



# Interaccions gravitacionals

---

Estudi del PTCRC i pertorbacions  
en els punts de Lagrange

Einstein

*“Cool Teddy, you’re Earth. Right now the Hermes is headed towards you starting its month long deceleration to intercept, but instead what I’m proposing is, that we start accelerating immediately to preserve velocity and gain even more. We don’t intercept with Earth at all but we come close enough to get a gravity assist and adjust course.”*

*Donald Glover – The Martian (2015)*

## Abstract

This project focuses on the circular restricted three body problem (CRTBP), which is a branch of celestial mechanics that studies the motion of a particle or a little object located in the gravitational fields of two larger masses.

A system that is able to be identified with CRTBP has five properties or locations in space called Lagrange points, which are related with important properties of the motion of the particle because of their stability. In order to make an investigation, this stability has been tested in every point by simulations in the Earth – Moon system including the Sun's gravity force.

Nevertheless, a full comprehension of the two body problem (which studies the motion of a particle in the gravitational field of one mass) was needed before, so that's why an entire chapter in this document talks about it. To exemplify this chapter and the entire project, orbits around Earth have been explained, and some of them cannot be understood without having learned a little bit about the air friction's force caused by atmosphere gases.

---

Aquest projecte se centra en el problema dels tres cossos restringit circular (PTCRC), el qual és una branca de la mecànica celeste que estudia el moviment d'una partícula que es troba en els camps gravitatoris de dos masses majors.

Un sistema que es pugui identificar amb el PTCRC té cinc punts en l'espai anomenats punts de Lagrange, els quals estan relacionats amb propietats importants de la dinàmica del cos de massa reduïda donada la seva estabilitat. En el marc pràctic d'aquest projecte s'ha dut a terme una investigació per ficar a prova la seva estabilitat mitjançant simulacions en el sistema Terra – Lluna amb la força addicional del Sol.

Prèviament a aquesta investigació ha set necessària una comprensió completa del problema dels dos cossos (que estudia el moviment d'una partícula davant l'atracció d'un cos major). Com que aquest treball s'ha exemplificat amb les òrbites al voltant de la Terra, també ha set necessària una introducció a l'aerodinàmica, present en les òrbites més baixes donada la densitat de l'aire de l'atmosfera alta.





## Índex

Introducció .....	6
Marc teòric.....	8
1. Què és una òrbita?.....	8
2. Què és un satèl·lit? .....	9
3. Determinació d'òrbites.....	10
4. Atmosfera terrestre.....	13
4.1. Estrats de l'atmosfera terrestre .....	13
4.2. Densitats i fregament .....	15
4.2.1. Caiguda lliure .....	19
5. Problema dels dos cossos.....	22
5.1. Aspectes generals .....	22
5.2. Centre de masses.....	24
5.3. Segona llei de Kepler .....	25
5.4. Tercera llei de Kepler .....	26
5.5. Velocitats orbitals.....	27
5.5.1. Òrbites tancades .....	29
5.5.2. Òrbites obertes.....	35
6. Tipus d'òrbites.....	41
6.1. Òrbites segons el propòsit .....	41
6.1.1. Òrbites interplanetàries .....	41
6.1.2. Òrbites terrestres.....	43
6.2. Òrbites terrestres segons la seva inclinació.....	44
6.3. Òrbites terrestres segons la seva altura .....	46
7. Problema dels dos cossos i mig .....	48
7.1. Aspectes generals .....	48
7.2. Simplificació al problema sense dimensions .....	49
7.3. Pseudopotencials i la constant de Jacobi .....	52

7.3.1. Efecte Coriolis .....	57
7.4. Punts de Lagrange.....	58
7.4.1. $L_1, L_2$ i $L_3$ .....	59
7.4.2. $L_4$ i $L_5$ .....	61
Marc pràctic .....	64
1. Objectius .....	64
2. Metodologia.....	66
2.1. Mètode <i>Leapfrog</i> .....	66
3. Procediment .....	69
3.1. Reducció del problema .....	69
3.2. Òrbites sense pertorbacions .....	72
3.3. Òrbites amb pertorbació.....	74
4. Resultats i discussió.....	78
4.1. $L_1$ .....	78
4.2. $L_2$ .....	84
4.3. $L_3$ .....	91
4.4. $L_4$ .....	98
Conclusions del treball.....	102
Bibliografia.....	105
Índex gràfic.....	108
Annex .....	111

## Introducció

Acadèmicament sempre he tingut una característica que per molt estrany que pugui semblar mai he sabut si definir com una virtut o un defecte. Es tracta de voler saber el per què de les coses. Fer els deures, atendre a classe o fins i tot els exàmens sempre han set coses que he fet amb un ritme irregular a causa del meu desig de voler saber el per què de tot el que estic fent en un moment donat. Considero que al llarg dels anys això m'ha servit com una nova font de coneixements, de manera que en el seu moment vaig decidir que dedicaria el meu treball de recerca a treballar d'aquesta manera: explorar, relacionar i entendre les petites coses d'un tot major.

Aplicant aquest model de treball al món de l'astrodinàmica, branca de la física a la qual m'agradaria dedicar-m'hi en un futur proper, juntament amb el meu tutor vam definir la temàtica del meu treball de recerca: la dinàmica de cossos sota atraccions gravitatòries.

El marc teòric presenta un ampli anàlisi sobre diferents camps de la mecànica, diferenciant-ne dues parts: les forces de fregament aplicades a l'atmosfera terrestre i la dinàmica en els problemes dels dos i tres cossos. Sembla que el primer apartat no té massa a veure amb el segon però per damunt de tot, aquesta memòria és un anàlisi general de la mecànica celeste, de manera que no em semblava coherent fer un anàlisi sobre les òrbites tancades sense introduir-me en el fregament de l'aire prèviament, el qual és molt important en les òrbites tancades al voltant de la Terra. A part, el meu treball no ha seguit una metodologia en què s'han fixat uns objectius a complir, sinó que aquest projecte ha set molt lliure a l'hora de fer una recerca guiada per la curiositat.

Tot i això, vull deixar clar que el meu estudi s'ha centrat en el problema dels tres cossos, el qual no es pot entendre sense entendre abans el dels dos. Però tot i havent entès totalment els conceptes anteriors, el centre del meu estudi ha seguit presentant moltes dificultats a l'hora de ser entès perquè se sol treballar des d'una perspectiva diferent, de manera que m'ha calgut introduir-me en el món dels sistemes no inercials, el qual tracta la mecànica d'una manera molt diferent. El món dels problemes de forces centrals aplicat a més d'un cos era totalment nou per a mi exceptuant una part del temari de física de 1r de batxillerat, en què es presentava la llei de gravitació universal.

D'altra banda, com a part més distanciada per la física, el món de les equacions diferencials era totalment nou per a mi fins al punt de no saber de la seva existència fins a l'inici de la recerca, fet que ha suposat dificultat afegida.

En el marc pràctic s'ha tractat d'estudiar l'estabilitat dels punts de Lagrange sota la intervenció de forces externes. En un principi, la idea era estudiar-la amb forces de fregament, però la falta de realitat que això suposava donada la negligible densitat de l'aire provocava que a tot plegat li faltés realitat. Per això es va decidir fer-ho directament amb l'aplicació del PTCRC al sistema Terra – Lluna i la seva translació conjunta al voltant del Sol.

Aquesta combinació de factors ha provocat que el meu treball es defineixi com un informe teòric d'introducció a l'astrodinàmica amb una petita aplicació pràctica dels conceptes estudiats.

### Marc teòric

En aquest treball ens centrarem en l'estudi de cossos que orbiten al voltant de planetes o altres objectes d'un volum considerable.

Per aquest motiu, com en tota recerca, primerament haurem de realitzar una presentació de conceptes bàsics per ajudar al lector a la comprensió absoluta de les conclusions i resultats d'aquesta memòria.

#### 1. Què és una òrbita?

Per definició, una òrbita és la trajectòria seguida per un cos de massa  $x$  sota la influència d'una atracció gravitatòria i produïda per un altre cos. Per tant, no deixa de ser un estudi d'un moviment.

Sabent que els conceptes "òrbita" i "gravetat" estan entrelaçats; i es pot enllaçar amb el terme "caiguda", ens adonem que en aquest procés el cos no entra mai en contacte amb el segon. Així doncs, una òrbita també es podria definir com allò que impedeix que  $n$  cossos xoquin.

És important diferenciar les òrbites que s'estudien en aquest treball, ja que existeixen més significats donats a la paraula "òrbita". En física una òrbita també es refereix a la trajectòria que realitza un electró respecte el nucli d'un àtom. Però aquestes interaccions s'allunyen del nostre àmbit d'estudi perquè són causades per camps electromagnètics.

## 2. Què és un satèl·lit?

Un satèl·lit és un cos celeste que orbita al voltant d'un planeta. Aquests cossos es caracteritzen a part per tenir una massa considerablement més petita que el planeta<sup>1</sup> al voltant del qual orbiten.

Dins del camp dels satèl·lits en trobem de dos tipus:

- **Naturals:** Se solen dir "llunes", i acompanyen al planeta en tot el seu moviment de translació.

Són un exemple tots els satèl·lits que orbiten Júpiter que són més de 60; entre ells, Ío, Europa, Ganimedes...



*Imatge 1 - Ganimedes*

- **Artificials:** Són naus construïdes pels humans que tracen una òrbita calculada artificialment per complir determinats objectius.

Els satèl·lits Meteosat en són un exemple i la seva missió és fer fotografies de la Terra amb diferents càmeres i sensors per predir el clima.



*Imatge 2 - Meteosat de tercera generació*

---

<sup>1</sup> Planeta o cos celeste més petit. Per exemple *Rosetta* va ser una sonda que orbitava al voltant d'un cometa. [https://es.wikipedia.org/wiki/Philae\\_\(sonda\\_espacial\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Philae_(sonda_espacial))

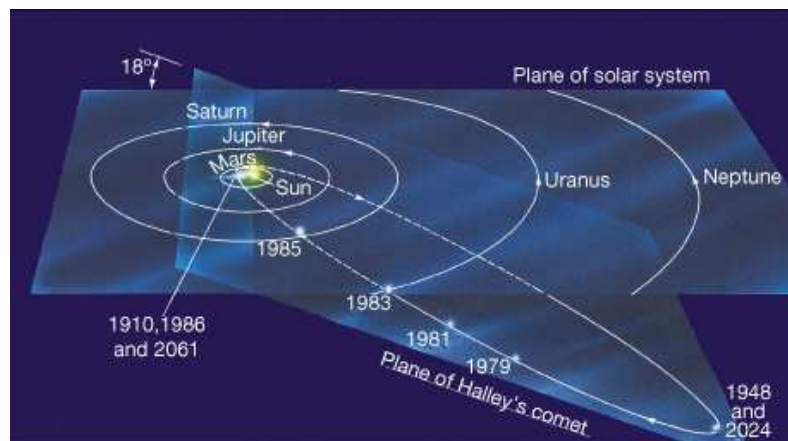
### 3. Determinació d'òrbites

Les condicions en què es troben dos objectes provoquen interaccions diferents entre ells, de manera que l'òrbita que forma un o que formen els dos sempre és diferent, és a dir, hi ha uns factor que condicionen la forma de la trajectòria.

Aquests factors exposats només serveixen per calcular l'anomenada òrbita preliminar, que és aquella que no té en compte forces externes al sistema de les  $n$  masses que componen el sistema de partícules. En conseqüència, les òrbites preliminars no són realment les trajectòries que segueixen els cossos.

En el procés de determinació d'òrbites, una vegada trobada l'òrbita preliminar, s'efectuen sobre aquesta els càlculs necessaris per trobar les seves perturbacions i delimitar d'aquesta manera l'òrbita definitiva.

Per exemple, per determinar una òrbita com la del cometa Halley, primerament es determinen els factor principals, com la velocitat en diferents punts, quins són els valors de les distàncies que guarda en els punts de l'el·lipse amb el Sol i totes les seves propietats a nivell del pla tridimensional. Aquesta òrbita explica el moviment del cometa sense influències d'altres cossos.



*Imatge 3 - Pla orbital del cometa Halley*

Tot i que la òrbita preliminar acostuma a descriure el moviment d'una forma bastant precisa perquè les forces externes són negligibles en molts casos, no es poden negligir en el cas del Halley perquè té un període d'uns 75 anys aproximadament. És important remarcar la paraula "aproximadament" perquè al passar tant temps per completar una òrbita, existeixen moltes forces externes que poden actuar durant el temps suficient per produir petits canvis en la seva trajectòria.

Aquestes variacions s'anomenen variacions orbitals. Però per entendre-les, primerament cal presentar els paràmetres orbitals, que són una sèrie de propietats que totes les òrbites posseeixen i que són susceptibles a modificacions. A partir d'aquests també es defineix la forma de l'òrbita i es permet conèixer la posició del seu pla orbital. La majoria dels paràmetres s'estudien amb més profunditat en els seus respectius apartats, de manera que aquí només se citen per explicar les seves possibles perturbacions.

Tot i que no són els únics, els utilitzats per explicar variacions són els següents:

- **Excentricitat:** Coeficient que indica el grau d'aplanament d'una el·lipse ([veure apartat 5.5.1.1](#)).
- **Semieix major:** Eix que defineix indirectament<sup>2</sup> la forma d'una el·lipse.
- **Inclinació:** Angle format entre el pla orbital estudiat i l'eclíptica ([vegeu apartat 6.2](#)).
- **Ascensió recta del node ascendent:** Per entendre aquest concepte definirem primer el node ascendent, el qual és un punt de la trajectòria on es creua el pla orbital amb el pla del sistema de referència, que sol ser l'eclíptica. Aquest punt té el seu homòleg en "l'altre costat de l'òrbita", el denominat node descendent. Així doncs, aquest concepte fa referència a l'angle format entre la línia que uneix el cos atraient amb la localització del node i un eix donat per un sistema de referència concret.
- **Període:** Temps que triga una òrbita tancada ([vegeu apartat 5.5.1](#)) a completar una volta sencera.

Com s'observa en la "*imatge 3*", el cometa té el seu propi pla orbital i la trajectòria establerta. Tot i això, aquest pla no es manté constant al llarg del temps, de manera que navegant per Internet es poden trobar diferents imatges que prediuen el futur del moviment d'aquest cos, amb la possibilitat d'observar els canvis generals.

Havent conegut aquests factors, passem a definir les principals variacions orbitals.

- **Variació de l'excentricitat:** És la variació més relacionada amb la intervenció de forces externes en la trajectòria d'un cos celeste. Aquestes forces poden ser de fregament fins a atraccions gravitatòries continuades. Tot i que aquest tipus de variacions són molt diferents entre elles a causa de les direccions en què les

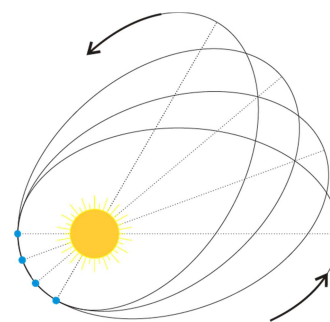
---

<sup>2</sup> El semieix major es val d'altres propietats de l'el·lipse per concretar la seva forma, de manera que aquesta no es pot saber sense coneixent només aquest concepte.



forces són aplicades<sup>3</sup>, totes tenen una relació directa amb el punt de la trajectòria on aquestes forces són aplicades, ja que com es veurà en [l'apartat 5.5.1](#), el valor de la velocitat del cos és diferent en cada punt de la seva òrbita, de manera que aplicar forces externes en un punt més proper o més llunyà afectarà directament a les dimensions de l'el·lipse.

- **Precessió absidal:** Aquest concepte fa referència la velocitat angular d'una òrbita sobre el seu eix perpendicular al pla orbital, és a dir, sense canviar la seva inclinació. A trets generals, aquesta variació no és causada per forces de fregament perquè no inclou canvis en la forma ni l'excentricitat de la trajectòria, de manera que les forces de marea<sup>4</sup> i la deslocalització dels centres de gravetat<sup>5</sup> poden ser dos dels principals causants.



Imatge 4 - Precessió absidal d'una el·lipse

En el cas de l'òrbita de la Terra, per exemple, es detecta una rotació de 50,29'' cada any.

Aquesta pertorbació, juntament amb la precessió axial (canvis en la inclinació de l'eix de rotació d'un cos), és la culpable dels cicles de *Milankovitch*<sup>6</sup>, els quals expliquen les èpoques de glaç i desglac a llarg termini.

- **Variació de la inclinació:** Aquesta pertorbació inclou ja el problema en una tercera dimensió, fent variar la inclinació d'un pla orbital vers l'eclíptica.

Actualment el pla de la trajectòria de la Terra té 1,57° d'inclinació respecte el pla de l'eclíptica tradicional.

<sup>3</sup> Un objecte en moviment pot ser afectat per forces externes provinents d'infinites direccions diferents. Això és molt important quan es treballa amb un sistema de referència.

<sup>4</sup> Les forces de marea són originades per la diferència de potencial gravitatori entre dos punts del mateix cos.

[http://www.iesleonardoalacant.es/Departamento-fisica/Campo\\_gravitatorio/Fuerzas\\_de\\_marea.pdf](http://www.iesleonardoalacant.es/Departamento-fisica/Campo_gravitatorio/Fuerzas_de_marea.pdf)

<sup>5</sup> El centre de gravetat d'un cos molt gran com la Terra no es troba exactament en el seu centre, de manera que hi ha punts en què l'atracció gravitatòria és lleugerament més forta, mentre que en altres és més dèbil.

<sup>6</sup> En aquest vídeo s'explica amb més profunditat la relació entre aquestes variacions i els cicles de *Milankovitch*. <https://www.khanacademy.org/science/cosmology-and-astronomy/earth-history-topic/earth-title-topic/v/apsidal-precession-perihelion-precession-and-milankovitch-cycles>

## 4. Atmosfera terrestre

Les òrbites que s'utilitzen en aquest treball són majoritàriament terrestres, és a dir, tenen relació amb la Terra, planeta que consta d'una atmosfera gasosa que varia de densitat segons la seva situació perquè la composició es veu modificada.

Per estudiar el moviment d'un cos celeste a fons, és a dir, per determinar la seva òrbita definitiva, és necessari considerar totes les forces que hi actuen, a vegades considerant les més negligibles perquè al llarg del temps poden determinar grans canvis. En el cas de la Terra hem de conèixer la composició de la seva atmosfera per saber si influeix en les òrbites dels objectes que orbiten al seu voltant.

### 4.1. Estrats de l'atmosfera terrestre

En termes generals, l'atmosfera de la Terra està composta per hidrogen ( $H_2$ ) en un 78%, oxigen ( $O_2$ ) en un 21% i l'1% restant el conformen altres gasos. No obstant, a mesura que ens allunyem de la seva superfície, l'atmosfera canvia de manera que s'arriben a distingir 5 capes, sense comptar les zones de transició entre aquestes.



Imatge 5 - Capes de l'atmosfera

Cal afegir que aquestes capes no tenen un valor d'altura fix perquè no són capes uniformes ja que la superfície de la Terra tampoc ho és.

- **Troposfera:** S'estén fins als 10 – 20 km d'altura des de la superfície i és la capa més densa de totes perquè conté el 80% de tota la massa dels gasos. Com es veurà posteriorment ([vegeu apartat 5.5.1](#)), aquesta altura no és suficient per posar-hi en òrbita res.
- **Estratosfera:** Des del límit amb la troposfera, aquesta arriba fins als 50 km per sobre de la superfície. Se sol dir que aquesta capa ja és molt seca perquè la troposfera és la que conté gairebé tot el vapor existent ja que els núvols es troben en aquella capa. Aquesta doncs, conté relativament poques molècules d'aigua.

Aquesta capa conté aproximadament un 85% de tot l'ozó ( $O_3$ ) de tota l'atmosfera i és el seu principal component.

Biològicament és la capa més important per la vida de la Terra perquè absorbeix aproximadament un 98% de la radiació ultraviolada del Sol. En aquest procés es destrueixen i es creen simultàniament molècules d'ozó. Com que les radiacions arriben primer a la part superior de la capa (la massa d'ozó està repartida bastant uniformement), els intercanvis d'energia i per conseqüència la temperatura, són més grans allà. Per això es diu que en aquest tipus de capes la temperatura augmenta amb l'altitud.

- **Mesosfera:** Arriba fins als 90 *km* aproximadament i és la capa més freda de la Terra. En aquesta, la densitat del aire és molt petita ja que conté només un 0,1% de l'aire total. Al no haver-n'hi, la pressió disminueix dràsticament, fet que provoca forts vents i ones de gravetat internes<sup>7</sup>.

Aquesta capa es troba just per damunt del límit d'altura dels avions i per sota de l'altura mínima per orbitar, de manera que investigar-la resulta molt complex ja que l'estada en aquesta capa només passa per poc temps.

- **Termosfera o ionosfera:** Aquesta és la capa més àmplia de totes perquè comença després de la mesosfera i s'estén fins als 600 *km* de mitjana de la superfície ja que és una capa bastant irregular.

La composició d'aquesta es basa principalment en petites quantitats de nitrogen i oxigen, i els seus àtoms es troben majoritàriament sense molècules, és a dir, *O* i *N*. El motiu és el mateix que el de la estratosfera. Els rajos  $\gamma$  (*gamma*) provinents del Sol bombardegen els nuclis de manera que la seva estructura es trenca amb un conseqüent alliberament d'energia en forma de calor que es correspon amb la pèrdua de massa de l'àtom.

De la mateixa manera que l'estratosfera, és una capa en què la temperatura augmenta amb l'altitud.



Imatge 6 - Entrada d'un cos a la ionosfera

<sup>7</sup> Les ones de gravetat internes o atmosfèriques es poden identificar com ones correctores que, davant d'unes capes d'aire barrejades a causa d'un vent fort, estratifiquen els gasos segons les seves composicions. L'efecte és el mateix que quan cau una pedra sobre l'aigua. Aquella porció de líquid que s'ha elevat es baixada per la gravetat produint ones com a conseqüència. Aplicat al nostre cas, l'aigua serien els gasos i la pedra els vents.

Tot i això, la seva massa no està repartida equitativament al llarg de la seva alçada. Per tant, a les zones més baixes les temperatures poden arribar a més de 1500 °C, zona on un cos es comença a desintegrar en la seva entrada a la Terra.

A les parts més altes de la termosfera ja podem començar a veure cossos en òrbita al voltant del planeta.

- **Exosfera:** És l'última capa apreciable de l'atmosfera terrestre, tot i que en molts punts es confon l'espai exterior. Es compon bàsicament d'heli (*He*) i hidrogen (*H*), els dos elements més lleugers. A causa de la seva distància respecte el centre de la Terra, l'atracció gravitatòria és molt lleugera i no presenta dificultats per escapar del camp gravitatori. A més, aquests gasos es troben en molts poques quantitats per  $m^3$ , per tant la densitat d'aquesta capa és pràcticament negligible, de manera que és molt apta per orbitar tal com les capes altes de la termosfera.

## 4.2. Densitats i fregament

Tal com ja s'ha mencionat anteriorment, les capes de l'atmosfera tenen una densitat variable que es va reduint a mesura que guanyem altura. Aquestes masses d'aire provoquen una força de fregament amb qualsevol cos que es trobi en moviment i estigui en contacte amb elles.

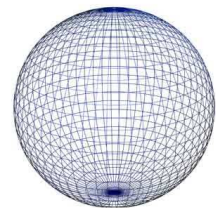
Tot i això, no s'ha de confondre aquesta força de fregament amb la que ofereix una superfície a partir de la normal d'un objecte. L'aire actua de manera diferent.

En aquest apartat s'analitza matemàticament quina resistència ofereix l'aire a un cos que porta una velocitat  $v$  o una acceleració  $a$ .

El fregament de l'aire ve donat per aquesta fórmula:

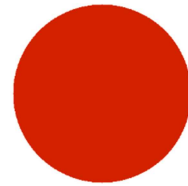
$$F_f = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot A \cdot v^2$$

On  $C_D$  és el coeficient d'arrossegament,  $\rho_f$  la densitat de l'aire amb què el cos està en contacte,  $v$  la velocitat instantània i  $A$  l'àrea de la secció transversal. Conceptes que tot seguit definirem:



Imatge 7 - Esfera

- **Secció transversal ( $A$ ):** és aquella que encara el moviment del cos i per tant rep els xocs de l'aire. Per exemple, si una pilota es troba en caiguda lliure, l'objecte en tres dimensions



*Imatge 8 - Secció transversal d'una esfera*

és com es pot observar a la “*Imatge 7*”.

Però la part de l'objecte tridimensional que rep la força de l'aire és tan sols l'àrea de la “*Imatge 8*”.

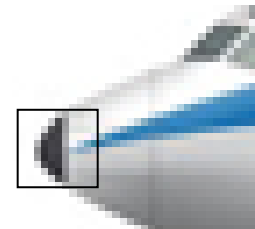
D'aquesta manera, l'àrea que influiria en la força de fregament de l'aire seria la d'un cercle:  $A = \pi \cdot R^2$

- **Coefficient d'arrossegament ( $C_D$ ):** És un valor que indica la resistència d'un objecte vers l'aire. Donada la fórmula de la força de fregament  $F_f$ , es dedueix que com més alt és el valor  $C_D$ , més gran és la força de fregament i per tant, menys resistència ofereix un objecte a ser frenat.

Aquest valor donat pel nombre de Reynolds<sup>8</sup>, molt utilitzat en problemes de dinàmica de fluids.

Per calcular la força de fregament de l'aire, no només és important tenir en compte la secció transversal, sinó que també s'ha d'incloure en el càlcul el perfil d'aquesta.

Un exemple molt clar d'aquests casos és la part frontal d'un avió. Vist frontalment, es veu que el morro té una secció circular. Però mirant-ho des del perfil, es veu com en la “*Imatge 9*”:



*Imatge 9 - Perfil del morro d'un avió*

Té una forma convexa, i això influeix en el fregament d'una manera diferent que si fos pla.

El nombre de Reynolds ve donat per la següent expressió matemàtica:

$$Re = \frac{\rho_f \cdot D \cdot v}{\eta}$$

<sup>8</sup> El nombre de Reynolds té importants aplicacions en el món de la mecànica de fluids perquè descriu el comportament de l'aire amb diferents cossos. Normalment, el seu valor indica quin flux d'aire crea una determinada forma. Exemples en són els fluxos laminars i turbulents. En aquest vídeo s'explica amb més detall la relació entre els fluxos d'aire i aquest nombre: <https://www.youtube.com/watch?v=OcfQ6bLGZic>

On  $D$  és el diàmetre en cas que el perfil sigui circular,  $\eta$  és la viscositat del fluid (aire) i  $v$  és la velocitat del fluid. Si l'aire no es mou, llavors es pren la velocitat de l'objecte com a velocitat relativa. Com que aquesta velocitat augmenta amb la gravetat, el nombre de Reynolds, i per conseqüència el coeficient d'arrossegament no són constants.

L'any 1851, George Gabriel Stokes va publicar desenvolupar la primera equació que relacionava aquest nombre amb el coeficient d'arrossegament:

$$Re = \frac{24}{C_D} \rightarrow \frac{\rho_f \cdot D \cdot v}{\eta} = \frac{24}{C_D}$$

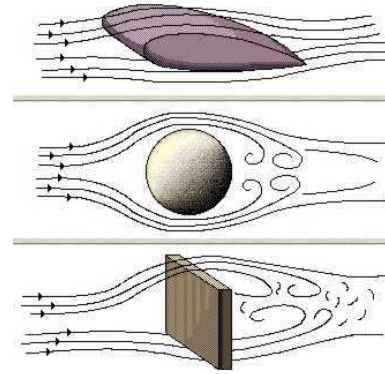
Suposant que sabem tots els valors, sent la velocitat la única incògnita, podem observar que a mesura que aquesta augmenta, més petit és el coeficient adimensional. Veiem però que en aquest augment, el coeficient també es torna constant amb la velocitat perquè el nombre de Reynolds obliga al quocient a variar menys dràsticament cada vegada.

Tot i que la fórmula de Stokes representa el que hem analitzat, avui en dia no és la utilitzada per a càlculs de caigudes d'esferes, sinó que ha servit com a base per al desenvolupament d'igualtats més precises (la més recent és de l'any 2013).

Aquest procés s'aplica de diferents maneres (aquest és exclusiu per l'esfera) per obtenir els coeficients d'arrossegament de totes les formes que existeixen, agafant aquells valors en què agafa constància per determinar-ne el definitiu.

En el coeficient d'arrossegament es veu la similitud d'aquest tipus de força amb el fregament que pateix un objecte a partir de la seva força normal perquè a causa de la forma de mesurar-lo, es fa evident la relació de la primera força amb la naturalesa de les superfícies de contacte. Com s'ha esmentat abans, el coeficient es calcula de diferent manera segons la forma amb la que ens toquem, però els càlculs també tenen en compte el material d'aquestes. Per exemple, les pilotes de futbol i les de bàsquet no reaccionen a l'aire de la mateixa manera tot i ser esfèriques i de la mateixa grandària aproximadament.

En la “*imatge 10*” es veu com reacciona un flux d’aire davant algunes seccions i perfils. El coeficient d’arrossegament és més baix a mesura que les línies del flux es deformen menys.



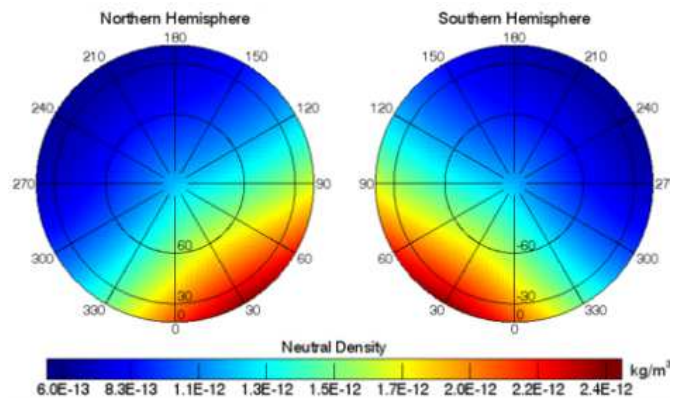
Llavors s’entén per què a l’hora de construir avions o transbordadors espacials s’agafen formes convexes, ja que aquestes reaccionen menys amb l’aire.

