

# Estudi de les Transformacions de Möbius

---

*Autor: Lobatchewsky*

---

## Agraïments

Vull donar el meu reconeixement i la meva gratitud:

Al meu tutor del Treball de Recerca, Alejandro Martínez, pels seus consells i el seu seguiment indispensables perquè aquest treball tingui sentit.

Als professors de matemàtiques Antonio García i David Pi pel fet d'ensenyar-me a veure més enllà de les monòtones lliçons de càlcul elemental i haver-me portat pel camí adequat del coneixement.

Al Dr. Joan Josep Carmona pel seu assessorament i ajut teòric en la confecció del contingut, així com els seus suggeriments respecte a la planificació, l'estructura i la forma del treball.

A la meua família, per haver-se mostrat comprensiva quan no m'ha estat possible dedicar-li tot el temps que m'hagués agradat.

A totes les persones i institucions que han fet possible la realització del treball.

---

## Introducció

Quan se'm va proposar el treball, el primer guió de treball era força diferent del que ha estat el definitiu. En un començament, la intenció del treball era estudiar les transformacions de Möbius clàssiques, les de variable complexa, les que apareixen a tots els llibres d'anàlisi. Totes les figures i il·lustracions d'aquest treball són d'elaboració pròpia. Malgrat això, després d'un primer cop d'ull al contingut teòric estudiable al treball, ja vaig intuir que podien existir transformacions de Möbius fora de la geometria complexa planar. De fet, en la recerca d'aplicacions, ens vam topiar amb la geometria hiperbòlica, molt fàcilment descriptible gràcies a la senzilla manipulació que ens ofereixen les transformacions a què ens referim, sense desaprendre'ns que això és generalitzable per a un nombre arbitrari de dimensions.

El treball està estructurat en dos blocs temàtics: d'una banda, les transformacions de Möbius sobre el pla, de l'altra, sobre l'espai.

Referint-nos al primer bloc es descriu, en primer lloc, un estudi de les transformacions de Möbius de variable complexa, amb les característiques ordinàries, que inclou demostrar aquestes propietats; en segon lloc, examinar el comportament que proposen les funcions anomenades sobre el pla i una classificació òptima; en tercer i últim lloc, una introducció a la geometria hiperbòlica i algunes de les seves propietats més importants recollida en els continguts anteriors.

Pel que fa al segon bloc, ens plantegem, d'una banda, un estudi introductor de les transformacions de Möbius de dimensió arbitrària, les seves propietats fonamentals i, sempre que sigui possible, la demostració d'aquestes, i d'altra, una petita aplicació a la geometria hiperbòlica en varies dimensions.

Els objectius de la recerca són, principalment, els que segueixen:

1. Exposar el contingut que hem ressenyat a l'estructura, i demostrar un nombre majoritari de les proposicions que es formulin;
2. Constituir una analogia entre el primer bloc i el segon, en la mesura que la majoria dels tònics tractats siguin semblants;
3. Relacionar la geometria complexa i l'anàlisi complex amb l'estudi d'algunes superfícies rellevants;
4. Establir ponts teòrics entre els diferents blocs i apartats de forma que el contingut estigui cohesionat;

Busquem, doncs, relacionar diverses àrees d'estudi de la matemàtica, totes relacionades amb la geometria, però amb una naturalesa ben diferent.

# Índex

<b>Índex</b>	<b>iv</b>
<b>1 Transformacions de Möbius</b>	<b>1</b>
1.1 El pla completat . . . . .	1
1.2 El model de l'esfera . . . . .	1
1.3 Definició i propietats de la transformació de Möbius . . . . .	3
1.3.1 El grup de les transformacions de Möbius . . . . .	4
1.3.2 Propietats de composició . . . . .	5
1.3.3 Propietats d'inversa . . . . .	5
1.3.4 Pol i punt límit . . . . .	6
1.4 Conformalitat i orientació . . . . .	6
1.5 Punts fixos . . . . .	7
1.6 La raó simple . . . . .	8
1.7 La raó doble . . . . .	8
1.7.1 Definició i propietats . . . . .	8
1.7.2 Imatges de circumferències i rectes per homografies . . . . .	9
1.8 Orientació . . . . .	10
<b>2 Simetria i comportament</b>	<b>13</b>
2.1 Transformació de Möbius conjugada . . . . .	13
2.2 Simetria respecte a un cercle . . . . .	14
2.2.1 Simetria respecte a una recta . . . . .	15
2.2.2 Simetria respecte a un cercle euclidià . . . . .	15
2.3 Distorsió de diàmetres . . . . .	15
2.4 Classificació del grup $\mathcal{M}$ . . . . .	17
2.5 Classificació de les transformacions de Möbius conjugades . . . . .	18
2.6 Comportament . . . . .	19
2.6.1 Xarxa circular . . . . .	19
2.6.2 Propietats dels cercles de Steiner . . . . .	20
2.6.3 Xarxa degenerada de cercles de Steiner . . . . .	21
<b>3 Aplicació a la geometria hiperbòlica</b>	<b>23</b>
3.1 L'esfera de Riemann . . . . .	23
3.1.1 Concepte de Superfície de Riemann . . . . .	23
3.1.2 Forma infinitesimal de l'esfera . . . . .	24
3.1.3 Longitud i àrea d'un cercle a l'esfera . . . . .	26
3.1.4 Moviments de l'esfera . . . . .	27
3.2 El pla hiperbòlic . . . . .	29

3.2.1	El model de Poincaré . . . . .	29
3.2.2	Isomorfismes entre dos models hiperbòlics . . . . .	29
3.2.3	Isometries i automorfismes . . . . .	30
3.2.4	Model de Klein . . . . .	31
3.3	Forma infinitesimal del model de Poincaré . . . . .	32
3.3.1	Mètrica de Lobatxevski. Pseudoesfera. . . . .	32
3.3.2	Projecció estereogràfica de la pseudoesfera . . . . .	33
3.3.3	Isometries del model de Poincaré . . . . .	34
3.3.4	Mètrica hiperbòlica . . . . .	35
3.4	Forma infinitesimal del model de Klein . . . . .	35
3.5	Polígons hiperbòlics . . . . .	37
3.5.1	Fórmula de Gauss-Bonnet . . . . .	37
3.5.2	Subconjunts convexos . . . . .	39
3.5.3	Cercles hiperbòlics . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Transformacions de Möbius <math>n</math>-dimensionals</b>	<b>43</b>
4.1	L'espai $n$ -dimensional completat . . . . .	43
4.2	Reflexions respecte a esferes generalitzades . . . . .	44
4.2.1	El grup de transformacions de Möbius . . . . .	44
4.3	Propietats de composició . . . . .	46
4.3.1	Teorema de Liouville . . . . .	47
4.3.2	Inversa, pol i punt límit . . . . .	50
4.4	Imatges d'hiperesferes . . . . .	51
4.5	Extensió de Poincaré . . . . .	52
4.5.1	Extensió de Poincaré de $\mathcal{M}_2$ . . . . .	52
4.6	La raó doble . . . . .	53
4.6.1	Principi de simetria . . . . .	54
4.6.2	Distorsió de diàmetres . . . . .	54
4.7	El model de Poincaré . . . . .	55
4.8	Forma infinitesimal del model de Poincaré . . . . .	56
4.8.1	Espai de Minkowski . . . . .	56
4.8.2	Projecció estereogràfica de la pseudoesfera . . . . .	56
4.9	Moviments de la mètrica hiperbòlica . . . . .	58
4.10	El model de Klein . . . . .	58
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>



# Capítol 1

## Transformacions de Möbius

### Resum

August Möbius va ser un matemàtic alemany que, durant 50 anys, dirigí l'observatori de Leipzig i hi excel·lí com a professor en els anys posteriors. Entre les seves més sensacionals descobertes es troben les transformacions homogràfiques que, entre el ventall de denominacions usades, sovint es coneixen, en homenatge a la seva persona, amb el nom de transformacions de Möbius.

### 1.1 El pla completat

Abans d'introduir la noció de transformació homogràfica cal establir espais en què actuen aquestes transformacions. Prèviament els definirem prou superficialment, mentre que més endavant els descriurem mètricament des d'un punt de vista més avançat.

**Definició 1.1.** El pla complex completat o pla completat (de notacions  $\mathbb{C}_\infty$ ,  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) consisteix en afegir als nombres complexos un punt de l'infinit representat amb el símbol  $\infty$ .

El punt de l'infinit és un punt «infinitament allunyat». A mesura que s'avanci en el decurs del treball aquest anirà prenent més sentit. Tanmateix, és indispensable per a entendre correctament el contingut de la recerca. Com que la noció de punt de l'infinit pot provocar certes dificultats, per tal d'entendre aquest espai mètric, utilitzarem una representació geomètrica molt útil, que rep el nom d'*esfera de Riemann*.

L'*esfera de Riemann* és una esfera bidimensional de radi  $R$  centrada a l'origen i en què cada punt de l'esfera es relaciona biunívocament amb un únic punt del pla completat de la següent manera: es llança una recta des del pol nord (és a dir, des de  $(0, 0, R)$ ), passant per un cert punt de la superfície de l'esfera. Ineluctablement, tallarà el pla per un únic punt. Aquest últim és el que assignem al primer.

### 1.2 El model de l'esfera

El model de l'esfera de Riemann, com hem dit, consisteix en una esfera  $S_2 \subset \mathbb{R}^3$  que verifica l'equació

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, \quad (1.2.1)$$

normalment amb  $R = 1$ . De vegades se sol anomenar simplement esfera. La funció que relaciona biunívocament cada punt del pla amb un punt de l'esfera s'anomena projecció estereogràfica. Sigui  $\phi$  aquesta funció. Aleshores, les coordenades  $(x_1, x_2, x_3)$  de l'esfera es

transformen en les coordenades  $z = (x, y)$  del pla d'Argand. A partir del teorema de Tales a la figura 1.2.1 verifiquem que

$$\frac{x_3}{R} = \frac{x - x_1}{x} = \frac{y - x_2}{y}.$$

Així,  $x_1 = x \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)$ ,  $x_2 = y \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)$  i, a més, per l'equació (1.2.1):

$$x^2 \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)^2 + x_3^2 = R^2.$$

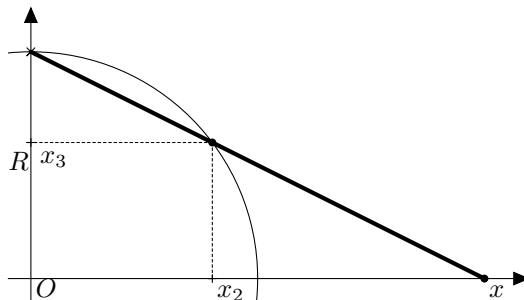


Figura 1.2.1: Secció plana de la projecció estereogràfica.

