
ANNEX

1 Construccions d'origami

Al llarg d'aquest apartat de l'annex es presentaran figures d'origami construïdes per mi amb l'indispensable ajuda dels vídeos de YouTube els quals m'han proporcionat instruccions visuals per poder dur a terme les construccions. A més, degut a la visita que vaig efectuar el passat mes de juny del 2019 a l'EMOZ (el museu d'origami de Saragossa) aprofito per mostrar uns dels models més impressionants que hi vaig trobar.

1.1 Llistat de les figures realitzades

A la taula 5 trobareu totes les figures d'origami modular que vaig realitzar per aquest treball així com el tipus de peces que he fet servir per a cadascun i la quantitat de peces necessitades.

Com es pot observar a la taula 5 vaig haver d'aprendre realitzar 6 tipus de peces i com encaixar-les correctament. Gràcies a l'estructura simètrica dels models un cop vaig entendre com ajuntar dues o tres peces la construcció final ja no quedava tant complicada.

D'entre els 9 models presentats el que més peces ha necessitat és el tor però la figura més difícil i la construcció de la qual m'ha suposat un gran repte és la dels cinc tetraedres que s'intersecten. A continuació s'explicaran alguns detalls sobre la construcció d'aquestes dues figures.

Construcció del tor

Per a construir el tor de 360 peces primerament s'han de saber realitzar peces PHiZZ. Després, és necessari construir totes les 360 peces abans de començar a encaixar-les. A continuació, com ja s'ha explicat en la part principal del treball, cal tenir clar el nombre de pentàgons, hexàgons i heptàgons que formaran el tor i, a partir d'aquí, s'ha de buscar un diagrama corresponent per així saber de quina manera s'han de col·locar les peces.

Els diagrames són petites representacions simplificades del model final i són molt útils especialment en figures de grans dimensions. Per el tor existeix un diagrama dissenyat

per Tom Hull (figura 65), que és el que vaig fer servir. Aquest només il·lustra una part del tor i cal repetir-la fins completar la figura.

Cap al final de la construcció comença a aparèixer tensió entre les peces i, per causa de no disposar de paper d'alta qualitat, no es mantenen gaire unides, per la qual cosa va ser indispensable utilitzar adhesiu. Finalment, després de molts dies de treball el tor queda acabat amb el nombre exacte de peces.

Havent utilitzat peces de dimensions 10x10 el tor ha resultat tenir un diàmetre interior de 60 cm. Les següents il·lustracions mostren parts del procés de construcció, el qual ha tingut com a resultat final el tor de la taula 5.



Figura 65: Diagrama per el tor de 360 peces

FONT: Tom Hull



Figura 66: Les 360 peces necessàries per construir el tor

FONT PRÒPIA



Figura 67: Procès de construcció del tor

FONT PRÒPIA

Construcció de cinc tetraedres intersectats

Aquest model, com ja he comentat abans, és el que té la construcció més difícil i, de fet, està considerat com una de les figures d'origami modular més complicades i alhora més fascinants. Tot i que a primera vista sembla una construcció caòtica i sense sentit realment té un fort fonament matemàtic.

La base d'aquesta figura la constitueixen dos sòlids platònics: el dodecaedre i el tetraedre. Si ens imaginem un dodecaedre amb cares que permeten veure l'interior i situem un punt en vèrtexs interiors equidistants i els unim amb línies resultarà l'estructura d'un tetraedre. Així, s'obté un tetraedre inscrit en el dodecaedre. Però, com que el dodecaedre té 20 vèrtexs i el tetraedre en té 4 resulta que hi ha 5 maneres de posicionar el tetraedre inscrit. Així, per analogia també ens adonem que a l'interior del dodecaedre hi caben alhora cinc tetraedres.

Així, Tom Hull va tenir la idea de crear aquest objecte matemàtic utilitzant l'origami però amb un petit canvi. Ja que crear els cinc tetraedres intersectats figura 69 significaria fer forats al paper, l'*origamista* va pensar que fer només les arestes estaria millor. Per tant, ja no hi haurien cares que impedeixin el pas de les altres peces. Amb aquest detall resolt també li faltava determinar quin tipus de peces i de quines dimensions faria servir. Va optar finalment per la peça que s'observa a la taula 5 i de ratio del paper de 1:3.

