. Es comencen a fer representacions amb aquest últim per tal de determinar quines han de ser les seves característiques per obtenir els millors resultats.

02/09/2019 – Utilitzant el pèndol de sorra es realitzen diverses representacions de trajectòries circulars d'un pèndol simple i es comparen entre elles.

05/09/2019 – Es comença a fer representacions de les corbes de Lissajous; primerament es fan els càlculs sobre quines han de ser les longituds dels fils en cada cas. També s'avança en el pèndol doble, modificant-lo per millorar-ne l'estabilitat.

09/09/2019 – Segona trobada amb el tutor de recerca. Es presenta tota la feina feta des de la primera trobada. S'acorda continuar avançant en la representació de les corbes de Lissajous i l'estudi del pèndol doble.

14/09/2019 – Es continua l'estudi de les corbes Lissajous; concretament s'intenta determinar les causes de la diferència de fase.

16/09/2019 – Es fan més representacions de les corbes de Lissajous utilitzant un altre pèndol amb la intenció de poder obtenir conclusions.

17/09/2019 – S'acaba de construir el pèndol doble i es planteja com enregistrar el moviment caòtic.

18/09/2019 – Es fan les primeres proves amb les fotografies amb temps d'exposició llarg per captar la trajectòria del pèndol doble. Avanços en l'estudi de les corbes de Lissajous.

20/09/2019 – Es determina un mètode per calcular la diferència de fase i es comencen a fer proves utilitzant-lo.

23/09/2019 – Es treballa en el pèndol doble realitzant i analitzant fotografies.

24/09/2019 – Es comencen a fer els gràfics de dades de les pràctiques del pèndol simple.

26/09/2019 – S'acaben els gràfics i la revisió de totes les pràctiques del pèndol simple.

28/09/2019 – Es fan diverses representacions de corbes de Lissajous amb un nou pèndol; s'ha canviat la relació entre les freqüències dels dos eixos.

30/09/2019 – Es realitzen noves fotografies del pèndol doble després d'haver canviat una de les fustes; la segona.

01/10/2019 – S'analitzen les fotografies obtingudes anteriorment amb el pèndol doble.

02/10/2019 – Es demostra la hipòtesis del pèndol doble sobre la variació de la conservació de l'energia i es fan unes últimes representacions de les corbes de Lissajous amb un pèndol $a/b=1/2$.

05/10/2019 – S'estableix l'ordre definitiu de les pràctiques del pèndol simple i s'unifiquen en un sol document. Es comença a redactar la introducció del treball.

07/10/2019 – S'acaba la introducció i es fa una primera revisió de diverses parts del treball; especialment de les primeres que es van redactar.

08/10/2019 – Es fa el resum del treball tant en català com en anglès.

10/10/2019 – Es fa la bibliografia; classificant totes les pàgines web consultades en diversos apartats depenent de la informació que se'n va extreure.

11/10/2019 – Tercera trobada amb el tutor de recerca. S'acorda que tant aviat com s'hagin unificat totes les parts del treball i redactat les conclusions, s'enviarà l'esborrany al tutor.

13/10/2019 – S'unifiquen totes les parts del treball en un sol document i es comencen a redactar les conclusions.

15/10/2019 – S'acaben de redactar les conclusions i es comença a revisar el treball.

19/10/2019 – Es continua la revisió del treball donant format a les taules i a les imatges.

21/10/2019 – 25/10/2019 – Es llegeix tot el treball complet fent les modificacions necessàries.

26/10/2019 – S'envia l'esborrany del treball al tutor.

ANNEX III: DESPESES

ESTRUCTURA DEL PÈNDOL

Fustes (8 llistons (28x28mm) de 80 cm i 4 de 74,4 cm): 21,85 €

Ferreteria (inclou: cola blanca, 8 escaires, 8 cargols M6, 8 femelles de papallona M6, 16 volanderes M6 i 32 visos): 4,65€

1 m² de reixa metàl·lica: 5€

Subtotal: 31,5€

PÈNDOL DOBLE

4 cargols M8: 0,39€

6 volanderes M8 de niló: 0,40€

4 femelles M8 de niló: 0,37€

4 coixinets de 22 mm: 25,90€

Cartolina blanca 50x65 cm (240 g): 0,35€

Cartolina negra 50x65 cm (240 g): 0,80€

Subtotal: 28,21€

TOTAL: 59,71€