Restem  $R^2$  als dos costats de la igualtat, així que ens quedarà una expressió igualada a zero. Després, fent el canvi  $x^2 + y^2 = \rho^2$  obtenim una equació, en la qual treiem factor comú de  $1 - \frac{x_3}{R}$ , que només s'anul·la al pol nord, i dividim entre aquest nombre a totes dues bandes de la igualtat:

$$\left(1 - \frac{x_3}{R}\right) \left[\left(1 - \frac{x_3}{R}\right) \rho^2 - R(R + x_3)\right] = \left(1 - \frac{x_3}{R}\right) \rho^2 - R(R + x_3) = 0.$$

Ara només cal que aïllem  $x_3$  en aquesta darrera equació:

$$x_3 = \frac{\rho^2 - R^2}{\frac{\rho^2}{R} + R} = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2}.$$

Això últim porta inevitablement a trobar el valor de  $x_1$  i  $x_2$  que, com havíem vist abans, es relacionaven amb  $x_3$  de la manera següent:  $x_1 = x \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)$  i  $x_2 = y \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)$ . Obtenim, doncs, que

$$x_1 = \frac{2R^2x}{\rho^2 + R^2}, \quad x_2 = \frac{2R^2y}{\rho^2 + R^2}, \quad x_3 = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2}.$$

Com que no hi ha cap definició fonamental anterior relacionada amb aquest tòpic en què ens haguem recolzat, prendrem el resultat anterior com una definició:

**Definició 1.2.** La projecció estereogràfica  $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S_2$ , on l'esfera  $S_2$  té radi  $R$ , d'un punt  $z = x + iy$  del pla, és de la forma

$$\phi(z) = \left( \frac{2R^2x}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{2R^2y}{x^2 + y^2 + R^2}, R \frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + y^2 + R^2} \right), \quad \phi(\infty) = (0, 0, R).$$



Observem que és una funció contínua al pla completat. De la definició geomètrica de projecció estereogràfica s'obté que la projecció estereogràfica és una funció bijectiva i que, per tant, té inversa. No obstant, necessitem una prova més evident. Suposem que dos punts  $(x, y)$  i  $(x', y')$  tenen les mateixes imatges. Tenim:

$$\frac{2R^2x}{x^2 + y^2 + R^2} = \frac{2R^2x'}{x'^2 + y'^2 + R^2}, \quad \frac{2R^2y}{x^2 + y^2 + R^2} = \frac{2R^2y'}{x'^2 + y'^2 + R^2}, \quad \frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + y^2 + R^2} = \frac{x'^2 + y'^2 - R^2}{x'^2 + y'^2 + R^2}.$$

Per simplificar la notació, farem  $R^2 = A$ ,  $x^2 + y^2 = r$ ,  $x'^2 + y'^2 = r'$ . De l'equació de la dreta s'obté

$$r'r + A(r - r') - A^2 = rr' + A(r' - r) - A^2.$$

Així que es té  $r - r' = r' - r$ , d'on  $r' = r$ . Substituïm aquest fet a les dues primeres equacions i donen lloc a les següents:

$$\frac{2Ax}{r + A} = \frac{2Ax'}{r + A}, \quad \frac{2Ay}{r + A} = \frac{2Ay'}{r + A}.$$

S'obté immediatament que  $x = x'$  i  $y = y'$ . Per tant, té inversa. Concretament, donat que  $x_1 = x \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)$ ,  $x_2 = y \left(1 - \frac{x_3}{R}\right)$ , tenim

$$\phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{Rx_1}{R - x_3}, \frac{Rx_2}{R - x_3} \right), \quad \phi^{-1}(0, 0, R) = \infty.$$

Sumat a què és contínua i amb inversa contínua, se segueix el següent teorema:

**Teorema 1.3.** *La projecció estereogràfica és un homeomorfisme.*

D'altra banda, podem trobar la distància euclidiana entre dos punts de l'esfera en funció dels punts del pla complex a què son homeomorfe. Aquesta s'anomena distància cordal de dos punts del pla  $z_1 = (x_1, y_1)$  i  $z_2 = (x_2, y_2)$ , i ho denotem  $\bar{d}(z_1, z_2)$ . A partir de la Definició 1.2, s'obté calculant directament que la distància cordal al quadrat val

$$\bar{d}(z_1, z_2)^2 = \frac{4R^4|z_1 - z_2|^2}{(R^2 + x_1^2 + y_1^2)(R^2 + x_2^2 + y_2^2)}.$$

Amb això veiem que escollint punts suficientment petits de forma que la distància cordal s'aproximi fins a ser igual a la de la superfície, és a dir, l'arc que va d'un punt a un altre tendeix al sinus d'aquest arc (la distància cordal).

Com que el diferencial d'un arc i el diferencial del sinus són infinitesimals equivalents, és a dir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

obtindriem que el límit quan  $z_1$  tendeix a  $z_2$  és el diferencial de longitud (d'arc) de l'esfera. No obstant, no ens aturarem en aquest fet fins més endavant.

### 1.3 Definició i propietats de la transformació de Möbius

Un cop hem definit el pla completat, necessitem funcions que puguin actuar sobre aquest espai, és a dir, necessitem funcions  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definició 1.4.** Siguin  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  constants sotmeses a la restricció  $ad - bc \neq 0$ . Anomenem *transformacions de Möbius*<sup>1</sup> aquelles aplicacions  $S(z) = w$  de la forma

$$w = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (1.3.1)$$

La condició  $ad - bc \neq 0$  és necessària ja que, si s'anul·lés  $ad - bc$ , hi hauria cancel·lació i el valor de la transformació  $f(z)$  seria constant possiblement llevat d'algun valor on no hi estés definida com, per exemple, la indeterminació  $0/0$ .

### 1.3.1 El grup de les transformacions de Möbius

Podem expressar l'acció d'una transformació de Möbius mitjançant un tipus de coordenades que va introduir August Möbius, les coordenades homogènies. Posem  $z = z_1/z_2$  i  $w = w_1/w_2$ . Llavors, la transformació homogràfica (1.3.1) es pot reescriure com

$$\begin{aligned} w_1 &= az_1 + bz_2 \\ w_2 &= cz_1 + dz_2. \end{aligned}$$

Això ho podem expressar mitjançant la notació següent:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim una transformació lineal regular  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Noteu que el determinant de la matriu quadrada és  $ad - bc \neq 0$ . Una matriu d'aquestes característiques es diu que pertany al grup  $GL(2, \mathbb{C})$  o *grup lineal general*. Tota transformació de Möbius està directament associada a la matriu com aquesta, perquè és única per a cada transformació, llevat del producte per qualsevol  $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$ , ja que

$$\frac{\lambda az_1 + \lambda bz_2}{\lambda cz_1 + \lambda dz_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}.$$

D'això es conclou que dues transformacions són iguals si i només si llurs matrius siguin proporcionals per a un cert  $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$ . Llavors, hem definit la relació de semblança  $A \sim B \iff A = \lambda B$ . Si  $A$  és cada matriu amb  $\det A = 1$ , les transformacions de Möbius estaran definides pel grup  $GL(2, \mathbb{C})/\sim$ . Llavors serà útil, quan s'indiqui, que suposem només les matrius quadrades bidimensionals amb entrades complexes i determinant unitat, ja que la resta de matrius amb determinants no nuls són resultat del producte d'aquestes per  $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$ . Exposem algunes remarques que caldrà tenir presents:

Per una banda, el conjunt de les transformacions de Möbius amb matrius  $A$  de determinant unitat forma un grup juntament amb la composició de funcions, que denotarem  $\mathcal{M}$  i s'anomenarà grup de transformacions de Möbius bidimensionals. Per altra banda, el conjunt d'aquestes matrius juntament amb la multiplicació de matrius es evident que forma un grup. Aquest es designa  $SL(2, \mathbb{C})$  i s'anomena *grup lineal especial* de matrius quadrades bidimensionals i entrades complexes.

Podem observar que

$$SL(2, \mathbb{C}) \approx \mathcal{M},$$

ja que d'una banda, el producte de dues matrius

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>També s'identifiquen amb les denominacions de *transformacions homogràfiques*, *transformacions lineals racionals* o *transformacions especials conformes*.

i de l'altra, la composició de les dues transformacions de Möbius corresponents és

$$\frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}.$$

### 1.3.2 Propietats de composició

Els següents exemples de transformació de Möbius tenen noms propis: una *homotècia*:  $z \mapsto rz$ ,  $r > 0$ ; una *rotació*:  $z \mapsto e^{i\theta}z$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ; una *translació*:  $z \mapsto z + b$ ; i una *inversió*:  $z \mapsto 1/z$ .