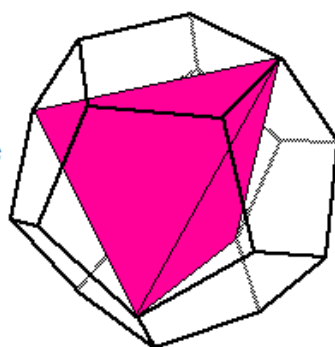
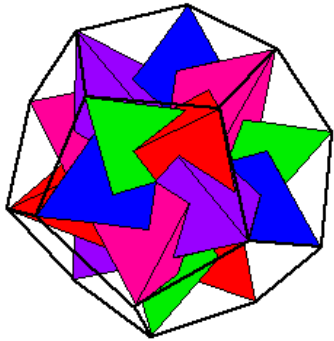


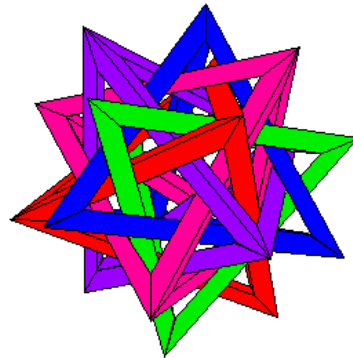
Figura 68: Tetraedre inscrit en un dodecaedre

FONT:<http://mars.wne.edu/~thull/fit.html>



*Figura 69: Cinc tetraedres
inscrits en un dodecaedre*

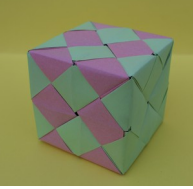





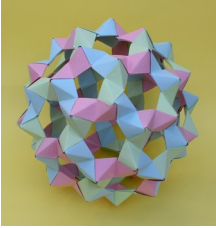
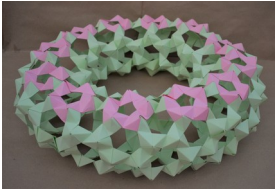



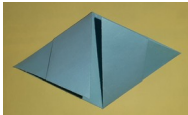






FONT:
<http://mars.wne.edu/~thull/fit.html>



*Figura 70: Cinc tetraedres
intersectats*

FONT:
<http://mars.wne.edu/~thull/fit.html>

Per a construir aquest model correctament amb origami s'ha d'entendre la figura i el perquè del posicionament de cada aresta i, bàsicament, al final cada peça ha de tenir a sobre dues altres peces. En aquest cas, igual que en el tor, les peces tendeixen a no mantenir-se juntes segons el grossor o tipus de paper utilitzat però sempre hi ha la opció d'aplicar una petita quantitat de cola.

NOM	CUB	ICOSAEDRE	TETRAEDRE	OCTAEDRE	DODECAEDRE	DODECAEDRE PHIZZ	BUCKYBALL C ₆₀	TOR	CINC TETRAEDRES
IMATGE									
TIPUS DE PECES									
NO. DE PECES	24	30	6	4	12	30	90	360	30
INSTRUCCIONS	https://www.youtube.com/watch?v=LhDBs8jEAew (només un cub amb 6 peces, però procediment igual)	https://www.youtube.com/watch?v=H7qE_Tc8e4g&t=104s	https://www.youtube.com/watch?v=a-TRptGo8cg&t=1s	https://www.youtube.com/watch?v=akCHeLIQMk&t=254s	https://www.youtube.com/watch?v=8mpbil36gAU	https://www.youtube.com/watch?v=vFYw47Wx2N8 + https://www.youtube.com/watch?v=dH-uTRdI4XU (només instruccions de com fer peces PHiZZ i com encaixar-les ja que el dodecaedre i la buckyball C ₆₀ s'han realitzat segons el graf de la pàgina 59. Per el tor s'ha seguit el diagrama present a la pàgina 74).	https://www.youtube.com/watch?v=aT2UHxA4uRY		