*Imatge 10 - Pas de corrents d’aire sobre diferents superfícies*

- **Densitat del fluid ( $\rho_f$ ):** En unitats del SI, són els  $kg/m^3$  que hi ha d’aire, valor que deriva de la seva composició. Si la densitat de l’aire és més gran, significa que hi ha més partícules d’aire que xoquen contra el cos i el frenen. En una capa de l’atmosfera com l’exosfera, la composició és tan dèbil que el fregament s’aproxima al del buit, és a dir, 0 N.

En els satèl·lits que es mouen en òrbites LEO ([vegeu apartat 6.3](#)) acostumen a negligir el fregament perquè al trobar-se a més de 1000 km d’altura, ja estan dins de l’exosfera. Per tant, els satèl·lits que tenen present el fregament de l’aire són els que orbiten en LEO dins de de la termosfera, on el fregament encara és apreciable.

Aquí es mostren dades extretes dels models NRLMSISE-00<sup>9</sup> i JB2008 sobre les densitats de la termosfera a 400 km el dia 21 de març de 2012.



*Imatge 11 - Densitats de la termosfera (JB2008)*

<sup>9</sup> El NRLMSISE-00 i el Jacchia Bowman 2008 són models de l’atmosfera de la Terra actualitzats eventualment amb informació de satèl·lits sobre la temperatura i distribució de l’atmosfera, densitats... fins a 2500 km. El segon proporciona informació més acurada que el primer al ser més nou, apart de treballar amb diferents variables. <http://www.spacewx.com/Docs/ISO DIS 14222 E.pdf>



No obstant, aquestes densitats no són sempre les mateixes, sinó que canvien amb l'època de l'any. Per exemple, en el solstici d'estiu de 2012, la densitat en el punt més dens de la termosfera era de  $1,82 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$ .

Com s'observa, aquesta capa no es homogènia perquè la densitat no és constant per tota la Terra, sinó que hi ha un gran punt on les densitats són relativament altes. Les més grans que han estat enregistrades són de  $2,39 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$ , mentre que les més baixes són de  $6,29 \cdot 10^{-13} \text{ kg/m}^3$ .

En principi pot semblar que aquestes densitats no poden frenar res, però si les relacionem amb la velocitat que porta qualsevol satèl·lit, les superfícies dels mòbils i el temps que han d'estar orbitant, a la llarga poden arribar a frenar-lo considerablement.

#### 4.2.1. Caiguda lliure

En casos de caiguda lliure actuen dos forces sobre un cos: el pes i el fregament de l'aire. Aquestes van en la mateixa direcció però tenint un sentit contrari, de manera que la força resultant és:

$$F_R = P - F_f = m \cdot g - C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot A \cdot v^2$$

Com que  $g$  és l'acceleració de la gravetat, el cos comença a accelerar guanyant velocitat, però com que aquesta velocitat és  $v$ , s'observa com la força de fregament va creixent mentre que el pes sempre es manté constant. Així doncs, el cos en caiguda accelera però sempre més a poc a poc.

Donat un punt en el temps, el cos deixa d'accelerar perquè la velocitat ha augmentat la força de fregament de l'aire fins al punt d'igualar-la amb la del pes.

$$P - F_f = 0 = [kg] \cdot 0 \text{ m/s}^2$$

La velocitat que compleix aquesta igualtat s'anomena velocitat límit ( $v_l$ ).

Prenent  $k$  com  $C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot A$ , l'equació de posició del cos es troba a partir de la següent fórmula:

$$a = g - \frac{k}{m} v^2$$



Integrant i fent canvis de variables podem trobar l'equació de la posició (observar que és una equació diferencial):

$$\int \int a = \int \int g - \frac{k}{m} v^2$$

$$\Delta x = \frac{v_l^2}{2g} \cdot \ln \frac{v^2 - v_l^2}{v_0^2 - v_l^2}$$

Aquesta equació troba la posició del cos donada una velocitat  $v$  considerant  $v_0$  i  $v_l$  com a constants. Abans però,  $v_l$  ha de quedar definida mitjançant la igualació de forces.

Com s'observa en el logaritme neperià,  $v$  mai pot ser més gran que  $v_l$  perquè la divisió donaria un valor negatiu, fent impossible la seva resolució.

També podem trobar el valor de la velocitat donat un punt qualsevol:

$$\frac{2g}{v_l^2} \cdot \Delta x = \ln \frac{v^2 - v_l^2}{v_0^2 - v_l^2}$$

Eliminant el logaritme:

$$e^{\frac{2g}{v_l^2} \Delta x} = \frac{v^2 - v_l^2}{v_0^2 - v_l^2}$$

$$\sqrt{v_l^2 + (v_0^2 - v_l^2) \cdot e^{\frac{2g}{v_l^2} \Delta x}} = v$$

En una situació de caiguda lliure normal, la variació de la gravetat es considera negligible, de manera que el seu valor es pot considerar constant. En trajectòries orbitals, el valor de la gravetat canvia.

#### 4.2.1.1. Valors de $g$

La gravetat que la Terra crea al voltant del seu centre no és constant tampoc, ja que no atreu de la mateixa manera un cos que es troba a la seva superfície que a un que es troba a anys llum.

A continuació es troben els valors de l'acceleració de la gravetat en funció de l'altura o distància a la qual es troba un cos del seu centre. Aquests es calculen mitjançant la llei de gravitació universal:

$$g = -G \cdot \frac{M}{d^2}$$

On  $M$  és la massa de la Terra en aquest cas ( $5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ).

<b><math>r</math> (km)</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>100</b>	<b>200</b>	<b>300</b>	<b>400</b>	<b>500</b>
<b><math>g</math> (m/s<sup>2</sup>)</b>	9,83	9,80	9,53	9,23	8,95	8,69	8,44

<b><math>r</math> (km)</b>	<b>600</b>	<b>700</b>	<b>800</b>	<b>900</b>	<b>1000</b>	<b>5000</b>	<b>10000</b>
<b><math>g</math> (m/s<sup>2</sup>)</b>	8,20	7,97	7,75	7,53	7,33	3,08	1,49

On  $d = r + r_{\text{radi de la Terra}}$

## 5. Problema dels dos cossos

### 5.1. Aspectes generals

Aquest concepte respon a l'estudi del moviment entre dos cossos que es mouen sota atraccions gravitatòries mútues.

En unes condicions inicials de temps ( $t_0$ ), dues masses  $m_1$  i  $m_2$  separades una certa distància ( $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  resp.) i sabent les seves velocitats ( $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  resp.), es calcula el seu moviment.

Partim de l'equació de la gravitació universal i de la segona llei de Newton i obtenim el següent sistema amb expressions vectorials i amb el mòdul:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rightarrow m_1 \cdot a_1 = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rightarrow m_2 \cdot a_2 = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \end{cases}$$

On  $\ddot{\vec{r}}_1$  i  $\ddot{\vec{r}}_2$  són les derivades segones vectorials respecte el temps de la posició, és a dir, l'acceleració.

Però a l'haver-hi unes velocitats inicials, el mòdul de la força no és constant perquè el vector de la posició varia en la majoria de casos<sup>10</sup>, de manera que si:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \rightarrow a = a_1 - a_2$$

Si contrastem aquesta equació amb el sistema anterior, podem obtenir  $\ddot{\vec{r}}$  directament:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{cases}$$

Restant l'expressió de dalt amb la de baix,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -G \cdot \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (m_1 + m_2) \\ \ddot{\vec{r}} &= -G \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \end{aligned}$$

<sup>10</sup> En una òrbita circular, els vectors horitzontal i vertical de les dos forces atractives canvien, però el mòdul es manté constant perquè  $|\vec{r}_0| = |\vec{r}_n|$ , on  $n$  és qualsevol punt en el temps.

Sent  $\ddot{\vec{r}}$  l'acceleració relativa del segon cos vers el primer.

$$F = m \cdot \ddot{r}$$

El valor de l'acceleració, i conseqüentment el de la força ve donat a partir del mòdul de la posició.

$$f(t) = r \rightarrow \vec{f}(t) = \vec{r}$$

$$f'(t) = v = \dot{r} \rightarrow \vec{f}'(t) = \dot{\vec{r}}$$

$$f''(t) = a = \ddot{r} = f(r) \rightarrow \vec{f}''(t) = \ddot{\vec{r}}$$

Les funcions vectorials, però, estan formades per les funcions respectives en l'eix de coordenades. Al treballar amb un pla orbital, simplifiquem la situació ja que tota la trajectòria està continguda en un pla de dos dimensions al no existir  $z(t)$  i les seves derivades<sup>11</sup>.

Llavors:

$$\vec{f}(t) = [x(t), y(t)] = [r_x, r_y]$$

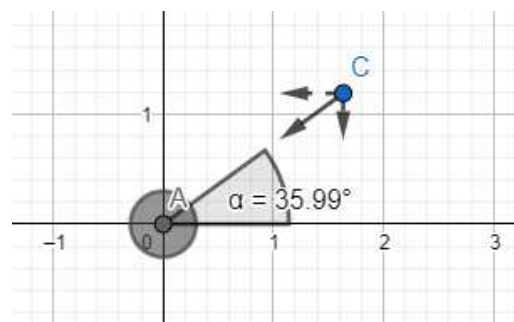
$$\vec{f}'(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)] = [\dot{r}_x, \dot{r}_y]$$

$$\vec{f}''(t) = [\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)] = [\ddot{r}_x, \ddot{r}_y]$$

La funció de l'acceleració es pot deduir a partir de la trigonometria. Mostrem a continuació un exemple gràficament:

En la "imatge 12", donada una massa A molt gran respecte una C, anomenem a la distància que els separa  $d$ , de manera que:

$$d^2 = x^2 + y^2$$



imatge 12 - Components de la força de la gravetat

Aleshores:

$$\cos(35,99^\circ) = \frac{x}{d}$$

<sup>11</sup> Podem afirmar que en el sistema de referència no existeix un eix z perquè la primera llei de Kepler afirma que tots els cossos que es mouen al voltant del Sol formen el·lipses, és a dir, figures planes. El tercer eix només es treballa quan interessa comparar la posició de plans orbitals.

$$\sin(35,99^\circ) = \frac{y}{d}$$

On en aquest cas,  $35,99^\circ$  és el valor de l'angle de la imatge 10.

Llavors,  $\ddot{r}_x$  i  $\ddot{r}_y$  seran:

$$\ddot{r}_x = G \frac{M}{d^2} \cos(35,99^\circ)$$

$$\ddot{r}_y = G \frac{M}{d^2} \sin(35,99^\circ)$$

## 5.2. Centre de masses

Un aspecte molt important del problema dels dos cossos és el centre de masses. Es defineix centre de masses com el punt que es troba en la línia imaginària que uneix les dos masses i que es comporta com si en ell hi hagués un cos de massa igual a la suma de les dos anteriors.

Per calcular la seva posició, primer és necessari establir un sistema de referència per considerar el valor de les distàncies. En el nostre cas establirem que el punt  $O$  es troba en  $m_1$ .

Llavors, la fórmula per calcular-lo és:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

De manera que és vàlida per calcular-lo donades infinites masses amb les corresponents distàncies al sistema de referència, a part de la possibilitat de calcular-ho amb els mòduls de les distàncies.

Una propietat d'aquest punt és que tendeix a trobar-se més a prop de la massa gran en cas que aquestes no siguin iguals.

Exemple: Considerem dues masses de 500 i 100 *kg*. Si agafem la massa gran com el punt  $O$  del sistema de referència, i el segon objecte es troba a 10 *m* en horitzontal, calculem el seu centre de masses:

$$R = \frac{500 \cdot 0 + 100 \cdot 10}{500 + 100} = 1,667 \text{ metres respecte la massa gran}$$

En casos de satèl·lits artificials, el centre de gravetat es negligeix i s'identifica a el centre del propi cos atraient perquè la diferència entre les dos masses és molt més gran.

### 5.3. Segona llei de Kepler

La primera llei de Kepler s'explica a [l'apartat 5.5.1](#) perquè se centra en la forma i les propietats de les òrbites el·líptiques i circulars. Les altres dos restants són les que ens ajuden a entendre el moviment d'un cos respecte un altre major.

La segona llei de Kepler diu: *Els cossos celestes descriuen trajectòries en què escombraren<sup>12</sup> àrees iguals en temps iguals.*

Com és d'esperar, aquesta afirmació és estrictament correcta quan ignorem les forces externes.

Aquesta llei es basa en la conservació del moment angular, que s'expressa de la següent manera:

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin \theta$$

On  $\theta$  és l'angle forma entre el radi i el mòdul de la velocitat, de manera que es mantinguin sempre perpendiculars.

Existeix una constant anomenada "constant de les àrees", que dona la relació entre el radi i la velocitat:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \cdot \sin \theta = \vec{r} \propto \vec{v} = \vec{c}$$

Si anomenem  $d\vec{r}$  a un radi que agafem passat un interval de temps  $dt$ , la línia que els unirà serà  $(\vec{r} + d\vec{r})$ , de manera que podem calcular l'àrea del triangle que s'ha format.

$$\vec{A} = \frac{\vec{r} \propto d\vec{r}}{2} \rightarrow A = \frac{|\vec{r}| \propto |d\vec{r}|}{2}$$

Com que  $d\vec{r}$  depèn del temps que ha passat, podem definir la velocitat areolar<sup>13</sup> matemàticament com:

<sup>12</sup> En aquest cas, "escombrar" fa referència a l'àrea que salva el cos a partir del radi que l'uneix amb el cos atraient.

$$\dot{A} = |\vec{r}| \propto \frac{|d\vec{r}|}{dt} \cdot \frac{1}{2}$$

Com que,

$$\frac{|d\vec{r}|}{dt} = v$$

$$\dot{A} = \frac{c}{2}$$

Així doncs deduïm que el cos que orbita traça sempre les mateixes àrees en un mateix temps perquè com es veu en l'última igualtat, depèn de  $c$ , que s'obté a partir de la conservació del moment angular.

#### 5.4. Tercera llei de Kepler

La última de les tres lleis de Kepler es redueix a la següent afirmació: *Per a qualsevol cos celeste orbitant al voltant d'un altre, el quadrat del seu període és directament proporcional al cub del seu semieix major.*

Aquesta llei es basa en el valor de  $\mu$ , definit com:

$$\mu = G \cdot (m_1 + m_2)$$

Partint d'una relació entre aquest valor i el semieix major de l'el·lipse ( $a$ ), el període pren la següent forma:

$$P^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mu}$$

Imaginem ara que tenim dos masses orbitant en òrbites diferents al voltant del mateix planeta. Anomenem a aquesta tercera massa  $m_3$ . L'òrbita d'aquesta massa té el seu propi període i semieix major. Anomenarem al sumatori de les dos masses i el producte amb la constant universal  $G \mu'$ .

Si dividim cada un dels termes de la primera equació amb el seu homòleg de la segona, queda:

---

<sup>13</sup> Aquest concepte fa referència a l'àrea que recorre el cost celeste vers el cos atraient. S'expressa en  $m^2/s$ .

$$\frac{P^2}{P'^2} = \frac{4\pi^2 \frac{a^3}{\mu}}{4\pi^2 \frac{a'^3}{\mu'}}$$

$$\frac{P^2}{P'^2} = \frac{a^3 \mu'}{a'^3 \mu}$$

Aquestes expressions no poden ser iguals si  $m_2$  i  $m_3$  no ho són. En cas que  $m_2 = m_3$ , es compliria la igualtat. Això demostra que si els cossos que orbiten tenen la mateixa massa, hi ha una relació entre els semieixos majors i els períodes.

Això simplifica notablement els càlculs a l'hora d'enviar objectes a l'espai de massa semblant i amb òrbites que han de ser diferents.

### 5.5. Velocitats orbitals

La velocitat orbital, o primera derivada de la posició, també es pot determinar a partir d'una funció amb la distància entre els dos cossos com a variable de la mateixa manera que l'acceleració:

$$f(r) = v = \dot{r}$$

En sistemes com el de Terra – Satèl·lit a gran altura on el fregament és negligible s'aplica el concepte de la "integral de l'energia", que és una integral obtinguda a partir d'una transformació de l'equació de l'acceleració relativa:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

Abans s'ha dit que  $\mu = G \cdot (m_1 + m_2)$ , però això només es té en compte quan els dos cossos exerceixen una acceleració notable vers l'altre. Com que l'efecte d'un satèl·lit artificial vers la Terra és pràcticament nul, en aquest cas  $\mu = GM$ .

Per arribar a arribar a l'expressió que ens doni la relació entre la velocitat i la posició multipliquem l'equació per  $v$ :

$$v \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot v$$

$$\frac{\mu}{r^2} v = \frac{\mu}{r^2} \dot{r} = \mu \frac{dr}{r^2} = \mu \frac{dr}{dt \cdot r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right)$$



Per altra banda, si transformem l'altre costat de l'equació inicial sabent que  $\dot{r} = \frac{dv}{dt}$ :

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt}$$

Canviant  $2v$  per l'expressió de la derivada:

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$$

Havent transformat aquella equació arribem a la següent expressió que cal integrar:

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Si integrem:

$$\int \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \int \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + h$$

On  $h$  és la constant d'integració. Com es pot observar, aquesta expressió iguala l'energia potencial i una constant amb l'energia cinètica i és vàlida per tots els tipus d'òrbites amb forces conservatives. A trets generals deduïm que la velocitat és més gran a mesura que la distància al cos atraient és més petita, la qual és la mateixa observació que en la conservació del moment angular i velocitat areolar.

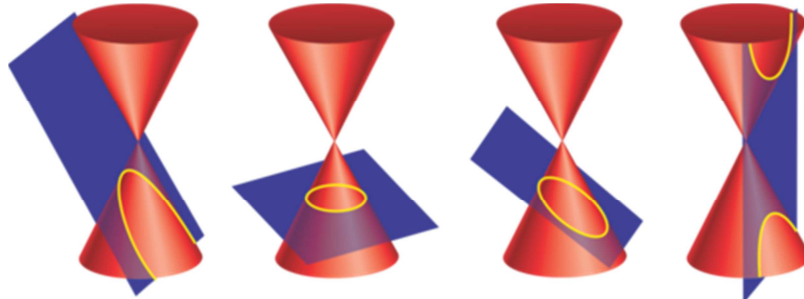
Aquesta constant també té la seva pròpia expressió:

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1)$$

On  $e$  és l'excentricitat de l'òrbita, valor que depèn de cada forma com s'explica a partir de [l'apartat 5.5.1](#). Les formes de tots els tipus d'òrbites es poden representar a partir d'una superfície cònica de revolució<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Les superfícies còniques deriven del con d'Apol·loni, conegut pel seu creador, Apol·loni de Perge. Juntament amb Pitàgores, Tales de Milet o Euclides és considerat un dels pares de la geometria gràcies a les seves investigacions sobre còniques. La seva creació va demostrar que les 4 formes de corbes de coneixem s'obtenen de tallar un con normal a partir de 4 angles d'entrada diferents. En aquest vídeo s'explica amb més detall a partir d'un programa 3D. <https://www.youtube.com/watch?v=cUN7lo8OGxs>

Per crear-la, a partir d'un sistema de referència tridimensional es fa girar una recta que es troba diagonalment respecte l'eix vertical sobre un punt, de manera que havent girat 360°, ha format dos cons. A partir d'aquesta superfície i amb un pla es poden representar les formes de les òrbites representant unes seccions respectives a partir de la posició relativa entre els dos components.



Imatge 13 - Superfícies còniques

La forma de les òrbites les classifica en dos tipus generals: obertes i tancades. Totes tenen una propietat en comú: l'excentricitat, la qual determina la seva forma.

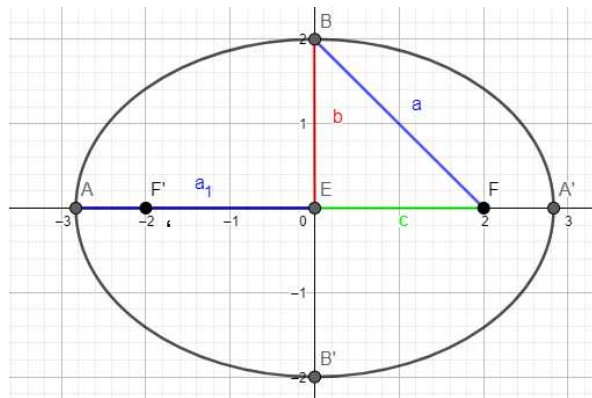
Els càlculs duts a terme en aquest apartat tenen l'avantatge que no tenen en compte les dimensions d'un sistema de referència determinat a l'hora de representar-se gràficament, si bé és cert que les mesures com la distància tenen com a centre el cos atraient.

### 5.5.1. Òrbites tancades

El cos orbitant repeteix el període de l'òrbita indefinidament en absència de forces externes perquè la mateixa força de la gravetat del cos atraient fa que torni. En aquest tipus s'inclouen les òrbites el·líptiques i circulars.

#### 5.5.1.1. Òrbita el·líptica

Per definició, una el·lipse està formada per tots aquells punts en el pla amb una constant en la suma de les distàncies vers dos focus, és a dir, la suma de les distàncies és la mateixa en tots els punts. En un pla orbital, el cos atraient ocupa un dels seus focus i la trajectòria del satèl·lit és el contorn.



Imatge 14 - El·lipse

Les parts d'una el·lipse (a part dels focus) són:

- **Apogeu:** Punt més distant d'un focus. En la imatge, A és l'apogeu de F.
- **Perigeu:** Punt més proper d'un focus. En la imatge A' és el perigeu de F.
- **Semi distància focal:** c és la meitat de la distància entre els dos focus.
- **Semieix major:** Distància d'un focus al punt B o B'. Aquesta equival a la del centre al punt A o A'. En la imatge es representa amb la lletra a i  $a_1$  perquè la seva longitud és igual.
- **Semieix menor:** Distància d'un punt B o B' al centre de l'el·lipse. Es representa amb la lletra b.

L'excentricitat d'una el·lipse es calcula així:

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow 0 < e < 1$$

Entre els dos semieixos existeix la següent relació de proporcionalitat:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

Aquesta estableix que el semieix menor és més gran a mesura que l'excentricitat s'apropa a 0.

Per deduir l'expressió de la velocitat donada una distància de l'el·lipse introduïm primer el concepte de "paràmetre de l'òrbita" ( $p$ ), el qual estableix una relació entre els dos semieixos i la constant de les àrees i el valor  $\mu$ :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\mu}$$

A partir d'aquí, podem modificar l'expressió de la constant de l'energia:

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \mu \frac{1}{\frac{c^2}{\mu}} (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \mu \frac{a}{b^2} (e^2 - 1)$$

Un cop hem transformat l'expressió de la constant  $h$  en una imatge en funció dels semieixos, podem aplicar la seva relació de proporcionalitat per simplificar-la:

$$h = \frac{1}{2} \mu \frac{a}{a^2 (1 - e^2)} (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \mu \frac{1}{a \cdot -(e^2 - 1)} (e^2 - 1) = -\frac{1}{2} \mu \frac{1}{a} = -\frac{\mu}{2 \cdot a}$$

Si ho apliquem a l'expressió de la integral de l'energia:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + \frac{-\mu}{2 \cdot a}$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{-2\mu}{2 \cdot -a} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

Obtenint finalment:

$$\dot{r} = v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Aquesta és la fórmula pel mòdul de la velocitat d'un cos descrivint una trajectòria el·líptica on  $a$  actua com una constant. En una òrbita el·líptica el mòdul no té perquè ser perpendicular a la distància entre els dos cossos<sup>15</sup>.

En termes d'energia, l'òrbita el·líptica compleix la següent propietat que s'extreu de l'última fórmula. Si aïllem el paràmetre  $-\frac{1}{a}$  queda la següent expressió:

$$v^2 - \frac{2GM}{r} = -\frac{GM}{a}$$

Si multipliquem l'expressió per  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

<sup>15</sup> En una òrbita el·líptica, la velocitat només és perpendicular en el perigeu i l'apogeu.

Aquesta relació entre l'energia cinètica i potencial ens dona un valor negatiu, el qual confirma que en una òrbita el·líptica l'energia potencial sempre és major que la cinètica, i la seva diferència té com a resultat un valor constant.

Amb la conservació del moment angular, podem resoldre el problema de l'òrbita el·líptica:

$$\begin{cases} m \cdot v \cdot r \cdot \sin \alpha = m \cdot v_p \cdot r_p \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{r_p} \end{cases}$$

El que pretenem trobar amb aquest sistema és la velocitat en un punt on aquesta i la distància al cos atraient són perpendiculars. En una el·lipse hi ha dos punts en què passa això (perigeu i apogeu), de manera que la resolució d'aquest sistema ens deixarà dos valors per cada variable. En un la velocitat serà més petita i el radi molt més gran per mantenir la constància de la diferència, mentre que en l'altra solució serà a la inversa.

Si aïllem  $v_p$ , el sistema queda així (anomenem  $\delta$  a la diferència d'energies inicial, valor que sempre és negatiu):

$$r^2 \cdot v^2 \cdot (\sin \alpha)^2 = 2 \cdot GM \cdot r_p - |\delta| \cdot 2 \cdot r_p^2$$

### 5.5.1.2. Òrbita circular

Aquest tipus d'òrbites són trajectòries en forma de circumferència, és a dir, tots els seus punts es troben a la mateixa distància del centre del cos respecte al qual orbita.

Des del punt de vista matemàtic s'assemblen molt a les el·lipses, amb l'excepció que només té un focus que s'identifica amb el centre de manera que no té distàncies focals. Així doncs l'excentricitat queda reduïda a:

$$e = \frac{0}{a} = 0$$

Com que no hi ha punts més llunyans i més propers, no es poden distingir el semieix major i menor perquè són iguals. Com ja es podia intuir en l'apartat anterior, mitjançant la seva relació i sabent que l'excentricitat és nul·la, queda que  $b^2 = a^2 = r^2$ .

Per lògica podem aplicar aquest principi a l'equació de l'òrbita de l'el·lipse, de manera que:

$$\dot{r} = v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Observem que l'expressió resultant és gairebé la mateixa que un augment proporcionat de l'energia potencial i cinètica, amb l'excepció que no hi ha  $\frac{1}{2}$  dividint al costat de l'energia cinètica. Però si ara volguéssim mesurar el valor de l'energia cinètica del cos a la distància  $r$ , veuríem que aquesta sempre és menor que la potencial gravitatòria al dividir-la per 2. Concretament, el valor de l'energia cinètica seria la meitat del de la potencial, fet que conforma la relació fonamental d'una òrbita circular.

Des del punt de vista dinàmic, una òrbita circular es comporta d'una manera similar a fer girar una bola penjada d'un fil. El cos que orbita és atret per la força de la gravetat, que s'identifica amb la força centrípeta:

$$\left| -G \frac{M}{r^2} \right| = \frac{v^2}{r}$$

Per mantenir la forma circular, el cos experimenta una força centrífuga de diferent manera que en el cas del fil, ja que ell no està exercint cap força. Simplement prenem el valor que configura la seva velocitat i la seva distància de manera que aquesta força és imaginària.

Si igualem aquestes forces i sabent la relació entre la velocitat angular i la lineal:

$$v = \omega \cdot r$$

Igualem:

$$m \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \rightarrow \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r \rightarrow \omega = \omega$$

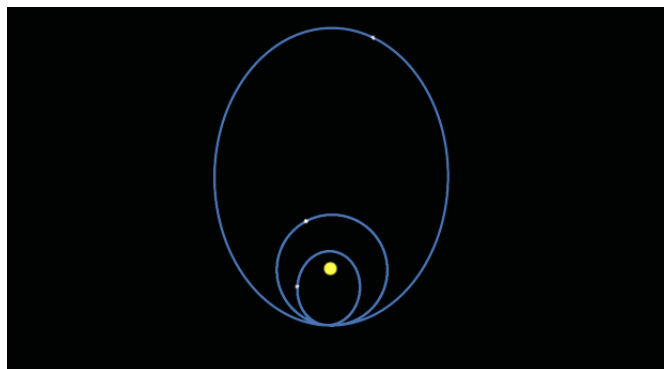
El resultat és una velocitat angular que es manté constant.

Apliquem ara el principi de conservació del moment angular i velocitat areolar, el qual es troba ja molt condicionat pel radi. Si  $c$  és constant com  $r$  i  $\omega$ , és obvi que  $v$  també ho serà, de manera que l'angle entre els dos components del moment angular tampoc pot variar, així que l'angle és sempre de  $90^\circ$ .

Com hem vist, les el·lipses i les circumferències comparteixen punts on la velocitat és perpendicular amb la distància i la inferioritat de l'energia cinètica vers la potencial.

Però on queda realment l'òrbita circular i per què donades una sèrie d'infinites condicions la trajectòria resultant és el·líptica i només un cas aconsegueix adaptar-se a una circumferència?

A continuació s'ha volgut respondre a aquesta incògnita duent a terme tirs amb velocitats perpendiculars respecte la línia que uneix els dos cossos i quina relació existeix entre les relacions de les energies de les òrbites tancades.



*Imatge 15 - Definició de trajectòries donada una velocitat*

En aquest simulador<sup>16</sup> s'ha introduït una massa molt gran (groga) i en un punt puntual ( $P$ ) s'han llançat objectes a diferents velocitats aproximadament perpendiculars a la distància a la massa gran. L'objecte llançant a una velocitat menor ha descrit una òrbita el·líptica amb un apogeu en  $P$ , mentre que el que ha set llançat a una velocitat major l'ha descrit amb el perigeu en aquell punt.

Si apliquem aquests resultats a la fórmula de les energies de l'òrbita, veiem que:

- Velocitat més gran → Menys diferència d'energies → Valor més gran del semieix major.
- Velocitat més petita → Més diferència d'energies → Valor més petit del semieix major.