Si tenim una transformació de Möbius com la següent

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

i restem i afegim  $\frac{a}{c}$ , per a  $c \neq 0$ , obtenim

$$w = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c}.$$

És a dir, la transformació de Möbius que hem definit està composta a partir d'una translació  $z \mapsto z + d/c$ , una inversió  $z \mapsto 1/z$ , una homotècia i/o rotació  $z \mapsto \frac{bc-ad}{c^2}z$ , i una translació  $z \mapsto z + a/c$ . Si  $c$  és zero, llavors és més que evident que la transformació  $T$  seria composició d'una homotècia i/o rotació i una translació. Amb tot això, hem arribat al següent resultat:

**Teorema 1.5.** *Tota transformació de Möbius és composició d'homotècies, rotacions, translacions i inversions.*

### 1.3.3 Propietats d'inversa

Considerem la transformació de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.3.2}$$

amb la condició  $ad - bc \neq 0$ . Llavors, observem que quan  $T(z_1) = T(z_2)$ , llavors  $(cz_1 + d)(az_2 + b) = (cz_2 + d)(az_1 + b)$ . Calculant els dos productes, apareix una sèrie de simplificacions que, treient factor comú de  $z_1 - z_2$ , porten a que

$$(ad - bc)(z_1 - z_2) = 0.$$

Com que el determinant no s'anul·la, podem dividir entre  $ad - bc$  a tots dos costats i obtenir  $z_1 = z_2$ . Amb això hem obtingut que l'aplicació  $T$  és injectiva.

Si a això hi afegim al fet que si tenim  $w$ , llavors existeix un nombre  $z$  de forma que  $w = T(z)$ , és a dir,  $T$  és exhaustiva, ja que

$$z = -\frac{dw - b}{cw - a}, \tag{1.3.3}$$

llavors obtenim que l'aplicació és bijectiva. Com que és bijectiva, existeix una transformació inversa  $T^{-1}$  que retorna el pla  $w$  al pla  $z$ . Això demostra que tota transformació de Möbius té inversa, i que és de la forma (1.3.2). Noteu com es verifica la igualtat següent:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 1.3.4 Pol i punt límit

Considerem la transformació de Möbius (1.3.2). Si calculem la seva derivada,

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Una transformació de Möbius és meromorfa al pla complex amb un pol a  $-\frac{d}{c}$ , ja que és analítica en tot el pla complex llevat en el pol. Això vol dir, de forma més precisa, que per a cada  $z_0 \in \mathbb{C}$ , existeix un entorn  $B(z_0, \delta)$  contingut a  $\mathbb{C}$  de forma que la funció és analítica a cada punt de l'entorn, o bé existeix un entorn del pol on és analítica, sense ser-ho a aquest. En aquest cas ens trobem que en qualsevol entorn de  $-\frac{d}{c}$ ,  $c \neq 0$ , la funció és analítica: existeix

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

però no en el punt  $-\frac{d}{c}$ . Per contra, en qualsevol entorn d'aquest sí. En canvi, aquesta funció és analítica a  $\widehat{\mathbb{C}}$ , ja que definim que la imatge del punt pol és  $\infty$ . En canvi, la imatge de  $\infty$ , ja que són funcions bijectives, és el punt pol de la inversa. En l'equació (1.3.3) veiem que és  $\frac{a}{c}$ , i és el *punt límit*. Es pot veure com un límit quan  $z \rightarrow \infty$ . Amb això hem assegurat que les aplicacions homogràfiques són funcions contínues en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Com que les transformacions de Möbius són funcions contínues i bijectives, hem arribat al següent fet:

*Conclusió.* Les transformacions de Möbius són homeomorfismes.

**Teorema 1.6.** *El grup d'automorfismes holomorfs de  $\widehat{\mathbb{C}}$  és igual a  $\mathcal{M}$ .*

La demostració d'aquest teorema la trobem a [15, pàg. 8]. Nosaltres ens limitarem a esmentar-lo, ja que el necessitarem.

## 1.4 Conformalitat i orientació

Les transformacions de Möbius no preserven en tots els casos la forma de l'objecte al qual són aplicades, com succeeix, per exemple, amb les translacions. No obstant, sabem que són funcions conformes, és a dir, que preserven els angles euclidians de l'objecte que es transforma. Vegem aquest concepte amb més profunditat:

**Definició 1.7.** Considerem un obert  $\Omega$  del pla complex, i una funció  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Suposem que aquesta funció és analítica en  $z_0$ . En aquesta regió estan definides, a més, dues corbes paramètriques  $z_1 = \gamma_1(t)$  i  $z_2 = \gamma_2(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , que es creuen a  $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ . Sigui  $f(\gamma_i^{-1}(t)) = F_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Asumint que les derivades  $\dot{F}_1$  i  $\dot{F}_2$  existeixen en el punt  $z_0$ . Si l'angle que formen els dos vectors tangents  $\dot{\gamma}_1(t)$  i  $\dot{\gamma}_2(t)$  a  $z_0$  és el mateix que el format pels vectors  $\dot{F}_1$  i  $\dot{F}_2$  a  $z_0$ , aleshores la funció  $f$  és conforme.

Podem veure que l'angle es preserva mitjançant la regla de la cadena: podem suposar que tenim una corba suau  $\gamma$  definida per  $z = z(t)$ , i en la regió  $\Omega$  on la funció és analítica. Llavors, la corba resultant  $\gamma'$ , després d'aplicar la funció  $f$ , és  $f(z(t)) = w(t)$ . Hem suposat que existeixen les tangents  $\dot{f}(z)$  i  $\dot{z}(t)$ , i són diferents de zero, ja que  $\gamma$  és una corba suau. Llavors, ja que  $\dot{w}(t) = \dot{f}(z(t))\dot{z}(t)$ , és evident que  $\gamma'$  és una corba suau. Suposem que  $\dot{f}(z) \neq 0$ . Llavors, si calculem els arguments obtenim

$$\arg \dot{w}(t) - \arg \dot{z}(t) = \arg \dot{f}(z).$$

Per tant, l'angle entre les dues tangents de les corbes és independent de les corbes, ja que és  $\arg \dot{f}(z)$ , amb la qual cosa les corbes que tinguin les mateixes tangents en aquest punt continuaran formant el mateix angle. És a dir, dues corbes que formen un angle formaran el mateix angle un cop aplicada la funció. Per tant, direm que una funció analítica és *conforme* a tots els punts on la seva derivada  $\dot{f}(z) \neq 0$ .

Ara considerem una transformació de Möbius de la forma

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

amb  $ad - bc \neq 0$ . Com havíem vist abans, la seva derivada és

$$S'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Llavors, perquè la derivada sigui nul·la, caldrà que  $cz + d = \infty$ . En vista d'això, es conclou que la funció és conforme en tots els punts llevat en el punt de l'infinit, és a dir,  $S$  és conforme a  $\mathbb{C}$ . Ara bé, podem interpretar l'angle a  $\infty$  de la següent forma:

**Definició 1.8.** Sigui  $z_1(t)$  i  $z_2(t)$  dues corbes paramètriques que passen per  $\infty$  i la inversió  $g(z) = 1/z$ . Sigui  $g_i = g(z_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Suposem que existeixen les tangents  $\dot{g}_1$  i  $\dot{g}_2$  en el punt  $w = 0$ . Definim que l'angle entre les dues corbes a  $\infty$  és l'angle entre  $\dot{g}_1$  i  $\dot{g}_2$  en el punt  $w = 0$ .

En resum, l'angle a  $\infty$  entre dues corbes ve donat per l'angle que hi ha a  $\frac{a}{c}$  entre les imatges de les corbes. Per tant, definit això, tenim el següent fet:

**Lema 1.9.** *Les transformacions de Möbius són conformes.*

## 1.5 Punts fixos

Sigui  $T$  una transformació de Möbius arbitrària. Rep el qualificatiu de punt fix aquell punt  $z$  que verifica l'equació  $z = \frac{az+b}{cz+d}$ . Una primera computació ens permet obtenir l'equació  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ .

Amb això, distingim dos casos. D'una banda, si  $c = 0$  llavors  $S(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Tenim dos punts fixos:  $z = \infty$  i també  $z = \frac{b}{d-a}$ . Si es donés que  $d = a$  aleshores hi hauria una solució doble  $z = \infty$ , i la transformació es tractaria d'una translació, de la forma  $T(z) = z + b$ . Quan es tracti d'una solució doble direm que fixa un únic punt. D'altra banda, si  $c \neq 0$ , tenim dues i només dues solucions diferents o una doble. Aplicant la fórmula quadràtica:  $z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}$ . La solució doble es donarà si el discriminant  $(d-a)^2 + 4bc = 0$ . En resum tenim el següent fet:

**Proposició 1.10.** *Una transformació de Möbius diferent de la identitat fixa com a mínim un punt  $i$ , com a molt, dos.*

Si la aplicació  $T$  fixes tres punts, llavors seria la identitat, és a dir, els fixaria tots. Això ens permet veure que si dues homografies  $S$  i  $T$ , per a tres punts  $z_1, z_2, z_3$ , verifiquen  $S(z_i) = T(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , llavors  $S^{-1}T = 1$  o, el que és el mateix,  $S = T$ . La implicació contrària és que si  $S = T$  llavors existeixen tres punts  $z_1, z_2, z_3$  que verifiquen  $S(z_i) = T(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Problema 1.11.** Demostreu que, per a dues homografies  $S, T$  arbitràries, si  $S$  i  $T$  fixen els mateixos dos punts, aleshores les dues transformacions commuten.

Com que tenen els mateixos punts fixos, podem conjugar per una transformació de Möbius per assumir, sense pèrdua de generalitat, que aquests són  $0$  i  $\infty$ . Si es dona això, llavors  $c = 0$  i  $b = 0$ , amb la qual cosa les dues transformacions són  $S(z) = az$  i  $T(z) = a'z$ . En aquest cas és evident que  $ST(z) = aa'(z) = a'a(z) = TS(z)$ .