Taula 5: Construccions d'origami modular

1.2 Fotografies EMOZ



Il·lustració 13: Hipopòtam (un únic full) **FONT PRÒPIA**

Fotografiat a l'EMOZ



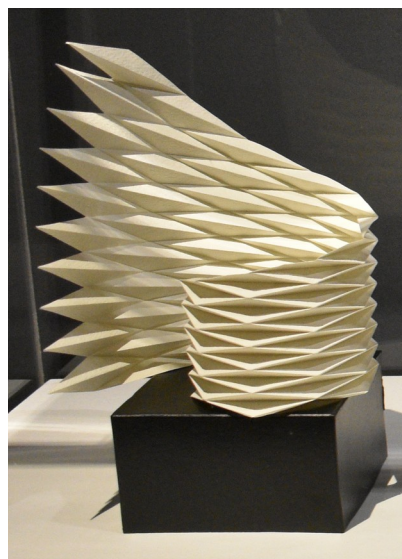
Il·lustració 14:Guerrer (un únic full) **FONT PRÒPIA**

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 15: Tessel·lació **FONT PRÒPIA**

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 16: Figura acordió

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 17: Esquirol

FONT PRÒPIA

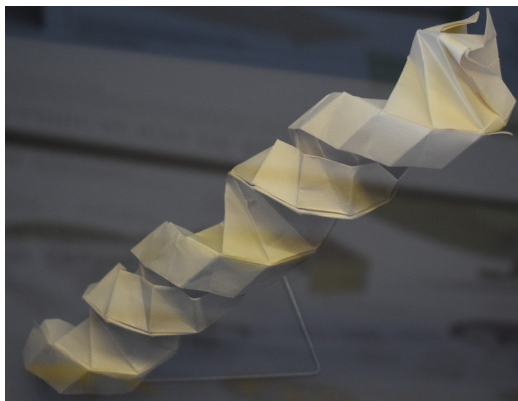
Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 18: Animals

FONT PRÒPIA

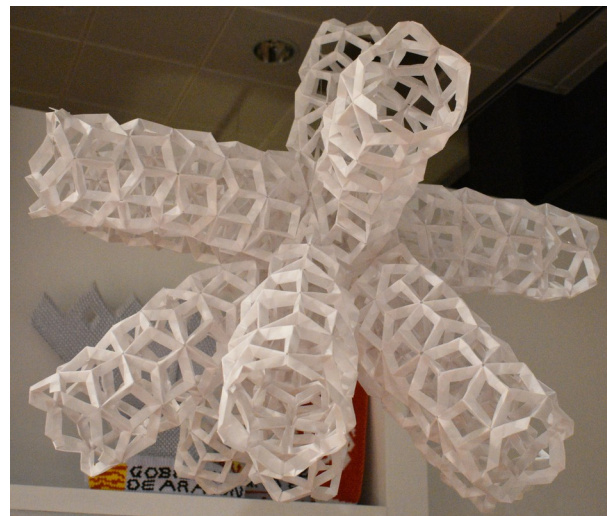
Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 19: Doble hèlix ADN

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 20: Figura modular

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 21: Insecte

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 22: Nan

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 23: Cartell origami modular

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ

2 Matemàtiques

2.1 La paràbola

Com a primera definició, la paràbola forma part de la família de còniques, és a dir, s'obté mitjançant un tall d'una secció paral·lela a una aresta d'un con (figura 71).

A més a més, la paràbola ha de posseir sempre dos elements fonamentals : el focus (un punt) i la directriu (una recta). Així, com a segona definició, la paràbola és la representació del conjunt de punts que equidisten tant del focus com de la directriu. Una altra característica important és la simetria d'aquesta cònica, ja que sempre hi ha una recta que passa pel focus i divideix la paràbola en dues seccions simètriques (figura 73).

Com qualsevol altre corba, la paràbola es pot expressar com una funció, en aquest cas com una funció quadràtica.

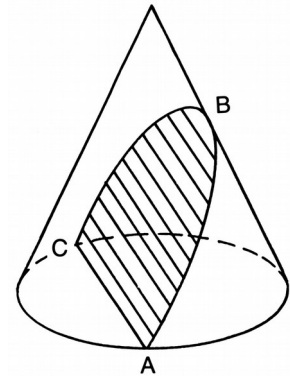


Figura 71: Secció cònica- Paràbola

FONT:
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabola_\(PSF\).png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabola_(PSF).png)

Fórmula general de les funcions de segon grau $ax^2 + bx + c = y$

Quan el focus de la paràbola està situat en l'eix de les y, la variable b serà igual a 0. De la mateixa manera, si el focus està sobre l'eix de les x l'equació passa a tenir la forma: $ay^2+c=x$. Mitjançant l'elaboració d'una taula de valors un cop donada l'equació s'obtenen valors de les x i les y així formant les coordenades de diversos punts. Aquests punts si es representen correctament donen lloc a la paràbola. Aquí es mostra un exemple:

