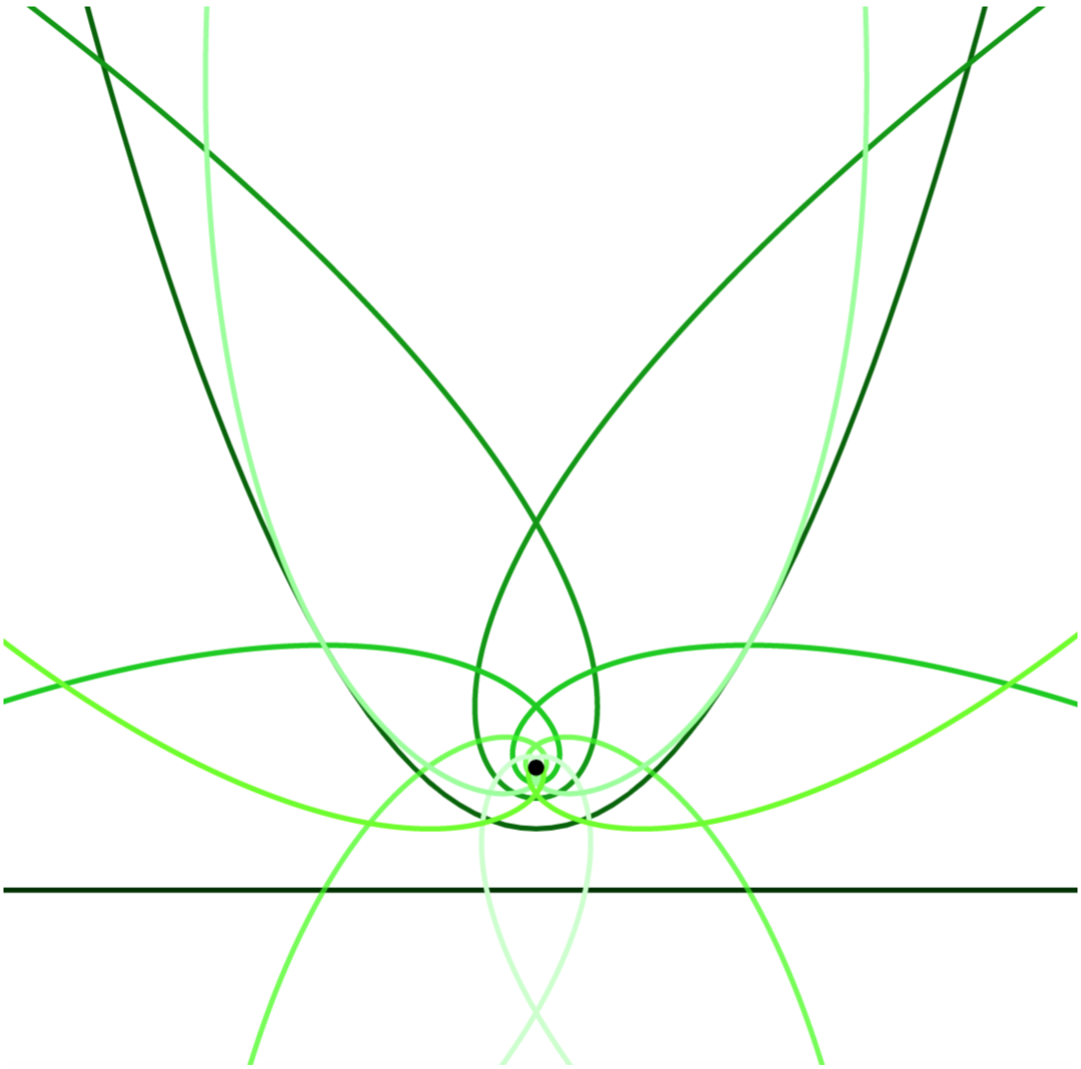
La corba "gamma"

poincare_077



tutora
X

Continguts

En matemàtiques l'art de preguntar hauria de ser més preuat que resoldre problemes.

Georg Cantor

1 Introducció

I que passaria si...? Penso que aquesta és la pregunta de la qual haurien de sorgir tots, o la majoria dels coneixements matemàtics, de la curiositat. I així és com va començar el meu treball de recerca.
Al febrer del 2018 estava fent un problema de matemàtiques, en què es necessitava conèixer algunes propietats de la paràbola. Degut a la meva ignorància en el tema, vaig buscar per internet. La primera propietat que vaig trobar va ser la definició de paràbola com a lloc geomètric dels punts equidistants entre un punt i una recta. Al final no vaig poder acabar el problema, ja que immediatament em va sorgir una pregunta: I que passaria si a la definició com a lloc geomètric de la paràbola canviéssim la recta per una paràbola?
Aquella pregunta va sorgir com una simple curiositat que vaig provar de satisfer buscant per Google. Per molt que canviava la cerca, no trovaba informació sobre el tema i la solució estava clara; per satisfer la meva curiositat havia d'investigar la corba tot sol. Vaig estar uns dies donant voltes a aquella pregunta i quan més m'endinsava en la recerca, més interessant es posava, fins que vaig decidir convertir aquella pregunta en el meu treball de recerca.

1.1 Objectius

- Respondre a la pregunta *"Quina és la corba resultant del lloc geomètric dels punts equidistants a una paràbola i el seu focus?"*
- Eventualment fer-me més preguntes i treballar per resoldre-les.
- Iniciar-me en la recerca matemàtica enfocant un problema per al qual no tinc cap resposta.
- Adquirir els coneixements teòrics necessaris per dur a terme aquest treball.
- Dominar el programari d'edició de textos LaTeX.
- Dominar el Geogebra per crear gràfics i com a eina per resoldre problemes i fer conjectures.
- Aprendre a organitzar el meu temps per fer un treball extens.
- Finalment, fer un treball de recerca del que estigui satisfet.

1.2 Metodologia

He decidit dividir aquest treball en tres capítols:

1. Marc teòric.
   En aquest primer capítol hi ha una introducció teòrica al marc pràctic.
   Es comença definint breument alguns conceptes i després es fa una introducció a les definicions i propietats de la paràbola i altres corbes, entre elles la cúbica de Tschirnhausen, que acaba tenint un paper important en el treball.

2. La corba gamma
   En aquest capítol es contesta la pregunta *"Quina és la corba resultant del lloc geomètric dels punts equidistants a una paràbola i el seu focus?"*.
   Es comença per ensenyar el procés que m'ha portat a trobar la corba que respon la pregunta formulada. A continuació es demostren algunes propietats d'aquesta corba i finalment es demostra que la corba a la qual hem arribat és la cúbica de Tschirnhausen.

3. Generalització de la corba gamma
   Aquest capítol és una ampliació del capítol anterior. Aquí m'he fet una altre preguna diferent: basant-me en la construcció que he utilitzat en la paràbola i el seu focus per arribar a γ, m'he preguntat que passaria si apliqués aquesta construcció a la corba γ i el focus, i a la seguent corba i el focus, successivament. Així doncs, la resposta d'aquesta pregunta és una familia de corbes que són casos especials d'espirals sinusoidals, amb propietats interessants que trobat i demostrat.

Per trobar les propietats de les corbes estudiades en el segon i tercer capítol, el procediment que he seguit ha estat:

1. Buscar una propietat de la corba en questió experimentant amb el geogebra, la calculadora gràfica Desmos o un paper i un bolígraf.

2. Fer una conjectura amb la propietat que hagi trobat.

3. Demostrar la propietat.

1.3 Agraïments

Aquest treball ha estat possible gràcies al suport de diverses persones.

Per començar, vull agrair a la X, per haver-me guiat durant el treball i perquè sense ella no hagués estat possible. En segon lloc vull agrair al meu avi, X, pel seu interès i suport en el treball i les idees que m'ha donat. També vull agrair a la Laura Morera, professora de Bojos per les Matemàtiques, per la seva gran aportació en el treball.
Finalment a la meva familia i amics, pel seu suport durant tot el treball.

Capítol I
Marc teòric

2 Coneixements previs

2.1 Definicions

Definició 1. *Lloc geomètric*
Un lloc geomètric és el conjunt de punts que compleixen una o més condicions determinades. Per demostrar que un conjunt de punts és el lloc geomètric per a unes condicions donades, cal demostrar per separat dues propietats:

1. Tots els punts que satisfan les condicions estan en el conjunt de punts.

2. Tots els punts del conjunt satisfan les condicions donades.

Definició 2. *Recta normal a una corba*
La recta normal a una corba en un punt P és la perpendicular a la recta que és tangent a la corba en el punt P.

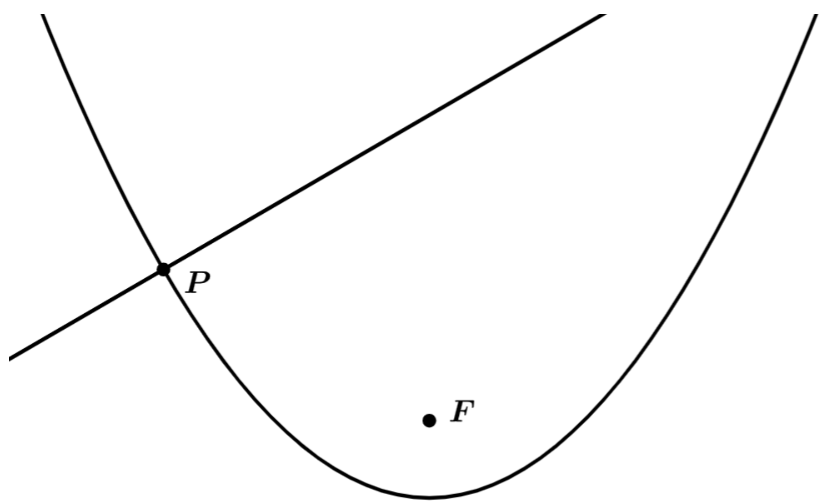


Figura 1: *Recta normal a una paràbola en un punt P.*

Definició 3. *Reflexió*
En geometria plana, una reflexió d'un objecte respecte una recta r consisteix en intercanviar cada punt P_i de l'objecte per la seva imatge especular respecte la recta r.

Definició 4. *Rotació*
Donats un centre de rotació O i un angle α, la rotació consisteix en intercanviar cada punt P_i de l'objecte inicial per un punt Q_i tal que $\angle P_iOQ_i = \alpha$ i $P_iO = Q_iO$.

Definició 4. *Translació*
Donat un vector $\vec{v}$, la translació d'un objecte consisteix en intercanviar cada punt P_i de l'objecte per l'extrem del vector $\vec{v}$ amb origen a P_i.

Definició 6. *Homotècia*
Per a cada punt P_i d'un objecte matemàtic, donats un punt O i $\lambda \neq 0$, l'homotècia amb centre O i raó λ del objecte és donada per

$$\vec{OP'} = \lambda \cdot \vec{OP}.$$

Definició 7. *Congruència*

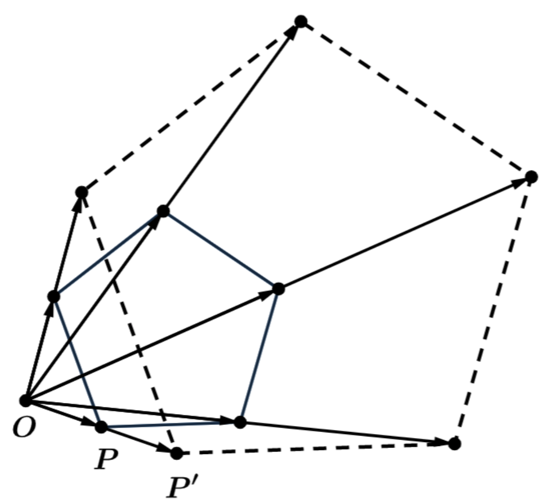


Figura 2: *Homotècia d'un pentàgon regular, amb centre d'homotècia O i raó* 2.

Dos objectes són congruents si un pot ser transformat en l'altre per una sèrie de transformacions rígides. Les transformacions rígides són la translació, la rotació i la reflexió.

Definició 8. *Semblança*
Dos objectes són semblants si un pot ser transformat en l'altre a partir d'una homotècia i/o una sèrie de transformacions rígides.

Definició 9. *Corba podària*
La corba podària d'una corba π respecte un punt podari O és el lloc geomètric dels peus de les perpendiculars que passen per O a les rectes tangents a la corba π.
La corba contrapodària d'una corba ρ és la corba tal que la seva corba podària respecte un punt O és ρ.

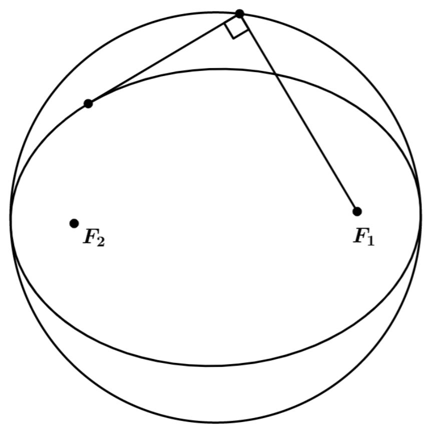


Figura 3: *La corba podària d'una el·lipse amb el focus com a punt podari és una circumferència.*

3 Paràboles

3.1 Definicions

Hi ha diverses maneres de definir una paràbola. A continuació en veurem algunes:

- Com a representació gràfica d'una funció

  La representació gràfica del polinomi de grau dos és la paràbola. La funció general de grau dos és $f(x) = ax^2 + bx + c$ amb $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

- Com a lloc geomètric

  La paràbola és el lloc geomètric dels punts equidistants d'un punt anomenat focus i una recta anomenada directriu.

  A continuació veurem que aquesta definició de la paràbola és equivalent a la primera, en què definim la paràbola com a funció de segon grau.

  Demostració. Demostrarem aquesta propietat per a una directriu paral·lela a l'eix x, ja que si tenim una recta directriu no paral·lela a l'eix podem aplicar una rotació al

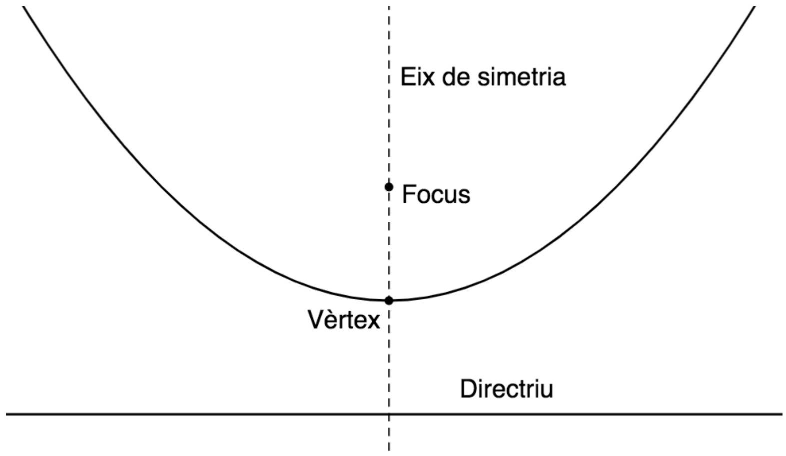


Figura 4: *Representació gràfica de la paràbola, en que es pot veure el focus, la recta directriu i el vèrtex de la paràbola, el punt de la paràbola més proper a la directriu.*

sistema format per la directriu i el focus per tal que la directriu sigui paral·lela a l'eix d'abscisses i sabem que obtindrem una paràbola congruent.

Sigui $r : y = k$ la recta directriu i $F = (a, b), a \neq k$ el focus. Un punt $P = (x,\, y)$ forma part del lloc geomètric si i només si $d(P,\, F) = d(P,\, r)$, on $d(A,\, B)$ és la distància entre els objectes A i B. Així que podem expandir l'equació anterior per expressar y en funció d'x:

$$d(P,\, F) = d(P,\, r)$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |y-k|$$
$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2xb + b^2 = y^2 - 2yk + k^2$$
$$y = x^2 \frac{1}{2(b-k)} + x\frac{a}{(k-b)} + (a^2 + b^2 - k^2)\frac{1}{2(b-k)}$$

Com podem veure, l'última equació és una funció de segon grau i en consequència és una paràbola. □

- Com a cònica

  Una paràbola pot ser definida com una cònica d'excentricitat $e = 1$. En concret, la paràbola és obtinguda de la intersecció d'un pla amb un con, quan el pla és paral·lel a una generatriu del con.