Hi ha una massa que ha set llançada a una velocitat normal que ha descrit una òrbita circular.

---

<sup>16</sup> Simulador utilitzat: <http://www.testtubegames.com/gravity.html>

- Velocitat que satisfà  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$  → L'energia potencial dobla la cinètica → Semieix major es correspon amb el radi de la circumferència. De fet es pot aplicar el mateix principi que en l'el·lipse, però substituint  $a$  per  $r$ .  
Es tracta de trobar unes condicions en què la diferència d'energies doni  $-\frac{GM}{2a}$ , on  $a$  s'identifiqui amb  $r$ .

Afirmem llavors que l'òrbita circular és una òrbita el·líptica que és troba en el punt mig entre totes les possibles el·lipses, en què la seva energia cinètica es manté constant però sempre menor que la potencial.

### 5.5.2. Òrbites obertes

El cos orbitant abandona el camp d'influència gravitatòria notable del cos atraient. Dins d'aquest camp s'inclouen les òrbites parabòliques i hiperbòliques. Tot i que mantenen algunes diferències, les dues es caracteritzen per tenir una velocitat d'escapament, que és el valor del mòdul de la velocitat que ha de tenir un cos per abandonar el camp del cos atraient.

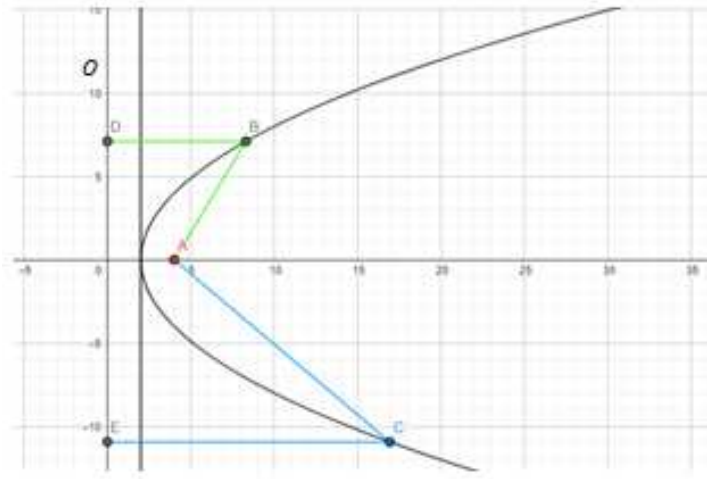
Aquests tipus d'òrbites no són objectiu d'aquest treball, no obstant això, es creu oportú introduir les nocions bàsiques i els càlculs inicials per exemplificar els casos que sí que ens duren a les conclusions de la memòria.

#### 5.5.2.1. Paràboles<sup>17</sup>

Matemàticament, una paràbola està formada per tots els punts en un pla compartit amb un focus i una recta directriu que guarden la mateixa relació de distància vers aquests dos components, de manera que augmenta o disminueix de manera proporcionada.

<sup>17</sup> L'excentricitat d'una paràbola no és rellevant perquè sempre és 1.





Imatge 16 - Paràbola

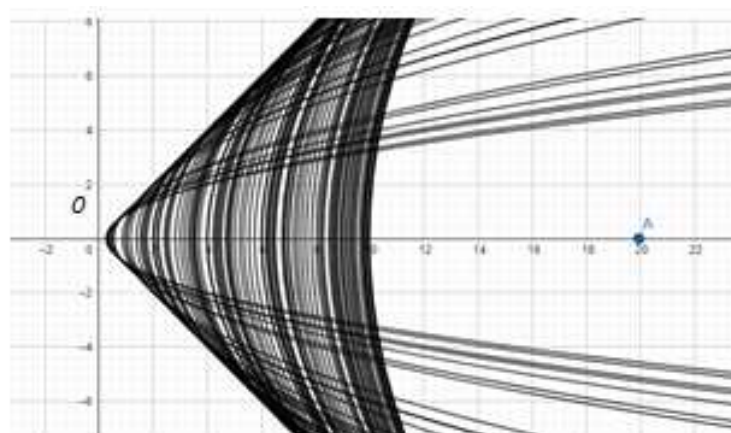
D'aquesta manera tenim que:

$$d(B, D) = d(B, A)$$

$$d(C, E) = d(C, A)$$

Les paràboles tenen un component anomenat paràmetre (no és el mateix que el que es fa servir per calcular velocitats) que és la distància del focus  $A$  a la recta directriu (recta  $O$ ) i la distància d'aquest focus a la recta tangent paral·lela a la directriu sempre és la meitat.

L'obliquïtat de la paràbola ve donada per la llargada del paràmetre, que condiciona el principi d'igualtat de les distàncies. Amb *GeoGebra* s'ha pogut representar el canvi de la seva obertura en funció de la distància entre el focus i la recta directriu:



Imatge 17 - Obliquïtat en funció del paràmetre

S'observa que a mesura que s'allarga el paràmetre, la corba es torna molt menys pronunciada, canviant així la seva expressió matemàtica. Aquest fenomen té una relació molt directa amb l'anàlisi físic de la paràbola.

Si en les òrbites tancada l'energia potencial és menor que la cinètica, en una paràbola sempre són iguals de manera que:

$$\frac{1}{2}v^2 - G \frac{M}{r} = 0$$

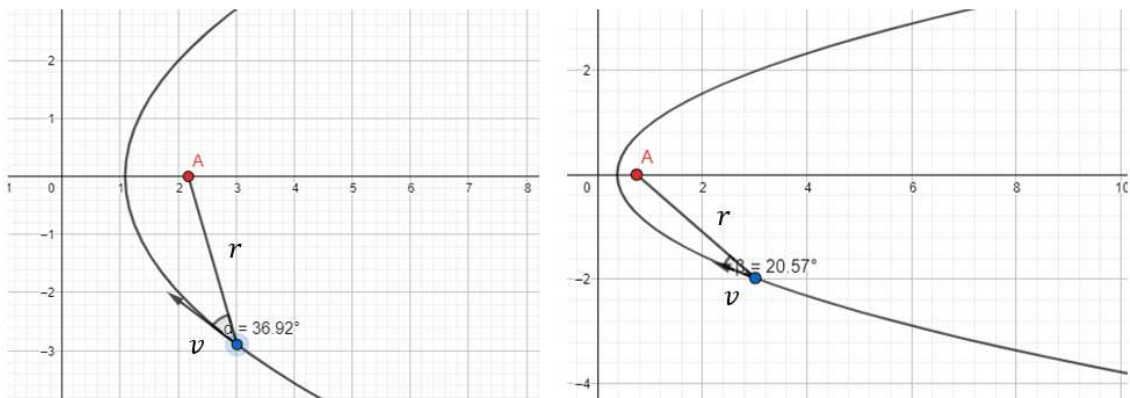
$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

La velocitat que compleix aquesta relació s'anomena velocitat d'escapament i el seu valor és independent de la direcció de llançament. Aquesta velocitat es caracteritza per:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 0$$

És a dir, la velocitat en l'infinít és nul·la, on cap cos atraient ja no hi té influència<sup>18</sup>.

Analitzem ara la forma d'una òrbita parabòlica segons la direcció del llançament i com afecta l'angle de llançament i la posició. Per fer-ho comparem aquestes dos imatges:



Imatge 18 - Influència dels angles de llançament en la definició d'una paràbola

<sup>18</sup> Tots els cossos exerceixen una força sobre un altre encara que estigui a molts anys llum, però al ser tan petita no hi produeix cap efecte. Normalment, en càlculs d'aquestes magnituds es té més en compte l'atracció que pot produir el conjunt d'una galàxia per exemple, ja que és més notable.

Es presenten dos casos d'òrbites parabòliques en què dos cossos es troben a la mateixa distància (en mòdul) del cos atraient. Si es vol descriure una paràbola les dos velocitats seran iguals perquè així ho és el potencial gravitatori. L'única cosa que fa que la primera paràbola sigui més oberta que la segona és llavors l'angle de llançament. Analitzem per què passa això des de l'àmbit matemàtic.

Ja hem definit que en tota òrbita en absència de forces externes el moment angular es manté constant. Anomenant  $v_p$  i  $r_p$  a la velocitat i distància en el punt més proper al cos atraient:

$$m \cdot r \cdot v \cdot \sin \alpha = m \cdot r_p \cdot v_p$$

Al ser l'angle que formaran en aquell punt de  $90^\circ$ , no es té en compte el sinus. Per resoldre el cas ens basem en el principi fonamental de l'òrbita parabòlica, de manera que:

$$\frac{1}{2}v^2 - G \frac{M_A}{r} = \frac{1}{2}v_p^2 - G \frac{M_A}{r_p}$$

Aquestes dos expressions formen un sistema d'equacions en què les variables són la distància i la velocitat en el punt més proper. En el cas de la segona imatge, la primera expressió seria:

$$m \cdot r \cdot v \cdot \sin \beta = m \cdot r_p \cdot v_p$$

Amb això es demostra que l'obliquïtat de la paràbola depèn només de l'angle de llançament, ja que és el que fa variar els valors de la resta del sistema (sempre que la distància sigui la mateixa).

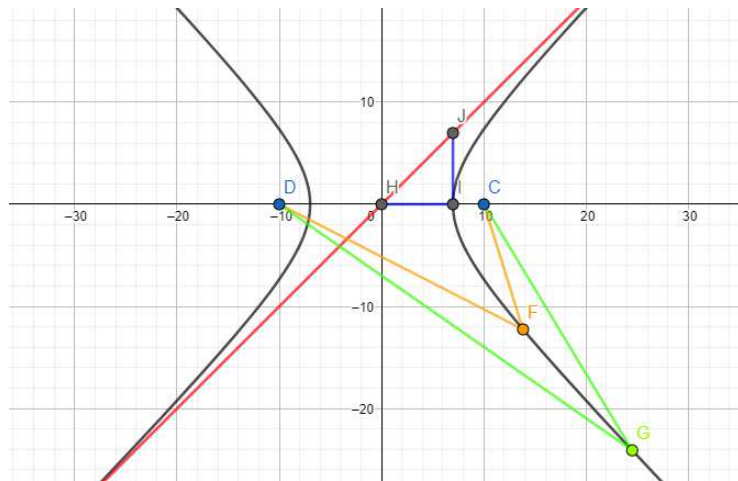
Un cop trobat la velocitat en aquest punt sabem quina és la velocitat màxima que agafa durant tot el seu recorregut. Sabent que la velocitat en l'infinit tendeix a 0, es dedueix que entre el punt més llunyà i el més proper el valor de la velocitat del cos canviarà en l'interval  $[v_p, 0]$ .

Per resoldre l'òrbita en tots els punts resoldrem el sistema de diferent manera perquè la velocitat segona ja la sabem, de manera que les variables a trobar seran el sinus de l'angle amb la corresponent funció  $\sin^{-1} \theta$  i la distància al cos atraient.

### 5.5.2.2. Hipèrboles

Una hipèrbola és un conjunt de punts en el pla entre els quals la diferència de les distàncies als seus dos focus sempre és constant.

En la imatge, donats dos punts  $F$  i  $G$ , es mostren les respectives distàncies als focus  $D$  i  $C$ . El principi d'una hipèrbola és:



Imatge 19 - Elements d'una hipèrbola

$$d(F, D) - d(F, C) = d(G, D) - d(G, C)$$

La línia vermella és una asímptota que indica el grau d'obertura de la hipèrbola. En aquest cas, la recta és  $y = x$ , però la seva equació és:

$$y = \frac{IJ}{HI}x$$

Sent  $IJ$  l'eix imaginari representat normalment amb la lletra  $b$  i  $HI$  el semieix real representat amb la lletra  $a$ .

L'asímptota també en determina la seva excentricitat, que de la mateixa forma que l'el·lipse adopta la forma:

$$e = \frac{c}{a}$$

Al ser  $c$  el segment  $HJ$ , l'excentricitat d'una hipèrbola sempre és major que 1.

Existeix una relació entre l'excentricitat i els eixos  $a$  i  $b$  d'una hipèrbola de la mateixa manera que en l'el·lipse:

$$b^2 = a^2 (e^2 - 1)$$

També pel seu paràmetre, el qual es calcula de la mateixa manera:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\mu}$$

Observem que  $b$  no té per què ser més petit que  $a$ . Si  $e \geq \sqrt{2}$ , l'eix  $b$  serà més petit o igual que  $a$ . En la imatge  $e = \sqrt{2}$ .

Analitzem ara el valor de la velocitat en funció de la posició de l'objecte que orbita i quina relació s'estableix entre el seu mòdul i la forma de la hipèrbola.

Donades les relacions anteriors, el procediment per trobar l'equació de la velocitat és gairebé el mateix que en l'el·lipse ([vegeu apartat 5.5.1.1](#)). Substituint el valor de  $b$  en l'expressió de la constant de l'energia, tenim que:

$$h = \frac{1}{2}\mu \frac{a}{a^2(e^2 - 1)} (e^2 - 1) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\mu}{a}$$

Si apliquem això a l'equació de les energies:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{a} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$

Aquesta expressió ens dona la relació entre l'energia potencial i cinètica. Fixem-nos que és exactament la mateixa que en l'el·lipse però la relació ha canviat els papers perquè ara l'energia major és la cinètica.

La velocitat llavors és:

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$$

### 6. Tipus d'òrbites

Com hem vist en [l'apartat 5](#), la trajectòria que segueix un cos respecte un altre és independent de la seva massa mentre la acceleració que aquesta produeixi sobre el cos major sigui negligible.

Al ser tan elevat el nombre de variables que condicionen aquesta òrbita i els intervals amplis de nombres que es poden agafar (parlant a nivell de velocitats i distàncies de planetes i estrelles), és gairebé impossible que existeixin dos òrbites idèntiques.

Per tant, les òrbites també tenen les seves pròpies classificacions i tipus. En l'àmbit dels satèl·lits i naus espacials, normalment es distingeixen òrbites de 3 tipus generals.

Tot i estar classificades per tipus, una òrbita determinada no es classifica, sinó que compleix determinades propietats de cada tipus.

Per exemple, una òrbita pot ser terrestre, circular, geostacionària i tenir una inclinació de  $0^\circ$ .

#### 6.1. Òrbites segons el propòsit

Aquest és el primer criteri per classificar les òrbites. Es basa en el cos al voltant del qual orbita la nau. Hi ha dos tipus: Interplanetàries i terrestres.

A partir del [punt 6.3](#), totes les òrbites descrites formen part del camp de les terrestres.

##### 6.1.1. Òrbites interplanetàries

Són totes aquelles òrbites que una nau espacial descriu per abandonar la Terra i per viatjar a un altre planeta en el procés.

Viatjar per l'espai no s'assembla gens a viatjar amb qualsevol altre mitjà de transport. En viatges interplanetaris, els cossos als quals es vol arribar estan constantment en moviment i generen camps gravitatoris de valors molt grans. Al produir una acceleració sobre el cos, la quantitat de combustible a gastar gairebé sempre es redueix perquè la gravetat fa gran part de la feina com en un tir parabòlic<sup>19</sup>. La velocitat final de la nau

---

<sup>19</sup> Aquest fenomen s'anomena assistència gravitatòria, i és el procés pel qual un camp gravitatori modifica la trajectòria d'un cos a partir de la seva velocitat vectorial.

després d'un impuls es pot deduir a partir de la fórmula de la velocitat tot i no ser exactament aquesta la utilitzada pel seu càlcul ja que el pes d'aquesta es modifica a causa de la pèrdua de combustible i els canvis en el valor de  $g$ :

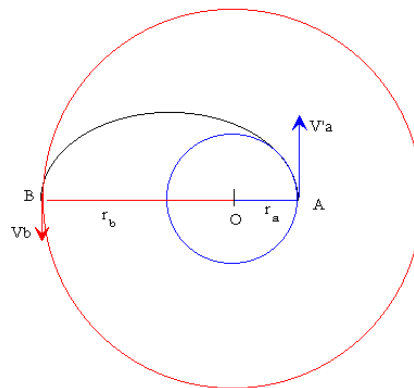
$$v_{final} = v_0 + a \cdot \Delta t$$

La velocitat a la que arribarà a un cert punt dependrà de la velocitat que hagi proporcionat el combustible. Per tant, és important saber quan utilitzar el combustible per recórrer l'òrbita correcta.

Així doncs, és evident que dur a terme viatges interplanetaris és una cosa realment complexa i que requereix molta precisió.

### 6.1.1.1. Òrbita de transferència de Hohmann

Aquest tipus d'òrbita interplanetària és la més utilitzada avui en dia per emprendre viatges espacials. És una òrbita caracteritzada per la seva eficiència energètica ja que permet arribar a diferents punts a partir d'un sol impuls i l'atracció solar.



*Imatge 20 - Òrbita de transferència de Hohmann*

En la “*Imatge 20*” es mostra un esquema d'aquesta òrbita. Per exemple, si en el punt A es troba la Terra, en el B Mart<sup>20</sup> i el Sol en el punt O, la nau es val de l'impuls necessari per arribar a la velocitat que compleixi l'òrbita el·líptica amb el Sol en un dels seus focus. Com s'ha vist en [l'apartat 5.5.1.2](#), la velocitat necessària perquè la nau

<sup>20</sup> En aquest exemple ignorem tot tipus de càlculs i la translació dels planetes. En un cas real, el llançament s'hauria d'efectuar amb anterioritat a l'arribada de Mart al punt B. En cas contrari, quan la nau hi arribés, el planeta ja hauria passat de llarg.

arribi al punt *B* és major que la que porta la Terra en aquell moment. Quan hi arriba, l'objecte roman inactiu mogut només per l'acció del Sol.

### 6.1.2. Òrbites terrestres

Al contrari que les òrbites interplanetàries, una òrbita terrestre es aquella que es descrita al voltant de la Terra de forma tancada.

Aquestes òrbites es repeteixen indefinidament si s'aconsegueix controlar la força de fregament que ofereix l'espai. Tot i que molt suaument, aquesta va frenant els satèl·lits amb el pas del temps i cada cert temps és necessari un nou impuls per evitar que la velocitat arribi a valors insuficients i l'objecte torni a entrar a l'atmosfera.

#### 6.1.2.1. *Sputnik 1*

El *Sputnik 1* va ser el primer satèl·lit artificial de la història posat en òrbita terrestre. Pertanyia a la URSS i va ser llançat el 4 d'octubre de 1957 per caure i incinerar-se el dia 4 de gener de 1958 exactament tres mesos després. Seria l'inici de la coneguda carrera espacial protagonitzada per la Unió Soviètica i els Estats Units.

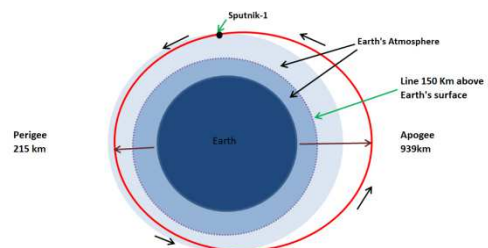


Imatge 21 - *Sputnik 1*

Tot i la seva petita massa de 83 *kg* aproximadament, va aguantar relativament poc temps en l'espai comparat amb els satèl·lits actius d'avui en dia, sabent que el valor de la massa és directament proporcional a l'atracció gravitatòria donada la llei de Newton de gravitació universal.

Si ens fixem en les característiques de la seva òrbita es pot entendre per què va caure.

Aquest satèl·lit traçava una òrbita el·líptica qual el seu perigeu estava a 215 *km* per sobre del nivell del mar i l'apogeu a uns 940, de manera que quan passava pel punt més proper a la terra es trobava en realitat a una part relativament baixa de la termosfera, on el fregament és notable. D'aquesta manera, es



Imatge 22 - *Esbós de l'òrbita del Sputnik 1*



trobava en un punt on les forces no eren conservatives i l'òrbita s'anava reduint poc a poc perquè el satèl·lit no tenia motors per tornar-se a impulsar.

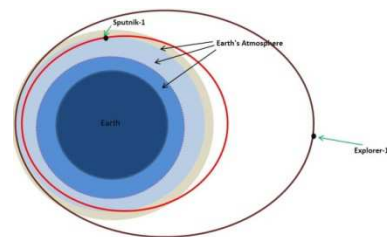
### 6.1.2.2. Explorer 1

Si el satèl·lit anterior va ser el primer llançat per la URSS, l'*Explorer 1* va ser el segon satèl·lit artificial de la història posat en òrbita i el primer dels Estats Units. Igualment que el *Sputnik 1*, aquest satèl·lit tampoc tenia motors ni estava tripulat. Llançat l'1 de febrer de 1958, es va destruir en la seva reentrada a la Terra el dia 31 de març de 1970.

En comparació amb el satèl·lit rus, aquest va aguantar pràcticament 12 anys més en òrbita.

Per explicar això s'ha de recórrer a les característiques la seva òrbita, descrita en la imatge en contrast amb l'anterior.

Com es veu en la imatge, l'òrbita del satèl·lit americà és més gran en tots els aspectes que la del rus. Tot i que l'*Explorer 1* pesava uns 70 kg menys, aquesta diferència no és important perquè la massa no influeix en el període de l'òrbita ni en la forma.



Imatge 23 - Contrast entre els semieixos de les òrbites de l'Explorer 1 i Sputnik 1

A part, s'observa que el perigeu de l'*Explorer 1* està més lluny de la superfície terrestre que la de l'altre, el que significa que al passar pel punt més proper el satèl·lit es frenava menys ja que el fregament era menor de manera que la velocitat no quedava molt afectada i l'òrbita es deformava a un ritme menys accelerat. També s'ha de tenir en compte que tardava més temps a donar una volta al planeta.

Per tant, la conclusió d'aquests dos casos i la clau d'una òrbita terrestre està en la força de fregament que provoca la densitat de la seva atmosfera.

## 6.2. Òrbites terrestres segons la seva inclinació

La grau d'inclinació de les òrbites terrestres es defineix a partir de l'eclíptica, que és el pla orbital de la terra respecte el Sol.

Sobre aquest pla es representen la resta de plans orbitals, i la inclinació depèn dels graus entre aquests plans. En molts casos la inclinació d'òrbites terrestres es mesura respecte l'equador, donant resultats diferents perquè aquest es troba aproximadament a  $26^{\circ} 27'$  respecte l'eclíptica.

Per calcular la inclinació vers l'eclíptica donada la inclinació respecte l'equador:

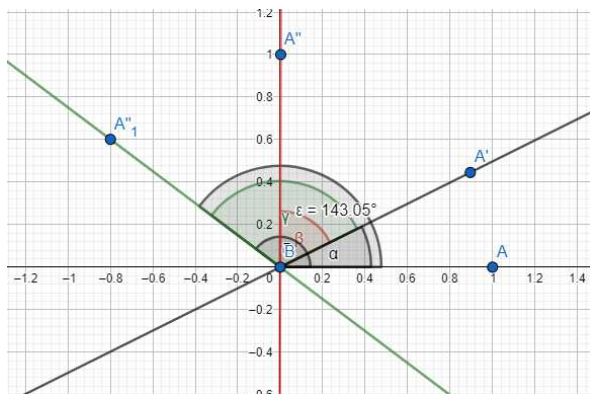
$$\alpha = 23.45 + A_{eq}$$

On  $A_{eq}$  és l'angle vers l'equador.

A continuació les més destacades:

- **Equatorials:**  $0^{\circ}$  vers l'equador però  $26,45^{\circ}$  vers l'eclíptica.
- **Sincròniques al Sol:** Uns  $98^{\circ}$  respecte l'equador. El seu pla rota respecte l'eix Z per complir la seva característica principal: Tots els seus punts es troben a la mateixa hora solar.
- **Polars:**  $90^{\circ}$  respecte l'equador.
- **Directa i retrògrada:** Òrbites d'inclinació de  $63,4^{\circ}$  i  $116,6^{\circ}$  respecte l'equador. Aquestes la seva peculiaritat és que no tenen rotació absidal.
  - **Òrbita de Molniya:** Són un tipus d'òrbites el·líptiques que tenen una inclinació de  $63,4^{\circ}$  per evitar expressament les perturbacions orbitals. Es tracta d'una òrbita molt el·líptica, amb molta diferència entre el perigeu i l'apogeu, ja que el primer es troba a  $7348 \text{ km}$  i el segon a  $45730$  respecte la Terra. La seva excentricitat tenia un valor de  $0,72$ .

Aquestes òrbites, com el seu nom indica, estaven dissenyades per uns satèl·lits anomenats Molniya, Eren aparells de telecomunicacions de la URSS, i l'aplanament de la seva òrbita provocava que durant part del seu recorregut es mantinguessin a una distància relativament propera a la Terra.



Imatge 24 - Representació dels plans orbitals d'òrbites retrògrades i directes

En aquesta imatge, l'eix de les abscisses representa l'eclíptica que defineix la resta d'angles. L'angle  $\alpha$  és el de l'equador, la línia vermella és el pla d'una òrbita directa i la verda la d'una retrògrada. L'angle  $\varepsilon$  representa el valor de l'angle del pla verd vers l'eclíptica, que coincideix amb la suma del pla equatorial i els  $116,6^\circ$  del pla verd.

### 6.3. Òrbites terrestres segons la seva altura

Els satèl·lits tracen trajectòries sobre la terra a diferents altures perquè els propòsits són diferents en cada cas. L'altura d'una òrbita ve definida per la distància entre un punt del cos atraient (en el cas de la Terra és la superfície) i el cos orbitant. No obstant, en alguns casos la distància no és constant perquè les òrbites descrites són el·líptiques amb una excentricitat notable.

El valor de l'altitud està directament relacionat amb el període de l'òrbita perquè la distància condiona l'atracció gravitatòria i després limita la velocitat del satèl·lit. Per planificar una òrbita circular al voltant de la terra buscant un període en concret plantegem el següent sistema:

$$\begin{cases} \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2} \\ v \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot r \end{cases}$$

On  $T$  és el període en segons i les variables a trobar són el radi i la velocitat. Així deduïm que cada període requereix la seva pròpia distància i velocitat.

Així doncs, aquestes òrbites es classifiquen en:

- **Low Earth Orbit (LEO):** Es consideren òrbites d'aquest tipus les que arriben fins a uns  $2000 \text{ km}$  respecte la superfície terrestre. L'Estació Espacial Internacional orbita en una d'aquestes òrbites a uns  $400 \text{ km}$ .
- **Medium Earth Orbit (MEO):** Són aquelles trajectòries que tenen un valor d'altitud entre les baixes i les geostacionàries, és a dir, entre els  $2000 \text{ km}$  i els  $30000$  aproximadament. El seu període oscil·la entre les 2 i 24 hores.
- **Geostationary Earth Orbit (GEO):** La peculiaritat d'aquest tipus d'òrbites és que el seu període és el mateix que el temps que necessita la terra per donar una volta completa, és a dir, 24 hores. D'aquesta manera, hi ha la següent relació.

$$\omega_s = \omega_T$$

A continuació es demostra la velocitat i l'altura d'una òrbita geostacionària.

Donat el període  $T = 24 \cdot 3600 = 86400 \text{ s}$ , desenvolupem el sistema:

$$v \cdot 86400 = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Aïllem la velocitat:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{86400}$$

Substituïm la variable i resollem:

$$\frac{\left[\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{86400}\right]^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2} \sim$$

$$\frac{39,48 \cdot r^2}{7464960000 \cdot r} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{39,48 \cdot r}{7464960000} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Si  $M = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  i  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ :

$$\frac{39,48 \cdot r}{7464960000} = \frac{3,98 \cdot 10^{14}}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{2,97 \cdot 10^{24}}{39,48}$$

$$r = \sqrt[3]{7,523 \cdot 10^{22}} = 42214698 \text{ m} = 42214,698 \text{ km}$$

Aquest valor és la distància de l'òrbita circular al centre de la Terra, però si tenim en compte que el radi del planeta és  $d = 6378 \text{ km}$  des de l'equador, la distància des de la superfície és:

$$42214,698 - 6378 = 35836,7 \text{ km}^{21}$$

Les òrbites geostacionàries formen part d'un subtípus anomenat HEO (*High Earth Orbit*), que són les que tenen un període igual o major a 24 hores.

<sup>21</sup> Aquest valor no és exacte ja que a causa de l'arrodoniment i a la inexactitud de  $M$ , queda lleugerament desviat del valor real, que són uns 35800 km.

## 7. Problema dels dos cossos i mig

El problema dels dos cossos i mig o problema dels tres cossos restringit circular (PTCRC) és una branca inferior del problema dels tres cossos, que també pertany al problema general dels  $n$  cossos, on  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ .

Estudiar el moviment de tres cossos moguts per la seva atracció gravitatòria resulta més complex que estudiar-ne de dos, ja que apareixen totes les incògnites d'un tercer cos sense entrar en casos especials. En l'estudi dels dos cossos hem reduït el problema a les incògnites d'un sol cos perquè hem suposat que la diferència de masses era tan gran que el petit era incapaç de produir cap efecte per el gran.

Per aproximar-nos a aquest tipus de casos, el problema dels dos cossos i mig rep aquest nom perquè se suposa que un dels tres cossos que hi ha en l'espai té una massa molt petita en comparació amb els altres dos. Un exemple és la interacció d'un satèl·lit artificial amb dos cossos com la Terra i la Lluna.

El nom del concepte porta la paraula "circular" perquè estudia el cas específic de la interacció entre dos cossos tenint com a resultat l'òrbita circular d'un respecte l'altre, mentre s'estudia el moviment del tercer objecte durant tot el procés.

De la mateixa manera que en el cas anterior, utilitzarem la primera llei de Kepler per reduir la complexitat de l'estudi eliminant l'eix  $z$ , fent tots els càlculs sobre un pla.

### 7.1. Aspectes generals

Tot seguit definirem les condicions en què es troben els tres cossos del sistema. Com s'ha dit anteriorment l'atracció gravitatòria que genera un dels cossos és negligible, de manera que partim de les següents equacions:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = G \frac{m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = G \frac{m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + G \frac{m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)$$

On  $\ddot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_2$  són les acceleracions que pateixen els dos cossos de massa considerable i  $\ddot{\vec{r}}_3$  la del cos menor. Aquesta última és la suma vectorial de les acceleracions que li proporcionen les altres dos masses.