Donada l'equació de segon grau $x^2+ 2x+4=y$ procedim a realitzar una taula en la qual assignem un valor aleatori per la x i obtenim el valor corresponent de la y.

x	y
-2	4
-1	3
0	4
1	7
2	12

Taula 6: Taula de valors per la funció $x^2+2x+4=y$

D'aquesta manera hem obtingut 4 possibles valors de les incògnites, amb x i $y \in \mathbb{N}$, els quals es poden escriure també en forma de punts com per exemple: $p_1 (-2,4)$, $p_2 (1,3)$, $p_3 (0,4)$, $p_4 (1,7)$ i $p_5 (2,12)$. Si agafem un sistema de coordenades cartesianes i representem els valors dels punts obtinguts observarem que unint-los el que farem és dibuixar una paràbola (figura 72). Aprofitant la mateixa imatge he decidit representar també una recta l_1 que passa per p_1 i que se'n diu que és tangent a la paràbola que acabem de dibuixar.

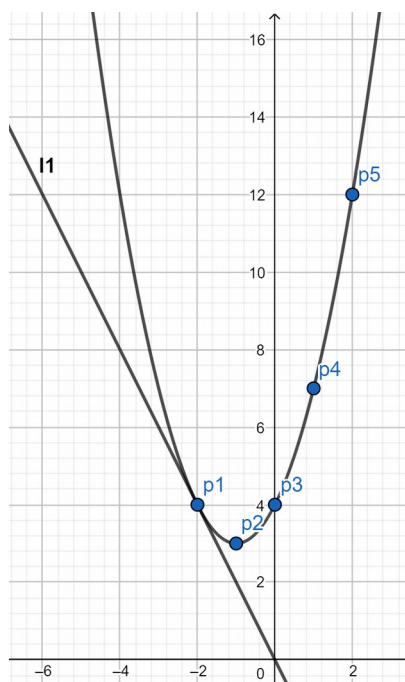


Figura 72: Representació gràfica paràbola

FONT PRÒPIA

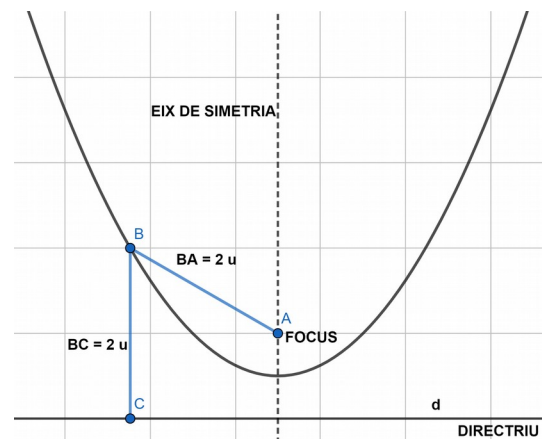


Figura 73: Parts d'una paràbola

FONT PRÒPIA

2.2 Construcció geomètrica de l'axioma 7 fent servir regle sense graduar i compàs mitjançant GeoGebra

Es coneixen l_1 , l_2 i p_1 .

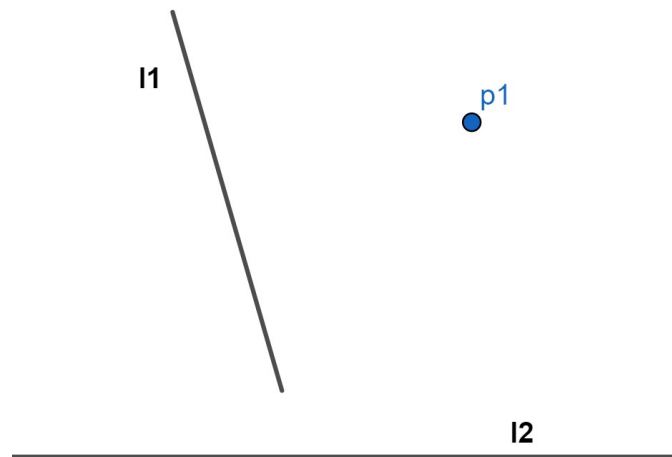


Figura 74: Axioma 7- Pas 1

FONT PRÒPIA

Primer pas: allargar el segment l_1 tal que es formi el punt d'intersecció A de les rectes l_1 i l_2 . Després, unir A amb p_1 per formar l_3 . D'aquesta manera, l_1 i l_3 formaran un angle β .