3.2 Semblança

En aquesta secció demostrarem que totes les paràboles són similars.

Demostració. Hem dit que dos objectes són similars si podem convertir un en l'altre a partir d'aplicar transformacions rígides i/o homotècies. Per demostrar que totes les paràboles són similars demostrarem que totes les paràboles són similars a la paràbola d'equació $y = x^2$. Considerem una paràbola arbitrària en el pla cartesià. Apliquem una rotació, si cal, a la paràbola, perquè el seu eix de simetria sigui perpendicular a l'eix d'abscisses. A continuació apliquem una translació a la paràbola donada pel vector $\vec{VO}$, on V és el vèrtex de la paràbola i $O = (0, 0)$, per tal que el vèrtex de la paràbola estigui centrat a l'origen de coordenades.

En conseqüència, ens quedem amb una paràbola de la forma $y = ax^2$, ja que l'únic zero de la funció serà $x = 0$. Finalment aplicarem una homotècia de raó $\lambda = a$ i centre O a la paràbola $y = ax^2$, de manera que cada punt $P = (x, ax^2)$ sigui intercanviat pel punt $P' = (ax, a^2x^2)$. La funció resultant és $g(ax) = (ax)^2$, equivalent a $g(x) = x^2$, que és la funció que buscavem (figura 5).

□

L'equació general de la paràbola és $y = ax^2 + bx + c$. Aquesta equació pot ser manipulada:

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$y = ax^2 + 2a(\frac{b}{2a})x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$
$$y = a\big(x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + \frac{b^2}{4a^2}\big) - \frac{b^2}{4a} + c$$
$$y = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Si fem els canvis de variables $h = -\frac{b}{2a}$ i $k = -\frac{b^2}{4a} + c$ ens queda l'equació

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

Aquesta forma de l'equació de la paràbola és més intuitiva, ja que les variables a, h i k exerceixen un paper clar en la representació gràfica de la paràbola.
Si fem variar el valor de k, s'aplica una translació a la paràbola donada per un vector $\vec{v}$ vertical tal que $|\vec{v}| = \triangle k$.
De manera semblant, si fem variar el valor d'h s'aplica una translació de la paràbola donada per un vector $\vec{u}$ horitzontal tal que $|\vec{u}| = \triangle h$.
El factor a de l'equació ens indica la raó de semblança entre la paràbola que estem analitzant i la paràbola $y = x^2$.
El focus de la paràbola estarà al punt $F = (h, \frac{1}{4a} + k)$, l'eix de simetria serà la recta $x = h$, la directriu serà la recta $y = k - \frac{1}{4a}$ i el vèrtex serà el punt $V = (h, k)$.

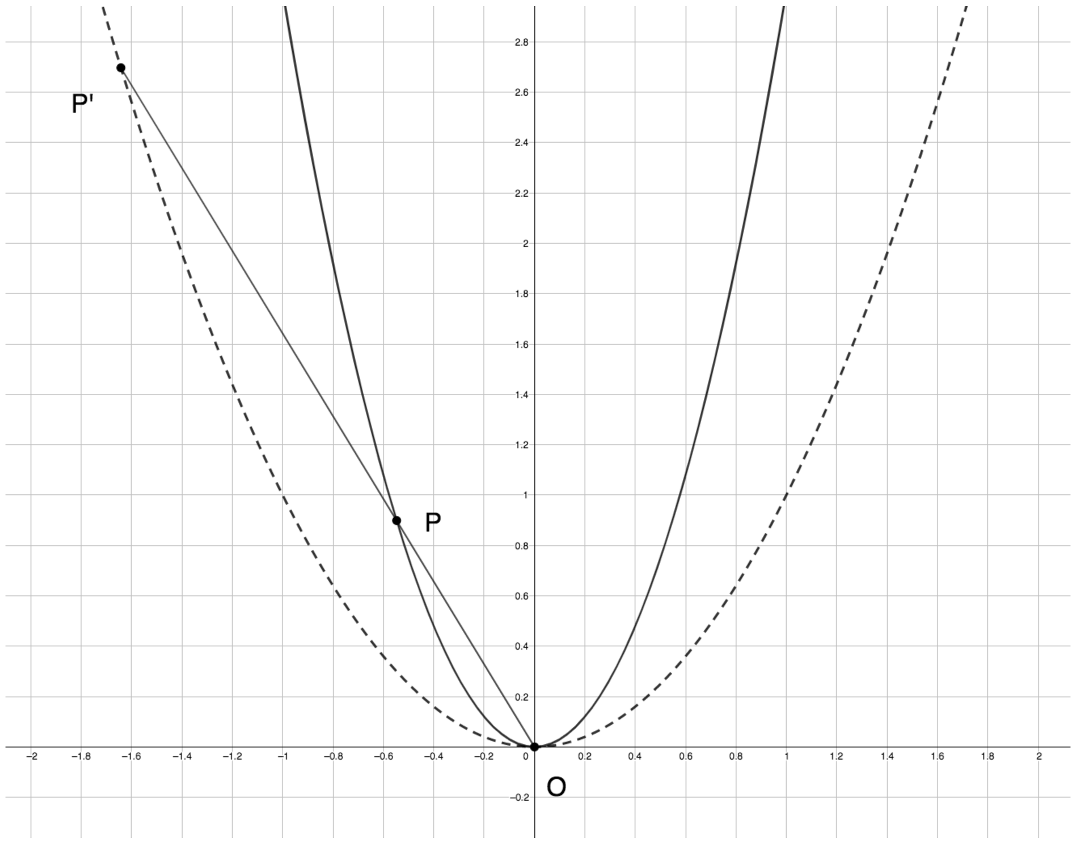


Figura 5: *En aquesta figura podem veure com en aplicar una homotècia de raó 3 a la paràbola* $y = 3x^2$ *(amb la línia continua) obtenim la paràbola* $y = x^2$*(amb la línia de punts).*

3.3 Propietats

Propietat 1. *Considerem una paràbola qualsevol. Sigui P un punt arbitrari de la recta directriu, la mediatriu entre P i el focus F de la paràbola serà tangent a la paràbola.*

Demostració. Considerem la paràbola $y = x^2$. Com que totes les paràboles són semblants, només cal demostrar la propietat per a aquesta. La recta directriu d'aquesta paràbola és $d : y = -\frac{1}{4}$ i el seu focus és al punt $F = (0, \frac{1}{4})$. Anomenem P a un punt de la directriu, amb coordenades $P = (p, -\frac{1}{4})$. La mediatriu m entre P i F són els punts que estàn a la mateixa distància de P i F, així que seguirà l'equació següent:

$$m : \sqrt{(x-p)^2 + (y - (-\frac{1}{4}))^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{1}{4})^2}$$

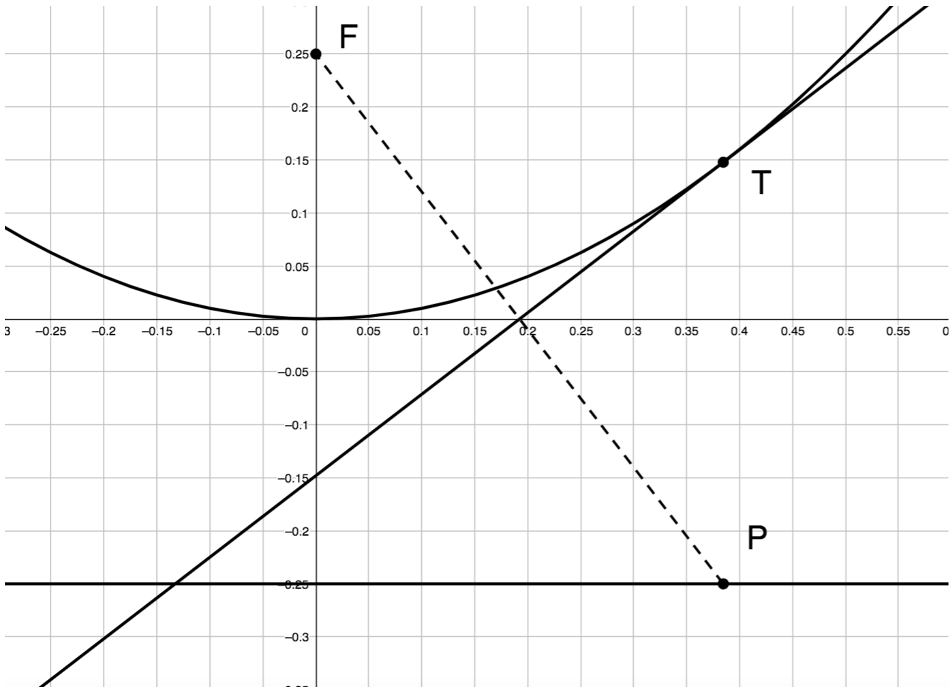


Figura 6: *Representació gràfica de la propietat 1 amb la paràbola $y = x^2$.*

$$m : (x-p)^2 + (y+\frac{1}{4})^2 = (x-0)^2 + (y-\frac{1}{4})^2$$
$$m : x^2 - 2px + p^2 + y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16} = x^2 + y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$$
$$m : y = 2px - p^2$$

Llavors, la intersecció entre la mediatriu i la paràbola serà les solucions per a x i y del següent sistema:

$$\begin{cases} y = 2px - p^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Si apliquem substitució tenim:

$$x^2 = 2px - p^2$$
$$(x-p)^2 = 0$$

L'única solució per x és $x = p$ i en conseqüència, la solució per y és $y = p^2$. El punt de tall serà únic, amb coordenades $T = (p, p^2)$. Per comprovar que la recta és tangent calculem el pendent de la recta i de la paràbola en aquest punt:
El pendent d'm és el coeficient de la variable x.

$$Pendent(m) = 2p$$

El pendent de la paràbola en el punt $x = p$ és el valor de la derivada respecte x en aquest punt, $y' = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$.

$$Pendent(parabola) = 2p$$

Els pendents de la mediatriu i de la tangent a la paràbola en $x = p$ són iguals.

$\square$

Propietat 2. *Coniderem una paràbola. Un raig de llum perpendicular a la directriu que incideix en la paràbola és reflexat en direcció al focus.*

Demostració. Anomenem r a la recta incident i s a la reflexió que crea la paràbola d'aquesta recta. La intersecció entre la paràbola i la recta r l'anomenarem P.

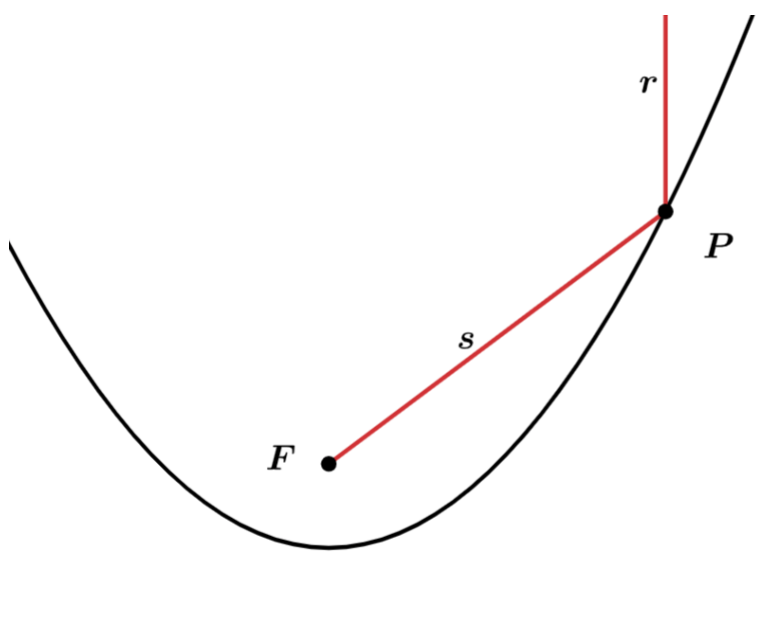


Figura 7: *Representació gràfica de la propietat 2.*

Per a fer la reflexió, seguirem el procediment següent: primer, trobarem l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt P. Continuarem escollint un punt A, diferent de P, de la recta tangent i trobarem la perpendicular a aquesta recta en el punt que hem escollit. Anomenarem B a la intersecció entre la perpendicular i r i C al vèrtex del vector $2\vec{BA}$ amb l'origen al punt B. Llavors, s serà la recta definida pels punts C i P.

Treballarem amb la paràbola $y = x^2$. La recta r seguirà l'equació $x = t$. Llavors, sabem que el punt P serà la intersecció entre $x = t$ i $y = x^2$, així que tindrà coordenades $P = (t,\, t^2)$.

El pendent de la tangent a la paràbola en P és $m = 2t$.

Fent servir la fórmula per a l'equació d'una recta sabent el pendent i un punt per on passa, sabem que la recta tangent a la paràbola per P segueix l'equació

$$y - t^2 = 2t(x - t).$$

Que, simplificant, resulta

$$y = t(2x - t)$$

El punt, A, de la recta tangent que escollirem és el punt tal que $x = t + \epsilon$. Substituint x per $t + \epsilon$ a l'última equació trobem que les coordenades del punt són:

$$A = (t + \epsilon,\, t(t + 2\epsilon))$$

Recordem que el pendent de la tangent a la paràbola en P era $2t$, així que el pendent de la recta perpendicular a la tangent és $-\frac{1}{2t}$. Llavors, amb la formula de l'equació d'una recta coneixent el pendent i un punt, podem trobar l'equació de la perpendicular:

$$y - t(t + 2\epsilon) = -\frac{1}{2t}(x - t - \epsilon)$$

Per trobar el punt d'intersecció, B, d'aquesta recta amb la recta $r : x = t$ resolem per a x i y el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x = t \\ y - t(t + 2\epsilon) = -\frac{1}{2t}(x - t - \epsilon) \end{cases}$$

Les solucions són $x = t$ i $y = t(t + 2\epsilon) + \frac{\epsilon}{2t}$. Així que les coordenades del punt B són:

$$B = (t,\, t(t + 2\epsilon) + \frac{\epsilon}{2t})$$

Per trobar les coordenades del vector $\vec{BA}$ restem les coordenades d'A menys les coordenades de B.

$$\vec{BA} = (\epsilon,\, -\frac{\epsilon}{2t})$$

Llavors, el vector $2\vec{BA}$ és
$$2\vec{BA} = (2\epsilon, -\frac{\epsilon}{t})$$
I, sumant les coordenades de B amb les coordenades del vector BA obtenim l'extrem d'aquest vector amb origen al punt B, que serà:
$$C = (t + 2\epsilon, t(t + 2\epsilon) - \frac{\epsilon}{2t})$$

Ara demostrarem que la recta s passa pel focus. Obtenim l'equació de la recta s definida pels punts P i C amb la fórmula de la recta donats dos punts:
$$s : y - t^2 = (\frac{2t\epsilon - \frac{\epsilon}{2t}}{2\epsilon})(x - t)$$
$$s : y - t^2 = (t - \frac{1}{4t})(x - t)$$
Sabem que el focus de la paràbola està al punt $F = (0, \frac{1}{4})$. Aleshores, si $(x, y) = (0, \frac{1}{4})$ és una solució de l'equació anterior, vol dir que la recta s passa per F. Així que substituim $x = 0$ a l'equació d's:
$$y - t^2 = (t - \frac{1}{4t})(0 - t)$$
$$y = t^2 - t^2 - \frac{-t}{4t}$$
$$y = \frac{1}{4}$$
Hem arribat al resultat desitjat i la propietat està demostrada. $\square$

4 Altres Corbes

4.1 Altres còniques

Una cònica és la corba resultant de la intersecció entre un pla i la superfície d'un con. Depenent de la posició del pla respecte al con, la secció resultarà un cercle, una el·lipse, una hipèrbola, o una paràbola.
L'excentricitat d'una corba cònica és un paràmetre definit com al grau de desviació d'una cònica respecte d'una circumferència. Si considerem un con amb l'eix de revolució vertical i una cònica formada per la intersecció d'un pla π amb el con, l'excentricitat de la cònica es calcula amb la següent formula:
$$e = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

on α és l'angle que forma una generatriu del con amb el pla horitzontal i β és l'angle que forma π amb el pla horitzontal.