## 1.6 La raó simple

Considerem una transformació homogràfica de la forma

$$w = \frac{z - b}{a - b},$$

amb determinant  $a - b \neq 0$ , on  $a$  i  $b$  són nombres complexos. La denotem amb  $w = (z, a, b)$ . Observeu que  $a \mapsto 1$  i  $b \mapsto 0$ . Els punts pol i límit són  $\infty$ . Si multipliquem per  $a - b$  als dos costats de l'equació anterior i hi sumem  $b$  obtindrem

$$z = b + w(a - b).$$

Això ens indica que perquè els punts  $z$ ,  $a$  i  $b$  estiguin alineats cal que  $w$  sigui un nombre real i, altrament, perquè sigui un nombre real, cal que estiguin alineats. Per tant, obtenim el següent resultat:

**Proposició 1.12.** *La raó simple és un nombre real si i només si els punts  $z$ ,  $a$  i  $b$  estan alineats.*

Podem provar que les aplicacions  $z \mapsto \alpha z + \beta$  preserven la raó simple. És força evident la igualtat següent

$$\frac{\alpha z + \beta - \alpha b - \beta}{\alpha a + \beta - \alpha b - \beta} = \frac{z - b}{a - b}.$$

Això prova la invariància de la raó simple sota l'acció de les aplicacions  $z \mapsto \alpha z + \beta$ . Si hi sumem que la raó simple de tres punts és un nombre real si i només si passa una recta pels tres punts podem enunciar el següent fet:

**Proposició 1.13.** *La raó simple porta rectes a rectes.*

## 1.7 La raó doble

### 1.7.1 Definició i propietats

**Definició 1.14.** Siguin  $z_1, z_2, z_3$  tres punts diferents del pla completat. Definim la raó doble de quatre punts  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , de notació  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , com la raó entre  $(z_1, z_2, z_3)$  i  $(z_1, z_2, z_4)$ .

Per tant, haurem de tenir que és de la forma

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}. \quad (1.7.1)$$

En primer lloc, si  $z_1 = z_2$ , llavors la raó doble és 1, si  $z_1 = z_3$ , la raó doble val 0, i si  $z_1 = z_4$ , llavors la raó doble és  $\infty$ . Observeu que si prenem la raó doble en funció de  $z_1 = z$ , aquesta és una transformació homogràfica, ja que, si diem  $\lambda = (z_2 - z_4) : (z_2 - z_3)$ , la raó doble de (1.7.1) es reescriuria com  $R(z) = \lambda \frac{z - z_3}{z - z_4}$ , i el determinant seria  $\lambda(z_3 - z_4) \neq 0$ . Si  $z_2, z_3$  o  $z_4$  és  $\infty$ , podem veure la raó doble com un límit quan  $z \rightarrow \infty$ , així que valdria, respectivament,

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}, \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}, \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Ara suposarem que existeix una altra transformació de Möbius  $T$  de forma que  $T(z_2) = 1$ ,  $T(z_3) = 0$  i  $T(z_4) = \infty$ . En aquest cas, veurem que  $S = T^{-1}R$  fixa  $z_2, z_3$  i  $z_4$ . Com que fixa tres punts, ha de ser la identitat. Per tant,  $T^{-1}R = 1$  o, el que és el mateix,  $T = R$ . Això prova el següent teorema:

**Teorema 1.15.** *La raó doble és l'única transformació de Möbius que porta  $z_2$  a 1,  $z_3$  a 0 i  $z_4$  a  $\infty$ .*

A més, podeu observar com, donada una aplicació homogràfica arbitrària  $T$ , i  $R(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ , llavors el Teorema 15 ens permet escriure que

$$(Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = RT^{-1}(Tz) = R(z) = (z, z_2, z_3, z_4),$$

és a dir, s'obté el fet següent:

**Teorema 1.16.** *Les transformacions de Möbius preserven la raó doble.*

Pel que hem vist a la secció dels punts fixos, si  $z_2, z_3, z_4$  són tres punts diferents qualssevol i  $w_2, w_3, w_4$  punts diferents qualssevol, de forma que existeix una aplicació que porta  $z_i$  a  $w_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , llavors és única. Ara podem cercar quina és aquesta aplicació. Considereu les dues transformacions de Möbius  $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ ,  $S(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$ . Per tant, existeix una única transformació de Möbius que porta  $z_i$  a  $w_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ .

### 1.7.2 Imatges de circumferències i rectes per homografies

Primerament, hem de definir que entendrem una recta com un cercle que passa pel punt de l'infinit. Una forma de veure-ho és que a la representació de l'esfera de Riemann tenim només cercles. Per tant, d'ara en endavant, quan parlem de *cercle* ens referirem tant a una circumferència com a una recta. Una altra convenció de nomenclatura serà afegir el punt de l'infinit als nombres reals de la següent manera:  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Ara ja podem enunciar el següent fet:

**Lema 1.17.** *Sigui  $S$  una transformació de Möbius. Aleshores, el conjunt de punts que tenen com a imatge  $\widehat{\mathbb{R}}$  reposen sobre un cercle a  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

*Demostració.* Considerem els punts que tenen com a imatge  $\widehat{\mathbb{R}}$ . En aquests s'ha de verificar que

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = \frac{\overline{az_0 + b}}{\overline{cz_0 + d}},$$

ja que *un nombre és igual al seu conjugat si i només si és un nombre real*. Reduint, en la mesura possible, l'equació a la forma canònica, obtenim

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|z_0|^2 + (a\bar{d} - \bar{a}d)z_0 + (b\bar{c} - \bar{b}c)\bar{z}_0 + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0.$$

Si  $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$ , com que  $a\bar{d} - \bar{a}d$  no s'anul·la, obtenim l'equació d'una recta. En el cas contrari, dividim entre  $a\bar{c} - \bar{a}c$ , i obtenim

$$|z_0|^2 + \frac{\overline{b\bar{c} - \bar{b}c}}{a\bar{c} - \bar{a}c}z_0 + \frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\bar{z}_0 - \frac{\bar{b}d - b\bar{d}}{a\bar{c} - \bar{a}c} = 0.$$

Completem el quadrat a l'equació anterior:

$$\left| z_0 + \frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right|^2 = \left| \frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right|^2 + \frac{\bar{b}d - b\bar{d}}{a\bar{c} - \bar{a}c}.$$

D'aquesta última expressió se segueix immediatament, amb el càlcul directe, l'equació següent:

$$\left| z_0 + \frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right| = \left| \frac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right|,$$

corresponent a un cercle de radi  $\left| \frac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right|$  centrat a  $-\frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}$ . □

Com a conseqüència directa d'aquest Lema, i ja que la raó doble és una homografia, tindrem que  $(z, z_2, z_3, z_4)$  és un nombre real o  $\infty$  si i només si els punts  $z, z_1, z_2, z_3$  es troben sobre una circumferència generalitzada. Això, sumat a què les homografies preserven la raó doble, ens permet veure fàcilment el següent fet:

**Teorema 1.18.** *Les transformacions de Möbius porten cercles a cercles.*

Com que un cercle es defineix per tres punts d'aquest, i sempre existeix una única aplicació homogràfica que porta tres punts a uns altres punts determinats, es conclou que donats dos cercles sempre existeix una homografia que els relaciona.

## 1.8 Orientació

Una qualitat, a més que preserven angles, de les transformacions de Möbius, és que preserven la orientació. El concepte d'orientació cal definir-lo.

**Definició 1.19.** Una funció preserva la orientació si l'orientació del pla tangent a la funció és sempre la mateixa, és a dir, si el determinant jacobinà és positiu.

En primer lloc, considerem una funció  $F$  analítica i contínua en una regió  $\Omega$ , i que tingui en tots els punts derivada diferent de zero. Com que està definida a  $\Omega$ , podem expressar-la com  $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , on  $z = (x, y)$  i  $u, v$  són funcions de dues variables reals. Llavors, com que és analítica sobre  $\mathbb{C}$ , es verifiquen llavors, i només llavors, les condicions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

El determinant jacobinà és  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 > 0$ , és a dir, estrictament positiu, i en cap cas 0, ja que el diferencial  $dF = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$  és diferent de zero. El jacobinà ens indica, com que és positiu, que l'orientació del pla tangent a la funció és sempre la mateixa. Ara observem que les transformacions de Möbius tenen derivada diferent de zero, així que s'obté el resultat següent:

**Lema 1.20.** *Les transformacions de Möbius preserven l'orientació.*

Hem demostrat que el grup de les transformacions de Möbius conserva l'orientació, però, ara bé, necessitem un criteri pràctic que ens permeti orientar-nos sobre el pla i que quedi invariant davant de l'acció de les transformacions de Möbius. Estem parlant del *Principi d'orientació*:

**Definició 1.21.** (Principi d'orientació) Direm que per a cada terna de punts  $z_2, z_3, z_4$  consecutius d'un cercle, el punt  $z$  del pla completat:

- (a) Es troba a l'esquerra del cercle si  $\text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) < 0$ ;
- (b) Es troba a la dreta del cercle si  $\text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0$ ;

Si  $\text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) = 0$ , llavors el punt reposa sobre el cercle. Gràcies a què les transformacions de Möbius preserven la raó doble, aquest criteri és vàlid. És indispensable que els tres punts  $z_2, z_3, z_4$  siguin consecutius. Com que les transformacions homogràfiques preserven la raó doble, podem considerar el cercle de la recta real, i darem la distinció, doncs,



---

entre el semiplà superior (dreta) i el semiplà inferior (esquerra). Siguin  $a, b, c, d$  nombres reals restringits amb  $ad - bc \neq 0$ . El càlcul directe ens dóna que

$$\operatorname{Im}(z, z_2, z_3, z_4) = \operatorname{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z.$$

Suposem que els tres punts són  $1, 0, \infty$ . Donat que  $(z, 1, 0, \infty) = z$ , obtenim, com esperavem,  $\operatorname{Im}(z, 1, 0, \infty) = \operatorname{Im} z$ . Així que quan ens orientem respecte la recta real, els punts de l'esquerra són els que tenen la part imaginària negativa, i els punts de la dreta són els que tenen la part imaginària positivés qui a.



## Capítol 2

# Simetria i comportament

### Resum

És evident que no podem classificar les transformacions de Möbius en homotècies, rotacions, translacions... ja que la gran majoria de transformacions del grup  $\mathcal{M}$  no són una les anteriors, sinó una superposició d'elles. Per tant, cal un criteri general per discriminar-les. Aquest està regulat pel comportament de la transformació respecte als punts fixos. Abans que res cal introduir les transformacions de Möbius conjugades.