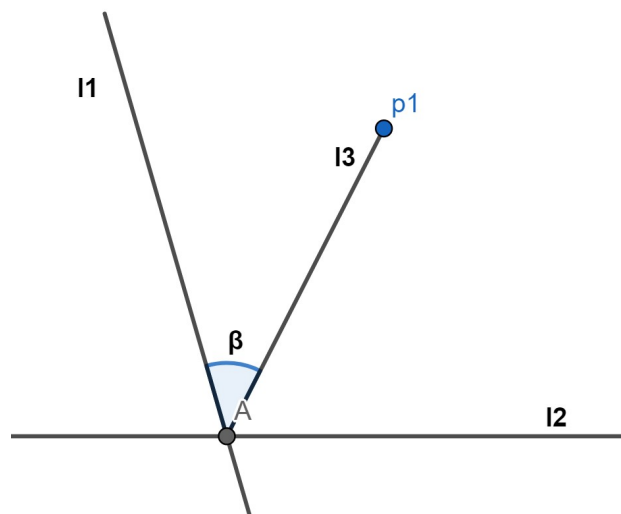


Figura 75: Axioma 7- Pas 2

FONT PRÒPIA

Segon pas: fer la bisecció (com en l'axioma 3) de l'angle β i marcar la bisectriu l_4 (en la segona imatge s'han eliminat les circumferències per una millor visualització del procès). A més, cal unir B amb p_1 per així poder marcar la intersecció amb l_4 , o sigui el punt D.