Ara enunciarem les característiques principals de cada cònica (amb excepció de la paràbola, que ja les hem vist a la secció anterior):

4.1.1 El·lipse

L'el·lipse és la cònica amb excentricitat $0 \leq e < 1$. Està formada per la intersecció entre un con i un pla oblic a l'eix de revolució que forma un angle més gran que el de la generatriu respecte l'eix de revolució. Si el pla és horitzontal, l'excentricitat és 0 i tenim una circumferència.

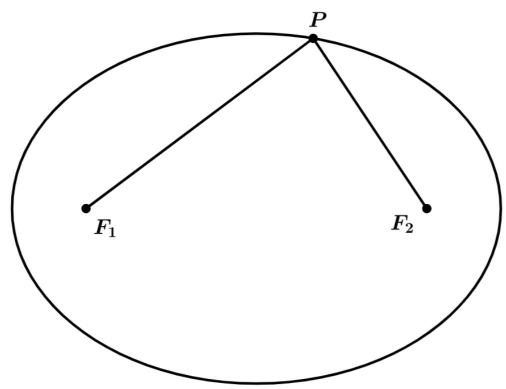


Figura 8: *El·lipse amb els seus focus*

Una el·lipse està determinada, en part, per dos focus F_1 i F_2. La propietat que la defineix com a lloc geomètric és que està formada pels punts del pla tals que $PF_1 + PF_2 = c$, on c és un nombre real major que F_1F_2. En conseqüència, per definir una el·lipse només necessitem dos focus i un nombre real, més gran que la distància entre els focus.

l'equació d'una el·lipse, amb centre a l'origen de coordenades és la següent:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Com podem veure, en el cas en que $a = b = 1$, tenim una circumferència de centre (0, 0) i radi 1, on el centre és la fusió dels dos focus de l'el·lipse.

4.1.2 Hipèrbola

L'hipèrbola és la cònica amb excentricitat $e > 1$. Aquesta cònica està formada per la intersecció entre un con i un pla que forma un angle més gran que el de la generatriu amb l'eix de revolució.

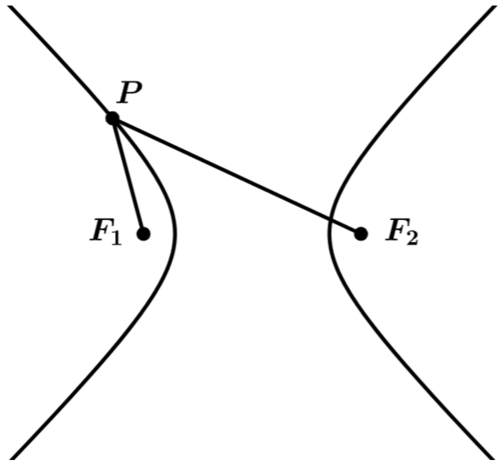


Figura 9: *Hipèrbola*

Anomenem F_1 i F_2 als focus de l'hipèrbola. L'hipèrbola es pot definir com el lloc geomètric dels punts P tals que $\mid F_1P - F_2P \mid= c$. La variable c representa una constant més petita que F_1F_2. Aquesta constant coincideix amb la distància entre els vèrtexs de les dues parts de l'hipèrbola.

4.2 Corbes paramètriques

Una corba està definida paramètricament per mitjà d'un paràmetre t si les coordenades dels seus punts s'expressen en funció d'aquest paràmetre. Les equacions paramètriques de la corba són:

$$x = x(t), \ \ y = y(t).$$

Llavors, a un valor del paràmetre li correspon un únic punt de la corba, però un punt de la corba pot ser l'imatge de més d'un valor de t.
Les equacions paramètriques d'una corba s'usen habitualment per simplificar expressions de corbes que d'altra manera són molt complexes o poc intuitives.

Un exemple de corba que té una representació paramètrica important és la cardioide.

La cardioide és la corba que descriu un punt d'un cercle que gira sense lliscar sobre un altre cercle amb el mateix radi. Segueix les equacions

$$x(t) = a(1 - \cos t)\cos t, \;\; y(t) = a(1 - \cos t)\sin t.$$

La seva representació gràfica és:

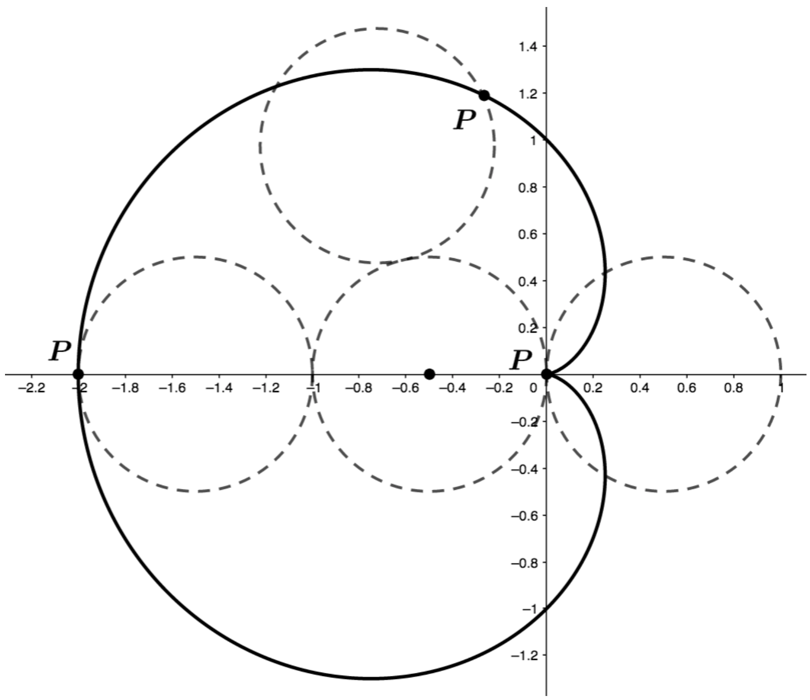


Figura 10: *Representació gràfica de la cardioide* $x = (1-\cos t)\cos t, \;\; y(t) = (1-\cos t)\sin t$*. La línia discontínua indica la construcció que hem vist, on* P *és el punt de la circumferència exterior que defineix la cardioide.*

4.3 Corbes en forma polar

Una corba definida per una equació polar té la forma següent:

$$r = r(\alpha).$$

Cada punt està definit per la intersecció entre una recta s que talla l'origen de coordenades i una circumferència centrada a l'origen amb un radi r en funció de l'angle α que forma s amb l'eix d'abscisses. Igual que en les equacions paramètriques, les equacions polars s'utilitzen per simplificar l'equació d'una corba.

Un exemple de corbes en forma polar són les espirals sinusoïdals. Aquesta família de corbes té la forma paramètrica següent:

$$r^n = a^n \cos(n\alpha).$$

On n és un un nombre racional diferent de 0 i a és un nombre real també diferent de 0. Aquesta equació dóna lloc a diverses corbes, que són diferents en funció del valor d'n:

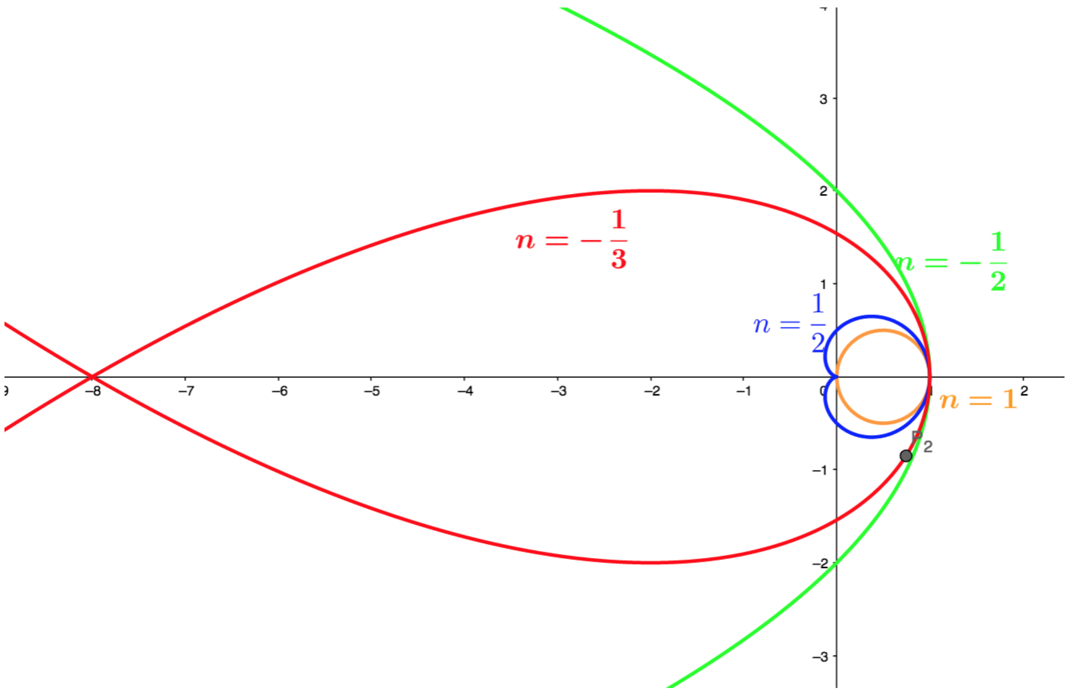


Figura 11: *Espirals sinusoïdals per a diferents valors d'n. En verd, una paràbola; en vermell, la cúbica de Tschirnhausen; en blau, la cardioide; i en taronja, un cercle.*

- Si $n = -2$, tenim una hipèrbola.
- Si $n = -1$, el resultat és una recta.
- Si $n = -\frac{1}{2}$, tenim una paràbola.
- Si $n = -\frac{1}{3}$, dóna lloc a la cúbica de Tschirnhausen, que més endevant estudiarem.
- Si $n = \frac{1}{2}$, el resultat és una cardioide, que ja hem vist a la secció anterior.
- Si $n = 1$, ens queda un cercle.

4.4 La cúbica de Tschirnhausen

La cúbica de Tschirnhausen, també anomenada trisectriu de Catalan o cúbica de l'Hôpital, és una corba plana que, com ja hem vist, forma part de la família de les espirals sinusoïdals i segueix l'equació polar

$$r = a\sec^3(\frac{\alpha}{3}).$$

Podem convertir l'equació polar anterior en paramètrica mitjançant la trigonometria:

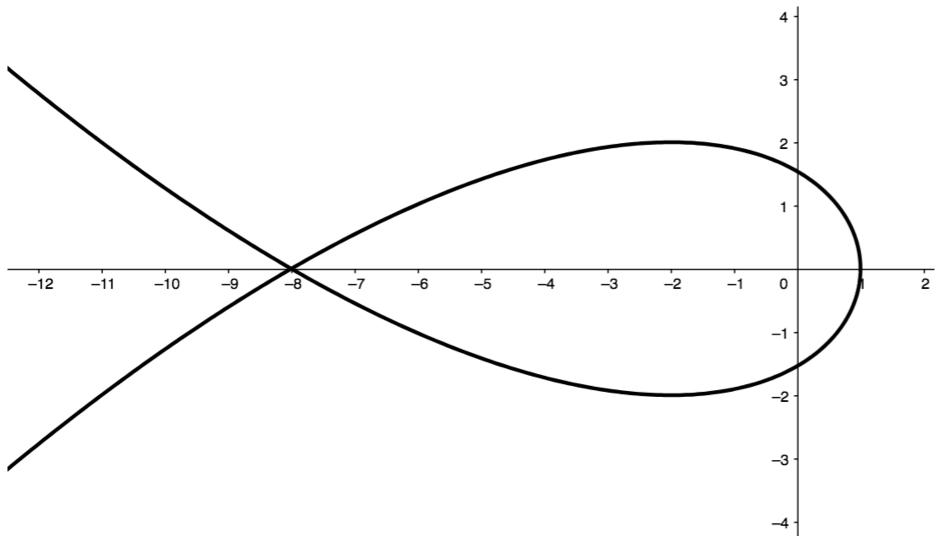


Figura 12: *Cúbica de Tschirnhausen, quan a=1.*

$$x = \cos\alpha \cdot a\sec^3(\frac{\alpha}{3});\;\; y = \sin\alpha \cdot a\sec^3(\frac{\alpha}{3}).$$

Ara simplifiquem aplicant la fórmula de l'angle triple a $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ i simplificant ens queda:

$$x = a\big(1 - 3\tan^2(\frac{\alpha}{3})\big):\;\; y = a\big(3\tan(\frac{\alpha}{3}) - 3\tan^3(\frac{\alpha}{3})\big)$$

Finalment, si fem el canvi de variable $t = \tan(\frac{\alpha}{3})$, tenim

$$x = a(1 - 3t^2);\;\; y = at(t^2 - 3).$$

Aïllem la variable t de la primera equació paramètrica i la substituim a la segona:

$$t = \sqrt{\frac{1}{3a}(a - x)}$$

$$y = a\sqrt{\frac{1}{3a}(a - x)}(\frac{1}{3a}(a - x) - 3)$$

Simplificant:

$$27ay^2 = (a - x)(8a + x)^2.$$

La cúbica de Tschirnhausen pot ser definida com la corba contrapodària d'una paràbola, amb el focus com a punt podari.

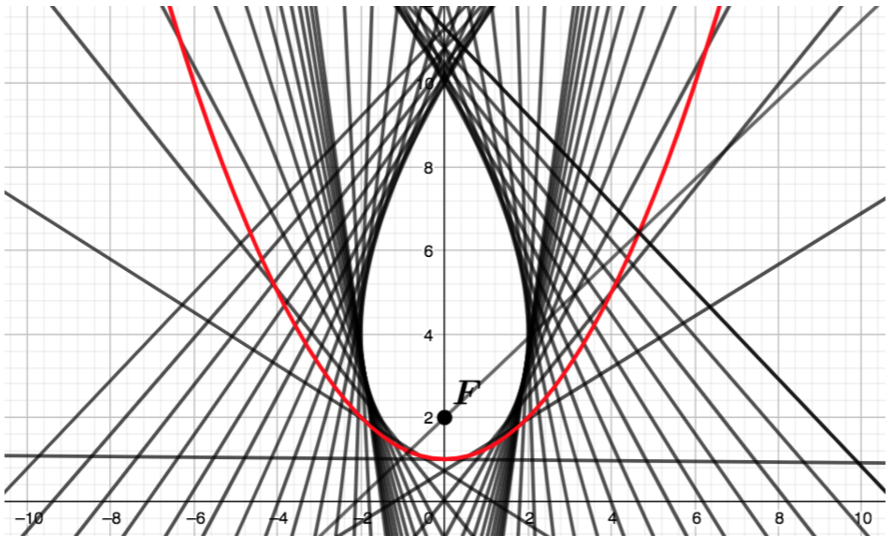


Figura 13: *Cúbica de Tschirnhausen com a corba contrapodària de la paràbola.*

Capítol II

La corba gamma

5 Introducció

Com ja hem vist, existeixen diferents definicions matemàtiques de paràbola. Una d'elles defineix la paràbola com a lloc geomètric: requereix considerar un punt anomenat focus i una recta anomenada directriu que no passa pel focus, llavors, la paràbola és el conjunt de punts equidistants a la directriu i al focus.

L'objectiu d'aquesta secció és definir i estudiar una corba formada a partir de definir la directriu com una paràbola, en comptes d'una recta. L'única restricció serà que el nou focus ha d'estar situat al focus de la paràbola directriu. A aquesta corba l'anomenarem γ.