Centrant-nos en aquesta última massa, ens interessa descompondre la seva acceleració en les seves components vectorials, de manera que:

$$\begin{cases} \ddot{x}_3 = G \frac{m_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \cdot \frac{(x_1 - x_3)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|} + G \frac{m_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|^3} \cdot \frac{(x_2 - x_3)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|} \\ \ddot{y}_3 = G \frac{m_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \cdot \frac{(y_1 - y_3)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|} + G \frac{m_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|^3} \cdot \frac{(y_2 - y_3)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|} \end{cases}$$

Pel que fa al centre de masses, aquest es troba en el mateix punt que en el problema dels dos cossos.

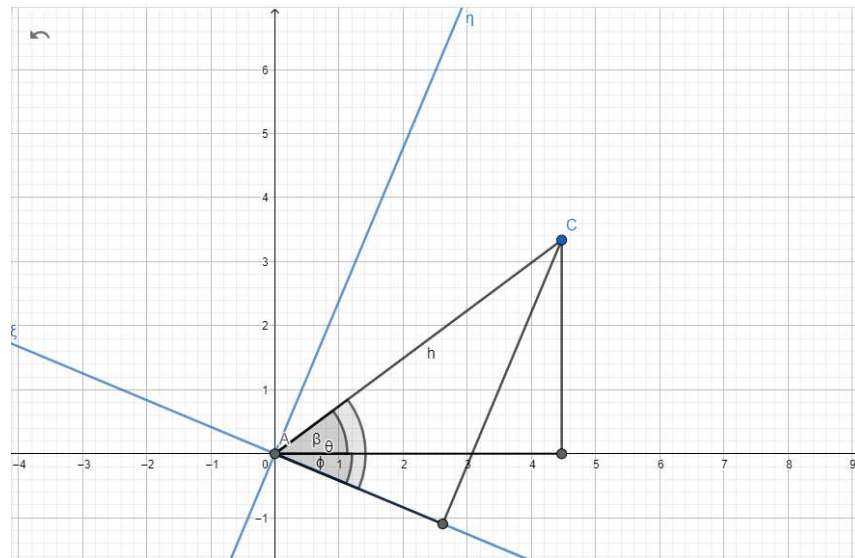
## 7.2. Simplificació al problema sense dimensions

En la majoria d'estudis es duen a terme una sèrie de canvis en el sistema de referència per simplificar els càlculs del problema. Se'n distingeixen dos: el sistema de referència rotatiu i els canvis de constants per fer del problema un cas més senzill.

- **Sistema de referència rotatiu:** Si bé s'ha dit en el punt anterior que un dels cossos ( $m_2$ ), descriu una òrbita sobre el major ( $m_1$ ), el problema circular analitza també òrbites binàries circulars<sup>22</sup>, és a dir, aquelles en què els dos cossos majors descriuen òrbites vers el seu centre de masses, havent així el moviment d'un cos addicional a analitzar.

Per centrar-se exclusivament en el càlcul del tercer cos, se situa el centre del sistema de referència en el centre de masses i es fa girar sobre si mateix a la velocitat angular del cos o cossos que orbiten. D'aquesta forma, si l'observador se situa en el centre, tindrà la sensació que els dos cossos estan en estat de repòs.

<sup>22</sup> En aquestes òrbites, els dos cossos es mouen a la mateixa velocitat angular ( $\omega_1 = \omega_2$ ), de manera que queden units per un eix que passa pel centre de masses. Així, si situem les dos masses sobre l'eix de les abscisses, podem comprovar que la seva distància al centre s'expressa tota amb el vector unitari  $\vec{i}$ .



Imatge 25 - Contrast entre els dos sistemes de referència

Per passar d'un sistema a un altre s'utilitzen matrius de gir, i per presentar-les ens basarem en la imatge superior, en què ens centrarem només en els dos sistemes de referència als quals ja els manca l'eix  $z$ <sup>23</sup>.

El sistema fix està format pels eixos  $X$  i  $Y$ , i el rotatiu pels eixos  $\xi$  i  $\eta$ . L'angle  $\phi$  que formen  $X$  i  $\xi$  és el mateix que entre  $Y$  i  $\eta$  per raons de trigonometria. Suposem des del sistema que mòbil la distància a un punt  $C$  (si l'òrbita és binària circular) ve donada per  $\vec{h}$  i té com a mòdul  $|\vec{h}|$ .

Si en un instant del temps qualsevol parem el sistema rotatiu formant aquest angle amb el sistema fix, per passar d'un sistema a l'altre tenim les següents raons trigonomètriques:

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cdot \cos \phi + \sin \theta \cdot \sin \phi = \cos \beta$$

$$\sin(\theta - \phi) = \sin \theta \cdot \cos \phi - \cos \theta \cdot \sin \phi = \sin \beta$$

D'acord amb el principi bàsic del sistema rotatiu, l'angle  $\theta$  és constant perquè la posició relativa del mòbil sempre és la mateixa el que varia és  $\phi$ .

Sabent aquests angles només queda aplicar-ho a la distància, obtenint finalment:

$$x = |\vec{h}| \cdot \cos \beta$$

$$y = |\vec{h}| \cdot \sin \beta$$

<sup>23</sup> Quan es treballa amb un sistema fix i un rotatiu, si no hi ha d'haver canvis en la inclinació del pla orbital, l'eix  $z$  s'identifica amb l'homòleg de l'altre.

- **Eliminació de les dimensions:** Consisteix a eliminar el sistema de referència real i analitzar el problema des d'un àmbit imaginari perquè es fan canvis de variables que són impossibles de fer físicament, però que simplifiquen els càlculs.

Aquest mètode també s'utilitza per demostrar propietats d'un cert sistema que poden no ser apreciables a escala real donada la immensitat en què aquest es veu sotmès.

L'eliminació de les dimensions parteix dels següents principis:

- La constant de gravitació universal  $G$  s'augmenta fins a 1.
- El sumatori de les dos masses principals és 1. Per no produir canvis en la proporcionalitat amb el sistema a escala real, els nous valors de les masses s'obtenen mitjançant el valor de  $\mu$  (no és el mateix que l'utilitzat en el càlcul del problema dels dos cossos):

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Aquí,  $\mu$  és el nou valor de  $m_1$ , de manera que  $1 - \mu$  és el nou valor de  $m_2$ .

- Velocitats orbitals: El principi bàsic d'aquest punt és la restricció del període orbital, el qual queda reduït a  $2\pi$  (és una unitat de temps i no s'ha de prendre com un valor expressat en radians). Per obtenir aquest període en una òrbita circular, la velocitat angular ha de ser 1, de manera que:

$$\omega \cdot T = 2\pi \rightarrow 1 \cdot 2\pi = 2\pi \text{ rad}$$

Com en punt anterior, l'objectiu en aquest també és no trencar la proporcionalitat, i això es pot aconseguir si apliquem el mateix principi que en el tema de les masses.

En un sistema com Terra – Lluna, és a dir, en què el centre de masses es pot identificar amb el de la Terra,  $\alpha$  (distància de la Lluna al centre de masses) tindrà un valor d' 1. Però en una òrbita binària,  $\alpha$  no fa referència a la distància sencera, nomenant  $1 - \alpha$  a la distància del segon cos.

Finalment, per demostrar la fiabilitat de les noves condicions del problema es compara la força de la gravetat nova amb la força centrífuga/centrípeta (tenen el mateix valor i la mateixa expressió, com s'ha vist en [l'apartat 5.5.1.2](#)):



$$G \frac{m_1}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r}$$

Apliquem aquest principi al sistema nombrat anteriorment, en què primer es remarca la diferència de masses que a primer ull pot no semblar evident:

$$\mu = \frac{M_T}{M_T + M_{Lluna}} = 0,988$$

On  $M_T$  és la massa de la Terra i  $M_{Lluna}$  la de la Lluna.

S'observa que en el sistema reduït la primera massa té un valor de 0,988, fent negligible la de la Lluna. Podem utilitzar llavors  $\mu = 1$ .

Llavors, aplicant la igualtat anterior, tenim:

$$1 \frac{1}{1^2} = \frac{1^2 \cdot 1^2}{1}$$

Aquesta igualtat es compleix si arrodonim el resultat primer, però el fet que no sigui 1 des d'un principi significa que:

$$1 \frac{0,988}{1^2} = \frac{1^2 \cdot (1 - \alpha)^2}{1 - \alpha}$$

$$0,988 = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0,012$$

Això demostra que la Terra també té una distància vers un centre de masses però molt petita anomenada  $\alpha$ , fet que evidencia que en realitat, el sistema Terra – Lluna és binari i que la Terra també descriu una petita òrbita en sintonia amb la de la Lluna.

També podem apreciar que en la simplificació d'òrbites binàries, el valor de la massa petita és el mateix que el de la distància del cos gran al centre de masses ( $1 - \mu = \alpha$ ).

### 7.3. Pseudopotencials i la constant de Jacobi

Aquests dos conceptes relacionats directament conformen una part molt important de l'estudi del moviment del tercer cos.

L'anàlisi de la constant de Jacobi, la seva aplicació i les superfícies de velocitat relativa nul·la s'efectuen sobre un sistema de referència immòbil, és a dir, en què els dos primers astres es troben en estat de repòs perquè es dona per suposat que no hi ha cap interacció entre ells més enllà que la de l'òrbita. L'inconvenient principal de fixar el sistema roman en la necessitat d'analitzar la dinàmica mitjançant l'efecte Coriolis, explicat en [l'apartat 7.3.1](#)<sup>24</sup> i l'eliminació de les lleis de Newton.

Abans d'endinsar-nos en l'anàlisi d'aquests conceptes, primer cal remarcar la importància de la força centrífuga, la qual és la força que una massa exerceix en la direcció de la distància del cos que l'atreu en sentit contrari quan la primera està girant.

Els pseudopotencials, també anomenats potencials efectius són la suma del potencial gravitatori i del potencial de la força centrífuga, el qual té la següent expressió:

$$V_c = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

On  $\omega$  és la velocitat angular del segon cos (o dels dos primers si l'òrbita és binària circular) i  $r$  la distància d'aquest al centre de masses. El valor d'aquest potencial es mesura amb  $J/kg$ , i és la integral de la força, de manera que:

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \int \omega^2 r \, dr$$

Integrant una fórmula que expressa  $J/kg$  es retorna una altra en  $m/s^2$ . La presència d'aquesta força en l'expressió dels pseudopotencials es deu al fet de trobar-nos en un sistema de referència rotatiu. Al ser aquest un sistema no inercial<sup>25</sup>, a part de la força de Coriolis, fa falta suposar que la força centrífuga és real (provocada per la mateixa rotació del sistema) i que origina una acceleració cap a l'exterior del sistema.

A l'eliminar l'anàlisi de la força de Coriolis, la possibilitat de calcular la trajectòria del cos a partir d'un sistema rotatiu desapareix, de manera que la força centrífuga només s'aplica al sistema per explicar al comportament del cos en certs punts. Com es veurà en la integral de Jacobi, els pseudopotencials només serveixen per predir per quin

<sup>24</sup> Es recomana llegir l'apartat 7.3.1 per entendre millor tot el que s'explica en l'apartat 7.3.

<sup>25</sup> En els sistemes de referència no inercials no es compleixen totes les lleis de Newton perquè des del punt de vista de l'observador, l'objecte pateix acceleracions que aparentment no són originades per cap força provinent d'un cos.

Exemple: Si estem al centre d'un disc en rotació, mirant sempre el mateix extrem del disc, qualsevol cosa que estigui allunyada de nosaltres tendirà a anar cap a l'exterior sense cap motiu explicable des del nostre punt de vista.

espai del pla orbital es poden desenvolupar una òrbita a partir de certes condicions inicials.

Com s'ha dit anteriorment, els pseudopotencials també es componen dels potencials gravitatoris, que s'expressen de la mateixa manera que l'acceleració que provoquen els dos cossos vers el tercer:

$$V_g = G \frac{m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + G \frac{m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

Havent definit els tres termes podem definir el pseudopotencial, normalment expressat amb la lletra  $U$ :

$$U = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + G \frac{m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + G \frac{m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

Com que hem eliminat l'efecte Coriolis i hem fixat el sistema, s'elimina per conseqüència la viabilitat de calcular el moviment exacte del tercer cos perquè es complementa amb el moviment dels primers i per tant els pseudopotencials només descriuen el comportament de l'objecte en termes generals, és a dir, sense tenir en compte el sistema de referència complint-se que:

$$U = f(r)$$

El comportament del tercer cos és pot determinar a partir de la distància als altres dos.

Existeix una relació entre la derivada del pseudopotencial i el producte escalar del vector de la velocitat i de l'acceleració del tercer cos. Abans però, recordem alguns conceptes de notació:

$$\frac{dV}{dt} = a$$

I:

$$\frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(V^2) = V \frac{dV}{dt}$$

On  $V$  és la velocitat de  $m_3$  en un punt del sistema mòbil.

Llavors, la relació integrable és la següent:

$$\frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

Si integrem amb el temps aquesta expressió, finalment obtenim la integral de Jacobí:

$$\int \frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{dt} dt = \int \frac{dU}{dt}$$

$$V^2 = 2U - C$$

On  $C$  és la constant d'integració de Jacobí. Aquesta integral ens dona la velocitat relativa de l'objecte en qualsevol punt donada la distància al centre de masses i als dos cossos atraïents. Aquesta velocitat tampoc és la mateixa en mòdul ni en vectors que la del sistema fix, també per l'efecte Coriolis.

Si en el problema dels dos cossos hem vist la conservació del moment angular degut a la constant de les àrees, aquí això no passa perquè hi ha la presència d'un altre cos amb influència gravitatòria. Vist des de l'anàlisi dels dos cossos, aquesta es podria considerar com una força externa que deforma l'òrbita preliminar.

Tot i això, el fet que aquí trobem una constant significa que hi ha certa relació entre la velocitat i la posició del tercer cos. Això es veu més clar si eliminem les dimensions al problema. Així, l'expressió del pseudopotencial és la següent:

$$U = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{R_{13}} + \frac{\mu}{R_{23}}$$

On  $R_{13}$  i  $R_{23}$  són les distàncies de les masses majors a  $m_3$  en el sistema reduït.

Suposem que el centre de masses es troba en una posició propera a les altres dos masses, de manera que podem considerar que existeix una mena de proporcionalitat directa entre  $(x^2 + y^2)$ ,  $R_{13}$  i  $R_{23}$ . Donada una constant de Jacobí, el mòdul de la velocitat es restringeix a certs valors de la posició de  $m_3$  perquè en cas d'haver-hi una diferència de valors negativa:

$$V = \sqrt{2U - C}$$

A dins l'arrel trobaríem un valor negatiu, fet que ens conduiria a valors imaginaris de la velocitat.

Havent definit les condicions en les que es troba el problema podem explicar l'aplicació principal de la constant de Jacobí: les superfícies de velocitat relativa nul·la.

Anomenades també superfícies de Hill en honor al matemàtic que les va definir, George William Hill, són una sèrie d'espais delimitats en el sistema de referència que

mostren els llocs per on el tercer cos pot orbitar. Com s'ha dit anteriorment, l'aplicació de la constant de Jacobi per calcular aquestes superfícies no prediu les òrbites, sinó que prediu per on poden trobar-se donades unes condicions inicials.

El seu nom no significa que en tots els seus punts la velocitat sigui nul·la, sinó que aquest fenomen només passa en els contorns que les delimiten.

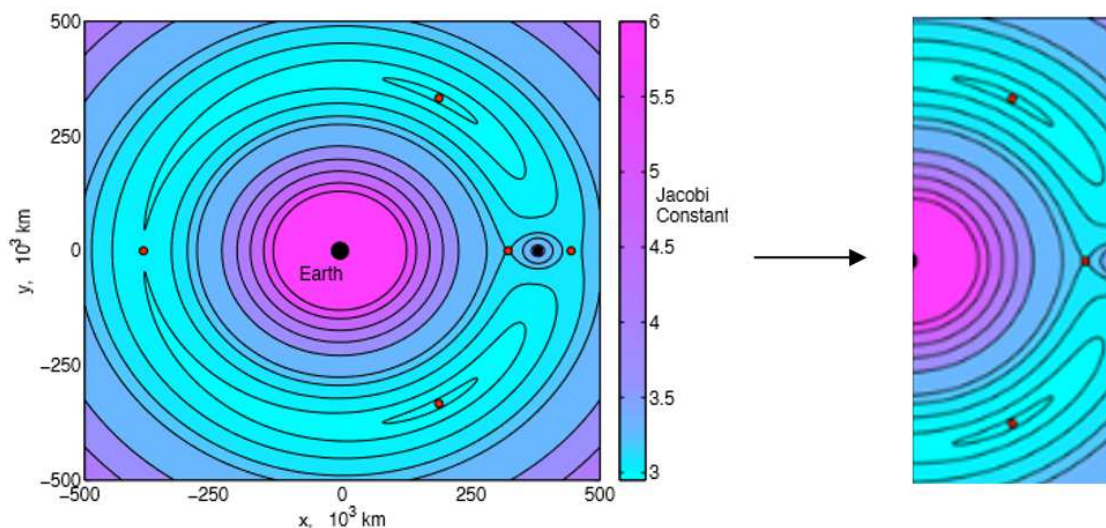
Per calcular-les, s'utilitza la integral de Jacobi i s'igualava a 0, de manera que:

$$2U = C$$

$$(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{1 - \mu}{R_{13}} + \frac{\mu}{R_{23}} \right) = C$$

Com s'ha especificat anteriorment, la velocitat és relativa. Tractada des del sistema rotatiu, si aquesta és 0 significa que hi ha punts en què pels dos objectes aquesta roman en repòs. Això significa que en aquests punts  $m_3$  té una velocitat angular  $\omega$ . Traslladant-nos al sistema de referència inercial veuríem que en realitat té cert moviment.

A partir d'aquesta fórmula s'obté la següent imatge, que en aquest cas detalla les superfícies del sistema Terra – Lluna:



Imatge 26 - Superfícies de velocitat relativa nul·la amb diferents valors de  $C$  (esquerra) i zona de proporcionalitat inversa (dreta)

A la dreta de la imatge hi ha una llegenda que especifica que els canvis de color entre les diferents zones es deu al valor de la constant. Les línies són la unió de punts en què la velocitat és 0 sota un mateix valor de la constant. A partir d'aquí podem extreure algunes conclusions:

- Es pot considerar que les distàncies als tres punts assenyalats creix de forma proporcional exceptuant la zona de proporcionalitat inversa, en què si el cos s'allunya d'un s'acosta a l'altre.

Exceptuant aquesta zona, podem afirmar que el valor del pseudopotencial es fa més petit a mesura que creixen les distàncies perquè s'ha de satisfer la igualtat que crea les línies, tot i trobar termes en la seva expressió que es fan més petits, i d'altres més grans.

- Els valors dels pseudopotencials provoquen que les formes de les superfícies siguin ovalades, i que en els valors més grans de  $C$  es tanquin sobre el cos al qual envolten. En aquestes superfícies el tercer cos només es pot moure al voltant d'un dels dos cossos.

Però a mesura que la constant creix, els ovals es fan més grans fins que arriba un punt en què formen superfícies conjuntament. En [l'apartat 7.4](#) s'analitzen les zones que es troben per damunt i per sota dels dos cossos.

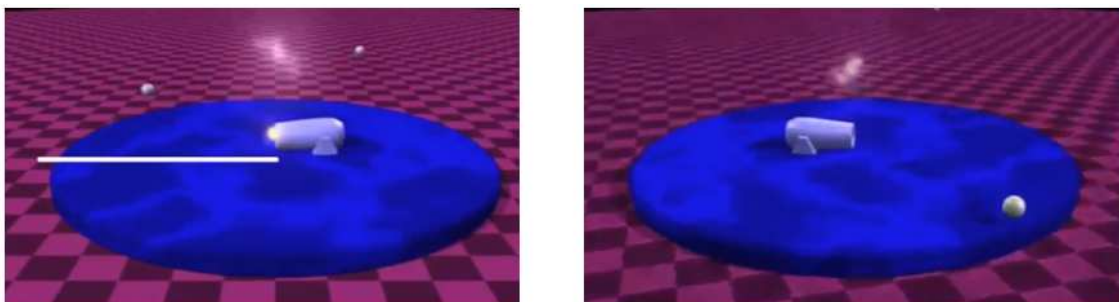
### 7.3.1. Efecte Coriolis

L'efecte Coriolis és una força imaginària originada pel mateix sistema de referència mòbil.

Si ens situem a la velocitat angular  $\omega$ , és a dir, al centre masses en el sistema de referència rotatiu, sembla que el tercer cos adquireix una acceleració i una velocitat relativa tot i que en realitat no ho estigui fent. Aquest efecte, doncs, no s'aprecia des d'un sistema de referència extern i fix.

L'explicació d'aquest fenomen s'entén millor amb un exemple simple.

Si comencem a disparar bales des d'un canó que es troba sobre una plataforma que gira sobre el seu eix, la trajectòria de la bala pot ser vista de dos maneres diferents:



*Imatge 27 - Llançament de bales vist des d'un sistema fix (esquerra) i d'es un sistema rotatiu (dreta)*

- Des d'un sistema de referència fix: S'observa sense dificultat com la bola llançada segueix el seu curs normal, és a dir, una recta.
- Des d'un sistema mòbil: A la velocitat angular de la plataforma, es veu que la bola descriu una paràbola que d'alguna manera l'endarrereix.

Matemàticament, aquesta força s'aplica perpendicular a la velocitat del sistema rotatiu. Com que la bola no té velocitat angular, si la plataforma gira en sentit antihorari, des del sistema referència semblarà que una força accelera la pilota en sentit horari.

La fórmula de l'acceleració produïda per la força de Coriolis té la següent expressió:

$$a_{\text{Coriolis}} = 2v\omega$$

On  $v$  és la velocitat del cos vista des del sistema de referència i  $\omega$  la velocitat angular d'aquest. El valor d'aquesta acceleració serà 0 quan la velocitat relativa ho sigui, és a dir, quan el tercer cos es mogui a la mateixa velocitat angular que els altres.

Adaptant aquest problema al nostre cas, si ens col·loquem en el centre de masses en el sistema rotatiu, notarem que el cos descriu paràboles que no són originades per les forces gravitatòries.

Aquesta força afegeix càlculs addicionals, que serien els reals per trobar el moviment de la tercera massa. Dit en altres paraules, calcular l'efecte Coriolis seria adaptar el sistema rotatiu al sistema fix, és a dir, vist des de fora.

Aquest efecte té avui diverses aplicacions meteorològiques perquè explica fenòmens com el moviment de tempestes i anticiclons. Explica la seva desviació i el seu moviment giratori també és el culpable que no existeixin trajectòries rectilínies.

#### 7.4. Punts de Lagrange

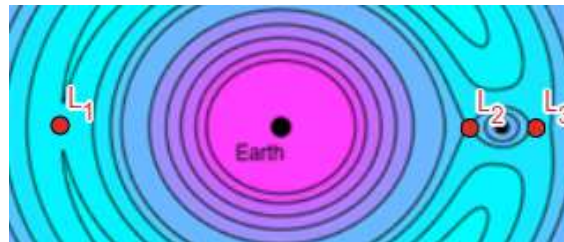
En la "imatge 26" s'observen cinc punts de color roig. Aquests punts són els anomenats punts de Lagrange.

Els punts de Lagrange es caracteritzen per ser punts de velocitat relativa nul·la en què el cos es troba en equilibri, de manera que es poden considerar com zones en què  $V$  sempre és 0.

Existeixen 5 punts en què aquesta propietat es compleix. Tot i això, no tots funcionen de la mateixa manera i per això es presenten en dos subapartats diferents.

#### 7.4.1. $L_1, L_2$ i $L_3$

Els punts de Lagrange que volem estudiar en aquest subapartat són els següents:



Imatge 28 - Punts  $L_1, L_2$  i  $L_3$

Aquests tres punts es troben sobre l'eix que uneix el centre de masses amb les altres dos.

Per calcular la seva posició és molt probable el més còmode sigui situar-nos en el sistema de referència fix, de manera que enlloc de treballar amb  $V$ , es treballa amb la velocitat real ( $v$ ).

Els punts  $L_1$  i  $L_3$  es calculen de la mateixa manera, ja que són punts en què el valor de la força centrífuga iguala el de l'atracció gravitatòria dels dos cossos. Com es veu en la imatge, en aquests punts les masses apliquen la força en la mateixa direcció i sentit, tenint:

$$G \frac{m_1}{x_{13}^2} + G \frac{m_2}{x_{23}^2} = \omega^2 r = v \cdot \omega$$

Sent  $x_{13}$  i  $x_{23}$  les distàncies de les dos masses a  $m_3$ . En aquest cas, podem considerar que  $y_{13}$  i  $y_{23}$  són nul·les perquè en el nostre sistema de referència l'eix es troba sobre l'eix de les abscisses.  $\omega$  ja ve donada perquè l'eix que uneix el punt de Lagrange amb els altres dos cossos s'ha de mantenir constant, de manera que el període de  $m_3$  sigui el mateix que el de  $m_2$ <sup>26</sup>.

<sup>26</sup> L'aplicació d'aquests punts de Lagrange és la mateixa en el cas d'òrbites binàries perquè  $m_1$  tindria la mateixa velocitat que  $m_2$ .



Els càlculs de  $L_2$  són una mica diferents perquè es troba en un punt en què les forces gravitatòries atreuen al cos en la mateixa direcció però en sentits oposats. El seu càlcul és llavors una mica diferent.

En un sistema com el Terra – Lluna, l'objectiu del cos és orbitar sobre la Terra a la mateixa velocitat angular que la de la Lluna. Però l'òrbita amb la velocitat angular de la Lluna ja està definida pel mateix satèl·lit, i l'objectiu no és posar un objecte en la mateixa òrbita. Per establir el punt d'equilibri, es considera que la força centrífuga és una força que actua en la mateixa direcció que l'atracció de la Lluna, de manera que només hi ha una òrbita possible. Per calcular-la, les distàncies a les dos masses majors actuen com a variables.

Si incloem la força centrífuga, no podem suposar que l'equilibri és simplement una igualtat de forces gravitatòries:

$$G \frac{m_1}{x_{13}^2} = G \frac{m_2}{x_{23}^2}$$

De ser així, el cos mantindria un moviment rectilini uniforme.

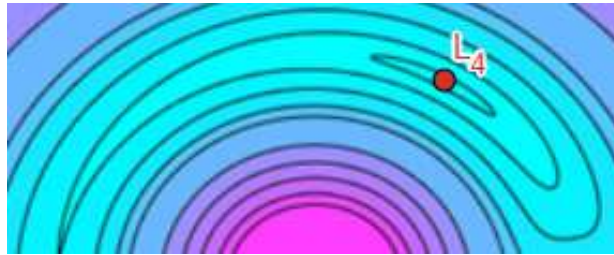
Per dur a terme l'equilibri de forces i aconseguir un moviment circular, el punt es val de la següent relació:

$$G \frac{m_1}{x_{13}^2} - G \frac{m_2}{x_{23}^2} = \omega^2 r$$

Si passem el segon terme a l'altre costat de l'equació veurem que l'acceleració que produeix el cos major és igual al sumatori de la força centrífuga i l'atracció del segon.

En aquest cas, l'acceleració de  $m_2$  actua com a força de reforç. Sense la presència d'aquesta, per orbitar al voltant de l'objecte major a una distància menor que la de la segona massa seria necessària una velocitat angular molt major. Adaptant l'òrbita circular amb la introducció d'una acceleració que ajuda a  $m_3$  podem adaptar el factor  $\omega$ .

### 7.4.2. $L_4$ i $L_5$



Imatge 29 -  $L_4$  i zones pròpies de  $V = 0$

Tot i que en aquesta imatge només es veu el punt  $L_4$ , com es pot intuir a partir de la "Imatge 26",  $L_5$  es troba exactament en el mateix punt a partir de l'eix de simetria horitzontal, és a dir, per sota dels dos cossos del sistema Terra – Lluna.

Aquests dos punts compleixen una propietat que no compleixen els altres tres. Aquesta és que la seva posició és relativament independent del valor de les masses dels altres dos cossos i es troben sempre en la mateixa posició relativa, formant un triangle equilàter.

La posició és relativament independent perquè només depenen de la posició d'aquestes però que en el problema dels dos cossos ve donada pel valor de les masses.

La clau per trobar aquest punt està en el valor de  $m_2$  i la seva posició, ja que a partir d'aquestes dades es defineix l'òrbita binària. A partir d'aquí es tracta de buscar l'equilibri de forces juntament amb la centrífuga per originar només un moviment circular uniforme.

En els càlculs per trobar aquest punt és molt important el centre de masses perquè la direcció en què la força centrífuga és aplicada influeix en l'equilibri de forces (no podem suposar que s'aplica directament sobre  $m_1$ ).

Per trobar aquest equilibri desglossem les forces i les dividim segons les seves components en l'eix de les abscisses i de les ordenades. Així, per l'eix de les abscisses tenim:

$$G \frac{m_1}{r_{13}^2} \cos 60 = G \frac{m_2}{r_{23}^2} \cos 60 + \omega^2 r \cos \alpha$$

On  $\omega$  segueix sent la velocitat angular de tot el sistema i  $\alpha$  l'angle que forma el baricentre amb el punt vers l'eix horitzontal que uneix les dos masses principals.

L'acceleració de la força centrífuga se suma amb l'acceleració del segon cos perquè s'intueix que el centre de masses sempre estarà més a prop de  $m_1$ .