### 2.1 Transformació de Möbius conjugada

Fins ara hem tractat les homografies i les seves propietats fonamentals. Ara caldrà que tinguem en compte la reflexió respecte l'eix real  $z \mapsto \bar{z}$ . Si posem a la dreta d'una homografia per la conjugació  $z \mapsto \bar{z}$ , obtindrem una aplicació de la forma

$$S(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Aquestes aplicacions s'anomenen *transformacions de Möbius conjugades*. Amb aquesta definició ja podem observar algunes propietats evidents. En primer lloc, per exemple, tota transformació de Möbius conjugada és composició d'homotècies, rotacions, translacions, inversions i la reflexió  $z \mapsto \bar{z}$ . En segon lloc, són bijectives, ja que  $z \mapsto \bar{z}$  és bijectiva. Així doncs, tenen inversa, que és de la forma

$$z = -\frac{\bar{d}\bar{w} - \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} - \bar{a}},$$

i evidentment,  $\bar{d}\bar{a} - \bar{c}\bar{b} \neq 0$ . El punt pol és  $-\frac{\bar{d}}{\bar{c}}$ , mentre que el punt límit és  $\frac{a}{c}$ . Aquesta funció no és holomorfa, sinó que és antiholomorfa, ja que la derivada és

$$S'(z) = \frac{ad - bc}{(c\bar{z} + d)^2}.$$

Com que són antiholomorfes, posant  $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , les condicions de Cauchy-Riemann s'alteren, en reflectir  $x \mapsto x$  i  $y \mapsto -y$ , de la següent manera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

El jacobià és  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 < 0$ , que és estrictament negatiu. Per tant, les funcions antiholomorfes sempre inverteixen l'orientació i, consegüentment, tota transformació de Möbius conjugada també.

Així com les homografies preservaven la raó doble, les transformacions de Möbius conjugades la reflecteixen respecte l'eix real, és a dir,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \overline{(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4)}.$$

Per tant, el Principi d'Orientació ens diu que els punts que estiguin a l'esquerra d'un cercle aniran a la dreta del cercle imatge, i viceversa. Ara bé, si la raó doble és un nombre real, sota l'acció d'una transformació de Möbius conjugada romandrà com un nombre real. Així doncs, aquestes transformacions també porten cercles a cercles.

Per a les transformacions de Möbius conjugades diem que un punt fix és aquell que verifica

$$z = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Doncs resulta que existeixen constants  $a, b, c, d$  complexes amb  $ad - bc \neq 0$  per les quals la igualtat anterior no val per a cap  $z$  del pla completat.

**Proposició 2.1.** *Sigui  $S$  una transformació de Möbius amb la normalització  $ad - bc = 1$ . Aleshores, perquè existeixi una transformació de Möbius conjugada  $T$  tal que  $S = T^2$  és necessari i suficient que  $a + d$  sigui un nombre real.*

*Demostració.* D'una banda, suposem que la transformació de Möbius conjugada  $T(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$  té la restricció  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . Llavors,

$$T^2(z) = \frac{\alpha(\overline{\alpha\bar{z} + \beta}) + \beta(\overline{\gamma\bar{z} + \delta})}{\gamma(\overline{\alpha\bar{z} + \beta}) + \delta(\overline{\gamma\bar{z} + \delta})} = \frac{(|\alpha|^2 + \beta\bar{\gamma})z + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\delta}}{(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\gamma}\delta)z + \bar{\beta}\gamma + |\delta|^2}.$$

Obtenim que  $a + d = |\alpha|^2 + \beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma + |\delta|^2$  és un nombre real, és a dir,  $(a + d)^2$ . D'altra banda, les condicions que s'han de donar són  $a = |\alpha|^2 + \beta\bar{\gamma}$ ,  $b = \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\delta}$ ,  $c = \bar{\alpha}\gamma + \bar{\gamma}\delta$ ,  $d = \bar{\beta}\gamma + |\delta|^2$ . El determinant és

$$1 = ad - bc = |\alpha|^2|\delta|^2 + |\beta|^2|\gamma|^2 - \alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta} = |\alpha\delta - \beta\gamma|^2,$$

d'on obtenim una única condició:  $|\alpha\delta - \beta\gamma| = \pm 1$ . Ja que  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , això es verificarà sempre. És suficient, doncs, que  $a + d \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 2.2 Simetria respecte a un cercle

Considerem un cercle definit per tres punts  $z_2, z_3$  i  $z_4$ . Direm que dos punts  $z$  i  $z^*$  són simètrics si i només si

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}. \quad (2.2.1)$$

L'aplicació que porta  $z$  a  $z^*$  rep el nom de *reflexió*. Observeu que  $z = z^*$  si i només si els punts  $z, z_2, z_3, z_4$  formen un cercle. La manera com s'ha d'interpretar això és la següent: resulta que els punts  $z_2, z_3$  i  $z_4$  es transformen, mitjançant la raó doble, en punts de la recta real, és a dir,  $1, 0$  i  $\infty$  respectivament. Si el punt  $z$  va a  $w$ , la conseqüència de la definició és que el simètric de  $w$  és  $\bar{w}$ .

**Teorema 2.2.** (Principi de simetria) *Les transformacions de Möbius preserven la simetria.*

Amb preservar la simetria entenem que per a cada parella de punts simètrics  $z$  i  $z^*$ , i per a cada transformació de Möbius  $S(z)$ , es verifica  $S(z^*) = S(z)^*$ . El teorema és evident partint del fet que les homografies preserven la raó doble.

### 2.2.1 Simetria respecte a una recta

Considerem una recta  $r$ . Com que la recta passa pel punt de l'infinit, podem assumir  $z_4 = \infty$  i, així, l'equació (2.2.1) es redueix a

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3}.$$

En valor absolut obtenim  $|z - z_3| = |z^* - z_3|$ , així que la distància de  $z$  i  $z^*$  a qualsevol punt de la recta serà la mateixa. Els punts  $z$  i  $z^*$  reposen cadascun a semiplans diferents dels que genera la recta, llevat si són el mateix punt,  $z = z^*$ . Això ens indica que cada reflexió respecte a una recta és un moviment de la mètrica. Com que  $z$  i el seu simètric disten a la mateixa distància de  $z_3$ , sigui quin sigui el seu valor, obtenim que la recta  $r$  és la bisectriu dels punts  $z$  i  $z^*$ . Ho podem veure, a més, en la diferència d'arguments:

$$\arg(\bar{z} - \bar{z}_3) - \arg(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = \arg(z^* - z_3) - \arg(z_2 - z_3),$$

que se simplifica en  $\arg(\overline{z - z_3}) = \arg(z^* - z_3)$ .

### 2.2.2 Simetria respecte a un cercle euclidià

Sigui  $\gamma$  un cercle de radi  $R > 0$  i centre  $a$ , i siguin  $z_2, z_3, z_4$  punts d'aquest cercle. La preservació de la raó doble per part del grup  $\mathcal{M}$  ens permet escriure

$$\begin{aligned} \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} &= \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} = \\ &= \left( \bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a} \right) = \left( \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_2, z_3, z_4 \right); \end{aligned}$$

Consegüentment, per a tot  $z$ ,

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a,$$

mentre que  $(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = |z^* - a| \cdot |z - a| = R^2$ . Els punts  $a$ ,  $z$  i  $z^*$  estan alineats ja que, si  $|z - a| = \rho$   $z^* = a + (z - a)(R/\rho)^2$  és l'equació d'una recta que passa per  $a$ ,  $z$  i  $z^*$ . Com que  $|z^*| \rightarrow \infty$  quan  $z \rightarrow a$ , és natural definir que el punt simètric de  $a$  és  $\infty$ .

## 2.3 Distorsió de diàmetres

La reflexió respecte a una recta, com hem dit abans, és un moviment de la mètrica, ja que consisteix en una conjugació, una translació i una rotació. Un conjunt  $B$  qualsevol verificarà, a partir d'això, que el seu diàmetre serà constant.

Ara bé, respecte a un cercle no succeeix el mateix. La tasca d'ara és examinar com es distorsiona el diàmetre després d'un reflexió respecte a un cercle. podem prendre un cercle, de radi  $R$  i podem assumir que  $a = 0$  sense pèrdua de generalitat, mitjançant la conjugació per rotacions i translacions, que són isometries de la mètrica euclidiana.

La simetria respecte aquest cercle és  $w = R^2/\bar{z}$ . La distància de 0 al punt més proper de la frontera  $\partial B$  és  $\rho$ , així que una circumferència  $E = \{z : |z| = \rho\}$  està continguda a  $\text{Ext}(B)$  i, a més, és tangent a aquest. Després d'una reflexió respecte el cercle, els punts de l'interior d'aquest van a l'exterior de la imatge d'aquest i viceversa. A més, el cercle  $E \rightarrow E' = \{w : |w| = r^2/\rho\}$ , i  $B'$  és tangent a aquest. Tenim dos casos:

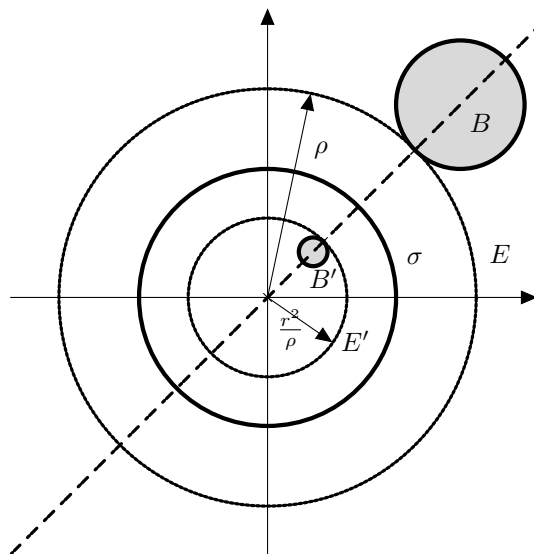


Figura 2.3.1:

1. Si  $B$  està completament a l'exterior del cercle (respectivament, a l'interior del cercle), llavors el cercle  $E$  va a l'interior (respectivament, a l'exterior) del cercle, i al seu interior es trobarà tangent  $B'$ , és a dir,  $E'$  delimitarà a  $B'$  (fig. ). Com que  $\text{diam}(E') = \frac{2r^2}{\rho}$ , obtenim

$$\text{diam}(B') = \sup_{z_1, z_2 \in B'} |z_1 - z_2| \leq \frac{2r^2}{\rho}.$$

2. Si  $B$  té una part a l'interior del cercle i una part a l'exterior del cercle,  $E$  és tangent a  $B$  per l'interior del cercle. Així doncs,  $E'$  conté al seu interior a  $B'$ , i com que  $\text{diam}(E') = \frac{2r^2}{\rho}$ , obtenim novament l'equació anterior.