Així que la corba γ està formada per tots els punts situats a la mateixa distància d'una paràbola que fa funció de directriu i un focus que coincideix amb el focus de la paràbola directriu.

6 Equació i representació gràfica de la corba

Per poder estudiar la corba necessitem representar-la gràficament i trobar l'equació que la defineix.

En primer lloc enunciarem una forma d'obtenir tots els punts de γ i tot seguit demostrarem que és vàlida. A continuació farem servir aquest mètode per trobar l'equació que defineix la corba. Després de demostrar que totes les γ són semblants, trobarem la representació gràfica de γ.

6.1 Estratègia per obtenir γ

Lema: *Sigui P un punt de la paràbola directriu i F el seu focus. Anomenem Q el punt en què es troben la mediatriu de PF i la recta normal a la paràbola directriu en el punt P. Partim el pla en dos semiplans separats per l'eix de simetria de la paràbola directriu. Si Q es troba al mateix semiplà que P, llavors Q forma part de γ.*

Demostració. Considerem la paràbola directriu $y = a(x-h)^2+k$. El pendent de la tangent a la paràbola al punt $P = (p, a(p-h)^2+k)$ serà

$$\frac{d}{dp}(a(p-h)^2+k)$$

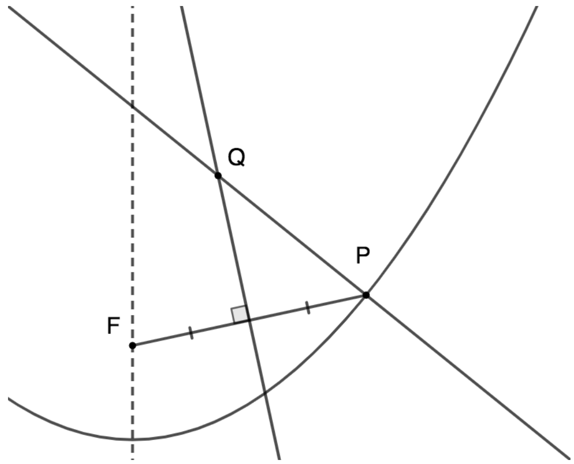


Figura 14: *Exemple en el qual el punt Q forma part de γ*

$$2a(p-h).$$

Llavors, com que el pendent de la recta perpendicular a una recta amb pendent m és $-\frac{1}{m}$, el pendent de la recta normal a la paràbola en el punt P és

$$-\frac{1}{2a(p-h)}.$$

Sabent això, podem trobar l'equació de la recta normal, fent servir l'equació punt-pendent de la recta. La recta resultant és:

$$y = a(p-h)^2 + k - \frac{1}{2a(p-h)}(x-p)$$

Com ja sabem, l'eix de simetria són tots els punts que compleixen $x = h$. Llavors, per trobar el punt d'intersecció de la recta normal amb l'eix de simetria cal substituir les x de l'equació de la recta normal per h. El punt que busquem és:

$$(h,\, a(p-h)^2 + k - \frac{1}{2a(p-h)}(h-p))$$

Simplificant,

$$(h,\, a(p-h)^2 + k + \frac{1}{2a})$$

Com podem veure, l'ordenada del punt en que es troba la recta normal amb l'eix de simetria és l'ordenada de P més un factor que només depèn d'a.

Considerem dues rectes normals a la paràbola en punts diferents però en el mateix semiplà. Suposem que aquestes dues rectes es tallen abans de tallar l'eix de simetria de la paràbola. Llavors, la recta que parteix del punt de la paràbola més alt tallarà l'eix de simetria en un punt més baix que l'altre recta i això és impossible, ja que el factor $\frac{1}{2a}$ és igual per a totes dues rectes. Llavors podem concloure que les dues rectes no es tallen abans de tallar l'eix de simetria de la paràbola.

Sigui R un punt que no formi part de la paràbola directriu, suposem que volem trobar el punt de la paràbola més proper a R.
Per això, considerem la circumferència més petita possible amb centre R que tingui un punt P' en comú amb la paràbola. Ja que la paràbola és una funció contínua i derivable, aquesta circumferència serà tangent a ella. Això implica que la normal a la paràbola en el punt P'(el punt de la paràbola que és més a prop de P) passarà pel centre de la circumferència, R.
A partir de la propietat que hem demostrat de que no hi ha dues rectes normals a la paràbola directriu que es tallin abans de tallar l'eix de simetria, podem concloure que només existeix un punt P'(2 en el cas en que R forma part de l'eix de simetria) i que qualsevol punt que pertanyi a una recta normal a la paràbola en un punt S, mentre estigui en el mateix semiplà que S (els dos semiplans estan separats per l'eix de simetria), el punt de la paràbola que està més a prop seu és S.

Finalment, sabem que el punt d'intersecció entre la normal a la paràbola directriu en P i la mediatriu entre P i F es tallarà en un punt que estarà a la mateixa distància de P que d'F i com hem demostrat, P és el punt de la paràbola més proper a la intersecció si estan en el mateix semiplà, així que el punt d'intersecció forma part de γ i el lema està demostrat.

$\square$

Cal destacar que la anterior demostració també demostra que un punt que no pertany a la construcció esmentada no pot pertànyer a γ.
Suposem que existeix un punt Q fora de la construcció i que pertany a γ, llavors el punt de la paràbola més proper a Q serà la base de la recta normal a la paràbola que passi per Q. Aquest punt Q, a més ha de pertànyer a la mediatriu entre la base de la normal i el focus, ja que com que forma part de γ està a la mateixa distància dels dos punts. Com que pertany a la intersecció entre una recta normal a la paràbola i la mediatriu entre la seva base i el focus de la paràbola hem arribat a una contradicció.

En conseqüència, el lloc geomètric dels punts que compleixen la construcció del lema formen part de la corba γ.

6.2 Equació de la corba

Per trobar l'equació de γ aplicarem el lema demostrat en l'apartat anterior. Primer de tot trobarem l'equació de la mediatriu entre el focus i un punt de la paràbola directriu, tot seguit l'equació de la recta normal a la paràbola directriu en el mateix punt. Finalment trobarem el punt d'intersecció de les dues rectes, que sabem que forma part de γ.

Treballarem amb la paràbola $y = a(x-h)^2 + k$. El focus, F, és al punt $(h,\, k + \frac{1}{4a})$. Escollim el punt $P = (t,\, a(t-h)^2 + k)$.

L'equació de la mediatriu entre dos punts $P_1 = (x_1,\, y_1)$ i $P_2 = (x_2,\, y_2)$ és

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Així que l'equació de la mediatriu entre P i F és:

$$(x-h)^2 + (y - (k + \frac{1}{4a}))^2 = (x-t)^2 + (y - (a(t-h)^2 + k))^2.$$

El pendent de la recta normal a la paràbola en P és $\frac{1}{2a(h-t)}$ i com hem vist a l'apartat anterior la normal a la paràbola en un punt P sempre talla l'eix de coordenades al punt $(h,\, a(t-h)^2 + k + \frac{1}{2a})$ així que, si fem servir la formula de l'equació punt-pendent de la recta, l'equació de la normal serà:

$$y = a(t-h)^2 + k + \frac{1}{2a} + \frac{x-h}{2a(h-t)}.$$

Ara, per trobar el punt d'intersecció de les dues rectes cal resoldre el sistema donat per les equacions de les dues rectes.

$$\begin{cases} y = \frac{x-h}{2a(h-t)} + k + a(h-t)^2 + \frac{1}{2a} \\ (x-h)^2 + (y - (k + \frac{1}{4a}))^2 = (x-t)^2 + (y - (a(t-h)^2 + k))^2 \end{cases}$$

D'aquest sistema en resulta l'equació paramètrica següent:

$$x = a^2h^3 - 3a^2h^2t + h(3a^2t^2 + \frac{1}{4}) - a^2t^3 + \frac{3t}{4}$$

$$y = \frac{12a^2(h-t)^2 + 8ak + 1}{8a}$$

Com hem enunciat en el lema anterior, un punt pot formar part de la corba només si està en el mateix semiplà que el seu respectiu punt P. Per això, calcularem per quins valors de t la corba toca l'eix de simetria. Com que l'eix de simetria està a $x = h$, haurem de comprovar en quins casos el paràmetre x de l'equació paramètrica anterior és igual a h. Aïllant la variable t a l'equació:

$$h = a^2h^3 - 3a^2h^2t + h(3a^2t^2 + \frac{1}{4}) - a^2t^3 + \frac{3t}{4}$$

trobem les 3 solucions següents:

$$t = h - \frac{\sqrt{3}}{2a}$$
$$t = h$$
$$t = h + \frac{\sqrt{3}}{2a}$$

En el interval $t = [h - \frac{\sqrt{3}}{2a}, h + \frac{\sqrt{3}}{2a}]$, el punt P està al mateix semiplà que el punt d'intersecció, com podem comprovar assignant un valor dins de l'interval a t. Fora d'aquest interval el punt d'intersecció no és al mateix semiplà que P.
Podem concloure que t es troba només a l'interval $t = [h - \frac{\sqrt{3}}{2a}, h + \frac{\sqrt{3}}{2a}]$.

6.3 Semblança de totes les γ

Per conèixer amb exactitud la forma de la corba no és suficient amb representar l'equació per a unes variables a, h i k en concret, ja que no sabem si la forma de la corba varia per a diferents valors d'a, h i k. Per això demostrarem que totes les γ són semblants.

Demostració. Hem demostrat que totes les paràboles són semblants en la secció 3.2 del marc teòric. Com ja hem dit, que dues paràboles siguin semblants implica que pots transformar una en l'altra a partir d'una sèrie de transformacions rígides i/o homotècies. Llavors, considerem dues corbes γ, γ_1 i γ_2 amb les seves respectives paràboles directrius λ_1 i λ_2. Si apliquem a tot el sistema format per γ_1 i λ_1 les transformacions i homotècies necessaries per transformar la paràbola λ_1 en λ_2, també transformarem γ_1 en γ_2, ja que la corba gamma està formada per una construcció geomètrica basada només en la seva paràbola directriu. Això implica que totes les corbes γ són semblants.

□

6.4 Representació gràfica

Finalment, només falta donar un valor a les variables a, h i k per poder representar la corba. Escollirem $a = 1$, $h = k = 0$, així que tenim la paràbola directriu $y = x^2$. Les equacions paramètriques respectives a aquests valors són:

$$x = \frac{3t}{4} - t^3$$

$$y = \frac{12t^2 + 1}{8}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Recordem que, com hem demostrat a la secció anterior, totes les corbes γ són semblants, així que la respresentació gràfica de la corba γ que correspon a la paràbola $y = x^2$ té la mateixa forma que les γ corresponents a altres paràboles.

Com podem veure a la figura 15, γ és una corba tancada amb forma de gota i la seva àrea continguda la calcularem en un altre apartat. Per a cada valor real d'x per al qual γ està definida, y obté dos valors reals, exceptuant els extrems.

Com era d'esperar, la corba té un eix de simetria vertical, el mateix que la seva paràbola directriu.

La seva representació gràfica és:

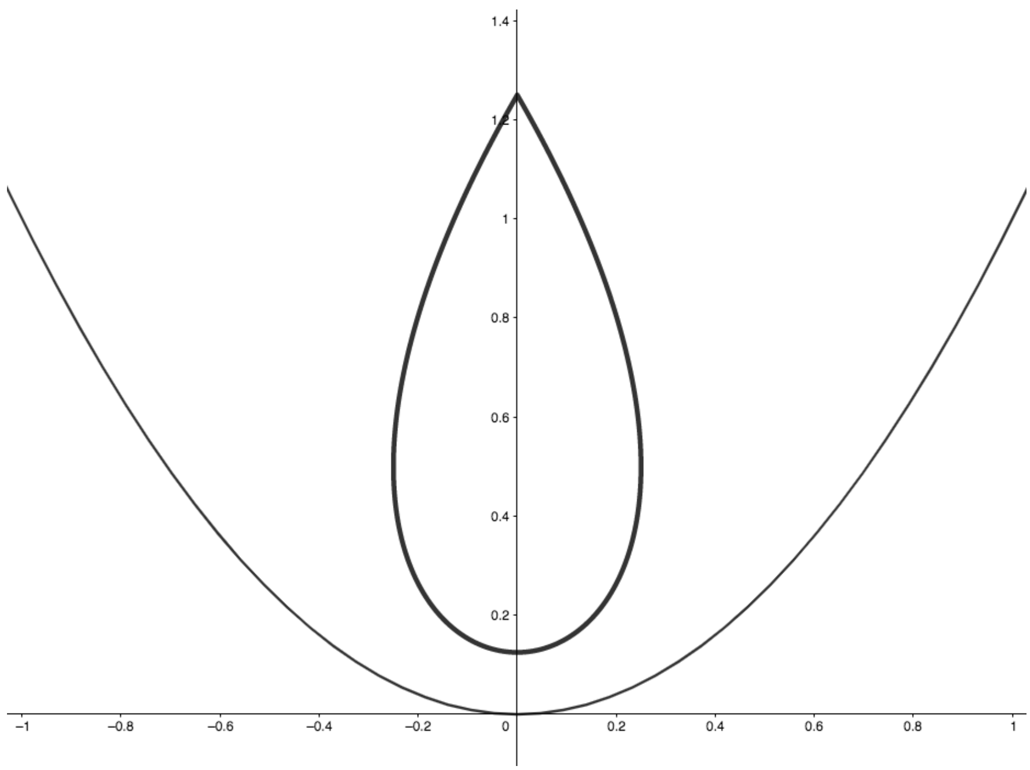


Figura 15: *Representació gràfica de γ.*

7 Propietats de γ

7.1 Propietat 1

Propietat: La mediatriu entre el focus i un punt $P = (t, a(t-h)^2 + k)$ de la paràbola directriu quan $h - \frac{\sqrt{3}}{2a} < t < h + \frac{\sqrt{3}}{2a}$ és tangent a γ.

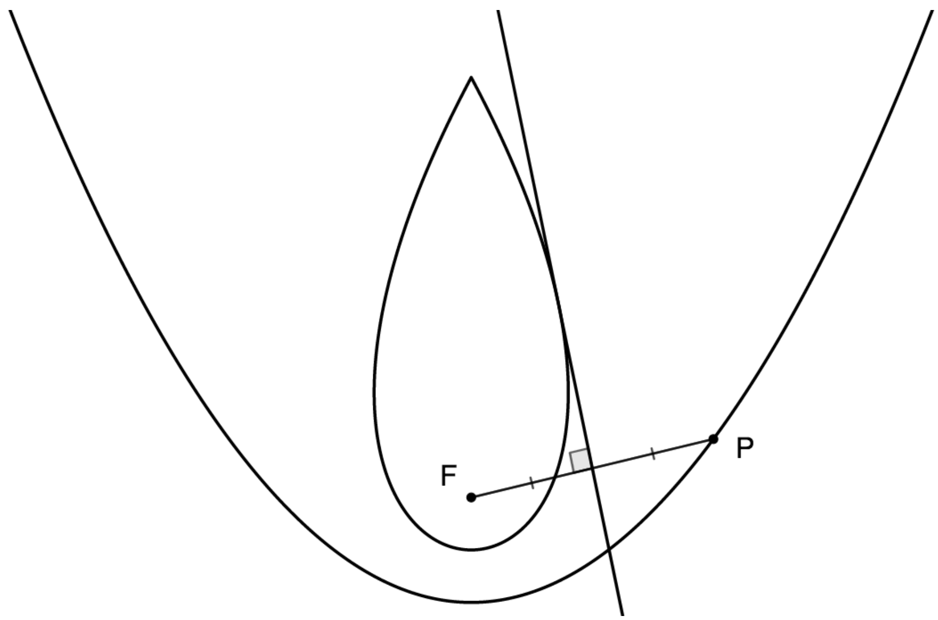


Figura 16: *Exemple en què la mediatriu de PQ és tangent a* γ

Demostració. γ és una corba contínua, tancada, i derivable en tots els punts de la corba, exceptuant el vèrtex superior. En conseqüència, si demostrem que una mediatriu entre la paràbola i el focus que cumpleix la restricció de l'enunciat passa només per un punt de la corba gamma, és equivalent a demostrar que és tangent a ella. Demostrarem aquesta propietat per reducció a l'absurd. (Una recta que passi pel vèrtex de la corba no compleix la restricció de l'enunciat.)