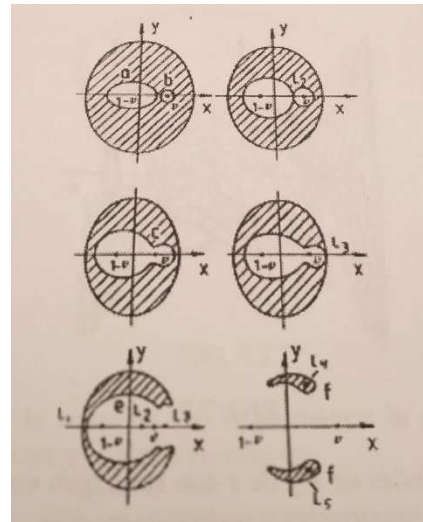
Respecte l'eix de les ordenades, les dos masses actuen en la mateixa direcció i sentit:

$$G \frac{m_1}{r_{13}^2} \sin 60 + G \frac{m_2}{r_{23}^2} \sin 60 = \omega^2 r \sin \alpha$$

Al ser un triangle equilàter podem assegurar que  $r_{13} = r_{23}$ .

Observant la "imatge 29" una altra vegada podem apreciar que al voltant de  $L_4$  i  $L_5$  hi ha unes línies de velocitat relativa nul·la que conformen espais tancats que semblen aïllats de la resta del sistema. En la "imatge 30" s'especificuen aquelles zones que es tanquen al voltant de  $L_4$ , les quals tenen una forma aixafada. Aquestes zones es caracteritzen per tenir un valor  $C$  més baix que les del seu voltant, de manera que per a valors en què l'objecte es pot moure per un espai bastant ampli encara hi ha zones inaccessibles.

El mapa que es troba a la part superior esquerra mostra les regions en què es pot trobar l'objecte en blanc per a valors molt alts de  $C$ . A mesura que la constant de Jacobí es va fent petita més àrees blanques se situen com a probables de contenir el tercer cos.



Imatge 30 - Canvis en les regions de Hill proporcionals al decreixement de  $C$

En l'últim mapa el valor de la constant és ja suficientment petit com per no trobar-hi zones inaccessibles que envoltin els dos cossos. Tot i això segueixen quedant dos zones en què el cos no hi pot entrar.

Aquest fenomen justifica l'estabilitat d'aquests dos punts, ja que si un cos que es troba en un d'ells pateix una petita perturbació, el valor de la constant de Jacobí es modifica lleugerament, fent que el cos<sup>27</sup> es mogui per aquelles zones que l'envolten, ja que el

<sup>27</sup> Els asteroides anomenats "troians" són aquells que orbiten en les zones properes als punts de Lagrange  $L_4$  i  $L_5$ . Se n'han descobert 1691 en el sistema Sol – Júpiter. En aquesta recreació de les òrbites del sistema solar es pot observar el cinturó principal d'asteroides en verd, i els troians a les puntes de color blau ocupant les dos regions al voltant de Júpiter.

<https://minorplanetcenter.net/iau/Animations/Middle.gif>

fet de trobar-se en un instant inicial en un punt d'equilibri significa que el valor de  $C$  es prou petit com per poder-se moure exclusivament allà.

Per altra banda, els tres primers són clarament inestables perquè qualsevol cos que se sotmeti a una petita pertorbació estant en aquells punts es desviarà cap a una òrbita més caòtica, donades les grandàries de les zones en què es poden moure.

Aquest procés de creixement de  $C$  es pot analitzar la inversa fent créixer aquest valor. Per a valors de la constant Jacobi molt baixos, el cos només es pot moure per les zones que envolten els punts  $L_4$  i  $L_5$  (tenint sempre en compte les línies de velocitat relativa nul·la).

També és important remarcar que les zones d'estabilitat dels punts  $L_4$  i  $L_5$  així com les formes i grandàries de totes les superfícies de Hill són depenen de les masses dels dos cossos inicials.

## Marc pràctic

Havent abordat l'estudi de les pertorbacions orbitals i les superfícies de velocitat relativa nul·la anteriorment, en l'àmbit més experimental s'ha volgut aplicar aquests dos temes per investigar sobre l'estabilitat dels punts de Lagrange en un sistema com el Terra – Lluna en forma de simulacions amb presència de forces externes com l'atracció gravitatòria del Sol.

Aquest problema és aplicable a la realitat en camps com la definició de trajectòries de satèl·lits artificials a partir d'assistència gravitacional. Treballant en aquest sistema les òrbites en aquests punts podrien ser útils en la col·locació de satèl·lits d'observació astronòmica de l'espai exterior o d'investigació de la superfície lunar.

Tot i els nombrosos articles que afirmen que els dos punts que formen triangles equilàters són estables, no s'ha trobat cap material per fer visible aquestes hipòtesis, és a dir, per fer palesa l'estabilitat sota l'atracció del Sol, així com tampoc se n'han trobat sobre la “no estabilitat” dels tres primers. Tot i això, en alguns estudis mencionats a la bibliografia s'hi poden trobar models de possibles òrbites que es poden descriure en les zones que envolten els diferents punts.

### 1. Objectius

En primera instància, els objectius de les simulacions són:

- Demostrar per què els punts de Lagrange  $L_4$  i  $L_5$  són estables i per què no ho són  $L_1$ ,  $L_2$  ni  $L_3$ .
- Observar com són les òrbites que descriuen els cossos amb massa minoritària en un sistema inercial (en el qual podem aplicar les lleis de Newton).
- Aplicar les lleis del problema dels tres cossos definides per un sistema no inercial com a eina per demostrar els resultats obtinguts.
- Aprendre a interpretar les dades plasmades en gràfics que demostrin diferents aspectes d'un mateix problema.
- Fer una breu introducció en el món dels mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials ordinàries (EDOs).

La simulació s'ha de fer introduint el factor del temps, de manera que els càlculs no es poden fer a partir d'una  $f(r)$  i no pot existir una equació única que defineixi el moviment del tercer cos perquè qualsevol problema d'influències

gravitatòries de  $n$  masses en què  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$  no pot presentar solucions analítiques definides per mètodes com la integració. En aquests, factors com l'acceleració o la velocitat no es poden definir en funció del temps donada la seva improbable conservació i conseqüentment la seva periodicitat.

La presència d'equacions diferencials resoltes amb mètodes numèrics és llavors inevitable.

## 2. Metodologia

Les simulacions s'han dut a terme mitjançant el programari *Microsoft Excel* perquè és l'eina de programació que més hem fet servir al llarg dels anys a l'escola. Tot i saber programar superficialment en llenguatge de programació *C*, s'ha considerat que *Excel* és més pràctic i entenedor en aquest tipus de situacions, en què són precisos tants càlculs previs per obtenir únicament un valor.

S'ha treballat des d'un sistema de referència inercial, fet que afegeix un tipus de moviment més a estudiar: el de  $m_2$  i  $m_1$ . No podem fer-ho des d'un sistema rotatiu perquè no hem estudiat l'efecte Coriolis amb suficient profunditat com per dur a terme una simulació amb relativa exactitud. L'inconvenient principal que això suposa és que per calcular la posició del cos en cada instant s'ha de calcular abans la posició de les dos masses grans i les relatives del cos petit vers aquestes.

Només s'han utilitzat dos eixos en el sistema de referència, de manera que s'ha suposat que totes les òrbites que segueixen els cossos s'efectuen sobre un mateix pla.

A continuació s'expliquen les dos grans eines que s'han fet servir per fer les simulacions. La primera consisteix en la tria del mètode de resolució de les equacions diferencials que es plantegen en un problema d'atraccions gravitatòries amb valor de  $g$  variables. Aquest ha set el mètode *Leapfrog*.

Per altra banda, tot i no utilitzar un sistema no inercial, s'ha reduït el problema proporcionalment a la realitat.

### 2.1. Mètode *Leapfrog*

El mètode *Leapfrog*, en català anomenat mètode del salt de granota, és un mètode per resoldre equacions diferencials que es basa en l'alternança dels càlculs dels valors de les derivades d'una primera funció. En aquest cas, la primera funció retorna com a valor un increment de  $x$  o  $y$  i les seves derivades són la velocitat i l'acceleració, que tampoc són constants de manera que el problema plantejat es basa en equacions diferencials ordinàries de segon ordre.

Inicialment s'havia pensat de resoldre aquestes equacions mitjançant l'anomenat mètode d'Euler o el d'Euler millorat, però l'inconvenient que plantegen aquests

mètodes és que tenen un grau d'error per truncament<sup>28</sup> bastant elevat i no es consideren fiables per dur a terme un estudi seriós i àgil. Per altra banda, també s'havia investigat mètodes com els de Runge - Kutta o mètodes de múltiples passos, però donada la seva complexitat era molt complicat aplicar-ho al nostre problema.

El mètode del salt de granota s'assembla molt al d'Euler amb l'excepció que canvien els termes i factors d'una expressió comú lleugerament per obtenir uns resultats molt més fidels a la realitat.

Per trobar les expressions del mètode *Leapfrog* partim de les d'Euler:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot v_n$$

On  $h$  és un pas de temps constant.

Per la velocitat, la seva expressió és:

$$v_n = v_{n-1} + h \cdot F(x_{n-1})$$

On  $F$  és una funció del valor de l'acceleració de la força de la gravetat.

Aquestes dos expressions formen el mètode d'Euler més pur, tot i que hi ha diferents versions en què es modifica el factor de l'acceleració i es canvia per altres instants.

Les expressions del mètode *Leapfrog* tenen el mateix principi:

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{1}{2} h F(x_n)$$

Aquesta expressió calcula la velocitat amb l'acceleració corresponent però reduint el pas de temps a la meitat. Aquest procés però, només s'efectua per començar a resoldre el problema. La expressió de la posició és:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot v_{n+1/2}$$

Per continuar amb el problema la fórmula de la posició és la mateixa però la velocitat canvia eliminant  $\frac{1}{2}$ :

$$v_{3/2} = v_{n+1/2} + h \cdot F(x_{n+1})$$

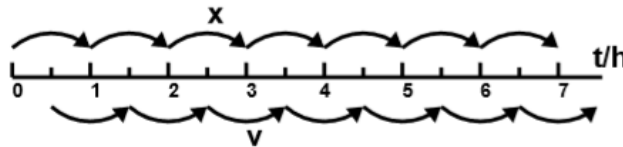
<sup>28</sup> L'error en mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials indica el grau de desviació dels resultats que aquests ens proporciona vers els reals. Es diferencien dos tipus d'errors: Per aproximació, que és aquell provocat per les imprecisions en la resolució d'un problema (és mitjanament evitable) i per truncament, el qual és provocat pels propis defectes del mètode. Com més petit és el grau de l'error, més fiable és un mètode.



I per la posició:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h \cdot v_{3/2}$$

Així, el procés sempre es repeteix calculant la posició donada una inicial sumant la velocitat que tindria el cos en la meitat de l'interval de temps. Aquest mètode es pot representar mitjançant la següent forma:



*Imatge 31 - Esbós del mètode Leapfrog*

Tot i que aquest mètode s'ha exemplificat amb les distàncies en l'eix de les abscisses, s'aplica de la mateixa manera al de les ordenades.

### 3. Procediment

En aquest apartat s'explica com s'han desenvolupat tots els punts de les simulacions i les preparacions prèvies necessàries per comprovar que aquestes s'han executat correctament.

#### 3.1. Reducció del problema

Per no treballar amb valors tant elevats s'ha fet una reducció del problema que ha simplificat la situació amb la possibilitat de combinar diferents variables sota un mateix valor.

Com s'ha vist en [l'apartat 7.2](#), la simplificació es fa per reduir les masses que participen en el problema dels tres cossos, però a l'estudiar les pertorbacions produïdes per l'atracció solar la massa i distància del Sol també han de ser modificades. Per fer-ho, hem començat per la simplificació normal, tenint:

$$0,98784383 = \frac{M_T}{M_T + M_{LL}}$$

On:

- $M_T = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .
- $M_{LL} = 7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ .

Sent aquest el nou valor de la massa de la Terra i:

$$1 - 0,98784383 = 0,01215617$$

Aquest és el nou valor de la massa de la Lluna.

Tot seguit hem trobat el centre de masses vers la Terra suposant que la distància entre els dos cossos és 1:

$$\frac{1 \cdot 0,01215617}{1} = 0,01215617$$

Així, s'ha situat el punt (0,0) del sistema de referència en el centre de masses, i en tots els casos, en l'instant inicial ( $t_0$ ) la Terra ha estat a  $-0,01215617 u$  de l'eix de les abscisses i la Lluna a  $0,98784383 u$  del mateix eix.

Havent definit l'existència del centre de masses, hem suposat que la Terra no roman estàtica, sinó que es mou en una òrbita circular binària en consonància amb la Lluna, amb una velocitat angular definida per la seva atracció (s'ha considerat que  $G = 1$ ):

$$\frac{0,98784383}{1^2} = \omega^2 \cdot 0,98784383 \rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

A la inversa (amb l'atracció de la Lluna) passa el mateix. Per la distància en la força centrífuga s'utilitza la distància vers el centre:

$$\frac{0,01215617}{1^2} = \omega^2 \cdot 0,01215617 \rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}^{29}$$

En aquest punt hem reduït ja la situació en què no hi ha perturbacions. Per introduir la influència del Sol s'ha adaptat el nou sistema per fer un canvi d'escala.

Primer s'ha trobat la nova massa del Sol mitjançant un factor de conversió:

$$M_{Sol\ nova} = M_S \cdot \frac{0,98784383}{M_T} = 329005,589291 \text{ kg}$$

On  $M_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

Per trobar la distància vers el centre de masses també s'ha efectuat un factor de conversió basat en les distàncies entre el sistema Terra – Lluna:

$$D_{ST} \cdot \frac{1}{D_{TL}} = 389,58333 \text{ u}$$

On  $D_{ST} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ km}$ .

Com que la Terra segueix una òrbita al voltant del centre de masses del sistema Terra – Lluna, el radi de l'òrbita que aquesta segueix en el seu moviment de translació vers el Sol variaria amb el temps. Per evitar-ho s'ha identificat el centre de masses com el punt que segueix la translació. Si en l'instant inicial el Sol es troba sobre el mateix eix que el sistema inicial i aquest es troba en la part "Est" de l'òrbita de translació, el Sol es troba a:

$$P_{Sol} = 0 - 0,01215617 - 389,58333 = -389,5954895 \text{ u}$$

<sup>29</sup> És important remarcar les dimensions en les quals aquesta simulació es duria a terme a escala real. L'òrbita de la Lluna té un període d'aproximadament 27,322 dies, de manera quan al llarg de l'anàlisi dels resultats la simulació s'estén al llarg de les 8 voltes aproximadament, a la realitat seria com si passés un temps similar a mig any.

Per comprovar si la reducció s'ha resolt correctament també en un cos addicional s'ha comparat la relació existent entre les forces que la Terra i el Sol exerceixen sobre la Lluna en tots dos sistemes.

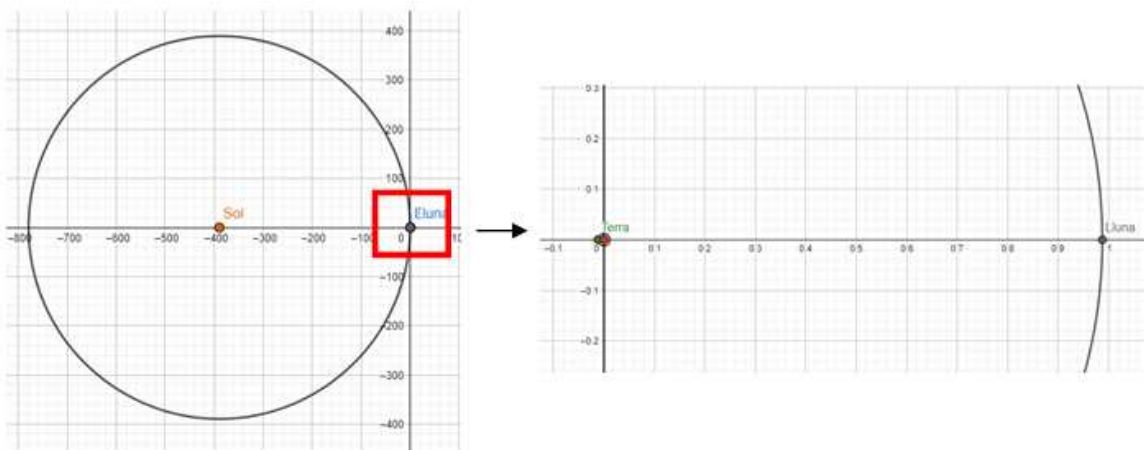
Primerament s'ha calculat l'acceleració que produeixen en un sistema real i després vers el reduït. Per saber la distància del Sol a la lluna en el nostre sistema (la Lluna es troba en el punt més llunyà) se sumen les distàncies d'aquest al centre i del centre al satèl·lit natural.

Si dividim les dues acceleracions de la Terra entre les del Sol:

$$\frac{F_{TReal}}{F_{SReal}} = \frac{F_{TReduït}}{F_{SReduït}} = 0,458$$

Aquest valor no té cap sentit en el problema. Només serveix per demostrar que els resultats obtinguts en les simulacions són tant fiables com si aquestes s'efectuessin amb dades reals (ignorant les adaptacions fetes prèviament). Amb això també queda demostrat que el valor de  $G$  és modificable sense pèrdua de sentit físic.

Havent comprovat aquests valors ja queda definit el sistema pel qual un satèl·lit artificial es mourà en l'instant  $t_0$ .



*Imatge 32 - Sistema d'òrbita de translació (dreta) i sistema del PTCRC (esquerra)*

Per fer la simulació el més fidel a la realitat possible s'ha seleccionat un interval de temps molt petit per evitar canvis massa grans en els valors de  $g$  de tots dos cossos (tres en el cas de les pertorbacions).

Al ser la velocitat angular del sistema Terra – Lluna  $1 \text{ rad/s}$ , una volta sencera serà completada en  $2 \cdot \pi$  segons. En un sistema real, la Lluna triga 27,322 dies en fer una òrbita sencera al voltant de la Terra. Havent mirat algun estudi que treballa amb la

funció EDO de *Mathlab*<sup>30</sup>, s'ha arribat a la conclusió de que definir l'òrbita en 2500 punts deixa intervals de temps prou fiables (amb mètodes de resolució com el d'Euler farien falta molts més punts). Sabent el període lunar, això és equivalent a definir un punt de la trajectòria cada 15,737 minuts. En el problema reduït, per saber l'interval de temps només cal fer el següent quocient:

$$\frac{2 \cdot \pi}{2500} = 2,513274122 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

### 3.2. Òrbites sense perturbacions

El centre de referència en aquestes simulacions s'ha situat en el centre de masses, des del qual s'han calculat totes les posicions.

El pas inicial és saber on estan els dos objectes atraïents, els quals roten en el sentit contrari a les agulles del rellotge.

Al ser òrbites circulars, el mòdul de la seva posició es manté constant, de manera que la posició en els dos eixos es determina a partir de raons trigonomètriques.

En  $t_0$  la Lluna es troba a 0 radiants i la Terra a 3,14159653589793.

Per determinar la seva posició en un altres punt, s'aplica el moviment circular uniforme;

$$\varphi_1 = 0 + (1 \cdot 0,002513274122) = 0,002513274122 \text{ rad}$$

en el cas de la Lluna i

$$\theta_1 = 3,14159653589793 + (1 \cdot 0,002513274122) = 3,14410981 \text{ rad}$$

en el cas de la Terra.

Per trobar les seves coordenades en forma de vectors:

$$x_{Ll} = 0,98784383 \cdot \cos \varphi_1$$

$$y_{Ll} = 0,98784383 \cdot \sin \varphi_1$$

<sup>30</sup> El contrast amb la funció de *Mathlab* (eina per resoldre equacions diferencials amb un error mínim), s'ha dut a terme consultant el següent treball de recerca: <https://fme.upc.edu/ca/premi-poincare/edicions-anteriors/premi-poincare-2017/treballs-guanyadors-2017/com-sescriu-orbita.pdf>

I per la Terra:

$$x_T = 0,01215617 \cdot \cos \theta_1$$

$$y_T = 0,01215617 \cdot \sin \theta_1$$

Aquest part del procediment és aplicable a totes les simulacions perquè el moviment d'aquests cossos no queda alterat per cap altra influència.

A partir d'aquest punt el les dades obtingudes són variables perquè venen donades per la naturalesa del punt de Lagrange que s'ha calculat prèviament. Aquests càlculs hauran donat una posició i una velocitat del cos que coincideixen en el valor. Recordant la relació entre la velocitat angular i la velocitat normal:

$$v = \omega \cdot r$$

Si el cos ha de rotar amb la mateixa freqüència que els altres ( $\omega = 1$ ), llavors:

$$v = r$$

Tenint la posició del cos en el sistema de referència, per trobar les acceleracions que produeixen la Terra i la Lluna cal abans trobar la distància entre ells. Aquesta s'aconsegueix mitjançant la posició relativa.

Posteriorment l'acceleració també es descompondrà en les seves components de l'eix de les abscisses i ordenades. Es considera que les acceleracions en l'eix de les abscisses amb un sentit cap a la dreta són positives, així com aquelles que van cap a dalt en les ordenades. Per automatitzar aquest procés s'ha calculat la posició relativa dels cossos introduint com a primer terme la posició del cos major. Des del punt de vista del cos atraient, aquest resultat no és real perquè el valor obtingut és l'oposat al que es veuria si aquell cos fos el centre de referència, de manera que el seu signe només serveix per determinar el de l'acceleració.

Per calcular la posició relativa entre la Lluna i el cos (anomenant a la posició descomposta del cos  $x_{cos}$  i  $y_{cos}$ ):

$$x_{rel} = x_{Ll} - x_{cos}$$

$$y_{rel} = y_{Ll} - y_{cos}$$

Tot i tenir el signe oposat, el valor de les distàncies és real, de manera que per calcular el mòdul de la distància entre els dos cossos s'utilitza el teorema de Pitàgores:

$$D_{Ll-Cos} = \sqrt{x_{rel}^2 + y_{rel}^2}$$

Tenint totes les dades necessàries es pot calcular el mòdul de l'acceleració i dividir-lo en les seves components:

$$a_{x-Ll} = \frac{0,01215617}{D_{Ll-Cos}^2} \cdot \frac{x_{rel}}{D_{Ll-Cos}}$$

$$a_{y-Ll} = \frac{0,01215617}{D_{Ll-Cos}^2} \cdot \frac{y_{rel}}{D_{Ll-Cos}}$$

Un cop aquest procés s'ha aplicat a la Terra i tenim quatre acceleracions en total, es fa la suma de totes per saber l'acceleració final:

$$a_{TX} = a_{x-Ll} + a_{x-T}$$

$$a_{TY} = a_{y-Ll} + a_{y-T}$$

En la suma de les acceleracions en la definició dels seus termes no s'ha inclòs la centrífuga perquè no és una força real en el sistema inercial.

Finalment s'aplica el mètode del salt de granota per trobar un nou punt en l'instant  $t_0 + 0,002513274122$ .

Posteriorment s'ha repetit el mateix procés agafant les dades de la velocitat i la posició final de la franja anterior per tornar a modificar la posició i trobar tots els punts de la trajectòria.

### 3.3. Òrbites amb pertorbació

El moviment de translació de la Terra i la Lluna vers el Sol és en realitat una el·lipse, però en aquest cas també s'ha reduït a una òrbita circular donada la baixa excentricitat d'aquesta ( $e = 0,01671022$ ). En un principi s'ha suposat que el càlcul general del problema tindria una dificultat afegida donada l'òrbita que descriu la Terra en el sistema Terra – Lluna. Considerant que la Terra era el cos que realment orbitava el Sol, això suposaria un canvi constant en les dimensions de l'òrbita de translació.

No obstant, el punt que orbita al voltant del Sol en una òrbita constant (sense considerar les pertorbacions gairebé negligibles) és el centre de masses, simplificant considerablement la situació.

Anteriorment s'ha explicat com s'ha definit l'òrbita que descriu el centre de masses del sistema Terra – Lluna al voltant del Sol. Aquesta òrbita, de la mateixa manera que la de la Lluna, s'ha d'adaptar al nou sistema reduït.

Per fer-ho s'ha comparat el període de les òrbites reals amb les del sistema reduït (suposant que els seus períodes corresponen a òrbites circulars). L'òrbita de translació del centre de masses té un període molt més gran que la de la pròpia del sistema Terra – Lluna, és a dir, la seva velocitat angular és molt menor de manera que el quocient entre els períodes ha de ser el mateix que el de les velocitats angulars canviades de posició:

$$\frac{27,322}{365,25} = \frac{\omega_{Sol}}{1} \rightarrow = 0,074803559273861 \text{ rad/s}$$

El principal problema que ha plantejat la resolució d'aquestes simulacions ha estat resoldre el moviment dels dos cossos principals, els quals en la realitat també pateixen la seva influència. L'interessant de les simulacions es veure com reacciona el tercer cos davant una pertorbació únicament, de manera que se suposa que els altres dos segueixen les seves òrbites circulars.

Per evitar canvis en els seus mòduls, la seva posició s'ha calculat des del centre de masses, forçant que aquests es mantinguin constants.

Donada una posició angular del centre de masses:

$$\delta_n = \delta_{n-1} + \omega_{Sol} \cdot 0,002513274122$$

Les components de la seva posició són (sent  $D_{CM}$  el mòdul de la distància del centre de masses al Sol):

$$x_{CM} = D_{CM} \cdot \cos \delta_n$$

$$y_{CM} = D_{CM} \cdot \sin \delta_n$$

En el càlcul de les posicions s'ha ignorat inicialment aquesta propietat del centre de masses i des del seu punt de vista aquest roman estàtic. Així, la seva posició vers el  $CM$  es calcula de la mateixa manera que quan no hi ha cap pertorbació.

Havent obtingut les seves posicions, s'han sumat a la del centre de masses per saber la utilitzada en el sistema de referència amb Sol en el punt (0, 0).

Per exemple, en el cas de la Terra seria:



$$\theta_n = \theta_{n-1} + 1 \cdot 0,002513274122$$

$$\begin{cases} x_n = 0,01215617 \cdot \cos \theta_n \\ y_n = 0,01215617 \cdot \sin \theta_n \end{cases}$$

Per calcular la seva posició definitiva:

$$x_{SIS} = x_{CM} + x_n$$

$$y_{SIS} = y_{CM} + y_n$$

En sistemes com el dels planetes que orbiten al voltant del Sol amb satèl·lits naturals, la velocitat d'aquests és una composició de la seva òrbita al voltant del planeta i de la translació al voltant de l'astre. Si la seva velocitat només fos angular al voltant del planeta, la Lluna es quedaria endarrere per manca de velocitat. Per aquest motiu el satèl·lit no pot tenir la mateixa velocitat que en l'òrbita sense perturbacions.

El que s'ha de mantenir és la velocitat relativa vers el centre de masses, la qual ha de ser la mateixa que en l'òrbita sense la influència del Sol. Per trobar-la s'ha calculat primer la velocitat real del centre de masses:

$$|\vec{v}_{CM}| = 389,5954895 \cdot 0,074803559273861 = 29,143129291839 \text{ u/s}$$

La velocitat del sistema també té les seves components en els eixos de coordenades, les quals s'obtenen a partir de la posició angular:

$$v_x = -|\vec{v}_{CM}| \cdot \sin \theta_n$$

$$v_y = |\vec{v}_{CM}| \cdot \cos \theta_n$$

En aquest cas, aquestes velocitats es calculen amb les raons trigonomètriques canviades perquè la velocitat és perpendicular al radi entre el Sol i el centre de masses.

Per trobar la velocitat del cos, se suma la velocitat que ha de portar en aquell moment en el sistema major i la del sistema dels dos cossos:

$$v_{xcos} = v_x + v_i$$

$$v_{ycos} = v_y + v_j$$

Anomenant  $v_i$  i  $v_j$  a les components del mòdul de la velocitat del cos en el sistema menor, és a dir, les velocitats relatives vers el centre de masses.

A partir d'aquest punt el procediment a seguir per trobar els punts de l'òrbita és el mateix amb l'excepció que en l'acceleració s'inclou la que produeix el Sol, és a dir, sumant tres termes. A part, totes les dades venen donades des del punt de vista del centre del sistema de referència.

## 4. Resultats i discussió

A continuació es mostren els resultats de 8 simulacions efectuades a partir del càlcul dels punts de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  i  $L_4$ . Cada punt compta amb una simulació sense perturbació i una amb la influència del Sol. No ha fet falta simular el punt  $L_5$  perquè funciona amb els mateixos principis que l'anterior i s'ha suposat que la seva hipotètica simulació donaria els mateixos resultats.

No s'ha seguit un mètode d'anàlisi homogeni en tots els punts ja que els resultats obtinguts tampoc ho són i per això en algunes simulacions ha set necessari emfatitzar certs aspectes que en altres no ho han set tan rellevants.

Un dels objectius d'aquesta part experimental era contrastar els resultats obtinguts amb la teoria relacionada amb les regions de Hill, de manera que a part s'han fet alguns càlculs addicionals per justificar certs comportaments de l'objecte menor.

Com a part més introductòria dels resultats està la del càlcul de la localització inicial d'un punt, de manera que primerament sempre es presenta com s'ha calculat la posició en el sistema de referència.

### 4.1. $L_1$

El punt  $L_1$  és el punt més distant de la Lluna ja que es troba en una posició exactament oposada a ella. Per calcular-lo, primer s'ha situat el punt orientativament en l'eix que uneix els tres primers de Lagrange ([vegeu apartat 7.4.1](#)) i s'ha deduït que aquest es trobarà en l'hemisferi negatiu de l'eix de les abscisses. Com que es tracta d'igualar la seva força centrífuga amb la suma de les atraccions de la Terra i la Lluna (atrauen en la mateixa direcció i sentit), la seva expressió final és:

$$\frac{0,98784383}{x^2} + \frac{0,01215617}{(1+x)^2} = 1^2 \cdot (x + 0,0121562)$$

La seva expressió final és el següent polinomi:

$$x^5 + 2,01215617x^4 + 0,98784383x^3 - 0,98784383x^2 - 1,97568766x - 0,98784383 = 0$$

On  $x$  és la distància entre la Terra i el punt. La distància entre el centre de masses i aquest serà  $x$  més la distància entre el centre i la Terra perquè es troba més enrere.