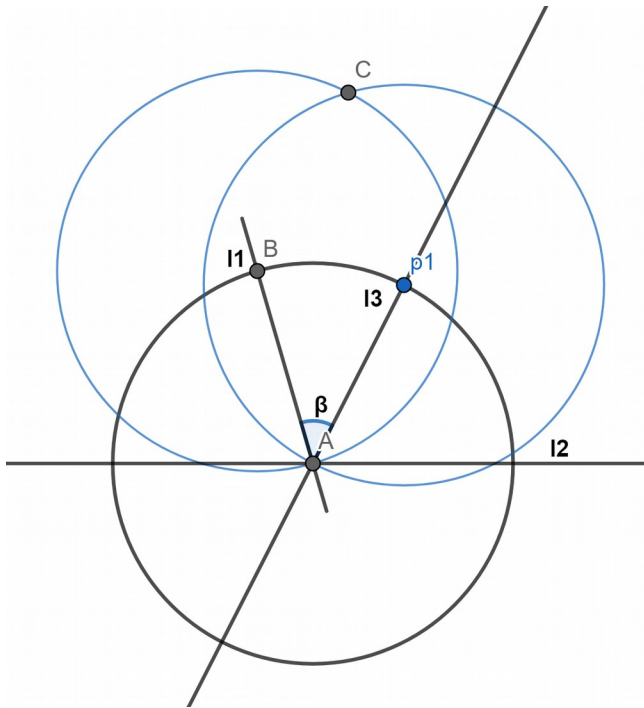


Figura 76: Axioma 7- Pas 3

FONT PRÒPIA

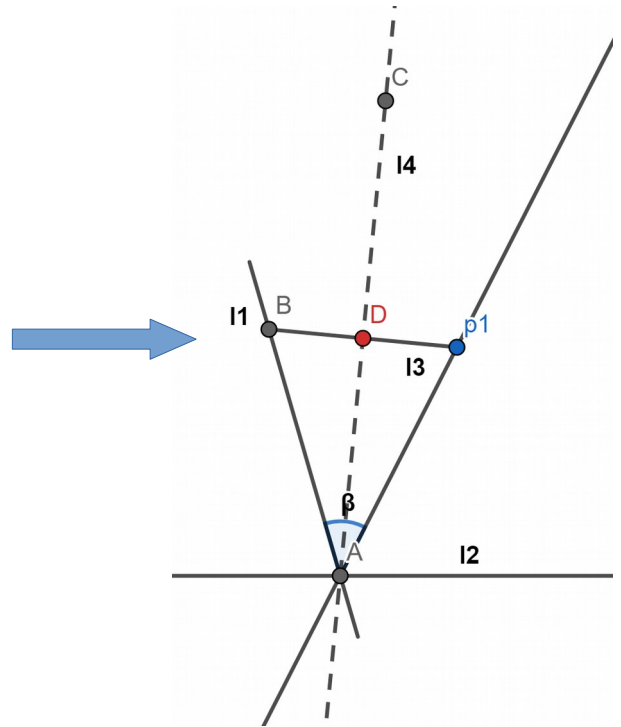


Figura 77: Axioma 7- Pas 4

FONT PRÒPIA

Tercer pas: es poden eliminar alguns elements que ja no es faran servir però és important que el punt D romangui al seu lloc. En el meu cas he preferit mantenir, a part del punt D, el dibuix inicial. Ara, cal fer, com en l'axioma 4, una recta perpendicular a l_2 i que passa per D. D'aquesta forma hem obtingut la recta d, el qual era l'objectiu d'aquest procés.

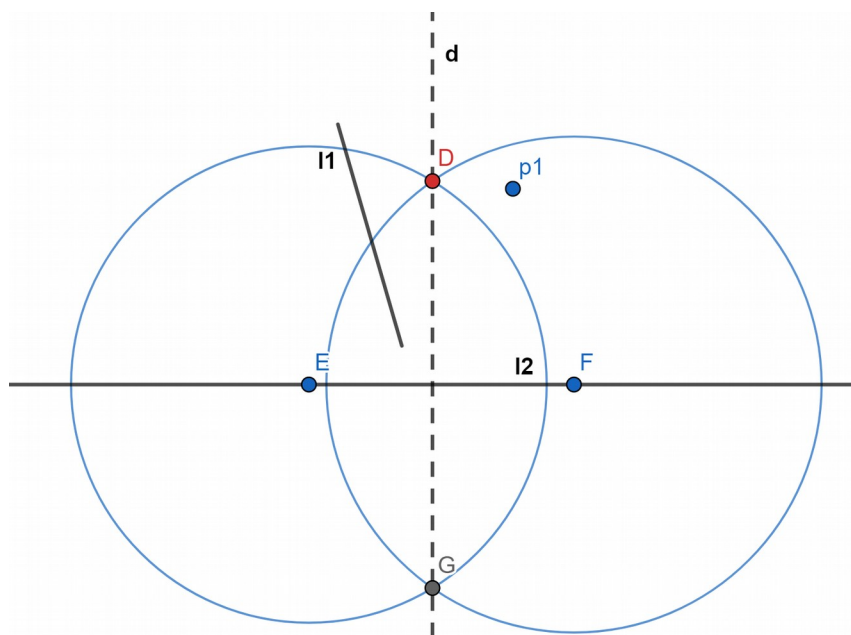


Figura 78: Axioma 7- Pas 5

FONT PRÒPIA

2.3 Demostració geomètrica de la trisecció

Aquesta demostració apareix en el llibre *Geometric folding algorithms*, citat en la bibliografia. És una demostració que justifica mitjançant propietats dels triangles per què realment la trisecció per el mètode d'Abe està ben feta. A continuació hi ha una traducció pròpia de les explicacions del quadre blau de la següent pàgina:

Es coneixen a, b i c , tres punts que es troben en els extrems esquerres de les tres línies paral·leles inferiors; la part de baix del quadrat i les dues primeres línies dels doblecs (vegeu figura 19.4). El punt b es troba en el mig del segment ac . Ara, a través de la línia L del doblec obtinguda mitjançant l'axioma 6, es superposen aquests tres punts i el punts a' , b' i c' on b' és el punt mig del segment $a'c'$. Perquè a' pertany a la línia horitzontal que passa per b i ja que b és el punt mig del segment vertical ac resulta que la longitud $a'c'$ és igual a la del segment $a'a$ i així el triangle $aa'c'$ és isòsceles. Per tant, la seva imatge respecte de la línia L del doblec, que és el triangle $aa'c'$ també és isòsceles. Així, l'angle $a'ac'$ s'ha dividit per la meitat: l'angle $a'ab' = l'angle b'ac' = \alpha$. Ja que el triangle $aa'c'$ és isòsceles,

l'angle $aa'c' = 90^\circ - \alpha$. Degut a que a' és la imatge de la cantonada del quadrat vol dir que hi ha un angle de 90° i així l'angle $xa'a = \alpha$ i per analogia $xaa' = \alpha$. Per últim resulta que l'angle θ en el punt a s'ha trisecat en $\alpha + \alpha + \alpha$.