Suposem que existeix una mediatriu entre el focus, F i un punt P_1 de la paràbola directriu que passa per dos punts diferents de γ, Q_1 i Q_2. La recta normal a la paràbola directriu en P_1 passa per Q_1. Com que el punt Q_2 pertany a γ, hi ha una recta normal a la paràbola en un punt que anomenem P_2, diferent de P_1, que passa per Q_2.

Com ha quedat demostrat al lema de la secció anterior, el punt de la paràbola més proper a Q_2 és P_2. I, com que el punt Q_2 cau alhora a la mediatriu entre P_2 i F i a la

mediatriu entre P_1 i F, podem establir les dues igualtats $P_2Q_2 = Q_2F$ i $P_1Q_2 = Q_2F$, a partir de les quals obtenim $P_2Q_2 = P_1Q_2$.
Però el punt de la paràbola més proper a Q_2 és P_2, així que P_2Q_2 no pot ser igual a P_1Q_2 i com que hem arribat a una contradicció la propietat està demostrada.

La mediatriu serà tangent a γ sempre que $h - \frac{\sqrt{3}}{2a} < t < h + \frac{\sqrt{3}}{2a}$, ja que la corba no està definida per a altres valors de t.

□

7.2 Propietat 2:

Propietat: Tracem una recta perpendicular a l'eix d'abcisses tal que no tingui cap punt en comú amb γ. L'anomenem r.
Anomenem P el punt en què aquesta recta es talla amb la paràbola directriu. Tracem la tangent a la paràbola en el punt P i fem una reflexió de la recta r respecte a la tangent a la paràbola, per obtenir la recta s.
Anomenem Q el punt més proper a P en què la recta s talla a γ. Anomenem t la recta obtinguda en fer la reflexió de la recta s respecte a la tangent a γ en el punt Q.
Anomenem R el punt més proper a Q en que la recta t talla a la paràbola directriu. Llavors, la reflexió de la recta t respecte a la tangent a la paràbola en el punt R és ella mateixa.

Aquest enunciat és equivalent a, menys rigorosament, dir que si la paràbola i γ fossin refectives, un raig de llum paral·lel a l'eix de simetria de la paràbola que toqués a la paràbola abans de γ sempre tornaria pel mateix lloc per on ha vingut.

Demostració. Com hem demostrat a la introducccció teòrica (secció 2.3), un raig de llum perpendicular a la directriu que incideix en la paràbola és reflexat en direcció al focus. Aleshores sabem que la recta s passa pel focus de la paràbola directriu.

Q és el punt d'intersecció entre la recta s i γ. Anomenem R al punt de la paràbola directriu tal que la normal a la paràbola en R passi per Q. Sabem, per la propietat 1, que la mediatriu d'RF és tangent a gamma pel punt Q. Com que la recta s passa per Q i F, la reflexió d's respecte la tangent a γ en Q (la mediatriu entre F i R) passa per R. Això vol dir que t és la recta normal a la paràbola en el punt R.

Com que la recta t és la recta normal a la paràbola en el punt R, és perpendicular a la tangent a la paràbola en el punt R. Llavors el resultat de fer la simetria de t respecte la tangent és t i la propietat està demostrada. □

7.3 Propietat 3:

Propietat: *Donades una paràbola i la seva respectiva corba γ, tracem una semirecta amb l'origen al focus F de la paràbola. Anomenem A al punt d'intersecció de la semirecta amb*

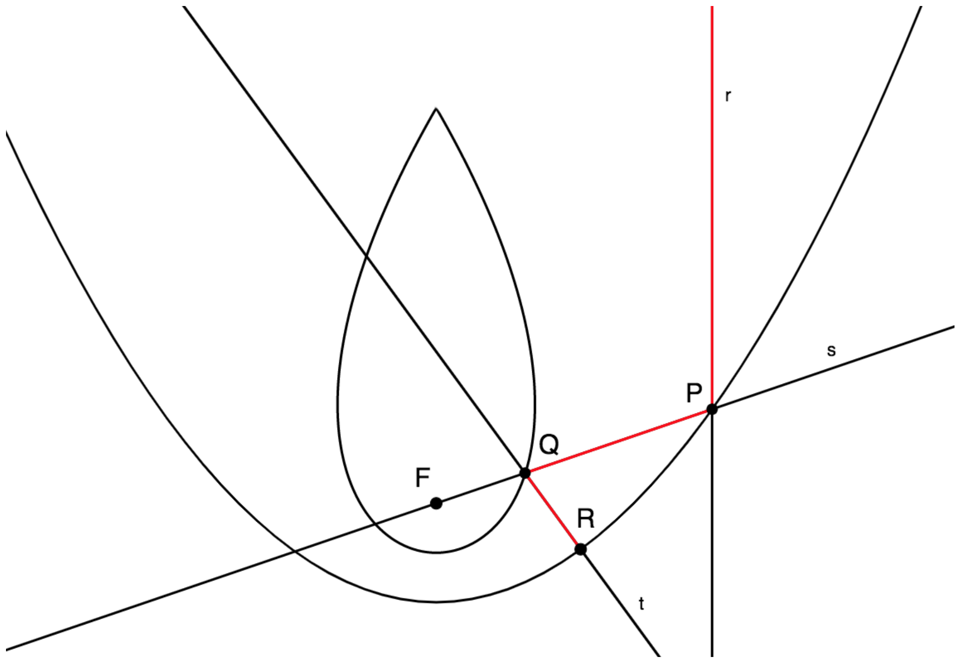


Figura 17: *Gràfic de la propietat 2, en què els segments en vermell representen els raigs de llum.*

γ. *Determinem un punt P al mateix semiplà (el pla està partit per l'eix de simetria de la paràbola) que A tal que la recta normal a la paràbola en P passi per A. Anomenem V al punt d'intersecció entre la recta AP i l'eix de simetria de la paràbola. Anomenem α a l'angle $\angle VFA$ i β a l'angle $\angle AFP$. Llavors, els angles α i β compleixen la relació*

$$\beta = \frac{180 - \alpha}{3}.$$

Demostració. Per començar, ens adonem que la mediatriu del segment PF passa pel punt A. En conseqüència, el triangle $\triangle FPA$ és isòsceles i els angles $\angle AFP$ i $\angle FPA$ són iguals i valen β.

Per continuar, demostrarem que el triangle $\triangle FPV$ és iscòsceles.
La paràbola segueix l'equació $y = a(x-h)^2 + k$, llavors el punt P té les coordenades $(p,\, a(p-h)^2 + k)$ i $F = (h,\, \frac{1}{4a} + k)$. Com hem demostrat a l'apartat 2.1, la normal a la paràbola en un punt $P = (p,\, a(p-h)^2 + k)$ creua l'eix de simetria de la paràbola al punt $V = (h,\, a(p-h)^2 + k + \frac{1}{2a})$.
Per demostrar que el triangle $\triangle FPV$ és iscòsceles, demostrarem que el segment VF té la

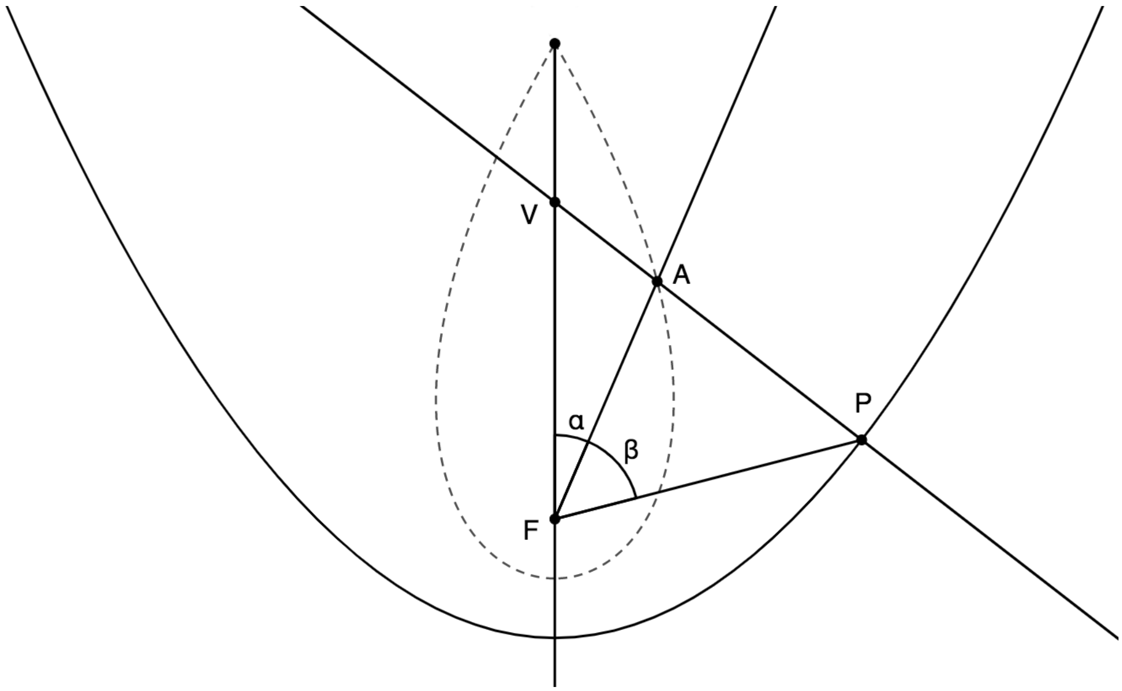


Figura 18: *Dibuix del lema*

mateixa longitud que el segment FP.
Fem servir la fórmula de la distància entre dos punts per calcular la mesura del segment FP:

$$|FP| = \sqrt{(p-h)^2 + (a(p-h)^2 + k - (\frac{1}{4a} + k))^2}$$

Simplificant,

$$|FP| = \sqrt{(a(p-h)^2)^2 + \frac{(p-h)^2}{2} + (\frac{1}{4a})^2)}$$

$$|FP| = a(p-h)^2 + \frac{1}{4a}.$$

Repetim el procediment per calcular el valor de VF:

$$|VF| = \sqrt{(h-h)^2 + (a(p-h)^2 + k + \frac{1}{2a} - (\frac{1}{4a} + k))^2}$$

$$|VF| = a(p-h)^2 + \frac{1}{4a}.$$

Com hem demostrat, $|VF| = |FP|$, llavors el triangle $\triangle FPV$ és iscòsceles. En conseqüència, $\angle PVF = \angle FPV = \beta$.

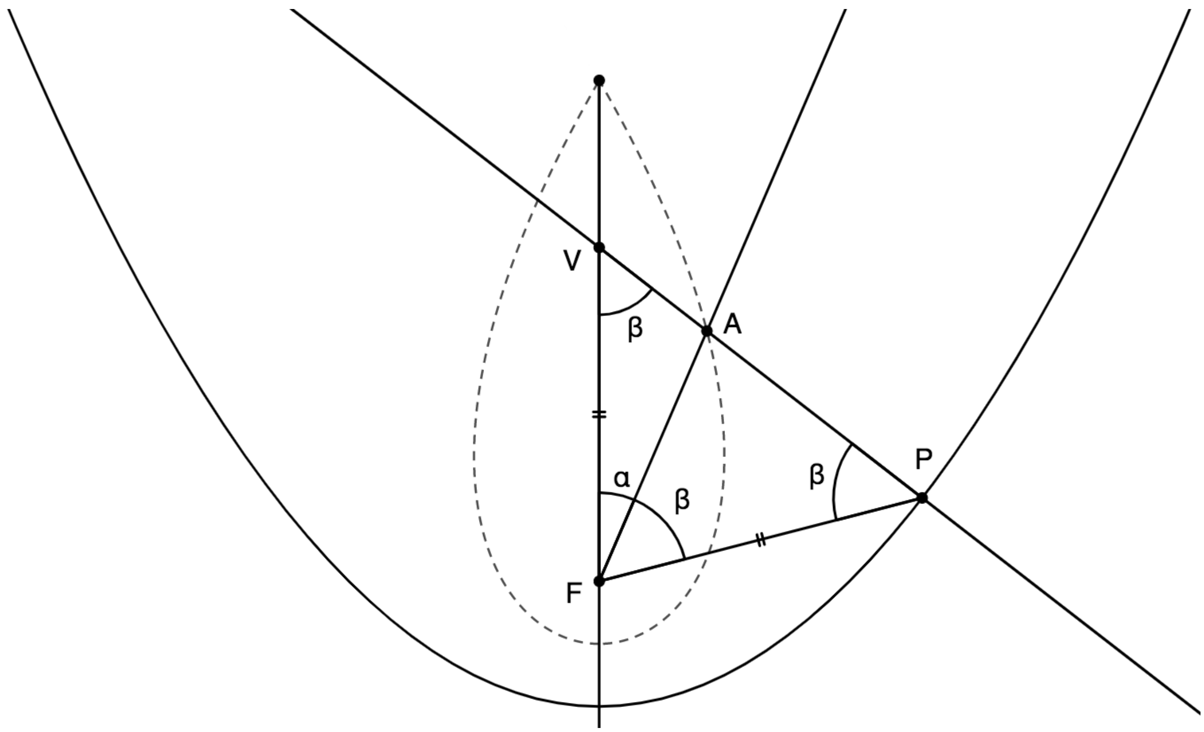


Figura 19: *Construcció de la demostració del lema*

Els angles interiors d'un triangle sumen 180 graus. Per tant, si escollim el triangle $\triangle FPV$, sabem que:

$$\angle FPV + \angle PVF + \angle VFP = 180$$

Podem substituir els angles pels seus valors en funció d'α i de β.

$$\beta + \beta + (\alpha + \beta) = 180$$

$$\beta = \frac{180 - \alpha}{3}.$$

Per tant, hem acabat de demostrar la propietat. $\square$

8 Àrea de γ

L'objectiu d'aquesta secció és trobar l'àrea continguda dins la corba γ.

En primer lloc trobarem l'àrea de la corba γ respectiva a la paràbola $y = x^2$ i més tard generalitzarem a partir del resultat. Com ja hem vist, les equacions paramètriques d'aquesta corba són:

$$x(t) = \frac{3t}{4} - t^3$$
$$y(t) = \frac{12t^2 + 1}{8}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Volem trobar l'àrea entre la corba i l'eix y i començarem trobant l'àrea de la part de la corba que pertany als valors d'x positius. Com que γ és simètrica respecte l'eix de les y, aquesta part de γ serà la meitat de l'àrea total.
Recordem que els punts en què γ es talla amb l'eix y són els punts en els quals $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t = 0$ i $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'x és positiva pels valors de t entre 0 i $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Definim una funció f que compleixi que $f(y) = x$. Anomenem a i b els valors pels quals $a = f(0)$ i $b = f(\frac{\sqrt{3}}{2})$. Llavors l'àrea de la corba serà el resultat de la integral següent.

$$\frac{A}{2} = \int_a^b f(y)dy.$$

Sabem per la definició de la derivada que $\frac{dy}{dt} = y'(t)$, així que $dy = y'(t)dt$. Si substituim l'última equació a l'integral, canviem els límits de l'integral pels seus corresponents valors de t i substituim y per la seva respectiva equació paramètrica en funció de t, obtenim

$$\frac{A}{2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(y(t))y'(t)dt.$$

Sabem que $f(y) = x$ i en consequència $f(y(t)) = x(t)$.

$$\frac{A}{2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x(t)y'(t)dt.$$

Sabem que $x(t) = \frac{3t}{4} - t^3$ i $y'(t) = 3t$. Substituim aquests valors a la integral, simplifiquem i operem.

$$\frac{A}{2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\frac{3t}{4} - t^3)(3t)dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{9}{4}t^2 - 3t^4 dt =$$

$$= \frac{3}{4}t^3 - \frac{3}{5}t^5 \Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \left[\frac{3}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 - \frac{3}{5}(\frac{\sqrt{3}}{2})^5\right] - \left[\frac{3}{4}(0)^3 - \frac{3}{5}(0)^5\right] =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{80}$$

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{40}.$$

Ara que hem trobat l'àrea de la corba quan la paràbola directriu segueix l'equació $y = x^2$, generalitzarem aquest valor per a qualsevol paràbola.