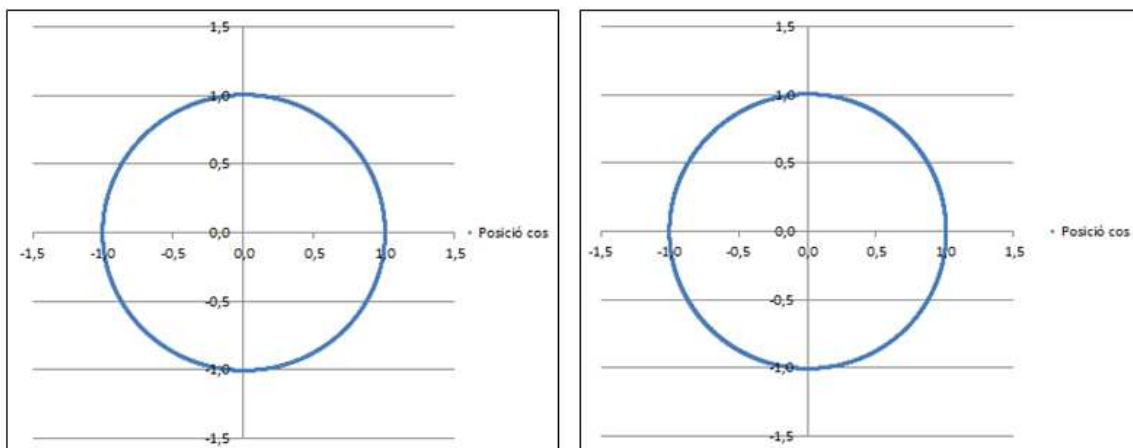
Mitjançant la calculadora d'equacions d'Internet de *Symbolab* i un mètode per calcular equacions d'Excel (cap dels dos donava una solució prou precisa, de manera que primer s'ha calculat la resposta aproximada amb la primera eina i després s'ha anat ajustat fins el desè decimal amb Excel) la solució final utilitzada ha set:

$$x = 0,9929172345 u$$

La seva posició real, per tant és:  $-1,00504792834746 u$

Aquests valors no venen donats exactament per la equació ja que aquesta no es pot igualar amb exactitud a 0. Per determinar la seva posició s'ha agafat el valor de  $x$  obtingut a base d'aproximacions i s'ha fet el sumatori d'atraccions gravitatòries. Com que  $\omega = 1$ , aquesta suma és igual al mòdul de la seva posició. La conclusió d'aquest procés és que s'ha forçat a que l'equació es compleixi per tenir un equilibri de forces inicial, tot i que això signifiqui que el valor de  $x$  és lleugerament diferent a cada banda de cantó de l'equació inicial.

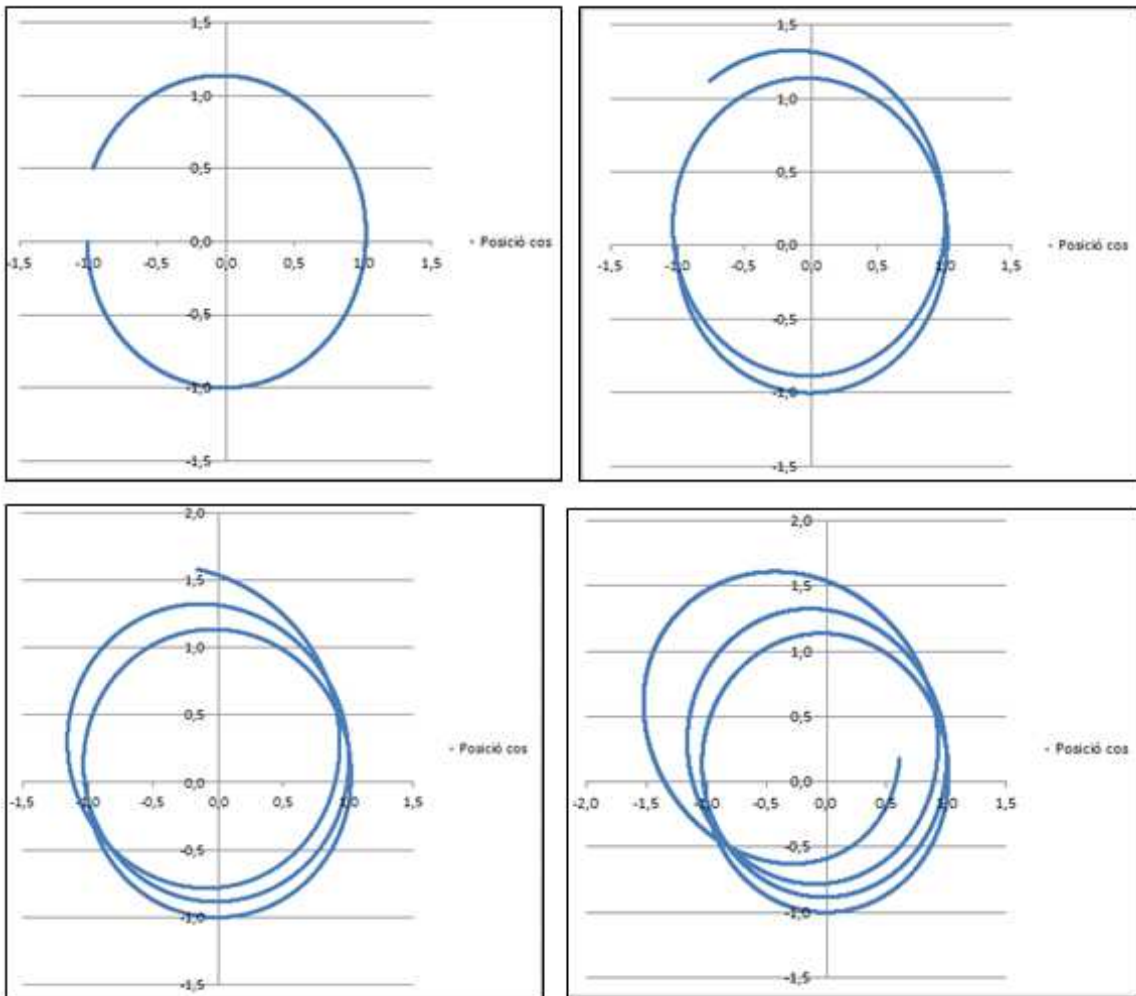
Tenint la seva posició s'ha fet la simulació sense perturbacions al llarg de 7500 punts, és a dir, havent donat el sistema Terra – Lluna 3 voltes.



*Imatge 33 - Òrbita del cos en  $L_1$  passa una volta (esquerra) i passades tres voltes (dreta)*

Com es pot observar en la “*Imatge 33*”, l'òrbita del cos és molt constant mentre no hi hagi perturbacions. Comparant els valors obtinguts en els gràfics, passada una volta els valors de la posició difereixen dels primers en les deumil·lèsimes, mentre que passades les tres comencen a ser diferents en les mil·lèsimes. Aquest error que s'obté al final és una barreja entre l'inevitable error principal i l'error comès pel mètode *Leapfrog*. No obstant, els valors es consideren suficientment fiables.

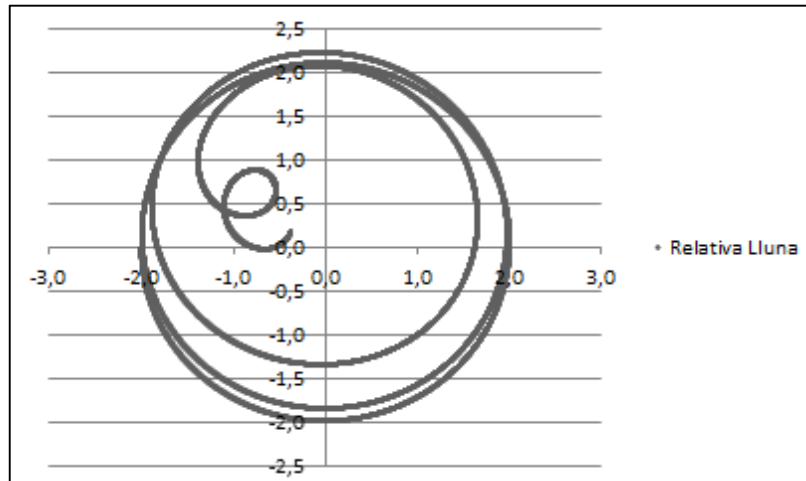
Analitzem ara els resultats que ha donat la simulació en el punt  $L_1$  amb la influència del Sol.



*Imatge 34 - Òrbita del cos amb pertorbació en  $L_1$  passa 1 volta (dalt esquerra), 2 voltes (dalt dreta), 3 voltes (baix esquerra) i 4 voltes (baix dreta)*

Fàcilment es pot observar que en aquesta simulació el cos ja no traça una trajectòria periòdica, sinó que la canvia constantment. Aparentment pot semblar que l'òrbita es desplaça cap a la part superior esquerra per gràfic i es podria pensar que això es deu a causa de la translació, però aquesta raó no és veritable perquè la translació també l'efectua el punt (0,0) i en tot cas hauria de mantenir-se en una òrbita circular si el punt mostrés estabilitat.

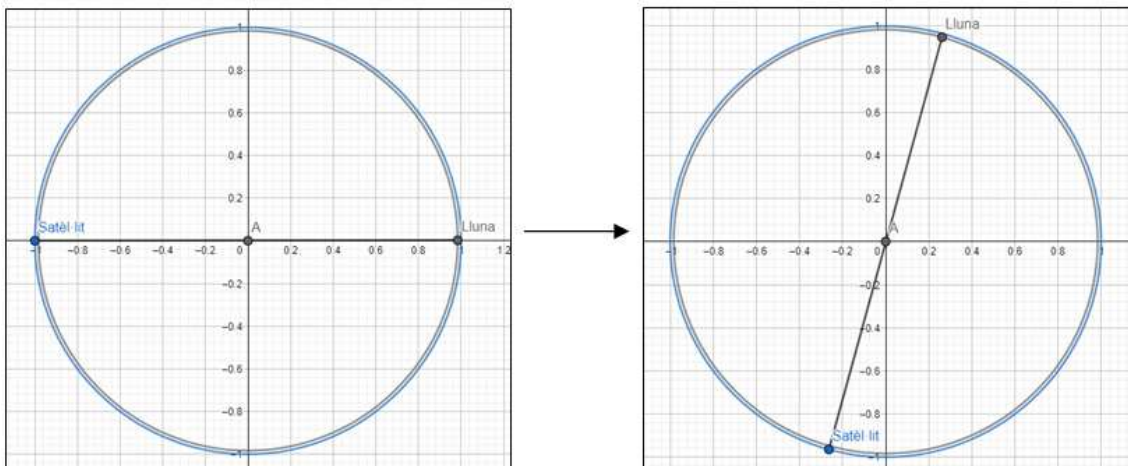
L'altra raó per la qual podem deduir que el punt no és estable és a partir de la posició relativa de la lluna.



Imatge 35 - Posició relativa del cos en l'òrbita pertorbada de  $L_1$  vers la Lluna

En aquesta imatge, "Imatge 33", la Lluna està sempre en el punt (0,0), i els punts són la trajectòria que segueix el cos des del seu punt de vista, és a dir, com si el satèl·lit fos estàtic.

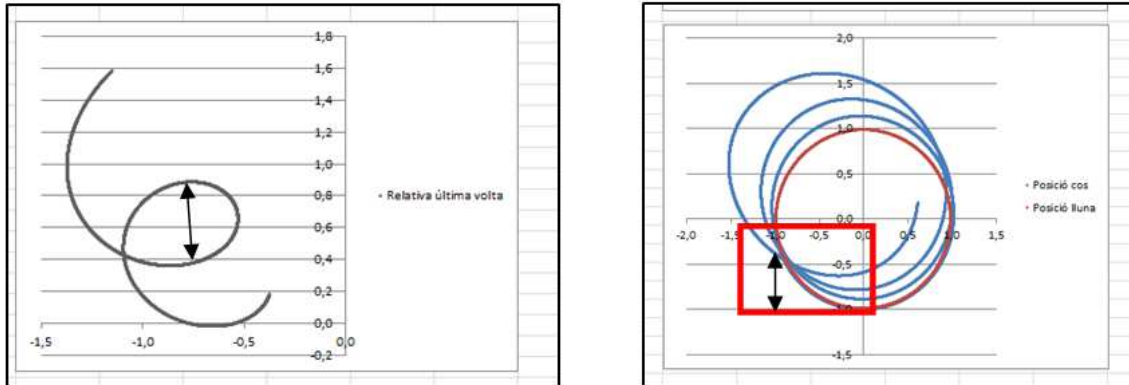
Per interpretar aquesta trajectòria cal explicar com fer-ho abans. Des d'aquest punt de vista, la Lluna veu com el cos orbita al seu voltant, però a unes distàncies molt molt elevades. Aquest fenomen es deu al canvi de posició dels dos cossos, que mitjançant la "Imatge 36" s'explica millor.



Imatge 36 - Esbós del contrast entre els punts de vista de la Lluna

En l'instant inicial la Lluna percep que el cos està completament a la seva esquerra, mentre que havent recorregut cada cos una part de les seves respectives òrbites, la Lluna percep que el cos es troba gairebé completament sota seu. Al final de la volta, el cos haurà estat en totes les posicions relatives vers la Lluna, fent que per ella sembli que ha orbitat al seu voltant.

Sabent això, podem deduir que si el punt fos estable, la posició relativa a la Lluna també mantindria un cercle tancat, però aquesta es fa més petita amb el pas del temps.



*Imatge 37 - Posició relativa del cos en la quarta volta de l'òrbita pertorbada de  $L_1$  vers les seves trajectòries reals*

Contrastant la posició relativa del cos en l'última volta amb la que ha tingut durant la resta de la simulació, s'observa un canvi radical en la seva trajectòria.

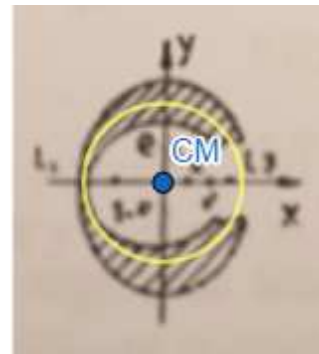
Aquest canvi observat és l'equivalent al quadre roig de la imatge de l'esquerra, en què es representen les òrbites de la Terra i Lluna. Quan comença la quarta volta, el cos es troba a la part superior i lleugerament desplaçat cap a la part negativa de l'eix de les abscisses del centre de masses, mentre que la Lluna es troba en la seva posició inicial. En l'última volta el cos descriu una trajectòria molt allunyada del centre de masses, però torna a entrar per acabar molt a prop de la posició inicial del satèl·lit natural. Durant aquest procés, la posició relativa de la Lluna en l'eix de les ordenades sempre és manté positiva (excepte en alguns punts a prop del final) tot i quan la Lluna es troba en la seva altura de l'òrbita màxima, és a dir, el punt  $(0, 0,98784383)$ . Així podem deduir que la Lluna es trasllada a una velocitat molt major que la del cos (mentre aquest es troba en aquestes posicions tan llunyanes).

Però quan el cos torna a fer la reentrada al sistema, per la Lluna aquest s'acosta però es troba en un moment en què el satèl·lit natural s'acosta al punt més baix de l'òrbita circular, de manera que hi torna a haver un distanciament senyalat per les fletxes a les imatges.

En aquest punt s'ha demostrat el per què d'aquestes posicions i per tant la no estabilitat del punt  $L_1$ . Però també s'ha volgut esbrinar si una pertorbació com la del Sol es capaç de trencar els patrons creats per la superfícies de Hill, és a dir, si tot i

sense la necessitat de mantenir-se en aquell punt d'equilibri, el cos es continua movent per les zones que marca la seva constant de Jacobi inicial.

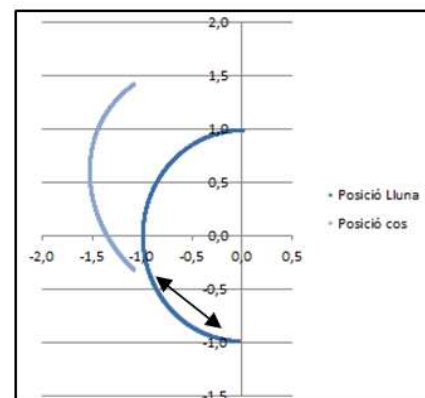
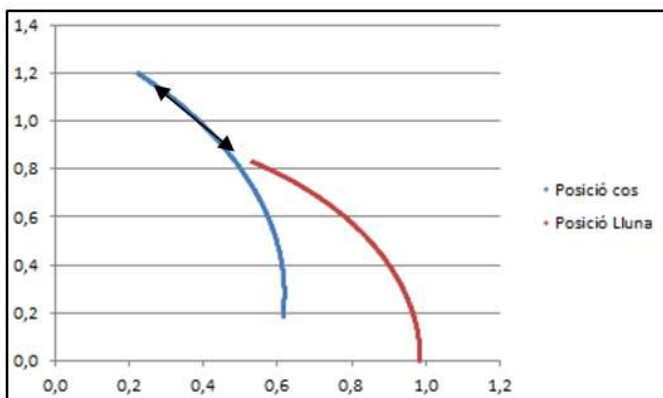
D'acord amb la teoria estudiada en el problema dels tres cossos, el punt  $L_1$  es caracteritza per tenir un valor de la constant de Jacobi que no forma línies de velocitat relativa nul·la en el cantó oposat, és a dir, que existeix una sortida dels dos ovals darrere del cos menor, en aquest cas, la Lluna. Això és en el cas més general. En el sistema Terra- Lluna s'estima que també existeix una obertura just darrere del punt d'equilibri, però en tots dos casos hi ha unes zones delimitades en què el cos no s'hi pot trobar. Són zones grans que envolten els punts  $L_4$  i  $L_5$ .



Imatge 38 - Esbós de la proximitat de  $L_1$  vers altres punts de les línies de  $V = 0$

Com s'observa en la "Imatge 38", el punt  $L_1$  es troba en el punt més llunyà de les zones marcades per la integral de Jacobi donada la forma ovalada d'aquestes. Per altra banda, el cos ha arribat a certes zones en quatre voltes amb un mòdul vers el centre de masses molt major que l'inicial.

Aquí ens trobem amb la possibilitat de demostrar si la influència del Sol és el suficientment potent com per deformar les superfícies de Hill per fer que el cos arribi a aquells punts tant llunyans passant per les zones que teòricament estan restringides.



Imatge 39 - Lluna i cos en l'òrbita pertorbada de  $L_1$  durant els primers 400 punts de la cinquena volta (esquerra) i durant els 1250 del mig de la quarta (dreta)

En aquestes dos imatges s'ha reduït l'interval de punts agafats per observar millor on està el cos per a cada punt de la Lluna. En la imatge de la dreta, quan el cos es disposa a fer la reentrada, la Lluna ja ha passat de llarg i es troba en el punt més baix de la seva òrbita de manera que quan es col·loca a una distància menor que la del seu



mòdul quan estava en el punt d'equilibri, aquesta ja ha avançat una mica més trobant-se bastant distant, però no el suficientment com per deixar que el cos entri per una possible obertura del cantó oposat, evidenciant que entra per una de les zones que teòricament estan restringides.

En la imatge de l'esquerra passa el mateix, però en aquest cas és el cos petit arriba les distàncies més elevades per un lloc on la Lluna no hi és.

#### 4.2. $L_2$

El punt d'equilibri  $L_2$  s'ha calculat mitjançant el mateix procediment que l'anterior, situant-lo orientativament en el sistema inicial. La seva fórmula inicial és:

$$\frac{0,98784383}{(1-x)^2} - \frac{0,01215617}{x^2} = 1^2 \cdot (1 - 0,01215617 - x)$$

Sent  $x$  la distància entre la Lluna i el cos menor.

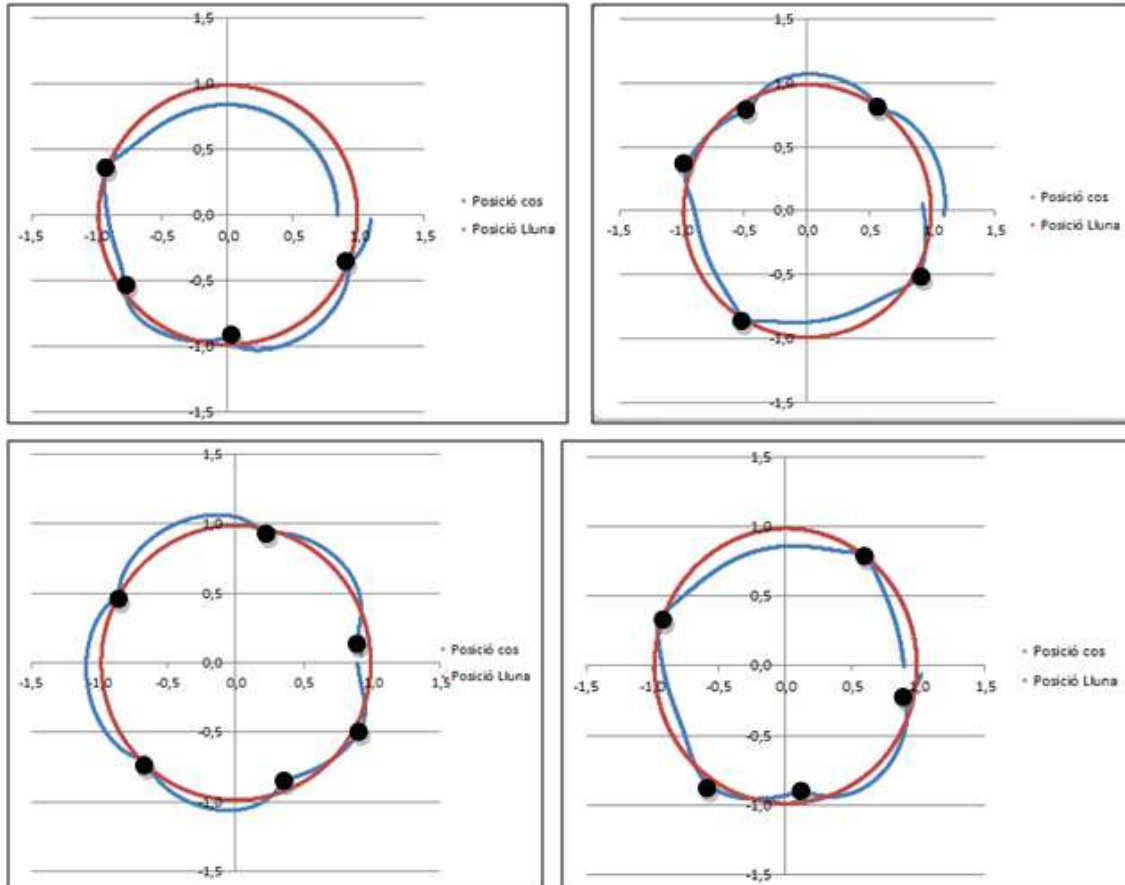
La seva expressió final per trobar la incògnita llavors és:

$$\begin{aligned} -x^5 + 2,98784383x^4 - 2,97568766x^3 + 0,01215617x^2 - 0,02431234x + 0,01215617 \\ = 0 \end{aligned}$$

De la mateixa manera que en el procediment anterior, en aquest cas el resultat tampoc era del tot exacte i per això també s'ha forçat a la equació a ser correcta per començar amb un equilibri de forces, ja que en l'anterior mètode havia funcionat quan es tractava de la simulació sense pertorbacions.

El valor més exacte de  $x$  que s'ha pogut trobar ha set  $x = 0,15096129 u$ . Utilitzant aquest valor, la distància al centre de masses és de  $0,836940279218764 u$ .

Havent fet exactament el mateix que en l'anterior punt els resultats obtinguts en la simulació feta sense pertorbacions han set molt diferents. En aquests, la trajectòria del cos es presenta acompanyada de la de la Lluna perquè els fa molt més entenedors:



*Imatge 40 - Trajectòria en  $L_2$  en la primera volta (dalt esquerra), segona (dalt dreta), tercera (baix esquerra) i quarta (baix dreta)*

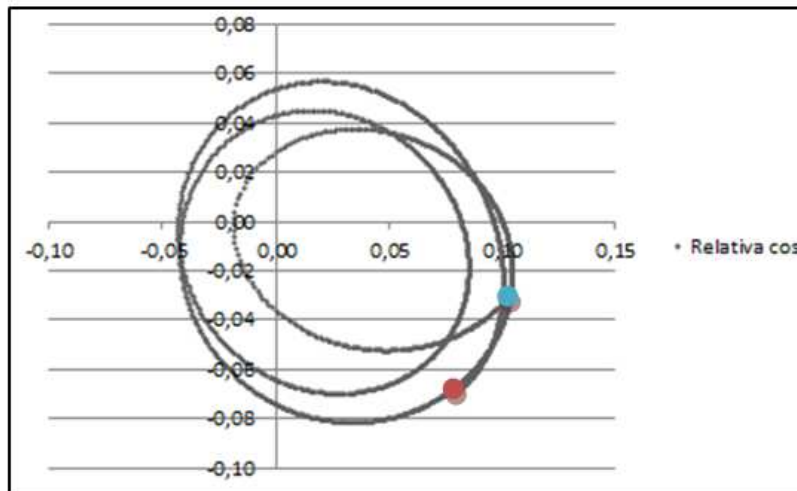
Observem que el cos només manté l'òrbita circular durant el que visualment sembla el primer quart de la primera volta, tot i que mirant les dades, el mòdul de la seva distància ja és aproximadament 0,003  $u$  més gran. Tot i que aquesta diferència també s'ha trobat en les òrbites circular dels cossos majors a causa del seu error (en un principi no és un error massa gran), el fet que el cos s'hagi desplaçat lleugerament cap a fora del centre fa que abans d'arribar a l'eix de les abscisses per la part negativa ja hagi deformat totalment l'òrbita prèviament circular.

A partir d'aquest punt el cos no segueix una òrbita calcada en cap volta i comença a orbitar al voltant de la Lluna. Al llarg de totes les voltes, els punts senyalitzats<sup>31</sup> són els

<sup>31</sup> Tots els punts marcats en aquest marc pràctic són orientatius, i no senyalen en cap moment punts de la trajectòria exactes.

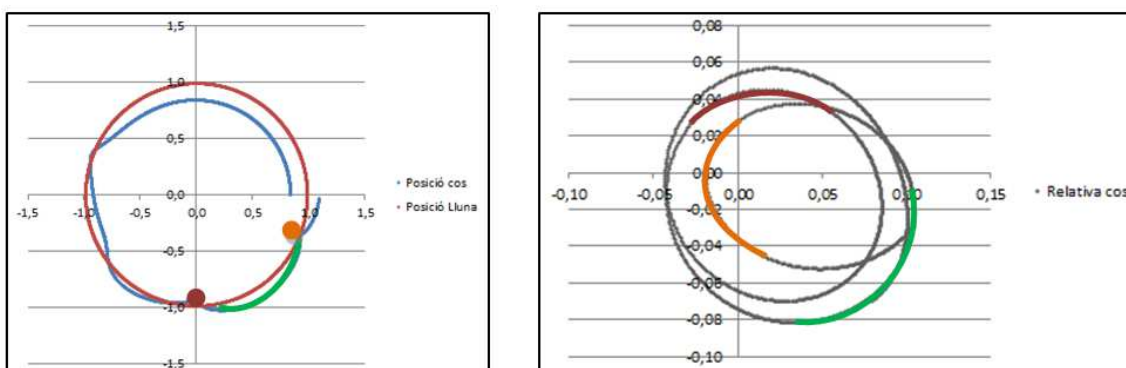
que remarquen punts de forta atracció gravitatòria a causa de la seva curta distància i l'ha llançat cap a l'exterior o interior per tornar a acostar-s'hi després.

Donada aquesta trajectòria descrita pel cos, és interessant observar la posició relativa que aquest manté vers la Lluna.



*Imatge 41 - Posició relativa del cos en l'òrbita en  $L_2$  vers la Lluna durant la segona meitat de la primera volta. L'inici (vermell) i final (blau)*

En aquest cas, la posició relativa representa l'òrbita del cos al voltant de la Lluna perquè tota la trajectòria es descriu a molt poca distància d'aquesta. Totes les corbes definides a partir dels punts en què el cos surt propulsat per la Lluna (punts més propers) poden trobar les seves homòlogues en el la trajectòria vista del sistema de referència inercial. Les més obertes simbolitzen aquelles parts de la trajectòria en què l'òrbita del cos s'assembla més a la de la Lluna, com es veu en la següent comparació:



*Imatge 42 - Comparació de corbes de la trajectòria en  $L_2$  amb les posicions relatives*

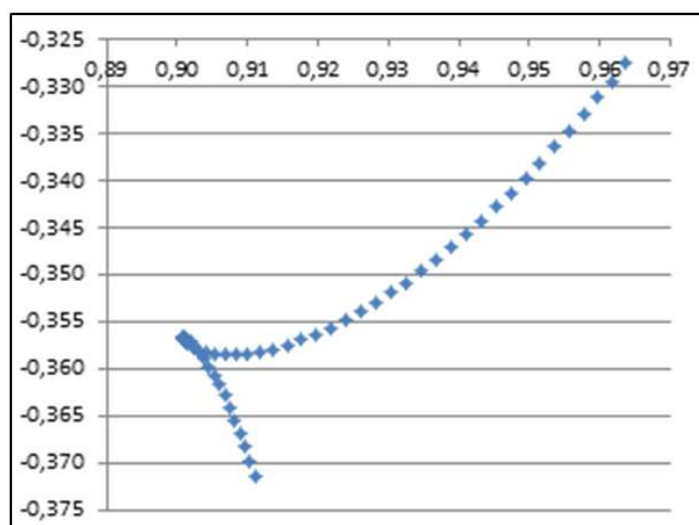
La corba més oberta de la trajectòria només pot ser la remarcada en verd en la segona imatge perquè a part de ser també la més gran, és la que es troba per sota i a la dreta de la Lluna. Per altra banda, el punt taronja és l'equivalent a la corba més petita

perquè està molt a prop del punt final i geomètricament es troba en les posicions adequades en els eixos.