Box 19.1: Abe's trisection

Let a , b , and c be three points at the left ends of the bottom three parallel lines: the bottom side of the square and the first two fold lines (see Figure 19.4). Point b is the midpoint of ac by construction. Now reflection through the A6 crease line L maps the three points to a' , b' , and c' , with again b' the midpoint of $a'c'$. Because a' lies on the horizontal line through b and because b is the midpoint of the vertical line segment ac , length $a'c'$ equals length $a'a$, so $\triangle aa'c'$ is isosceles. Therefore its reflection through crease line L , $\triangle aa'c'$, is also isosceles. Thus, $\angle a'ac'$ is cleverly split in half: $\angle a'ab' = \angle b'ac' = \alpha$. Because $\triangle aa'c'$ is isosceles, its base angle $\angle aa'c' = 90^\circ - \alpha$. Because a' is a reflection of the corner of the square, it is a right angle, leaving $\angle xa'a = \alpha$, and therefore by reflection $\angle xaa' = \alpha$. Thus the angle θ at a is trisected into $\alpha + \alpha + \alpha$.

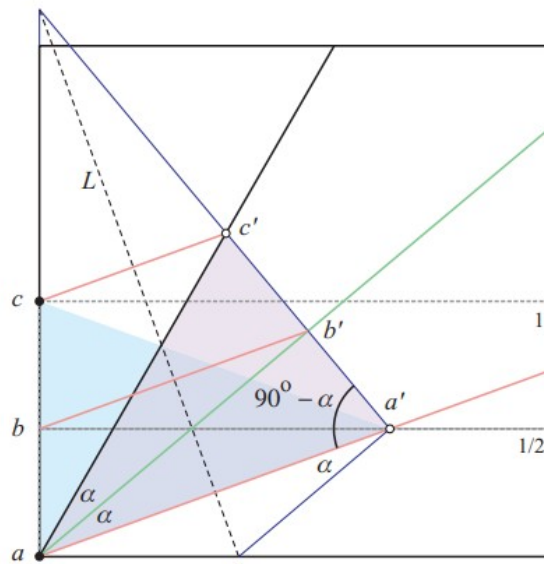
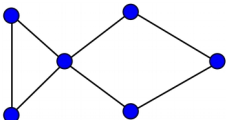
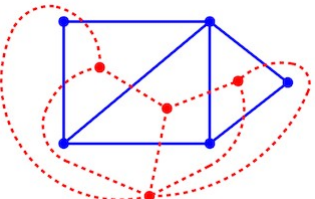
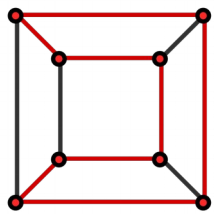
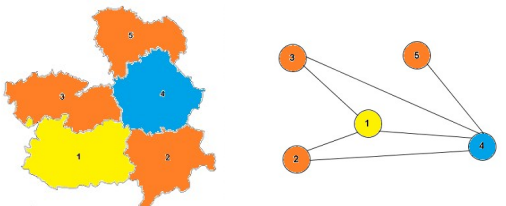


Figure 19.4. Abe's trisection analyzed.