Com hem vist a la secció 3.2 del marc teòric, les variables k i h, en l'equació $y = a(x-h)^2 + k$ influeixen només en la posició de la paràbola i en conseqüència en la posició de γ. En canvi, la variable a representa el recíproc de la raó de l'homotècia que cal aplicar a la paràbola $y = x^2$ per obtenir la paràbola $y = a(x-h)^2 + k$. En conseqüència, també és el recíproc de la raó de l'homotècia que has d'aplicar a la corba γ amb paràbola directriu $y = x^2$ per obtenir la corba γ respectiva a la paràbola directriu $y = a(x-h)^2 + k$. Com que la raó de les àrees de dues figures homotètiques és igual al quadrat de la raó d'homotècia, l'àrea de la corba γ amb equació $y = a(x-h)^2 + k$ serà

$$\frac{9\sqrt{3}}{40a^2}.$$

9 Semblança de γ amb la cúbica de Tschirnhausen

En aquesta secció demostrarem que la corba de Tschirnhausen és semblant a la corba γ.

Demostració. Recordem que la cúbica de Tschirnhausen segueix l'equació paramètrica següent (secció 4.4 del marc teòric):

$$x = a(1-3t^2); \;\; y = at(3-t^2).$$

Per demostrar que la cúbica de Tschirnhausen és semblant a la corba γ demostrarem que la cúbica de Tschirnahausen quan $a = \frac{1}{8}$ és congruent amb γ en el cas en què $a = 1, \; k = h = 0$. Això ho farem aplicant transformacions rígides a la cúbica de Tschirnhausen per transformar-la en γ. Amb aquest procés demostrarem la propietat enunciada ja que, com hem vist, totes les corbes de Tschirnahsen són semblants, igual que γ.

Les transformacions rígides que utilitzarem seràn una rotació de 90 graus i una translació vertical.
Per fer la rotació multiplicarem les coordenades de la corba paramètrica per una matriu de rotació.

$$(\frac{1}{8}(1-3t^2),\ \frac{1}{8}t(3-t^2))\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} =$$

$$= (\frac{1}{8}(1-3t^2),\ \frac{1}{8}t(3-t^2))\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(\frac{1}{8}t(3-t^2),\ \frac{1}{8}(3t^2-1)).$$

Les equacions paramètriques de la corba resultant són:

$$x = \frac{1}{8}t(3-t^2);\ y = \frac{1}{8}(3t^2-1))$$

Si apliquem el canvi de variable $t = 2s$ obtenim:

$$x = \frac{3s}{4} - s^3;\ y = \frac{1}{8}(12s^2-1))$$

Ara aplicarem una translació donada pel vector $\vec{v} = (0, \frac{1}{4})$ a la corba. Ens queden les següents equacions:

$$x = \frac{3s}{4} - s^3;\ y = \frac{12s^2+1}{8}$$

Com podem veure, aquestes equacions paramètriques són les mateixes que les de la corba γ en el cas en què $a = 1,\ k = h = 0$, així que la propietat està demostrada.

$\square$

Capítol III

Generalització de gamma

10 Introducció

En aquest capítol del treball anirem un pas endevant en l'estudi de la corba gamma. Recordem que l'anterior capítol consistia en trobar els punts equidistants a una paràbola i el seu focus, i que per fer-ho, utilitzavem una construcció, la mateixa que aplicada a una recta i un punt porta a una paràbola.

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar les corbes que obtenim en aplicar successivament aquesta construcció a la paràbola i a les que obtenim a partir d'aquesta. Així doncs, en aquest capítol, com que ja no estudiem només els punts equidistants, considerarem la corba sencera, sense cap restricció.

10.1 La nomenclatura

Anomenarem γ_0 a la recta directriu, i γ_{k+1} a la corba formada pel lloc geomètric dels punts que formen part d'aplicar la construcció (que ara recordarem) a la corba γ_k. Llavors tenim que γ_1 és una paràbola, i γ_2 és la cúbica de Tschirnhausen.

10.2 La construcció

Sigui F el focus de la paràbola γ_1. Anomenem P_k a un punt de la corba γ_k. Llavors γ_{k+1} és el lloc geomètric dels punts definits com la intersecció entre la recta normal a γ_k en P_k i la mediatriu entre P_k i F per a tot P_k.

11 Formula general per γ_k

Diem que el focus F està a l'orígen de coordenades, i γ_0 és la recta $y = -1$. Podem dir això sense pèrdua de generalitat ja que podem convertir qualsevol altre configuració d'aquests dos elements en la que hem enunciat a partir d'una sèrie de transformacions rígides i/o homotècies. Demostrarem que l'equació polar que defineix la corba γ_k és

$$\gamma_k(\theta) = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1}$$

Demostració. Per cada punt P_k de la corba γ_k existeix un punt P_{k+1} de la corba γ_{k+1} que sigui el resultat d'aplicar la transformació esmentada al punt P_k de la corba γ_k.

Demostrarem que l'equació polar funciona per inducció. El cas base és la corba γ_0.

Hipòtesi d'inducció: Sigui k un nombre natural qualsevol. La hipòtesi d'inducció tindrà tres parts:
-La primera és que l'angle $\angle P_{k-1}FP_k$ té el mateix valor que l'angle α que formen el segment P_0F i la part negativa de l'eix d'ordenades.
-La segona part diu que per la corba γ_k l'equació polar es compleix.
-La tercera part diu que la mediatriu entre els punts P_{k-1} i F és tangent a la corba γ_k en el punt P_k.
Per fer la demostració primer veurem que la hipòtesi d'inducció es compleix per el cas $k = 1$(cas base), i més tard que si la hipòtesi es compleix per el cas k, també es compleix pel cas $k + 1$.

Cas base.
Demostrarem que la hipòtesi d'inducció es compleix per $k = 1$.

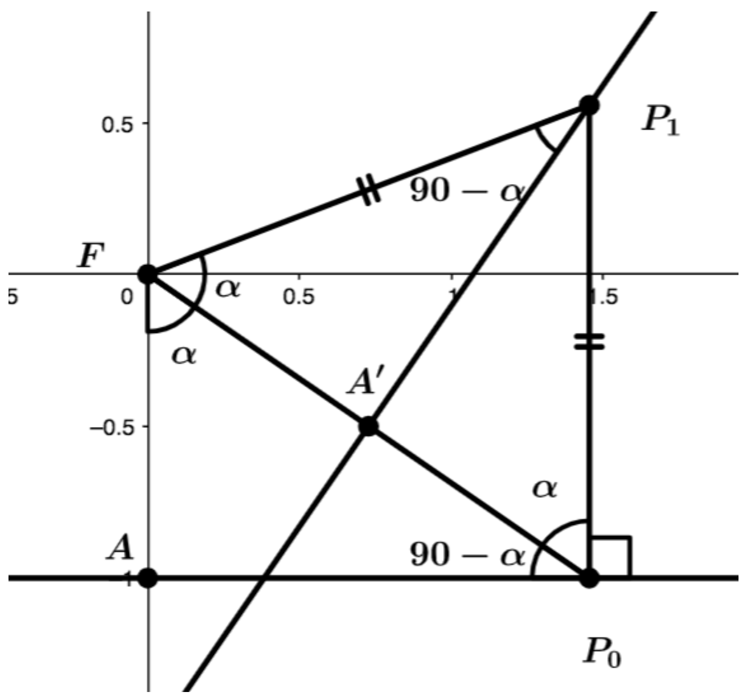


Figura 20: *Diagrama de la construcció utilitzada pel cas base.*

Anomenem A a la intersecció entre l'eix d'ordenades i γ_0. Definim el punt P_0 amb l'angle α que fa el segment FP_0 amb el segment FA. Com podem veure en el diagrama, trobem el punt P_1 traçant la mediatriu entre F i P_0 i la perpendicular a γ_0 en el punt

P_0. Ja que l'angle $\angle FAP_0$ és recte, $\angle AP_0F = 90 - \alpha$ i $\angle FP_0P_1 = \alpha$, i com que P_1 està en la mediatriu de FP_0, sabem que $\angle P_0FP_1 = \alpha$, així que la primera part de l'hipòtesi d'inducció està demostrada pel cas base.

Definim A' com el punt mig de FP_0. Sabem que $FA = 1$, així que $FP_0 = \frac{1}{\cos\alpha}$. Llavors $FA' = 1/2FP_0 = \frac{1}{2\cos\alpha}$, i considerant el triangle rectangle $\triangle FA'P_1$, veiem que $FP_1 = \frac{FA'}{\cos\alpha} = 2\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right)^2$. Com que en les equacions polars l'angle θ es comença a contar des de la part positiva de l'eix d'abscisses, podem afirmar la relació $\alpha = \frac{\theta+\pi/2}{2}$. Finalment escrivim la formula per la distància FP_1 en funció de θ, que és la equació polar de γ_1:

$$\gamma_1(\theta) = 2\left(\frac{1}{2\cos\frac{\theta+\pi/2}{2}}\right)^2$$

Així doncs hem demostrat la segona part de la hipòtesi inductiva per el cas base.

La tercera part de l'hipòtesi d'inducció també es compleix, ja que com hem demostrat al marc teòric, la mediatriu entre el focus d'una paràbola i qualsevol punt de la seva directriu és tangent a la paràbola.

Pas inductiu: Sabem per la tercera part de la hipòtesi d'inducció que la mediatriu entre

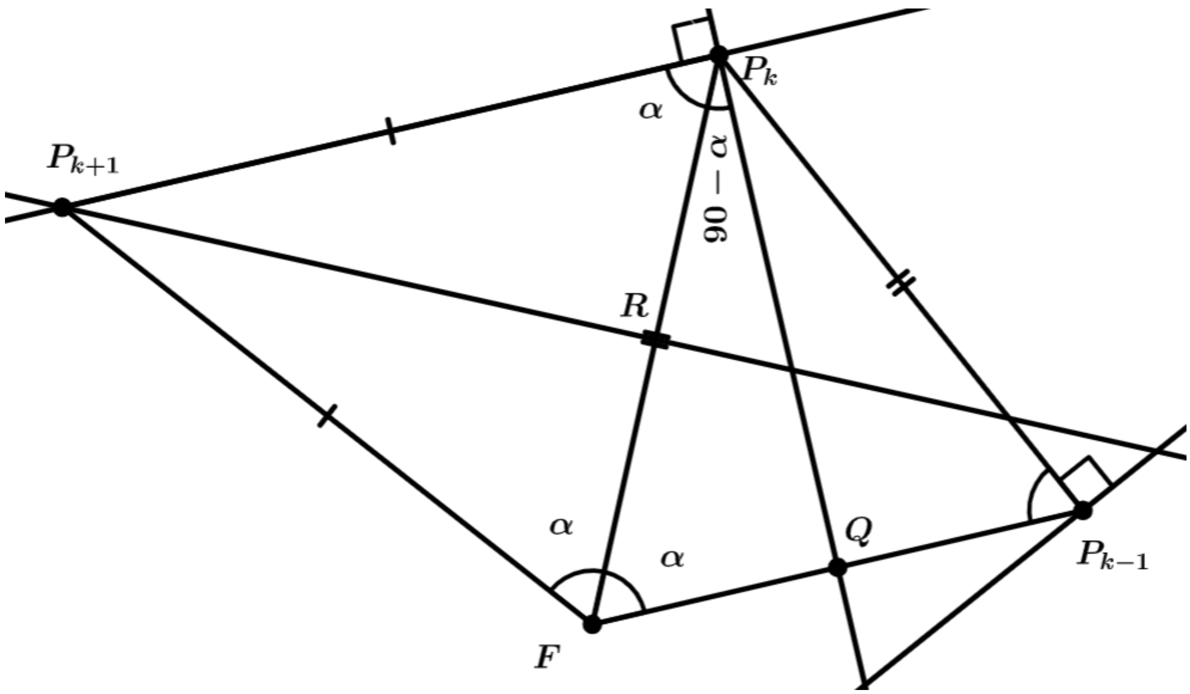


Figura 21: *Diagrama de la construcció del pas inductiu.*

P_{k-1} i F és tangent a la corba γ_k en el punt P_k. Així doncs, la recta perpendicular a aquesta mediatriu en el punt P_k serà la recta normal a la corba γ_k que necessitem per trobar el punt P_{k+1}. El punt P_{k+1} és la intersecció entre aquesta recta normal i la mediatriu entre P_k i F.

Anomenem Q i R als respectius punts mitjos dels segments $P_{k-1}F$ i P_kF. Per la primera part de la hipòtesi d'inducció, $\angle P_{k-1}FP_k = \alpha$. Com que $\angle P_kQF$ és recte, tenim que $\angle FP_kQ = 90 - \alpha$, $\angle P_{k+1}P_kF = \alpha$ i finalment $P_kFP_{k+1} = \alpha$. Llavors, la primera part de la hipòtesi d'inducció està demostrada.

Recordem que en el cas base hem dit que $\alpha = \frac{\theta_1 + \pi/2}{2}$, on θ_1 és l'angle que fa FP_1 amb l'eix d'abscisses. En consequència, $\theta_1 = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Si anomenem θ a l'angle que fa FP_k amb l'eix d'abscisses, podem afirmar que $\theta = \theta_1 + (k-1)\alpha$, ja que per la primera part de la hipòtesis, $\angle P_{n-1}FP_n = \alpha$ per tot n menor que $k+1$. Llavors $\theta = (k+1)\alpha - \frac{\pi}{2}$.

En consecuència també sabem que FP_{k+1} forma un angle de valor $\alpha(k+2) - \frac{\pi}{2}$ amb l'eix d'abscisses.

Per la segona part de la hipòtesi d'inducció,

$$FP_k = \gamma_k(\theta) = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1}.$$

Si fem el canvi de variable $\theta = \alpha(k+1) - \frac{\pi}{2}$, ens queda

$$FP_k = \gamma_k(\alpha(k+1) - \frac{\pi}{2}) = 2\Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}.$$

Tenim que $FR = \frac{1}{2}FP_k$, i, considerant el triangle rectangle $\triangle FRP_{k+1}$, sabem que $FP_{k+1} = \frac{FP_k}{2cos(\alpha)}$. Llavors

$$\gamma_{k+1}(\alpha(k+2) - \frac{\pi}{2}) = FP_{k+1} = \frac{\gamma_k(\alpha(k+1) - \frac{\pi}{2})}{2cos(\alpha)} = 2\Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+2}$$

I si ara refem el canvi de variable, $\alpha = \frac{\theta+\pi/2}{k+2}$, ens queda

$$\gamma_{k+1}(\theta) = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+2})}\Big)^{k+2}.$$

La segona part de la hipòtesi inductiva està demostrada per el cas $k+1$.