Altrament, si  $\infty \in E$  aleshores, com que  $\infty \mapsto 0$  i el punt tangent a  $E'$  es troba a una distància de 0 equivalent a  $\frac{r^2}{\rho}$ , el diàmetre ha de ser major o igual a aquesta longitud, és a dir,

$$\frac{r^2}{\rho} \leq \text{diam}(B') = \sup_{z_1, z_2 \in B'} |z_1 - z_2| \leq \frac{2r^2}{\rho}.$$

**Proposició 2.3.** Considerem la reflexió d'un cercle de radi  $R$  i centre  $a$ , i un conjunt  $B$  tancat que no conté a  $a$ . Si  $B'$  és la imatge de  $B$ , i  $\rho$  és la distància més curta a al conjunt  $B$ , llavors el diàmetre (euclidià)

$$\text{diam}(B') = \sup_{z_1, z_2 \in B'} |z_1 - z_2| \leq \frac{2r^2}{\rho}.$$

Si  $\infty \in B$ , llavors

$$\frac{r^2}{\rho} \leq \text{diam}(B') = \sup_{z_1, z_2 \in B'} |z_1 - z_2| \leq \frac{2r^2}{\rho}.$$

## 2.4 Classificació del grup $\mathcal{M}$

En primer lloc, classificarem les transformacions del grup  $\mathcal{M}$ . Sigui  $S$  una transformació de Möbius

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

diferent de la identitat, i  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  constants sotmeses a la restricció  $ad - bc \neq 0$ .

1. Una transformació  $S$  que té un punt fix doble s'anomena transformació *parabòlica*. El punt fix pot ser  $\infty$  si  $c = 0$ ; o bé  $(a - d)/2c$  si  $c \neq 0$ . Més concretament,  $S$  és de la forma  $z \mapsto z + b$ ; o bé tal que  $4bc + (d - a)^2 = 0$ . De forma equivalent,  $S$  serà parabòlica si és conjugada a una translació  $z + b$ .
2. Per una banda, suposem que la transformació  $S$  té dos punts fixos diferents, que són  $\infty$  i  $b/(a - d)$ ,  $a \neq d$ ; o bé les solucions de l'equació quadràtica  $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ . Evidentment, el discriminant  $D = (a - d)^2 + 4bc \neq 0$ . Si  $z_1$  i  $z_2$  són els punts fixos, una composició  $TS(z_1) = 0$  i  $TS(z_2) = \infty$ , per una certa aplicació homogràfica  $T$ , ens permet assumir que els punts fixos són  $0$  i  $\infty$ ; la transformació  $T(z) = kz = |k|e^{i\theta}z$ . Si  $|k| = 1$  l'aplicació  $S$  és una transformació *el·líptica*. A la resta de casos, si  $\arg k = \theta \neq 0 + 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , parlarem d'una transformació *loxodròmica*, mentre que si  $\text{Arg} k = 0$ ,  $S$  rebrà el nom de transformació *hiperbòlica*.

**Lema 2.4.** Sigui  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$  una transformació de Möbius. Llavors  $\Lambda$  és:

- 1) parabòlica si i només si  $\text{Tr } \Lambda = \pm 2$ ;
- 2) el·líptica si i només si  $|\text{Tr } \Lambda| < 2$ ;
- 3) hiperbòlica si i només si  $|\text{Tr } \Lambda| > 2$  i  $\text{Tr } \Lambda \in \mathbb{R}$ ;
- 4) loxodròmica si i només si  $\text{Tr } \Lambda \notin \mathbb{R}$ .

*Notació.*  $\text{Tr } \Lambda = a + d$  denota la traça de la matriu  $\Lambda$ .

*Demostració.* En primer lloc, suposem que  $\text{Tr } \Lambda = a + d = \pm 2$ . Si  $c = 0$ , els punts fixos són  $\infty$  i  $b/(d - a)$ . També tenim  $ad = 1$ . En aquestes circumstàncies,  $a = d = \pm 1$ , i obtenim que l'únic punt fix és  $\infty$ . Si  $c \neq 0$ , per tal que trobem dos punts fixos iguals és necessari que el discriminant  $D = 4bc + (a - d)^2$  s'anul·li. Comprovem que succeeix en aquest cas: ja que  $ad - bc = 1$  tenim  $bc = ad - 1$ , d'on  $4bc + (a - d)^2 = 4ad - 4 + a^2 - 2ad + d^2 = (a + d)^2 - 4 = 0$ . Clarament, les dues solucions són  $a + d = \pm 2$ .

En segon lloc, suposem que  $\Lambda$  té dos punts fixos. Si conjuguem per la transformació de Möbius adequada podem assumir que fixa  $0$  i  $\infty$ . Com que  $\infty \mapsto \infty$  tenim que  $c = 0$ , i ja que  $0 \mapsto 0$  el terme  $b = 0$ . Per tant,  $\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ . Però, el determinant és  $ad = 1$  i, doncs,  $d = a^{-1}$  i, a més,  $|a| = |d| = 1$  (per tal que sigui el·líptica). Llavors, suposant que la fase principal de  $a$  és  $\alpha$ , la traça és  $\text{Tr } \Lambda = a + a^{-1} = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$ , gràcies a la propietat  $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ . Si  $-1 < \cos \alpha < 1$ , tenim que  $|\text{Tr } \Lambda| < 2$ , és a dir, si  $\alpha \neq 0 + m\pi$  per a tot  $m \in \mathbb{Z}$ .

En tercer lloc, com que  $|a|e^{i\alpha} + \frac{1}{|a|}e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$  si i només si  $|a| = 1$ , tenim que a la resta de casos, i.e., quan  $\Lambda$  no és ni parabòlica, ni el·líptica, llavors  $|\text{Tr } \Lambda| > 2$ . Finalment, una transformació parabòlica és aquella que verifiqui  $\alpha = 0$ , d'on  $a$  i  $d$  són nombres reals,  $a + d \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Tenim, consegüentment, que a  $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$  no hi ha transformacions loxodròmiques. En aquest cas:

**Lema 2.5.** *Sigui  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{R})$  una transformació de Möbius.*

- (1)  $\Lambda$  és parabòlica si i només si té un sol punt fix a  $\widehat{\mathbb{R}}$ ;
- (2)  $\Lambda$  és el·líptica si i només si té un punt fix al semiplà superior i un punt fix al semiplà inferior;
- (3)  $\Lambda$  és hiperbòlica si i només si té dos punts fixos a  $\widehat{\mathbb{R}}$ .

*Demostració.* Si  $\Lambda$  és parabòlica,  $a + d = \pm 2$ , llavors té els punts fixos  $\infty$  i  $(a - d)/2c$ , i  $c$  pot ser zero. Com que  $a, b, c, d$  són nombres reals, obtenim (1).

Vegem ara els dos casos restants: d'una banda, si  $\Lambda$  és el·líptica, llavors és conjugada a una rotació,  $A = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ . Com que fixa 0 i  $\infty$ , llavors  $\Lambda A^{-1}(0) = \Lambda(0)$  i  $\Lambda A^{-1}(\infty) = \Lambda(\infty)$ . Donat que  $0 \mapsto b/d$  i  $\infty \mapsto a/c$  mitjançant  $\Lambda$ , podem suposar que  $b/d$  i  $a/c$  són nombres reals diferents de zero mitjançant la rotació convenient. Si  $b/d$  és menor que zero (respectivament, major que zero), llavors  $\frac{a}{c}$  és major que zero (respectivament, menor que zero), així que  $T(0) = A\Lambda A^{-1}(0) = e^{i\theta} \frac{b}{d}$ ;  $T(\infty) = A\Lambda A^{-1}(\infty) = e^{i\theta} \frac{a}{c}$ , té  $\text{Im } T(0) \leq 0$  mentre que  $\text{Im } T(\infty) \geq 0$ , el que és el mateix,  $T(z)$  té, en qualsevol dels dos casos anteriors, un punt fix al semiplà superior i un punt fix al semiplà inferior, o viceversa.

Altrament, si  $\theta = 0$ , aleshores  $A$  no rota els punts fixos  $b/d$  i  $a/c$ , i romanen sobre la recta real, verificant  $b/d < 0$  (respectivament,  $b/d > 0$ ) i  $a/c > 0$  (respectivament,  $a/c < 0$ )  $\square$