Les corbes de la posició relativa poden ser confoses perquè tot i quan el cos orbita al voltant de la Lluna, no descriuen exactament la realitat de la trajectòria. Posant per exemple el punt taronja i el vermell marcats en la "imatge 42", en els dos sembla que passa exactament el mateix: el cos surt propulsat cap a fora després d'interactuar amb la Lluna.

Si analitzem el moviment en el punt taronja numèricament:

9,0074744399712E-01	-0,35662426323557
9,0064927071771E-01	-0,35668809554569
9,0072617185918E-01	-0,35684881906557
9,0099553433984E-01	-0,35708321327976
9,0146883185585E-01	-0,35736382209681
9,0215035069059E-01	-0,35766099169775
9,0303690130572E-01	-0,35794528520063
9,0411856610539E-01	-0,35818974517973
9,0538022566899E-01	-0,35837155629923
9,0680343430854E-01	-0,35847289912072
9,0836823160839E-01	-0,35848104296077
9,1005461845649E-01	-0,35838788845233
9,1184359407061E-01	-0,35818921207716
9,1371777581706E-01	-0,35788382270182
9,1566168721320E-01	-0,35747276672207
9,1766181437987E-01	-0,35695865031651
9,1970651908842E-01	-0,35634509928748
9,2178587480310E-01	-0,35563634944375
9,2389147063800E-01	-0,35483694809698
9,2601621094511E-01	-0,35395154406108
9,2815412601510E-01	-0,35298474505339
9,3030020136740E-01	-0,35194102477885
9,3245022822576E-01	-0,35082466570782



Imatge 43 - Localització del cos en l'eix de les abscisses (columna esquerra) i ordenades (columna dreta) i representació gràfica de la posició (dreta)

S'observa que la localització en l'eix de les abscisses es va reduint (el valor es fa més petit) mentre en les ordenades es va fent més gran. Però en un cert punt, els valors de l'eix de les ordenades es tornen a fer més petits mentre els de les abscisses tornen a augmentar. Traslladant això en una corba és un llaç, de manera que es correspon amb el que es veu en la imatge de la posició relativa. Tot i això, no es pot considerar que el cos envolta completament la Lluna perquè aquesta sempre està en moviment.

Per altra banda, els punts de localització en el punt vermell sempre es fan més grans per tornar al cantó positiu i en cap punt hi ha cap regressió. Els punts de la corba corresponent en la posició relativa no es poden identificar com una òrbita que ha rodejat a la Lluna, sinó que primer l'objecte es col·loca per davant es queda per sobre i la Lluna l'avança posteriorment sense que el cos arribi a retrocedir. Així es demostra que les posicions relatives no serveixen per determinar quina ha set la trajectòria exacta del cos, tot i que són útils per saber com ha set aquesta a trets generals.

Havent vist que el cos no ha seguit una òrbita periòdica en el punt d'equilibri tot i haver fet la simulació sense perturbacions, podem deduir que el punt  $L_2$  és molt menys estable que  $L_1$ . En el punt anterior també hem partit amb certes imprecisions decimals, però semblava estable, però en aquest la més mínima imprecisió ja fa que el cos es desplaci cap a una òrbita inestable al voltant del satèl·lit de la Terra.

Un altre fet observable és que el cos es manté sempre al voltant de la Lluna i no es mou mai per una zona propera a la Terra. Així doncs, podem demostrar la teoria del punt  $L_2$  respecte les superfícies de Hill. Aquest punt es troba en el punt del pla en què les dos zones de moviment de la Terra i la Lluna per a un mateix valor de la constant de Jacobi són tangents, de manera que si hi ha un petit error en el punt d'equilibri, el cos es desviarà cap un dels dos camps i s'hi quedarà perquè són tancats.

Interpretant les trajectòries de la Lluna i el cos menor s'ha cregut que en els punts en què el grau d'obertura de la trajectòria del cos és més obert, és a dir, en què es troba en els punts més llunyans, la velocitat angular és igual o similar a la de la Lluna, de manera que la velocitat relativa en aquell punt en què la distància és màxima s'hi troba la línia de velocitat relativa nul·la.

Sabem que el primer punt de tots, és a dir, el punt d'equilibri forma part d'aquesta línia de manera que a partir de la seva localització ja podem obtenir el valor de  $C$ :

$$2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 0,836940279218764^2 + \frac{0,98784383}{0,84909644921867} + \frac{0,01215617}{0,150903550781236} \right) \\ = 3,18839263977452$$

Ordenant en la simulació els mòduls de la distància del cos al centre de masses, s'ha agafat el mòdul més gran registrat passades 5 voltes i s'ha calculat el valor de  $C$  a partir de les respectives posicions relatives als dos cossos majors:

$$2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1,10707667657476^2 + \frac{0,98784383}{1,11923227080944} + \frac{0,01215617}{0,119670892623193} \right) \\ = 3,19399562684733$$

El resultat és bastant similar.

La “*imatge 44*” mostra els valors que s’han obtingut en els punts que envolten el 2615, és a dir, començant la segona i on es troben les distàncies més grans al centre de masses.

3,1938791855615
3,1938933273729
3,1939095764418
3,1939279314207
3,1939483915294
3,1939709565542
3,1939956268473
3,1940224033266
3,1940512874756
3,1940822813439
3,1941153875475
3,1941506092696
3,1941879502618
3,1942274148454
3,1942690079129
3,1943127349302
3,1943586019381
3,1944066155553

Les úniques zones que tenen valors de  $C = 3,188 \sim$  són les anteriors a la primera desviació de l’òrbita en la primera volta. La resta de valors més propers oscil·len entre aquestes xifres. Hi ha altres zones amb valors similars però es tracta en tot cas de les zones superior i inferior de l’oval de la Lluna, mentre que aquests pertanyen a les zones més allunyades de la posició de  $L_2$ .

*imatge 44 -  
Valors petits de  
C consecutius  
en punts  
propers al 2615*

Per comprovar si aquests punts s’identifiquen amb zones en què  $V = 0$  realment s’han fet un seguit de procediments relatius a la relació entre la distància i la velocitat.

Primerament s’ha calculat la relació entre el mòdul de la velocitat i la distància perquè així suposadament es podria demostrar en quins punts hi ha una velocitat angular de valor 1, de manera que:

$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|} = 1$$

Tot i que havent aplicat aquesta relació a la casella 2615 ha tingut com a resultat  $\omega = 1,067850151$ , és dels valors que més s’han aproximat a 1. Altres punts que comptaven amb una constant de Jacobi més gran que la principal es desviaven molt més en aquests càlculs, però hi havia franges que complien aquesta relació d’una manera prou aproximada, de manera que s’ha pensat que moltes d’aquestes podien haver-ho fet de manera casual a causa del canvi d’escala fet per adaptar el problema general.

Per extreure una conclusió final, s’ha calculat l’angle entre els vectors de la velocitat i la distància per saber quins d’aquests que compleixen la relació són realment vàlids. S’ha fet mitjançant la següent fórmula:

$$\cos \alpha = \frac{(r_x \cdot v_x) + (r_y \cdot v_y)}{|\vec{v}| \cdot |\vec{r}|}$$

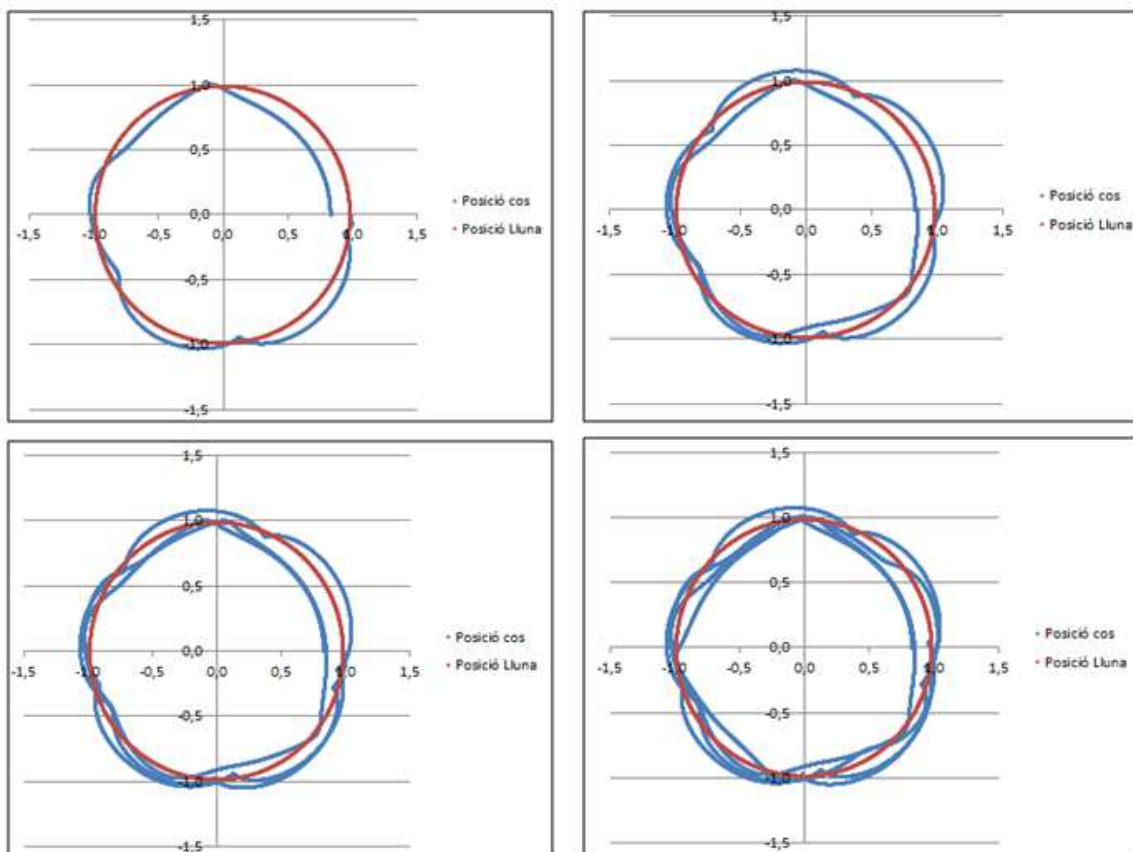
Aplicant aquest procés a la franja del mòdul més gran:

$$\alpha = 1,5690475757143 \text{ rad} = 89,9^\circ$$

L'angle és molt proper a la perpendicularitat sent aquest el corresponent al valor del mòdul més gran. Altres distàncies al centre de masses mantenen diferències mínimes amb aquesta i obtenen angles lleugerament encara més rectes tenint també la mateixa relació entre la velocitat i la distància.

Havent vist que aquests valors són coherents, s'ha confirmat la hipòtesi principal: els punts que s'observen en què l'òrbita és més oberta són aquells en que la velocitat relativa és nul·la, o s'aproxima a 0. També es demostra així que la superfície per la qual es mou el cos és completament tancada.

Presentem ara els resultats de les simulacions amb la influència del Sol. No ha fet falta un anàlisi molt profund d'aquests perquè han set molt similars als de la simulació anterior.



Imatge 45 - Trajectòria pertorbada en  $L_2$  durant 1 volta (dalt esquerra), 2 (dalt dreta), 3 (baix esquerra) i 4 (baix dreta)

Després que el sistema Terra – Lluna hagi donat 4 voltes, l'objecte menor s'ha mogut completament pel voltant de la Lluna, amb la diferència que l'atracció del Sol ha fet



que es desplaci cap al seu camp abans perquè en aquest cas no manté l'òrbita d'estabilitat ni en el primer quart de la primera volta.

Tot i això, en aquest cas les voltes s'han mostrat de manera conjunta a mesura que avança el temps per fer evident que en aquest cas el cos també es desplaça cap al camp de la Lluna i no en surt a llarg de les 4 voltes.

Per comprovar com afecta el Sol a les superfícies de Hill s'han calculat també els valors de la constant de Jacobi en tots els punts com en la simulació anterior, però que és diferent al mètode de comprovació de  $L_1$  ja que en ells no teníem una base per calcular la constant en tots els punt possibles (no s'ha mogut de l'òrbita estable).

Un cop calculats, s'han ordenat de menor a major en el full de càlcul i els resultats han set els mateixos que en l'òrbita sense pertorbació. El valor de  $C$  donat en l'instant inicial no es fa més petit en cap punt, i tots els primers valors de posició ocupen també les primeres caselles en la taula ordenada.

### 4.3. $L_3$

El punt d'equilibri  $L_3$  s'ha calculat de la mateixa manera que els dos anteriors, i la seva expressió inicial és la següent:

$$\frac{0,98784383}{(1+x)^2} + \frac{0,01215617}{x^2} = 1^2 + (1 - 0,01215617 + x)$$

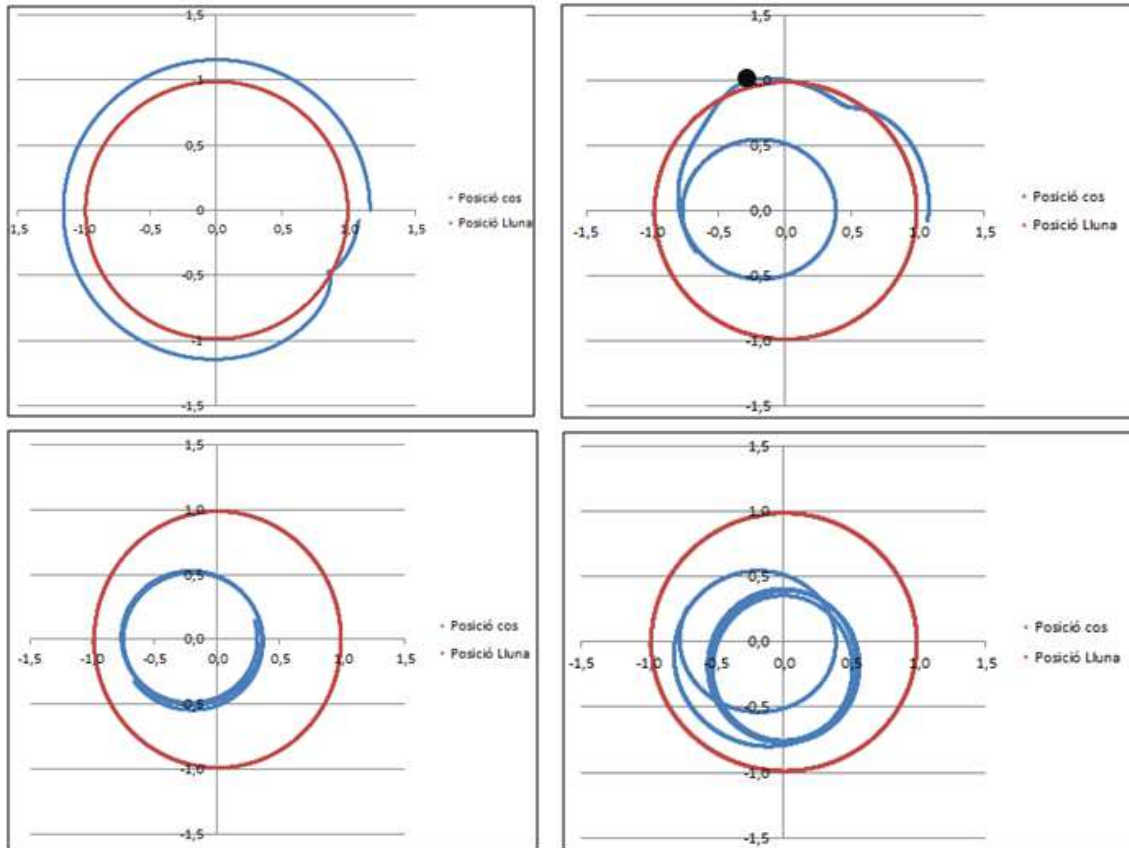
Sent  $x$  la distància entre el cos i la Lluna. Així, la seva expressió final és:

$$x^5 + 2,98784383x^4 + 2,97568766x^3 - 0,01215617x^2 - 0,0231234x - 0,01215617 = 0$$

A partir d'aquí s'ha seguit el mateix procés que els punts anteriors (igualant les forces) i el valor de  $x$  final ha set 0,1678600994.

Els resultats de la simulació sense pertorbacions han set els següents:





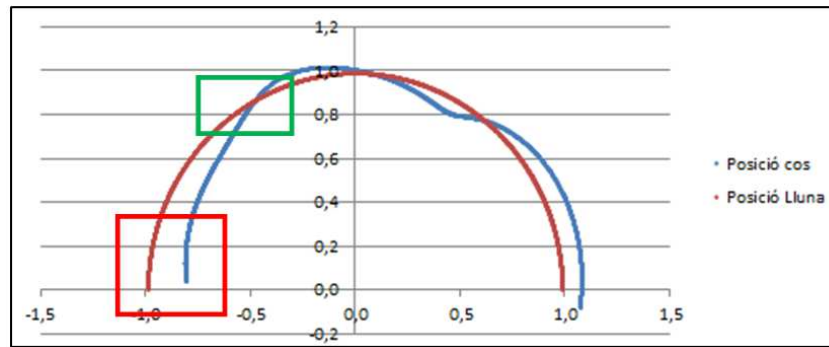
Imatge 46 - Trajectòria en  $L_3$  en la primera volta (dalt esquerra), segona (dalt dreta), tercera (baix esquerra) i cinquena i sisena (baix dreta)

S'ha cregut convenient mostrar la trajectòria durant la quarta i cinquena volta en el mateix gràfic per distingir el canvi en l'excentricitat i posició de l'el·lipse més clarament.

De la mateixa manera que  $l_2$ , aquest punt d'equilibri es mostra molt inestable perquè no manté l'òrbita circular, tot i que el canvi es comença anotar una mica més tard que en l'òrbita del punt anterior.

Durant el final de la primera volta i al principi de la segona el cos orbita al voltant de la Lluna, però després de tornar a ser impulsat per tercera vegada (punt negre de la "Imatge 46"), el cos se situa per dins de l'òrbita de la Lluna i comença a definir òrbites el·líptiques al voltant de la Terra.

En la següent imatge es mostra només una part de la segona volta per observar com es duu a terme la transició d'un camp a un altre:



Imatge 47 - Meitat de la segona volta en  $L_3$

En la zona marcada pel quadre vermell, el cos canvia de zona per començar a orbitar al voltant de la Terra. No obstant, aquest canvi el fa amb certa consonància amb la Lluna, de manera que el cos es manté sempre a prop de l'eix que uneix el sistema Terra – Lluna. Si ens fixem en els valors de la constant de Jacobi que s'han registrat en aquesta zona, veiem que tots els valors sobrepassen el valor de  $C$  per a  $L_2$  (tots s'aproximen a 3,19), és a dir, que els valors de la constant vistos en l'última zona iguals al del punt d'equilibri anterior han set superats a partir de la zona marcada pel quadre verd. Així s'intueix que quan el valor de la constant ha tornat a créixer s'ha abandonat la zona de la Lluna i per tant, la zona de tangència introduint-se en l'altra.

Un cop el cos es troba totalment dins del camp de la Terra, s'observa que una part del temps la passa orbitant al seu voltant descrivint òrbites el·líptiques que pateixen molt poques modificacions. No obstant, durant la cinquena i sisena volta hi ha una pertorbació que canvia les propietats de l'el·lipse inicial, modificant-ne l'excentricitat i les coordenades vectorials dels semieixos.

Es pot explicar aquest fenomen mitjançant els resultats numèrics:

Durant la tercera i la quarta volta, el cos és capaç de descriure el·lipses fixes perquè els valors màxims registrats del mòdul de l'acceleració de la Lluna són els que es veuen en la taula de l'esquerra, és a dir, valors negligibles comparats amb els de la Terra (els mòduls sempre superen  $1,6 u/s^2$ ). Tenint aquesta situació el problema es redueix al problema dels dos cossos, i es podria arribar a suposar que el moment angular es conserva complint la segona llei de Newton. Però el període no és el mateix (segons la tercera llei de Kepler, l'òrbita del

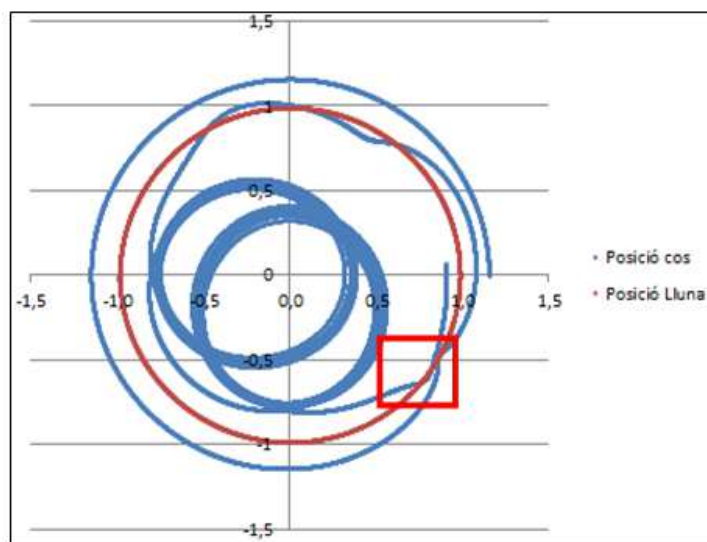
0,0487157543856293	0,6289062820939440
0,0487254377243550	0,6294445351173370
0,0487325195770591	0,6299702447455940
0,0487369592511910	0,6304833273224300
0,0487387165065301	0,6309837010855500
0,0487377515969642	0,6314712862035190
0,0487340253128839	0,6319460048119230
0,0487274990241459	0,6324077810488150
0,0487181347235528	0,6328565410893960
0,0487058950707956	0,6332922131799200
0,0486907434368005	0,6337147276707760
0,0486726439484204	0,6341240170487400
0,0486515615334058	0,6345200159683590
0,0486274619655916	0,6349026612824360
0,0486003119102274	0,6352718920716000
0,0485700789693820	0,6356276496729400
0,0485367317273461	0,6359698777076590

Imatge 48 - Mòduls de l'acceleració de la Lluna

cos té un període menor) que el de la Lluna, de manera que la posició relativa no es conserva al llarg del temps.

A partir de la cinquena volta, el cos i la Lluna coincideixen amb posicions molt properes a prop de l'apogeu de l'òrbita el·líptica. En aquest punt, els valors de l'acceleració creixen fins a obtenir els mòduls de la taula de la dreta i la trajectòria s'obra fins que la Lluna es torna a quedar enrere amb valors de l'acceleració negligibles de nou.

Donada aquesta varietat de moviments del cos, s'ha seguit amb la simulació fins a obtenir 8 voltes del sistema Terra - Lluna (20000 punts) per veure si hi havia alguna pertorbació més.



*Imatge 49 - Trajectòria en  $L_3$  durant 8 voltes del sistema*

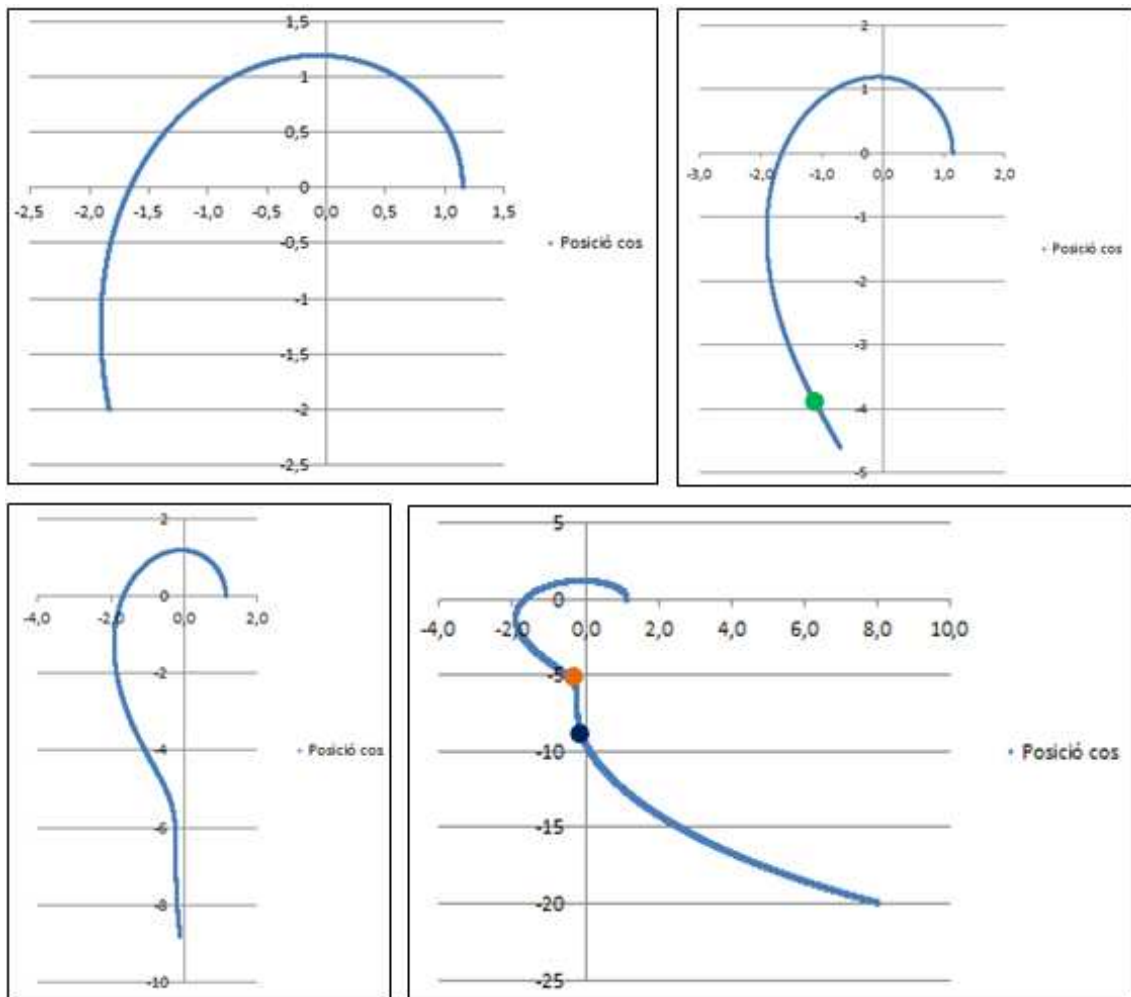
A prop del final de la vuitena volta del sistema ha passat el mateix fenomen explicat anteriorment, però aquesta vegada, l'acceleració de la Lluna aconsegueix que el cos torni a entrar en el seu camp i es torni a ficar en òrbita al seu voltant (quadre vermell de la "Imatge 49"). En aquesta transició ha passat el mateix fenomen que abans. La constant de Jacobi s'ha fet petita fins arribar al punt tangent de les superfícies que delimitarien el cas del punt  $L_2$  (arriba fins a 3,188 aproximadament) i després es torna a fer gran com a conseqüència del seu apropament a la Lluna.

3,187841884
3,187838813
3,187837036
3,187837568
3,187839924
3,187844119

*Imatge 50 -  
Decreixement i  
augment de  $C$*

Tenint aquestes proves, es demostra que el punt  $L_3$  és només un punt de la corba de  $V = 0$  d'una superfície de Hill formada per les dos unides amb un coll i que abans estaven separades i només tenien un punt de tangència. També es fa present la zona de proporcionalitat inversa senyalada en la “*Imatge 26*” de [l'apartat 7.3](#), en què el valor de  $C$  creix a canvi d'allunyar-se d'un dels dos cossos del sistema.

A continuació es mostren els resultats de la simulació amb la pertorbació produïda pel Sol:

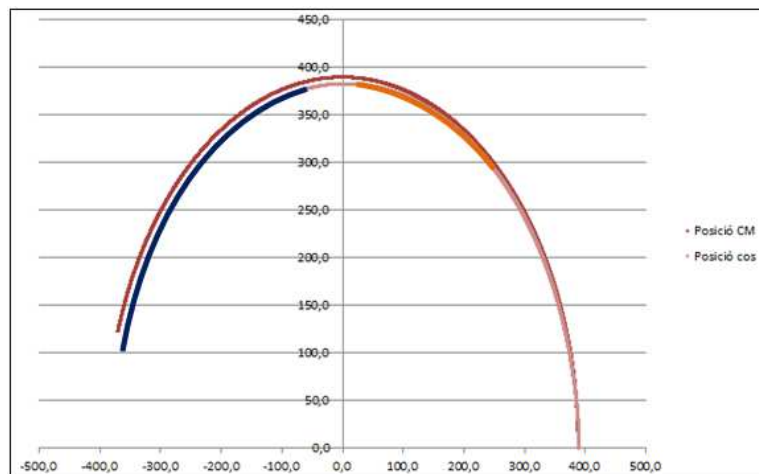


*Imatge 51 - Trajectòria del cos en  $L_3$  amb pertorbació durant 1 volta (dalt esquerra), 2 (dalt dreta), 4 (baix esquerra) i 6 (baix dreta)*

Respecte la resta d'òrbites en els punts d'equilibri, aquesta ha set l'única que ha abandonat el sistema Terra – Lluna perquè a partir de la segona volta el cos no ha orbitat al voltant de cap dels dos cossos.

Per entendre la dinàmica del cos quan ja ha abandonat el camp d'influència del sistema aquesta s'ha d'analitzar des del sistema de referència en què el Sol és el centre.

Ens hem centrat en els canvis de tendència que pateix la trajectòria del cos, i aquests s'expliquen mitjançant la translació del centre de masses, perquè si s'analitza el moviment vers el Sol, els gràfics mostrats anteriorment són en realitat posicions relatives.



*Imatge 52 - Trajectòria del cos en  $L_3$  vers la translació del sistema que efectua 6 voltes*

El punt taronja senyalat en la "Imatge 51" és equivalent a la part de la trajectòria del cos de la "Imatge 52", i la mateixa equivalència es dona pel punt i la corba blaves.