Per acabar la demostració ens falta demostrar la tercera part de la hipòtesi inductiva, així que hem de demostrar que la mediatriu entre els punts P_k i F és tangent a la corba γ_{k+1} en el punt P_{k+1}. Ho demostrarem de la següent manera: trobarem l'equació polar de la mediatriu i derivarem aquesta equació polar i la equació polar de γ_{k+1} per veure que les

dues derivades tenen el mateix valor en el punt P_{k+1}.
El punt P_k en funció de l'angle α en coordenades polars és $(2\Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}$, $\alpha(k+1)-\pi/2)$[1]

Sabem que l'equació polar d'una recta és $r(\beta) = a\sec(\beta-\beta_0)$, on a és la distància mínima de la recta a l'orígen, i β_0 l'angle que forma la perpendicular que passa per l'orígen amb l'eix X positiu. Ja que l'angle que forma FP_k amb l'eix d'abscises positiu és $\alpha(k+1)-\pi/2$ i la distància mínima a la recta és $2\Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}$, tenim que l'equació polar de la mediatriu és

$$m(\theta) = \frac{\Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}}{cos(\theta-(\alpha(k+1)-\pi/2))}.$$

La derivada de la mediatriu és:

$$m'(\theta) = \Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}\frac{sin(\theta-(\alpha(k+1)-\pi/2)}{cos^2(\theta-(\alpha(k+1)-\pi/2)}$$

I la derivada en el punt P_{k+1}, que és quan $\theta = \alpha(k+2)-\pi/2$:

$$m'(\alpha(k+2)-\pi/2) = \Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}\frac{sin(\alpha)}{cos^2(\alpha)}.$$

Ara derivem la corba $\gamma_{k+1}(\theta)$:

$$\gamma'_{k+1}(\theta) = \Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+2})}\Big)^{k+1}\frac{sin(\frac{\theta+\pi/2}{k+2})}{cos^2(\frac{\theta+\pi/2}{k+2})}$$

Finalment, el valor de la derivada en el punt P_{k+1} és:

$$\gamma'_{k+1}(\alpha(k+2)-\pi/2) = \Big(\frac{1}{2cos(\alpha)}\Big)^{k+1}\frac{sin(\alpha)}{cos^2(\alpha)}.$$

Com que les dues derivades en el punt P_{k+1} són iguals, sabem que la tercera part de la hipòtesi inductiva es compleix, i hem acabat la demostració. □

Gràcies a aquesta demostració, ara sabem que l'equació polar que segueix la corba γ_k és:

$$\gamma_k(\theta) = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1}$$

[1] La representació d'un punt en coordenades polars és (r, α), on r és la distància al centre i α és l'angle en relació a la part positiva de l'eix X.

12 La corba gamma com a espiral sinusoidal

Recordem que al marc teòric hem definit les espirals sinusoidals. Aquestes espirals són corbes que segueixen l'equació polar

$$r^n = a^n cos(n\theta)$$

on n és un nombre racional diferent de 0 i a és un nombre real diferent de 0.
Observem que si escollim $\theta = \alpha + \pi/2$, $n = -\frac{1}{m+1}$ i $a = \frac{1}{2^m}$, amb m enter positiu, obtenim l'equació polar seguent:

$$r = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\alpha+\pi/2}{m+1})}\Big)^{m+1}$$

Aquesta equació coincideix amb l'equació de la corba γ_m, així que podem concloure que la corba γ forma part de una familia d'espirals sinusoidals.

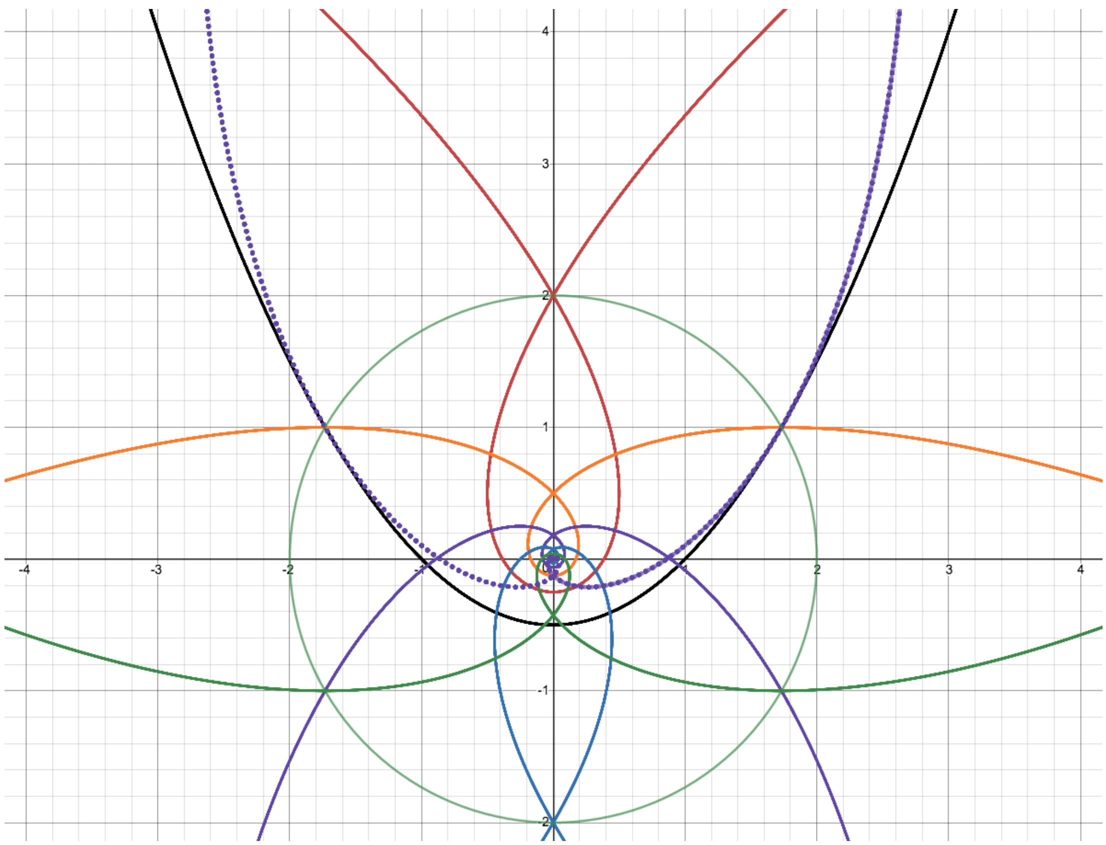


Figura 22: γ_1 *en negre,* γ_2 *en vermell,* γ_3 *en taronja,* γ_4 *en violat,* γ_5 *en blau,* γ_6 *en verd fort, i* γ_7 *en violat puntejat.*

13 Representació gràfica de les corbes γ

La representació gràfica de les corbes des de γ_1 fins a γ_7 la podem veure en la figura 22.

A primera vista podem fer algunes observacions i preguntes:

1. En la Figura 22 tenim una circumferència verda de radi 2. Podem veure que les corbes intersequen aquesta circumferència en només 6 punts diferents. Això passa per a tot k positiu?
2. Totes les corbes γ_k en la figura formen bucles; quants en formen depenent de k?
3. Les corbes amb els valors de k més alts s'assemblen a una espiral logarítmica; en el cas en que k tendeixi a infinit, la corba serà una espiral logarítmica?

14 Propietats de les corbes γ_k

L'objectiu d'aquesta secció és determinar algunes propietats de la familia de corbes γ_k a partir de treballar amb les observacions que hem fet a la secció anterior.

14.1 Primera observació

En la Figura 22 tenim una circumferència verda de radi 2*. Podem veure que les corbes intersequen aquesta circumferència en només* 6 *punts diferents. Això passa per a tot k positiu?*

Per respondre a aquesta pregunta determinarem els angles θ pels quals el valor de $\gamma_k(\theta)$ és 2 per a cada valor de k. En consecuència hem d'aïllar θ en l'equació

$$2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1} = \pm 2$$

El valor 2 pot ser negatiu, ja que en aquest cas igualment hi hauria una distància 2 de l'orígen al punt que considerem. Reordenant termes tenim:

$$cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1}) = \pm\frac{1}{2}$$

Ara podem considerar dos casos: $\frac{\theta+\pi/2}{k+1} = \pi l + \frac{\pi}{3}$ i $\frac{\theta+\pi/2}{k+1} = \pi l - \frac{\pi}{3}$ per a qualsevol enter l. Si aïllem θ en el primer cas, tenim:

$$\theta = \frac{\pi}{3}(k+1)(3l+1) - \frac{\pi}{2}$$

Com que k i l són enters, veiem que els angles resultants tenen la forma $\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}$ per valors de n enter.
En el segon cas podem fer el mateix:

$$\theta = \frac{\pi}{3}(k+1)(3l-1) - \frac{\pi}{2}$$

Igual que en el cas anterior, els valors dels angles que busquem són de la forma $\theta = \frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}$ per n enter.

Concluim que hi ha només sis angles pels que la corba γ_k pot intersecar la circumferència de radi dos. Aquests els podem trobar a partir de l'expressió que hem vist abans i són:

$$\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}.$$

14.2 Segona observació

Totes les corbes γ_k en la figura formen bucles; quants en formen depenent de k?

Primer de tot demostrarem un lema:
Lema: *Per a qualsevol angle θ i nombre natural k, $\gamma_k(\theta)$ i $\gamma_k(\theta + \pi(k+1))$ defineixen el mateix punt en el pla.*

Demostració. Considerarem dos casos: el cas en que k és parell i en que k és senar.

Si k és senar, $k+1$ és parell, llavors els angles θ i $\theta + \pi(k+1)$ són iguals ja que estàn separats per un múltiple de 2π. En aquest cas cal demostrar que el valor de la distància entre el punt en questió i l'orígen és igual per als dos punts. Això ho fem substituint els angles en la equació polar:

$$2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1} = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1} + \pi)}\Big)^{k+1}$$

Volem demostrar que l'anterior igualtat és certa. Sabem que $cos(x) = -cos(x+\pi)$:

$$2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1} = 2\Big(-\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1}$$

I aquesta igualtat és certa ja que l'exponent $k+1$ és parell.

En el cas en que k sigui parell els angles θ i $\theta + \pi(k+1)$ són oposats, així que volem demostrar que $\gamma_k(\theta) = -\gamma_k(\theta + \pi(k+1))$. Igual que abans, substituim els angles en les equacions polars:

$$2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1} = -2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1} + \pi)}\Big)^{k+1}$$

I com que $cos(x) = -cos(x+\pi)$:

$$2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1} = -2\Big(-\frac{1}{2cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1}+\pi)}\Big)^{k+1}$$

Els dos negatius de la dreta es cancelen ja que l'exponent és senar, així que hem demostrat el lema. □

Tenint aquest lema demostrat, sabem que els angles θ en l'interval $(-\frac{\pi}{2}(k+2), \frac{\pi}{2}k)$ defineixen tota la corba γ_k, ja que la diferència entre els dos extrems de l'interval és $\pi(k+1)$. Separem la corba γ_k en dues parts; la primera part correspon als valors de θ en l'interval $(-\frac{\pi}{2}(k+2), -\frac{\pi}{2}]$ i la segona part correspon als valors en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}k)$. Les dues parts són simètriques respecte l'eix d'abscisses:

$$\gamma_k(-\frac{\pi}{2}-\theta) = \gamma_k(-\frac{\pi}{2}+\theta)$$

$$2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{-\theta}{k+1})}\Big)^{k+1} = 2\Big(\frac{1}{2cos(\frac{\theta}{k+1})}\Big)^{k+1}$$

que és veritat ja que $cos(x) = cos(-x)$ per a tot x real.
Podem observar en l'equació polar de la corba que en la primera part de la corba la distància a l'orígen és estrictament decreixent (el valor del cosinus en el denominador creix de 0 a 1), mentre que en la segona, la distància és estrictament creixent(el valor del cosinus decreix de 1 a 0). L'última afirmació es pot traduir en que la primera part de la corba forma un espiral creixent en sentit horari i la segona part forma un espiral creixent en sentit antihorari.
Com que el punt corresponent a l'angle $-\frac{\pi}{2}$ és comú de les dues corbes i és el punt amb menor distància a l'orígen, el nombre de bucles que tingui γ_k serà el nombre de cops que les espirals es tallin a partir d'aquest punt.
Hem dit que les dues parts són simètriques respecte l'eix d'abscisses. En conseqüència els punts en que les espirals es creuin seràn els punts en que qualsevol dels dos creui l'eix d'abscisses. La última afirmació es pot traduir en que el nombre de bucles serà el nombre de cops que la primera part de la corba adopti un angle de la forma $\frac{\pi}{2}+\pi n$ per un enter n qualsevol. Llavors el nombre de bucles serà la part entera de la divisió de la longitud de l'intèrval entre π. Això és:

$$\Big\lfloor \frac{\frac{\pi}{2}(k+1)}{\pi} \Big\rfloor$$

$$\Big\lfloor \frac{k+1}{2} \Big\rfloor$$

Podem veure que amb aquesta fórmula també estem tenint en compte els bucles que es formen a l'infinit, ja que quan θ tendeix a un dels extrems de l'intèrval $(-\frac{\pi}{2}(k+2), \frac{\pi}{2}k)$, el radi de $\gamma_k(\theta)$ tendeix a infinit. Si volem eliminar aquests casos, podem restar 1 a $k+1$ en la fórmula, ja que els casos en que hi ha un bucle a l'infinit és quan k és senar perquè és quan l'angle $\frac{\pi}{2}(k+1)$ marca la direcció de l'eix d'abscisses. Així que la fórmula per contar només bucles finits és

$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

14.3 Tercera observació

Les corbes amb els valors de k més alts s'assemblen a una espiral logarítmica; en el cas en que k tendeixi a infinit, la corba serà una espiral logarítmica?

Primer de tot, per demostrar aquesta propietat, derivem la funció de la corba en forma polar per homogenitzar totes les corbes γ_k (hem vist en l'observació 1 que la corba passa per llocs diferents depenent del valor de k mòdul 6). El procediment que seguirem serà veure que les derivades de les corbes $r(\theta) = ae^{b\theta}$ i γ_k són iguals quan k tendeix a infinit. La derivada del radi de la corba respecte l'angle és:

$$\gamma_k'(\theta) = \Big(\frac{1}{2\cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^k \frac{\sin(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}{\cos^2(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}$$

Si anomenem s a la distància del punt de la corba que estem analitzant a l'orígen, podem fer simplificar la anterior expresió:

$$\gamma_k'(\theta) = 2\Big(\frac{1}{2\cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}\Big)^{k+1} \frac{\sin(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}{\cos(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})}$$

$$\gamma_k'(\theta) = s\tan(\frac{\theta+\pi/2}{k+1})$$

Com que k tendeix a infinit, la corba adoptarà valors arbitràriament petits al voltant de l'angle θ, així que hem de escollir un angle diferent per poder estudiar millor el comportament de la corba. Com ja hem vist, la corba talla el cercle de radi 2 quan $\theta = \frac{\pi}{3}(k+1) - \pi/2$ així que podem fer el canvi $\theta = \frac{\pi}{3}(k+1) + \alpha$ per algun angle α:

$$\gamma_k'(\frac{\pi}{3}(k+1) + \alpha) = s\tan(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{k+1})$$

Com que k tendeix a infinit, $\frac{\alpha}{k+1}$ tendeix a 0, i la equació ens queda:

$$\gamma_k'(\frac{\pi}{3}(k+1) + \alpha) = s\tan(\frac{\pi}{3})$$

$$\gamma_k'(\frac{\pi}{3}(k+1) + \alpha) = s\sqrt{3}$$

Ara derivem l'espiral logarítmica $r(\theta) = ae^{b\theta}$ amb radi r.

$$r'(\theta) = abe^{b\theta}$$

$$r'(\theta) = br$$

Si escollim $b = \sqrt{3}$, aconseguim una espiral logarítmica amb la derivada idèntica a la corba que estavem analitzant. Així doncs, hem demostrat que la corba γ_k quan k tendeix a infinit s'aproxima a l'espiral logarítmica $r = ae^{\sqrt{3}\theta}$ per algun valor real d'a diferent de 0.