## 2.5 Classificació de les transformacions de Möbius conjugades

Sigui  $S(z) = w$  una transformació de Möbius conjugada de la forma

$$w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

1. Si no té punts fixos, com que  $S^2(z)$  és una transformació de Möbius, fixarà com a mínim un punt (punt fix doble). Suposem que  $S^2(\infty) = \infty$  (conjugant  $S$  per una transformació de Möbius). Llavors, composant a l'esquerra per una translació, podem assumir que  $\infty \mapsto a/c = 0$ , és a dir,  $a = 0$ . A més,  $0 \mapsto b/d = \infty$ , d'on  $d = 0$ . Llavors  $w = \frac{b}{c\bar{z}}$  i, posant  $b/c = \mu$  obtenim  $w = \frac{\mu}{\bar{z}}$ . Composant a l'esquerra per una homotècia podem suposar que  $|\mu| = 1$ , és a dir  $\tilde{S}(z) = e^{i\theta} \bar{z}^{-1}$ . Les transformacions *pseudoel·líptiques* són aquelles que són conjugades a  $S(z) = e^{i\theta} \bar{z}^{-1}$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ .
2. Suposem que fixa un únic punt. Llavors podem compondre a l'esquerra per una transformació de Möbius per a suposar que fixa  $\infty$ , per la qual cosa  $c = 0$ . Llavors tenim una transformació de la forma  $z \mapsto a\bar{z} + b$  i, doncs,  $0 \mapsto b \neq 0$ . Però, com que no fixa 0, l'equació  $a\bar{z} + b = \bar{z}$  per a cert  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  ens proporciona que  $a = 1$  i  $z \mapsto \bar{z} + b$ . En aquest cas, parlem d'una transformació *pseudoparabòlica*.
3. Si fixa solament dos punts, podem assumir que són 0 i  $\infty$  pel raonament ordinari. Obviament  $c = 0$  i  $b = 0$ , així que  $z \mapsto \frac{a}{d}\bar{z}$ . A més,  $|a/d| \neq 1$ , ja que en aquest cas existirien més punts fixos com, per exemple, un punt  $z_0$  amb  $\text{Arg}(z) = \theta$  que podria verificar  $z_0 \mapsto z_0$  si  $z \mapsto e^{2i\theta} z$ . Així, la transformació ha de ser conjugada a  $t(z) = a\bar{z}$ . Una transformació de Möbius conjugada d'aquesta forma s'anomena *pseudohiperbòlica*.
4. Com que si t té més de dos punts fixos, llavors  $S^2$  també els fixa. Ja que  $S^2$  és una transformació de Möbius, ineludiblement és la identitat. Això últim ens proporciona que  $S$  verifica  $S = S^{-1}$ . D'aquesta manera,  $a = d$ ,  $b = -b$  i  $c = -c$ , és a dir,  $z \mapsto \bar{z}$ . En aquest cas,  $S$  fixaria la recta real completada  $\widehat{\mathbb{R}}$ . Com que les transformacions de



Möbius transformen cercles en cercles, composant a l'esquerra per una transformació de Möbius veiem que tota transformació de Möbius conjugada amb més de dos punts fixos, ha de fixar un cercle. Les transformacions de Möbius esteses d'aquesta forma són les *reflexions*.

Podriem classificar-les, també, mitjançant la naturalesa de  $S^2$ . En primer lloc, les transformacions *pseudoel·líptiques* són conjugades a  $S(z) = e^{i\theta}z^{-1}$ . Així doncs,  $S^2(z) = e^{2i\theta}z$ ,  $\theta \neq 0 + 2m\pi$ , és a dir,  $S^2$  és una transformació el·líptica. En segon lloc, les transformacions *pseudoparabòliques* són fruit de la conjugació per  $S(z) = \bar{z} + b$ . Per tant,  $S^2(z) = z + 2b$ , és a dir,  $S^2$  és parabòlica. En tercer lloc, les transformacions *pseudohiperbòliques* verifiquen que són conjugades a  $S(z) = a\bar{z}$ , així que  $S^2(z) = |a|^2z$ , és a dir,  $S^2$  és una transformació hiperbòlica. En quart i darrer lloc, una transformació conjugada a  $S(z) = \bar{z}$  es diu que és una *reflexió*. D'aquesta manera,  $S^2(z)$  és la identitat. Hem obtingut el fet següent:

**Lema 2.6.** *Sigui  $S$  una transformació de Möbius conjugada. Llavors*

- (i)  $S$  és pseudoel·líptica, si i només si  $S^2$  és el·líptica;
- (ii)  $S$  és pseudoparabòlica si i només si  $S^2$  és parabòlica;
- (iii)  $S$  és pseudohiperbòlica si i només si  $S^2$  és parabòlica; i
- (iv)  $S$  és una reflexió si i només si  $S^2$  és la identitat.

## 2.6 Comportament

### 2.6.1 Xarxa circular

Siguin  $a$  i  $b$  dos nombres complexos i  $w$  una transformació de Möbius  $w = S(z)$  tal que

$$w = k \frac{z - a}{z - b},$$

on evidentment  $k(a - b) \neq 0$ . Clarament verifica  $a \mapsto 0$  i  $b \mapsto \infty$ . Així doncs, tota recta del pla completat que creui per l'origen i, inevitablement, pel pol nord de l'esfera de Riemann, és a dir, per  $\infty$ , verificarà que és la imatge d'un cercle que passa per  $a$  i  $b$ . El conjunt de tots els cercles que tenen com a imatge rectes del pla completat que passen per l'origen els anomenem cercles  $C_1$ . Altrament, en mòdul es té l'equació següent:

$$\frac{|z - a|}{|z - b|} = r/|k|,$$

per a  $r = |w|$ . Aquesta es correspon als cercles de radi  $r/|k|$  i són els *cercles d'Apol·loni* (fig. 2.6.1) amb punt límits  $a$  i  $b$ , i els denotem per cercles  $C_2$ . La configuració formada per tots els cercles  $C_1$  i  $C_2$  s'anomena *xarxa circular* o *cercles de Steiner* determinats per  $a$  i  $b$  (fig. 2.6.2).

Sigui  $w = T(z)$  una transformació de Möbius diferent de la identitat de forma que  $a \mapsto a'$  i  $b \mapsto b'$ . Escrivint

$$\frac{w - a'}{w - b'} = k \frac{z - a}{z - b},$$

veiem que aquesta transformació sobre el pla porta els cercles  $C_1$  i  $C_2$  a tenir punts límit  $a'$ ,  $b'$ . Suposem que  $a$  i  $b$  són els punts fixos de  $T$ , és a dir,  $a' = a$  i  $b' = b$ . Naturalment,  $a \neq b$ . Aquesta transformació porta tota la xarxa circular sobre ella mateixa. Si  $k = |k|e^{i\theta}$  obtenim que cada cercle  $C_1$  i la seva imatge  $C'_1$  formen un angle  $\theta$ , e.g., el cas  $a = 0$  i  $b = \infty$ , on el

conjunt de rectes que creuen per l'origen de coordenades rotaria un angle  $\theta$ . En valor absolut tenim

$$|k| \frac{|z - a|}{|z - b|} = \frac{|w - a|}{|w - b|}.$$

Geomètricament, l'equació anterior significa que la imatge de les circumferències d'Apol·loni de radi  $\rho$  que formen  $C_2$  seran circumferències de radi  $|k|\rho$ , és a dir, que el valor de la raó entre els distàncies  $|z - a|$  i  $|z - b|$  és  $|k|$  vegades major (si  $|k| > 1$ ), igual (si  $|k| = 1$ ), o menor (si  $|k| < 1$ ).

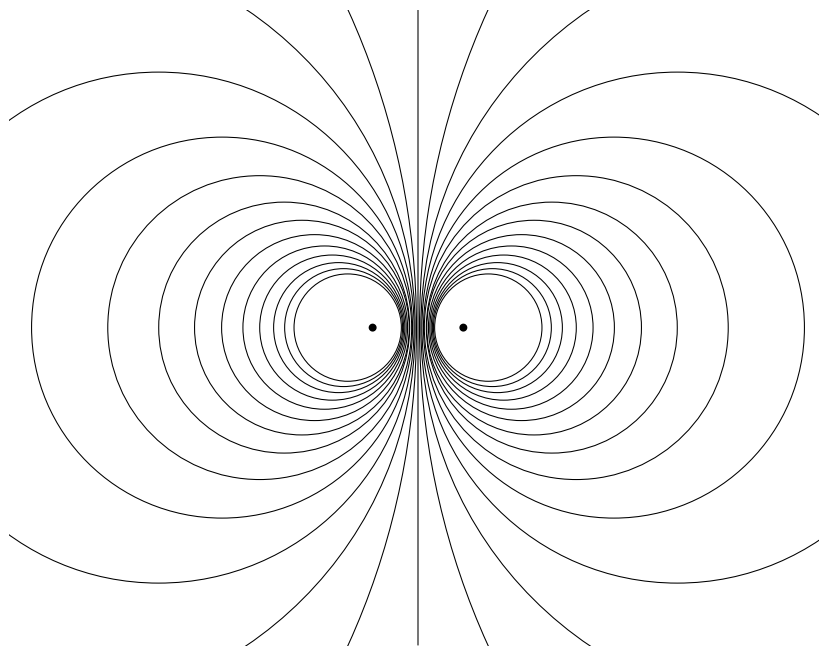


Figura 2.6.1: Cercles d'Apol·loni.

Ara considerem  $k$  de forma que la seva fase principal sigui 0. En aquest cas tenim, d'una banda, que cada cercle  $C_1$  es transforma en ell amb la particularitat que els punts d'aquest es desplacen pel seu interior, és a dir, cada cercle  $C_1$  gira al voltant del seu cercle; d'altra banda, cada cercle  $C_2$  augmenta de mida o disminueix de mida multiplicant el seu radi per  $|k|$ . En aquest cas, és quan diem que l'aplicació és *hiperbòlica*.

Altrament, si  $|k| = 1$  però la fase principal de  $k$  no és 0, llavors la transformació és *el·líptica*. Què succeeix amb la xarxa? doncs ara succeeix el contrari: d'una banda, els cercles  $C_2$  giren sobre ells mateixos, és a dir, la restricció de la transformació sobre cada cercle de tipus  $C_2$  és un automorfisme homogràfic d'aquest; i d'altra banda, els cercles  $C_1$  roten un angle  $\theta$ .

### 2.6.2 Propietats dels cercles de Steiner

Els cercles de Steiner tenen moltes propietats, però ara ens referirem a les més importants. Considerem els punts límits 0 i  $\infty$ . En primer lloc, els cercles  $C_1$ , que passen per l'origen i el pol nord de l'esfera, consisteixen en la rotació d'una mateixa recta. En segon lloc, el conjunt de circumferències  $|z - a|/|z - b| = r/|k|$  resulten ser cercles concèntrics centrats a l'origen.