En l'instant inicial, el cos orbita al voltant del centre de masses de forma regular, però a prop de la meitat de la primera volta, la influència del Sol fa que la velocitat que portava el cos vers el centre desaparegui gairebé completament (per això es mou lleugerament cap a la dreta com senyalitza el punt verd) i s'aproximi a una velocitat nul·la.

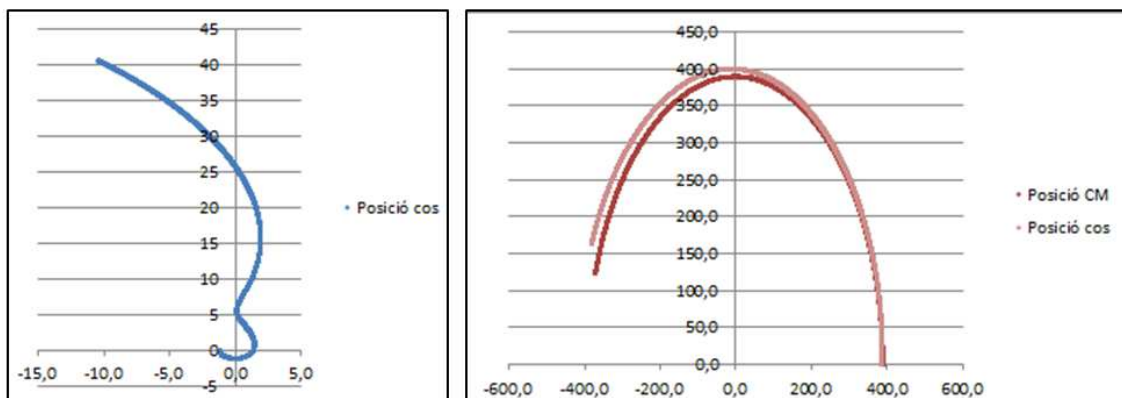
Com que en aquest tipus de distàncies la influència de la Lluna es pot considerar negligible en totes les seves posicions i tractar el sistema com un sol cos. En els punts més avançats de la trajectòria la influència d'aquest cos també és negligible, de manera que el problema es podria reduir al dels dos cossos entre el Sol i el satèl·lit artificial. Aquesta velocitat relativa que s'apropava a 0 augmenta ara d'acord amb la tercera llei de Kepler ([vegeu apartat 5.4](#)) (al trobar-se més a prop del Sol, el seu període és menor i la velocitat major).

Sabent la relació entre la velocitat i la tercera llei de Kepler podem eduir que el cos avançarà en els dos eixos més ràpidament que el centre de masses. Així podem explicar els dos punts taronja i blau.

En el taronja, els tres cossos del PTCRC es troben en el primer quadrant, de manera que quan el cos ja es troba més proper al Sol i ignora la influència de la Terra, comença a avançar més ràpidament i deixa de endarrerir la seva posició relativa. Per això el punt taronja marca un punt d'inflexió en el moment en què el cos comença a accelerar cap a la mateixa direcció que el centre de masses.

No obstant, en aquell moment el sistema i el cos passen al segon quadrant i per això comença a canviar la seva posició relativa cap a la dreta i a causa del seu menor període, també es distancia cap a la part inferior. El punt d'inflexió que marca l'inici d'aquest procés és marcat pel punt blau.

El fet que en aquesta simulació el cos escapés de la influència dels dos cossos principals tan fàcilment ha set un resultat sorprenent. En primera instància s'ha pensat que aquest resultat podria haver set provocat per les condicions inicials, en què el cos estava sotmès a tres forces que podrien haver provocat una acceleració massa forta. Per això s'ha dut a terme la simulació amb la posició contrària en l'instant inicial, és a dir, quan el cos es troba més a prop del Sol sent la Lluna el segon objecte més proper i la Terra el més llunyà. Aquests han set els resultats de la posició relativa vers el centre de masses i la trajectòria vers el Sol.



Imatge 53 - Trajectòria amb posició inicial oposada en  $L_3$  vers la translació del sistema que efectua 6 voltes

El Sol acaba abandonant el camp d'influència dels dos cossos i les corbes que descriu posteriorment són degudes als mateixos motius que els descrits anteriorment, amb la diferència que en aquest cas la velocitat del cos és menor perquè sempre es troba en

una posició més llunyana que la del sistema, fet que també explica les posicions relatives.

Havent explicat la dinàmica del cos en aquest punt d'equilibri podem confirmar el comportament del Sol vers les superfícies de Hill. Si bé en la simulació sense perturbacions havíem confirmat juntament amb la teoria de la mecànica l'existència d'una zona tancada que unia les dos superfícies pròpies de cada cos prèviament tancades, la influència del Sol fa que aquestes no siguin útils per justificar el comportament del cos donat el seu escapament de la zona delimitada.

#### 4.4. $L_4$

El càlcul de la localització del punt  $L_4$  s'ha fet d'una manera diferent a la resta de punts, ja que com s'ha explicat en el [punt 7.4.2](#), aquests punts es troben sempre en el vèrtex d'un triangle equilàter<sup>32</sup> format juntament amb els altres dos cossos, que ocupen la resta de vèrtexs. Com que el triangle té tots els costats iguals, la posició del cos té com a mòdul  $1 u$  vers els dos cossos.

La posició en l'eix de les abscisses s'ha trobat a partir de la posició de la Terra i la distància d'aquesta a la Lluna i relacionant-la posteriorment amb el centre de masses:

$$x = 1 \cdot \cos 60 = 0,5 u$$

Vers el centre de masses:

$$0,5 - 0,01215617 = 0,48784383 u$$

La posició en l'eix de les ordenades és la mateixa que la distància vers la Terra perquè aquesta també es troba en el punt  $(-0,01215617, 0)$ :

$$y = 1 \cdot \sin 60 = 0,866025403$$

El mòdul de la posició llavors és:

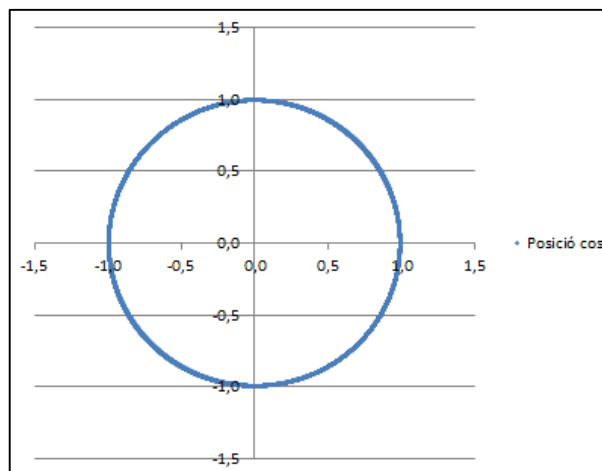
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,993977666303615 u$$

De la mateixa manera que en els anteriors punts, com que la velocitat angular ha de ser 1, llavors  $|\vec{r}| = v$ .

<sup>32</sup> En aquest punt, els càlculs relacionats amb la trigonometria s'expressen mitjançant graus sexagesimals.



Mostrem a continuació els resultats de la simulació sense perturbacions, els quals es mostren directament només amb una imatge.



*Imatge 54 - Òrbita en  $L_4$  durant 4 voltes*

L'òrbita és clarament estable i entre l'inici de la primera volta i el final de la quarta, és a dir, quan el cos s'ha de trobar en el punt inicial, les variacions entre els valors dels punts es troba a partir de les mil·lèsimes. Aquestes variacions (que es poden donar pels defectes del mètode *Leapfrog*), no fan que el cos es desviï cap a un dels camps gravitatoris dels dos cossos majors per les zones de velocitat relativa nul·la. Com s'ha explicat en el [punt 7.4.2](#), aquests dos punts d'equilibri es troben encerclats per unes zones pròpies alienes a les formades en els punts analitzats anteriorment. Com que les corbes de  $V = 0$  són tancades, el cos es pot moure en una zona al voltant d'aquest punt molt reduïda, permetent-se així certes correccions.

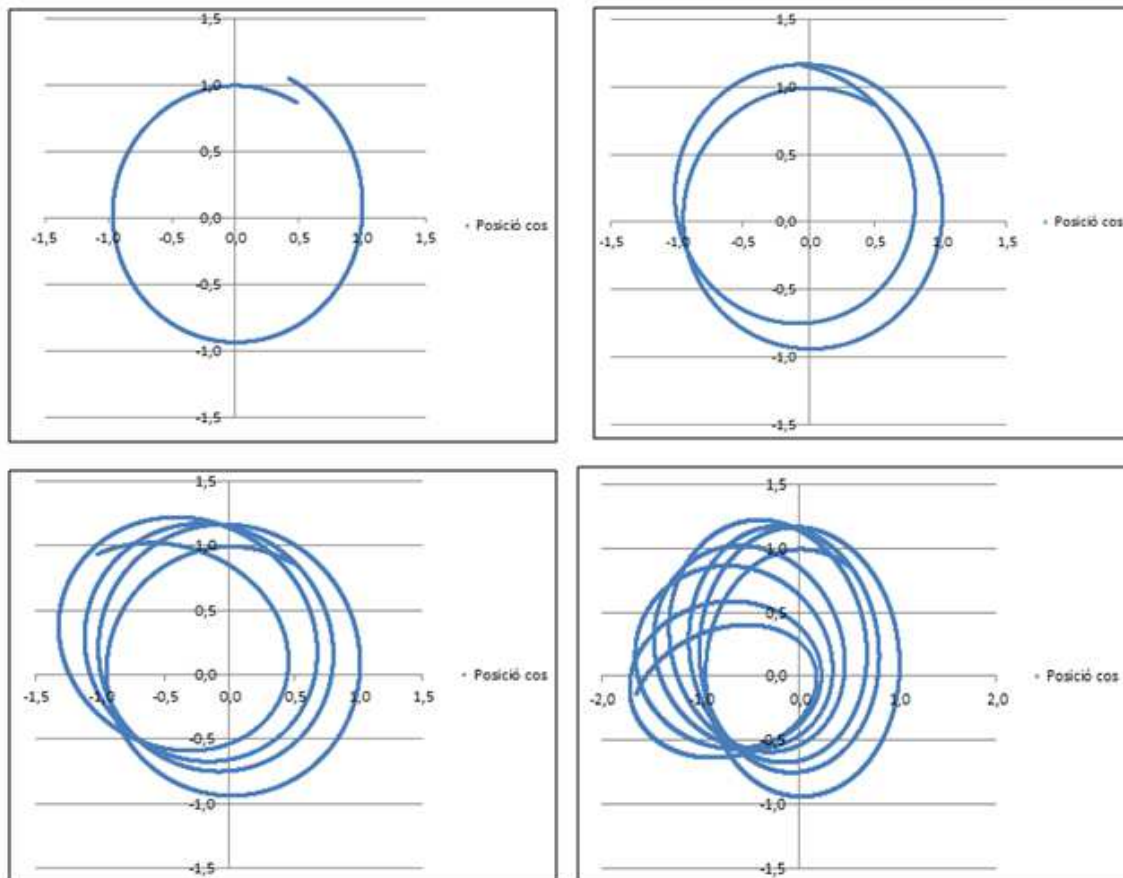
Tot i això tampoc s'observen canvis notables en la posició relativa vers la Lluna.

Aquestes zones que en casos de perturbacions puntuals majors es poden fer més grans fins arribar a formar òrbites de ferradura de cavall (observada en la "*Imatge 26*", és la zona que envolta la Terra i els extrems es tanquen en les parts superior i inferior de la Lluna formant una superfície amb una forma semblant a la d'una ferradura de cavall), han provocat la següent hipòtesi abans de dur a terme la simulació amb la influència solar:

- El cos notarà la influència del Sol i produirà canvis en l'òrbita notables a simple vista però les corbes de velocitat relativa nul·la faran que no es desviï totalment.



Després de finalitzar la simulació, els resultats han set el següents:



*Imatge 55 - Òrbita pertorbada de  $L_4$  durant 1 volta (dalt esquerra), 2 (dalt dreta), 4 (baix esquerra) i 7 (baix dreta)*

A partir de la quarta volta s'intueix que la hipòtesi formulada anteriorment és totalment falsa. En les dos primeres voltes es podria validar ja que el cos es mou en zones que es podrien considerar vàlides per unes corbes delimitades per la pertorbació del Sol, però a partir de la tercera el cos comença a tendir a definir el-lipses amb una excentricitat que s'eleva amb el pas del temps i s'introdueix el fenomen de la rotació del semieix major.

En primera instància s'ha buscat un possible patró que indiqués que el cos seguia una òrbita de ferradura de cavall, però aquesta també ha d'incloure certa rotació com en l'òrbita original, mentre que en valor avançats del temps el cos es mou majoritàriament pel segon i tercer quadrant i té tendència a trobar els perigeus en el primer i quart.

L'altra raó per la qual podem afirmar que l'òrbita del cos no ha set estable ha estat pels valors de la constant de Jacobi. En l'instant inicial,  $C = 2,98799160246918$ , de manera que per mantenir-se en les zones indicades, aquest valor es podria permetre

créixer a causa de l'addicional però limitada llibertat de moviment. No obstant, en el punt 16615, el valor de la constant arriba a l'extraordinari valor de 12,7563530356608, demostrant que entra en el camp gravitatori de la Terra, que anteriorment corresponia a zones dels punts d'equilibri anteriors.

De la mateixa manera, tot i que els valors de la constant inicials són els més petits que s'han registrat, en molts punts d'instant més avançats el cos torna a tenir valors també molt reduïts, fet que sembla confirmar que en  $L_4$  no existeixen superfícies de velocitat relativa nul·la fiables per analitzar la seva dinàmica.

## Conclusions del treball

Havent finalitzat el marc pràctic d'aquest treball es presenten les conclusions extretes en aquesta part i contrastades amb els objectius que ens havíem proposat inicialment.

Pel que fa al primer objectiu, no s'ha pogut complir perquè s'ha observat una òrbita molt pertorbada en el punt  $L_4$  en el sistema Terra – Lluna, de manera que es podria afirmar que en aquest cas, el punt d'equilibri no seria un lloc vàlid per posar-hi un satèl·lit d'observació. En un principi s'ha pensat que la no estabilitat es podria deure a imprecisions del mètode de resolució utilitzat, però en els casos que no hi ha cap pertorbació el resultat era el d'una òrbita gairebé circular, fet que demostrava la seva eficàcia. Comprovant els canvis d'escala i la relació entre la velocitat en el sistema dels dos cossos i mig i la del sistema de l'òrbita de translació s'ha arribat a la conclusió de que tots els càlculs s'han efectuat correctament.

No obstant, el cas de  $L_1$  ha set un resultat sorprenent donada la seva estabilitat sense la influència del Sol. En un principi s'havia tractat els tres primers punts d'equilibri per igual, però trobant-se sota els mateixos marges d'error, podem afirmar que aquest punt és molt més estable que els dos restants. Aquí es quan entra la següent relació:  $L_1$  i  $L_4$  són els dos punts que es troben més allunyats de la Lluna (els dos a  $1 u$  de distància mínima), de manera que la seva atracció és molt més dèbil que en els altres dos punts. Així, podem suposar que aquesta és negligible i reduir el cas al problema dels dos cossos, en què segons la segona llei de Kepler el moment angular es conserva i en el cas de l'òrbita circular el mòdul de la velocitat també és constant.

Finalment, en quant a l'anàlisi de les superfícies de velocitat relativa nul·la, s'ha demostrat amb les òrbites pertorbades que amb la influència del Sol, aquestes no són fiables per descriure el moviment d'una partícula en els camps gravitatoris de dos cossos majors. Aquí encara queda obert el dubte del nivell de les pertorbacions que poden ser analitzades amb la integral de Jacobi fent un contrast amb els casos reals. Per exemple, és evident que els satèl·lits troians que es troben el sistema Sol – Júpiter reben pertorbacions d'altres planetes, tot i que molt més petites que la que rebia el cos menor per part del Sol. És en aquest punt on hauria set també interessant veure on està el punt d'inflexió de l'estabilitat d'aquestes superfícies.

El segon objectiu s'ha pogut complir perquè en tots els casos hem pogut explicar per què el cos es movia per on es movia. Aquest era un dels objectius generals del treball: entendre per què passa tot.

El tercer objectiu, que està directament relacionat amb el segon, també s'ha completat donades les relacions que hem establert entre les gràfiques de les posicions relatives i les trajectòries reals a diferents nivells, és a dir, que aquest tipus d'anàlisi s'ha pogut traslladar al sistema Terra – Lluna i al sistema de l'òrbita de translació vers el Sol.

Per altra banda s'ha pogut explicar tot el que passava en totes les trajectòries numèricament, ja sigui amb les dades de les posicions o amb els valors de la constant de Jacobi.

Per acabar s'ha completat l'objectiu que en principi es considerava el més difícil de tots. L'aplicació dels mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials semblava requerir coneixements matemàtics massa elevats per a la seva aplicació en problema de gravitació, en què el valor de  $g$  varia a cada instant de temps. El principal temor era fallar amb l'elecció del mètode *Leapfrog* i obtenir òrbites errònies pròpies d'errors per truncament. No obstant, l'elecció ha resultat ser molt encertada donada l'exactitud amb què s'han representat les òrbites sense perturbacions, que han servit també com a comprovant de la seva fiabilitat.

Cal remarcar que tots els resultats obtinguts no són aplicables a la realitat pel petit però evident error comès pel mètode de resolució i pel fet de treballar en un PTCRC, el qual es restringeix a òrbites circulars mentre que la Lluna i el sistema Terra – Lluna segueixen òrbites el·líptiques, que tot i ser de baixa excentricitat, aquesta és notable per produir canvis en els punts d'equilibri encara majors.

Finalment, com a cloenda s'exposen les conclusions generals del treball, tant a nivell personal com al "*modus operandi*" seguit.

Primerament es valora de dos maneres diferents la distribució del temps dedicat a l'aprofundiment dels diferents apartats tractats en el marc teòric per preparar després la part pràctica. Com a part més positiva, ha valgut molt la pena dedicar un esforç addicional en l'anàlisi del problema dels cossos perquè això ha permès encarar el dels dos i mig des d'una perspectiva menys nova i ha pogut ser entès amb molta més facilitat.

Tot i això, tot i que degut a circumstàncies externes, segurament s'ha dedicat de forma innocent un temps massa elevat a la introducció a la aerodinàmica. Si bé és cert que això ha fet que s'hagi entès aquest apartat molt millor, es considera que es podria

haver dedicat més temps a analitzar una cosa molt diferent com l'efecte Coriolis des de l'apartat matemàtic. Si s'hagués establert la relació entre aquest i la dinàmica del problema dels dos cossos i mig es podria haver dut a terme totes les simulacions des d'un sistema rotatiu, fet que hauria facilitat les coses i hauria reflectit les superfícies de velocitat relativa nul·la perfectament, les quals en el sistema inercial han set més difícils d'interpretar. De tota manera, el fet de d'haver-ho fet així també ha set interessant perquè permet observar les trajectòries de cossos aplicant les lleis de Newton, les quals no podrien haver estat aplicades al sistema rotatiu.

## Bibliografia

JUAN JOSÉ DE ORÚS NAVARRO, M. ASUNCIÓN CATALÀ POCH, JORGE NÚÑEZ DE MURGA. *Astronomía esférica y mecánica celeste*. [Barcelona]: Editorial Publicacions i edicions UB, 2007.

JOHN R. TAYLOR. *Mecánica clásica*. [Barcelona]: Editorial Reverté, 2017.

IAN STEWART. *Las matemáticas del cosmos*. [Barcelona]: Editorial Crítica, 2017.

WILLIAM E. BOYCE, RICHARD C. DIPRIMA. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera*. [Ciudad de México]: Editorial Limusa, 1998.

ANTONI GARRIDO GONZÁLEZ. *Física I*. [Barcelona]: Grup Edebé, 2008.

SUSANA CARDONA GARCÍA, JOSÉ ANTONIO REY NAVARRO. *Matemàtiques I*. [Saragossa]: Grupo Editorial Luis Vives, 2016.

SEBASTIÁN BRUZZONE. *Método de Leapfrog en el Problema de N Cuerpos* [En línia]. [S.I.] Curso Física Computacional 2010, 30 de maig de 2011.

[http://www.fisica.edu.uy/~sbruzzone/FlexPaper\\_1.4.2\\_flash/defensa.pdf](http://www.fisica.edu.uy/~sbruzzone/FlexPaper_1.4.2_flash/defensa.pdf)

PETER YOUNG. *The leapfrog method and other "symplectic" algorithms for integrating Newton's laws of motion* [En línia]. [S.I.] 17 d'abril de 2013.

<http://physics.ucsc.edu/~peter/242/leapfrog.pdf>

[s.n.]. *Circular restricted three-body problem. Interplanetary mission design* [En línia]. [S.I.]

[http://ccar.colorado.edu/imd/2015/documents/CRTBP\\_Handout.pdf](http://ccar.colorado.edu/imd/2015/documents/CRTBP_Handout.pdf)

JOACHIM WORTHINGTON. *A Study of the Planar Circular Restricted Three Body Problem and the Vanishing Twist* [En línia]. Applied Mathematics: University of Sydney, Octubre 2012.

<http://www.maths.usyd.edu.au/u/joachimw/thesis.pdf>

J.D. MIRELES JAMES. *Celestial Mechanics Notes Set 4: The Circular Restricted Three Body Problem* [En línia]. [S.I.], 19 de desembre de 2006.

<http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/hw4Notes.pdf>

S. WIDNALL. *Lecture L18 - Exploring the Neighborhood: the Restricted Three-Body Problem* [En línia]. Versió 1.0. [S.l.] 2008.

[https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16\\_07F09\\_Lec18.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec18.pdf)

[s.n.]. *Algunas correlaciones para coeficiente de arrastre de una esfera* [En línia]. [S.l.]

<http://tecno.cruzfierro.com/formularios/cd-esfera>

RAMÓN MARTÍNEZ RODRÍGUEZ-OSORIO. *Parámetros orbitales. Formato TLE de NORAD* [En línia]. Universidad Politécnica de Madrid: Dpto. de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones. Curs 2009-2010.

<http://www.gr.ssr.upm.es/docencia/grado/csat/material/CSAT09-2-FormatoTLE.pdf>

RAMÓN MARTÍNEZ RODRÍGUEZ-OSORIO. *Tipos de órbitas. Constelaciones de satélites* [En línia]. Universidad Politécnica de Madrid: Dpto. de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones. Curs 2009-2010.

<http://www.gr.ssr.upm.es/docencia/grado/csat/material/CSAT09-2-OrbitasConstelaciones.pdf>

[s.n.]. *Descenso de un paracaidista* [En línia]. [S.l.]

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/paracaidista/paracaidista.html>

[s.n.]. *Efecto de la resistencia del aire en la caída de los cuerpos* [En línia]. [S.l.]

[http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/fluidos/stokes1/stokes1\\_3.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/fluidos/stokes1/stokes1_3.html)

DR. DAVID P.STERN. *Orbits in space* [En línia]. [S.l.], 2016.

<http://www.phy6.org/stargaze/Sorbit.htm>

DR. DAVID P.STERN. *The Distance to the L1 Point* [En línia]. [S.l.], 2016.

<http://www.phy6.org/stargaze/Slagrang.htm>

DR. DAVID P.STERN. *The L4 and L5 Lagrangian Points* [En línia]. [S.l.], 2016.

<http://www.phy6.org/stargaze/Slagrng2.htm>

[s.n.]. *Com s'escriu òrbita? Mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials sense solució analítica* [En línia]. Cervera, 2017.

<https://fme.upc.edu/ca/premi-poincare/edicions-anteriors/premi-poincare-2017/treballs-quanyadors-2017/com-sescriu-orbita.pdf>

[s.n.]. *La Luna* [En línia]. [S.l.]

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/luna/luna.htm>

- **Simuladors i programes utilitzats:**

*Microsoft Excel.* <https://products.office.com/es-es/excel>

*Geogebra.* <https://www.geogebra.org/?lang=es-ES>

Simulador de gravitació. <http://www.testtubegames.com/gravity.html>

Simulador de gravitació 2. <http://www.nowykurier.com/toys/gravity/gravity.html>



## Índex gràfic

Imatge 1 - Ganimedes .....	9
Imatge 2 - Meteosat de tercera generació.....	9
Imatge 3 - Pla orbital del cometa Halley.....	10
Imatge 4 - Precessió absidal d'una el·lipse .....	12
Imatge 5 - Capes de l'atmosfera .....	13
Imatge 6 - Entrada d'un cos a la ionosfera.....	14
Imatge 7 - Esfera .....	15
Imatge 8 - Secció transversal d'una esfera .....	16
Imatge 9 - Perfil del morro d'un avió .....	16
Imatge 10 - Pas de corrents d'aire sobre diferents superfícies.....	18
Imatge 11 - Densitats de la termosfera (JB2008) .....	18
Imatge 12 - Components de la força de la gravetat.....	23
Imatge 13 - Superfícies còniques.....	29
Imatge 14 - El·lipse.....	30
Imatge 15 - Definició de trajectòries donada una velocitat .....	34
Imatge 16 - Paràbola .....	36
Imatge 17 - Obliqüitat en funció del paràmetre.....	36
Imatge 18 - Influència dels angles de llançament en la definició d'una paràbola.....	37
Imatge 19 - Elements d'una hipèrbola.....	39
Imatge 20 - Òrbita de transferència de Hohmann .....	42
Imatge 21 - Sputnik 1 .....	43
Imatge 22 - Esbós de l'òrbita del Sputnik 1 .....	43
Imatge 23 - Contrast entre els semieixos de les òrbites de l'Explorador 1 i Sputnik 1 ....	44
Imatge 24 - Representació dels plans orbitals d'òrbites retrògrades i directes .....	45
Imatge 25 - Contrast entre els dos sistemes de referència.....	50
Imatge 26 - Superfícies de velocitat relativa nul·la amb diferents valors de $C$ (esquerra) i zona de proporcionalitat inversa (dreta).....	56
Imatge 27 - Llançament de bales vist des d'un sistema fix (esquerra) i d'un sistema rotatiu (dreta) .....	57
Imatge 28 - Punts $L_1$ , $L_2$ i $L_3$ .....	59
Imatge 29 - $L_4$ i zones pròpies de $V = 0$ .....	61
Imatge 30 - Canvis en les regions de Hill proporcionals al decreixement de $C$ .....	62
Imatge 31 - Esbós del mètode Leapfrog .....	68
Imatge 32 - Sistema d'òrbita de translació (dreta) i sistema del PTCRC (esquerra) ...	71

Imatge 33 - Òrbita del cos en $L1$ passa una volta (esquerra) i passades tres voltes (dreta).....	79
Imatge 34 - Òrbita del cos amb pertorbació en $L1$ passa 1 volta (dalt esquerra, 2 voltes (dalt dreta), 3 voltes (baix esquerra) i 4 voltes (baix dreta).....	80
Imatge 35 - Posició relativa del cos en l'òrbita pertorbada de $L1$ vers la Lluna.....	81
Imatge 36 - Esbós del contrast entre els punts de vista de la Lluna.....	81
Imatge 37 - Posició relativa del cos en la quarta volta de l'òrbita pertorbada de $L1$ vers les seves trajectòries reals.....	82
Imatge 38 - Esbós de la proximitat de $L1$ vers altres punts de les línies de $V = 0$ ....	83
Imatge 39 - Lluna i cos en l'òrbita pertorbada de $L1$ durant els primers 400 punts de la cinquena volta (esquerra) i durant els 1250 del mig de la quarta (dreta).....	83
Imatge 40 - Trajectòria en $L2$ en la primera volta (dalt esquerra), segona (dalt dreta), tercera (baix esquerra) i quarta (baix dreta) .....	85
Imatge 41 - Posició relativa del cos en l'òrbita en $L2$ vers la Lluna durant la segona meitat de la primera volta. L'inici (vermell) i final (blau) .....	86
Imatge 42 - Comparació de corbes de la trajectòria en $L2$ amb les posicions relatives .....	86
Imatge 43 - Localització del cos en l'eix de les abscisses (columna esquerra) i ordenades (columna dreta) i representació gràfica de la posició (dreta) .....	87
Imatge 44 - Valors petits de $C$ consecutius en punts propers al 2615 .....	89
Imatge 45 - Trajectòria pertorbada en $L2$ durant 1 volta (dalt esquerra), 2 (dalt dreta), 3 (baix esquerra) i 4 (baix dreta) .....	90
Imatge 46 - Trajectòria en $L3$ en la primera volta (dalt esquerra), segona (dalt dreta), tercera (baix esquerra) i cinquena i sisena (baix dreta).....	92
Imatge 47 - Meitat de la segona volta en $L3$ .....	93
Imatge 48 - Mòduls de l'acceleració de la Lluna.....	93
Imatge 49 - Trajectòria en $L3$ durant 8 voltes del sistema .....	94
Imatge 50 - Decreixement i augment de $C$ .....	94
Imatge 51 - Trajectòria del cos en $L3$ amb pertorbació durant 1 volta (dalt esquerra), 2 (dalt dreta), 4 (baix esquerra) i 6 (baix dreta) .....	95
Imatge 52 - Trajectòria del cos en $L3$ vers la translació del sistema que efectua 6 voltes .....	96
Imatge 53 - Trajectòria amb posició inicial oposada en $L3$ vers la translació del sistema que efectua 6 voltes.....	97
Imatge 54 - Òrbita en $L4$ durant 4 voltes .....	99

Imatge 55 - Òrbita pertorbada de  $L_4$  durant 1 volta (dalt esquerra), 2 (dalt dreta), 4 (baix esquerra) i 7 (baix dreta) ..... 100

## Annex

Es pot accedir als càlculs realitzats al marc pràctic dirigint-se al següent enllaç o bé utilitzant el codi *QR* de la imatge:

<https://drive.google.com/drive/folders/1qZjYndOc1xjQl4iz3GUzAdNTq5SLGezF?usp=sharing>