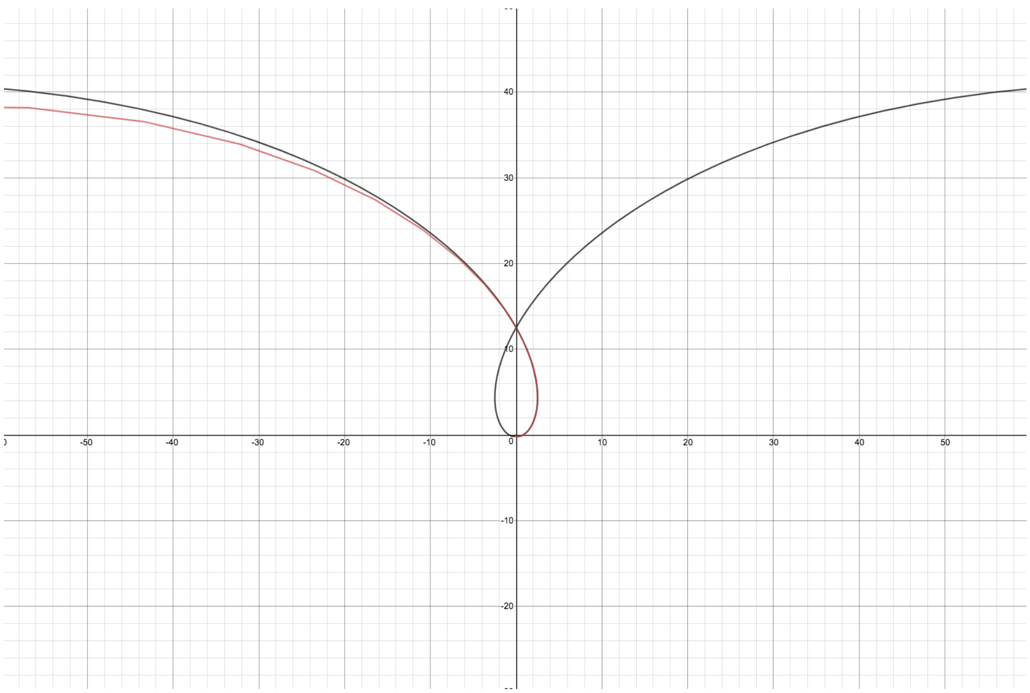


Figura 23: *En negre la corba γ_{103}, i en vermell l'espiral logarítmica* $r(\theta) = ae^{b(\theta - 0.11)}$

Podem veure en la imatge que per un valor gran de k com és 103, la corba està ben aproximada per l'espiral logarítmica.

15 Conclusió

En aquest treball hem vist l'evolució d'una idea, des d'una simple curiositat fins a un treball de recerca. Aquest procés no ha estat gens fàcil, però el resultat ha estat molt gratificant. Durant el procés he adquirit molts coneixements matemàtics i moltes habilitats, no només matemàtiques, sinó que també he millorat en aspectes com la redacció o l'organització del temps, amb els quals no hi comptava fa un any.
Durant la realització del treball, sobretot en el segon i tercer capítols, en moltes ocasions m'he trobat encallat, o simplement em faltaven coneixements per continuar i han estat els moments més valuosos de tot el procés de cara al meu creixement personal i matemàtic, a més a més, sense haver superat aquests moments, el treball no hauria estat tant satisfactòri.

En aquest treball s'han assolit tots els objectius que inicialment m'havia plantejat.

- He aconseguit respondre la pregunta que m'havia plantejat inicialment i trobar que la corba que buscava era la cúbica de Tschirnhausen.
- Durant el treball m'he anat fent preguntes i moltes d'elles les he aconseguit resoldre.
- En el desenvolupament del marc pràctic del treball he anat a cegues, ja que no hi havia una resposta per a aquesta pregunta a internet. Gràcies a això he pogut iniciar-me en la recerca matemàtica.
- Durant el treball m'he trobat amb la necessitat d'adquirir molts coneixements teòrics en relació a les corbes, i he obtingut competències importants.
- Al començament del treball, l'ús del LaTeXem semblava una càrrega, ja que és un programari molt complex. A l'inici em va suposar molts problemes, com errors dels que desconeixia l'orígen o el fet de que al no estar acostumat al programa, escriure la part matemàtica del treball era molt lent. A mesura que avançava, m'adonava que anava entenent les mecàniques d'edició de text, fins al punt que ja les tinc integrades i no podria fer un treball de matemàtiques sense aquest programari.
- Igual que m'ha passat amb el LaTeX, he acabat veient el Geogebra com a una eina essencial per dibuixar diagrames pel treball o per resoldre problemes.
- En el transcurs del treball he après gradualment a organitzar-me el temps de treball i compaginar-lo amb totes les altres activitats presents en el meu horari.
- Puc dir que he fet un treball del que estic orgullós, ja que després de dedicar-li molt d'esforç he aconseguit un resultat satisfactori.

Al principi del treball estava bastant desencaminat amb la direcció que volia que el meu treball adoptés. Malgrat això, amb l'ajuda de la meva tutora i a base de fer-me preguntes,

m'he anat encaminant en només la direcció de la corba γ i més tard de la seva familia de corbes.
Durant tot el treball he anat pràcticament a cegues, ja que hi ha molt poca o gens d'informació per internet sobre les preguntes que m'he fet. Això és el que m'ha enganxat al treball, el fet de sentir que per avançar ho he de fer tot sol, i de tant en tant arribar a resultats sorprenents.

Part de la bellesa de les matemàtiques està en respondre aquestes preguntes per pura curiositat, per contribuïr a l'art que són les matemàtiques, sense preocupar-se per una possible aplicació al "món real". I aquest treball reflexa aquesta recerca de la bellesa matemàtica.

16 Annex

A la secció 8 del marc pràctic hi ha un càlcul de l'àrea de l'interior de la corba γ. La primera idea que vaig dur a terme va ser la que apareix a continuació. Consisteix en calcular l'àrea amb la distància del focus F de la paràbola directriu a un punt A que pertany a γ en funció de l'angle que forma la recta FA amb l'eix de simetria de la paràbola.
Tot i que aquest mètode és correcte, el mètode que ja hem vist a la secció 8 del marc pràctic és exacte i ràpid, així que he decidit deixar aquest mètode per l'annex. Les manipulacions de les expressions d'aquesta secció estàn fetes amb l'ajuda de WolframAlpha, ja que, com ja veurem, són expressions força llargues.

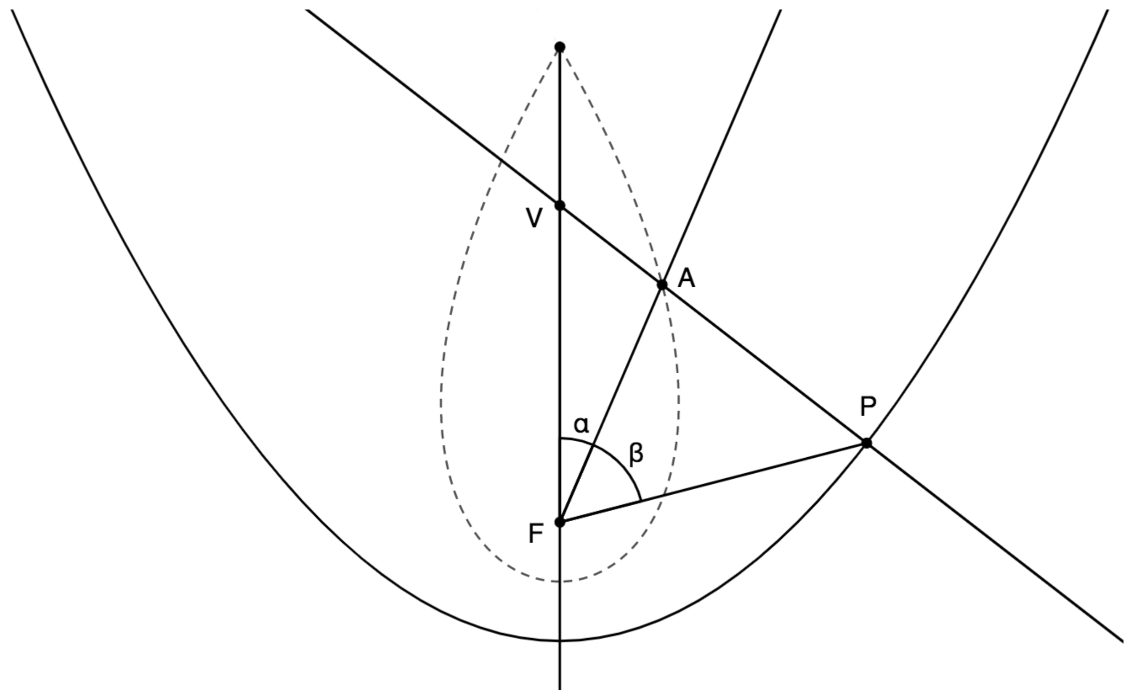


Figura 24: *Diagrama de la construcció utilitzada.*

El càlcul de l'àrea el farem per a la paràbola directriu $y = x^2$ i després generalitzarem per a qualsevol paràbola directriu. Per trobar l'àrea de la corba, primer calcularem la longitud del segment FA en funció de l'angle α.

El procediment que seguirem per calcular la longitud del segment FA és el següent:
Primer trobarem les equacions de les rectes definides pels segments FA i FP, i després calcularem les coordenades del punt P, que és la intersecció entre la recta FP i la paràbola directriu. Amb el punt P podem calcular l'equació de la recta normal a la paràbola en P. Llavors, la intersecció entre la recta normal a P i la recta FA serà el punt A. Amb el punt

A en funció d'α podem trobar la distància del segment FA amb la fòrmula de la distància entre dos punts.

Anomenem r i s les rectes defindes pels segments FA i FP respectivament. La recta r forma un angle de valor α amb la vertical que passa pel focus, així que la seva pendent és $\tan{(90-\alpha)}$. Com hem demostrat a la secció 7.3 del marc pràctic, la recta s forma un angle de valor $\alpha + \frac{180-\alpha}{3} = 60 + \frac{2\alpha}{3}$ amb la vertical, així que el seu pendent és $\tan{(90-(60+\frac{2\alpha}{3}))} = \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}$. Així que les equacions de les rectes r i s , sabent els seus pendents i que les dues passen pel focus són:

$$r: \; y - \frac{1}{4} = \tan{(90-\alpha)}x$$

$$s: \; y - \frac{1}{4} = \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}x$$

El punt P és el punt de tall entre la paràbola directriu, amb equació $y = x^2$ i la recta s, així que serà la solució al següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{4} = \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Hi ha dos parells de solucions (x, y) a l'anterior sistema. Escollirem la solució amb el valor d'x positiu, ja que volem que el punt P estigui al mateix semiplà que A. La solució que busquem és:

$$x = \frac{1}{2}\big(\sqrt{\tan^2{(30-\frac{2\alpha}{3})}+1} + \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}\big)$$
$$y = \frac{1}{4}\big(\sqrt{\tan^2{(30-\frac{2\alpha}{3})}+1} + \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}\big)^2$$

Si recordem la identitat trigonomètrica $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ podem simplificar les anteriors solucions:

$$x = \frac{1}{2}\big(\sec{(30-\frac{2\alpha}{3})} + \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}\big)$$
$$y = \frac{1}{4}\big(\sec{(30-\frac{2\alpha}{3})} + \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}\big)^2$$

Per trobar la recta normal a la paràbola en el punt P cal saber el pendent en aquest punt. El pendent de la recta normal a la paràbola $y = x^2$ en un punt (x, x^2) sabem que és $\frac{-1}{2x}$, així que el pendent m de la recta nomal a la paràbola en P serà:

$$m = \frac{-1}{\sec{(30-\frac{2\alpha}{3})} + \tan{(30-\frac{2\alpha}{3})}}$$

Fent servir l'equació punt-pendent de la recta podem trobar l'equació de la recta normal a la paràbola en P:

$$y = \frac{-(x - \frac{1}{2}\big(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\big))}{\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})} + \frac{1}{4}\big(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\big)^2.$$

Simplificant:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})} + \frac{1}{4}\big(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\big)^2.$$

Ara, per trobar les coordenades del punt A s'ha de trobar la intersecció entre l'última recta i la recta FA i les coordenades seran les solucions per a x i y del següent sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sec(30-\frac{2\alpha}{3})+\tan(30-\frac{2\alpha}{3})} + \frac{1}{4}\big(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\big)^2 \\ y = \tan(90 - \alpha)x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Les solucions són aquestes:

$$x = \frac{(\tan(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \sec(30 - \frac{2\alpha}{3}))(\tan^2(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \sec^2(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 2\tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 1)}{4(\tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\tan(90 - \alpha) + \tan(90 - \alpha)\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 1)}$$

$$y = \big(\tan(90 - \alpha)\tan^3(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 2\tan(90 - \alpha)\tan(30 - \frac{2\alpha}{3}) + \tan(90 - \alpha)\sec^3(30 - \frac{2\alpha}{3})$$
$$+ 3\tan(90 - \alpha)\tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\sec^2(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 3\tan(90 - \alpha)\tan^2(30 - \frac{2\alpha}{3})\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) +$$
$$2\tan(90 - \alpha)\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 1\big)/\big(4(\tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\tan(90 - \alpha) + \tan(90 - \alpha)\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) + 1)\big)$$

Amb la formula de la distància entre dos punts podem trobar la longitud del segment FA.

$$FA = \frac{\csc\alpha((\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) - \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))^2 + 2(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) - \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))\tan(30 + \frac{\alpha}{3}) - 1)}{4(\cot\alpha + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))}$$

Ara que tenim el segment FA en funció d'α, per calcular l'àrea de la corba calcularem les àrees infinitesimals dels petits triangles formats pel diferencial d'α (figura 25). Com que per a valors infinitesimals d'α tenim que $\sin(\alpha) = \alpha$, l'altura del triangle serà $FA \cdot d\alpha$. Així que l'àrea del triangle, si utilitzem la fòrmula de $\frac{b \cdot a}{2}$, serà $\frac{FA^2}{2}d\alpha$.

Per acabar, hem de calcular la següent integral:

$$S = \int_0^{360} \frac{FA^2}{2} d\alpha$$

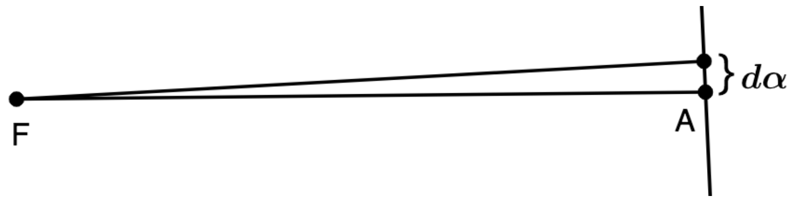


Figura 25: *Triangle infinitesimal.*

$$S = \int_0^{360} \frac{\csc^2\alpha(-1 + (\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) - \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))^2 + 2(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) - \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\tan(30 + \frac{\alpha}{3})^2}{32(\cot\alpha + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))^2} d\alpha$$

Per resoldre aquesta integral he utilitzat el mètode numèric de WolframAlpha, ja que és més efectiu i fàcil que trobar l'antiderivada d'una funció tan complexa. El resultat aproximat que ha donat WolframAlpha és

$$S = \int_0^{360} \frac{\csc^2\alpha(-1 + (\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) - \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))^2 + 2(\sec(30 - \frac{2\alpha}{3}) - \tan(30 - \frac{2\alpha}{3})\tan(30 + \frac{\alpha}{3})^2}{32(\cot\alpha + \tan(30 - \frac{2\alpha}{3}))^2} d\alpha$$

$$S \approx 0.389711\,.$$

Com podem veure, aquest valor és el mateix que hem obtingut al calcular la integral definida de la secció 8 del marc pràctic.

Aquest és el valor de l'àrea per la corba γ que té com a directriu la paràbola $y = x^2$. Anàlogament a la generalització de l'àrea de γ que hem fet al marc pràctic, podem dir que l'àrea per a la forma general d'aquesta corba serà

$$S \approx \frac{0.389711}{a^2}.$$

17 Bibliografia

Calculadora gràfica Desmos, https://www.desmos.com/calculator

Ferréol, R. *Mathcurve.* https://www.mathcurve.com

Geogebra https://www.geogebra.org

Latex StackExchange, https://tex.stackexchange.com

Lawrence, J *A catalog on special plane curves* 1972

Montesdeoca, A (2003), *Curvas en forma paramétrica* Universidad Complutense de Madrid.

Robert C. Yates, *A handbook on curves and their properties*

Weisstein, E. *Wolfram MathWorld.* http://mathworld.wolfram.com.