2.4 Conceptes clau de la Teoria de grafs

TEORIA DE GRAFS		
Definició	Cicle hamiltonià	Teorema dels quatre colors
<p>La teoria de grafs és la part de les matemàtiques que estudia els grafs.</p> <p>- Un graf és un conjunt format per vèrtexs (punts blaus) i arestes (segments negres).</p>  <p>- Hi ha molts tipus de grafs però el que apareix en aquest treball és el graf dual. Aquest graf es caracteritza per tenir un vèrtex per a cada regió d'un altre graf. A més, hi ha arestes que uneixen cada dues regions que es toquen.</p> 	<p>Un cicle hamiltonià d'un graf comença en un vèrtex, recorre tots els altres vèrtexs un únic cop i mai passa per la mateixa aresta dues vegades, per finalment tornar al vèrtex de l'inici i així tancar el cicle.</p> <p>- Quan un graf té un nombre parell de vèrtexs d'acord amb la definició anterior significa que el seu cicle hamiltonià també tindrà la mateixa característica.</p> <p>- Un cicle hamiltonià amb nombre de vèrtexs parell es pot acolorir alternant únicament dos colors</p> 	<p>Aquesta teoria suposa que qualsevol mapa es pot acolorir amb quatre colors com a mínim, de manera que cada dues regions que comparteixen aresta tenen diferent color.</p> <p>Per fer la demostració cal trobar el graf dual del graf que constitueix el mapa i acolorir cada vèrtex tal que mai estiguin units per una aresta dos vèrtexs del mateix color.</p> <p>Un cop fet això, es torna al graf inicial i s'acolorix cada regió amb el color del seu vèrtex del graf dual assignat.</p> 

Taula 7: Teoria de grafs

3 Característiques del Miura-Ori

Així com s'ha comentat en el treball hi ha dos tipus de materials elàstics: els que tenen un valor positiu pel coeficient de Poisson i els que tenen valor negatiu, anomenats també materials auxètics (veure figures següents per veure el comportament d'ambdós tipus quan s'estiren).

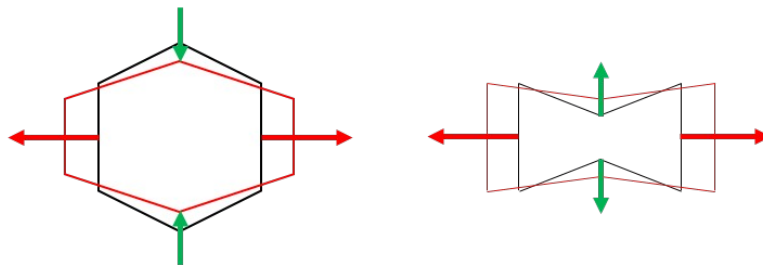


Figura 79: Comportament de materials amb coeficient de Poisson positiu (esquerra) i negatiu (dreta)

FONT: https://www.esa.int/gsp/ACT/projects/auxetic_materials.html

En la figura anterior, les fletxes vermelles representen la direcció de l'estirament i les verdes mostren si el material es comprimeix (esquerra) o s'expandeix (dreta).

A més a més, els materials amb coeficient de Poisson positiu es poden deformar de manera que adquireixin una curvatura negativa (recordi's la taula 3 de la pàgina 57). El Miura-Ori es diu que dóna lloc a materials amb coeficient de Poisson negatiu i positiu a la vegada. Això es deu a que:

- 1) Quan el Miura-Ori s'estira en una direcció s'expandeix en la direcció perpendicular

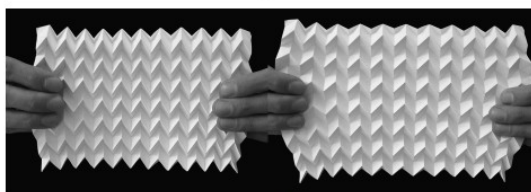


Figura 80: Miura-Ori (a)

FONT: <http://www.markschenk.com/research/files/PhD%20thesis%20-%20Mark%20Schenk.pdf>

COEFICIENT DE POISSON
NEGATIU

2) Quan el Miura-Ori es deforma dona lloc a una forma amb curvatura negativa

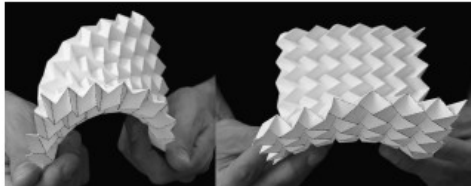


Figura 81: Miura-Ori (b)

FONT:<http://www.markschenk.com/research/files/PhD%20thesis%20-%20Mark%20Schenk.pdf>



**COEFICIENT DE POISSON
POSITIU**

Llavors, resulta que els materials inspirats en el Miura-Ori són molt peculiars i depenent de la seva orientació aporten unes característiques o unes altres.

Els materials auxètics són molt útils sobretot en la fabricació de superfícies que absorbeixin els xocs o bé d'altres que permetin un fàcil emmagatzematge gràcies a la capacitat del material d'expandir-se i comprimir-se ràpidament.