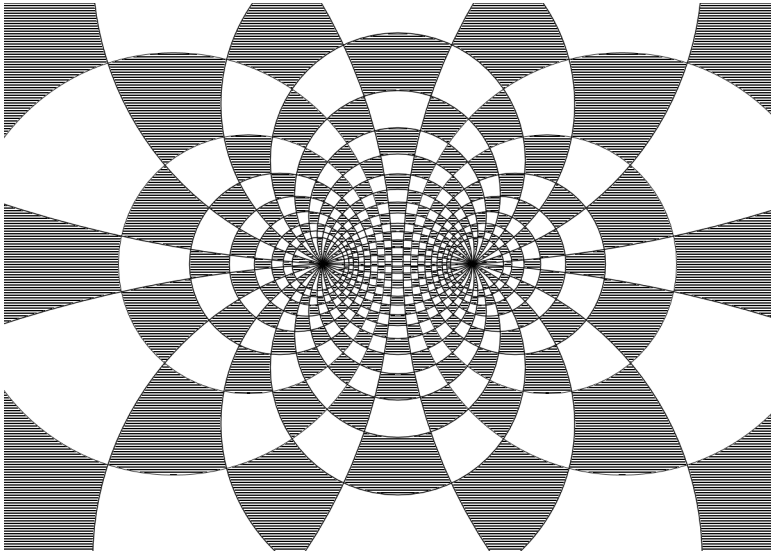


Figura 2.6.2: Xarxa de Steiner.

D'aquesta manera, per a tot punt  $w$  del pla completat hi ha un cercle  $C_1$  i un cercle  $C_2$  que creua per aquest, llevat en els punts límit, on no hi ha cap  $C_2$ . Per tant, ha exactament un cercle  $C_1$  i un  $C_2$  a través de cada punt en el pla llevat en els punts límit. Posant  $a, b \in \mathbb{C}$ , i una homografia de la forma

$$z \mapsto \frac{z - a}{z - b} \quad (2.6.1)$$

veiem com aquest resultat, ja que (2.6.1) és una bijecció, es manté per a tot  $a, b$  del pla.

És evident que a la xarxa circular amb punts límit  $0$  i  $\infty$  es verifica que cada cercle  $C_1$  talla cada cercle  $C_2$  formant un angle recte. (v. fig. 2.6.3). Com que les homografies preserven angles, en canviar de punts límit la propietat seguirà essent vàlida.

Considerem novament els punts límit  $0$  i  $\infty$ . Com que els cercles  $C_1$  són rectes, talla el cercle  $C_2$  en dues meitats. Per tant, cada reflexió intercanvia aquestes dues meitats. Com que cada  $C_2$  es transforma en ell mateix mitjançant una reflexió, la restricció en  $C_2$  de la reflexió és un automorfisme holomorf. El Principi de simetria ens garanteix que aquesta propietat es conservarà si apliquem una homografia sobre el pla.

Els punts límit són simètrics respecte a cada cercle  $C_2$  perquè amb els punts límit  $0$  i  $\infty$  cada cercle de  $C_2$  està centrat a l'origen, i la reflexió del centre del cercle és, per definició,  $\infty$ . En virtut del principi de simetria, les aplicacions homogràfiques conservaran aquesta propietat. En la mateixa línia d'aquesta propietat és força evident que la reflexió d'un cercle  $C_i$  respecte a un altre cercle  $C_j$  és un cercle  $C_k$ , per a  $i, j, k = 1, 2$ .

### 2.6.3 Xarxa degenerada de cercles de Steiner

A la xarxa de Steiner no podem visualitzar l'efecte de les transformacions parabòliques, ja que no es pot donar  $a = b$  (els valors de la funció  $S(z)$  serien constants). Per contra, podem considerar una altra mena de xarxa circular. Sigui  $w = S(z)$  una aplicació homogràfica diferent de la identitat tal que

$$w = \frac{\omega}{z - b} + c = \frac{cz + \omega - bc}{z - b}.$$

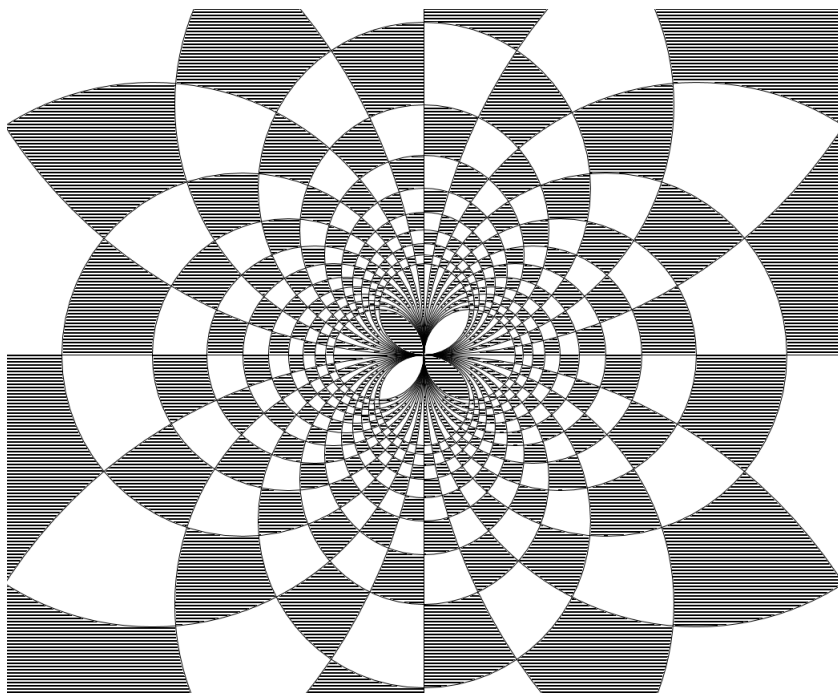


Figura 2.6.3: Xarxa degenerada de Steiner.

Ja que  $b \mapsto \infty$ , qualsevol recta, que té evidentment addicionat un punt de l'infinit, serà un cercle que creuarà per  $b$ ; les rectes que només es toquen a  $\infty$ , i.e., les paral·leles, continuaran unides només per  $b$ , ja que seran cercles tangents.

Si  $w = \xi + i\eta$ , definim la *xarxa degenerada de cercles de Steiner* com la configuració de tots els cercles  $C_1$  imatges de línies amb  $\eta$  constant, i tots els cercles  $C_2$  imatges de línies amb  $\xi$  constant. Aquest model està determinat per  $b$  i la tangent de la família  $C_1$  o la família  $C_2$ . Com que  $c \mapsto \infty$ , una recta que passa per  $c$  al pla  $w$  es tradueix en una recta del pla  $z$ : en el primer cas, la recta  $\eta = \text{Im}(c)$  és la tangent dels cercles  $C_1$ ; en el segon cas, la recta  $\xi = \text{Re}(c)$  és la tangent dels cercles  $C_2$ .

Les dues famílies de cercles intersequen amb angles rectes. Per provar-ho, asumim que el punt límit és  $\infty$ . D'aquesta manera, tenim rectes  $C_1$  horitzontals i rectes  $C_2$  verticals. Els angles que formen són, per tant, de  $\pi/2$  radians. La conformalitat de les transformacions homogràfiques ens adreça que es preservarà la propietat.

Considerem una aplicació homogràfica que porti  $b$  a  $b'$ . Escrivint

$$\frac{\omega'}{w - a'} = \frac{\omega}{z - a} + c$$

veiem que les dues famílies determinades per  $b$  i  $\omega$  ( $\arg \omega$  determina la direcció de les tangents) passen a estar determinades per  $b'$  i  $\omega'$ . Si  $b = b'$ , tenim l'únic punt fix.

## Capítol 3

# Aplicació a la geometria hiperbòlica

### Resum

Durant aquest capítol ens ocuparem de com les transformacions de Möbius poden ajudar-nos a trobar propietats de la geometria hiperbòlica, a més de valorar les característiques mètriques d'aquesta geometria i veure'n la relació amb la geometria euclidiana. La geometria hiperbòlica la descriurem en el pla de Lobatxevski. Nikolai Lobatxevski va publicar aquest model a la dècada del 1920, tot i que, prèviament, altres matemàtics, com Friedrich Gauss, van treballar en models similars. D'antuvi, cal examinar algunes nocions de geometria de les superfícies.

### 3.1 L'esfera de Riemann

#### 3.1.1 Concepte de Superfície de Riemann

Sigui  $M$  un espai topològic Hausdorff amb la estructura següent:  $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  on cada  $U_{\alpha}$  és una regió de *coordenades locals* que poden identificar-se amb regions del pla complex. Així doncs, a cada regió hi ha unes coordenades locals  $z_{\alpha} = x_{\alpha} + iy_{\alpha}$  que defineixen un homeomorfisme  $U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$ . Per tant, en la intersecció de dues regions  $U_{\alpha}$  i  $U_{\beta}$  coincideixen dos sistemes de coordenades locals  $z_{\alpha}$  i  $z_{\beta}$ . És necessari que les funcions de transició de les coordenades  $z_{\alpha}$  a les coordenades  $z_{\beta}$  siguin biholomorfes, és a dir,

$$z_{\alpha}^{-1}z_{\beta} : z_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow z_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

és una funció biholomorfa.

**Definició 3.1.** L'espai topològic  $M$  s'anomena *varietat complexa holomorfa unidimensional* o *superfície de Riemann*.

Per exemple, el propi pla complex és una superfície de Riemann, mitjançant l'homeomorfisme  $z_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z$ . D'altra banda, el pla complex completat és una superfície de Riemann mitjançant les coordenades  $z_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z$  i  $z_2 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto 1/z$ . Totes aquestes funcions són clarament homeomorfismes. L'esfera de Riemann, ja que és homeomorfa al pla completat, també és una superfície de Riemann.

Considerem ara una superfície de Riemann  $R$ , i dues coordenades locals d'aquesta  $z_{\alpha}$  i  $z_{\beta}$  en una intersecció  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ . Com que les funcions de transició són funcions biholomorfes, verifiquen les condicions de Cauchy-Riemann, amb la qual cosa el jacobíà és positiu, amb

la particularitat que, com a molt, pot anul·lar-se, en els punts singulars. Això demostra que la superfície de Riemann està orientada a la intersecció. Llavors, és possible trobar un recobriment de forma que això es verifiqui a totes les regions de la superfície.

*Conclusió.* Tota superfície de Riemann és orientable.

Podem trobar també funcions entre superfícies de Riemann. Si tenim dues superfícies de Riemann  $M_1$  i  $M_2$ , i una funció entre aquestes, diem que  $f$  és un *holomorfisme* entre les dues superfícies si per a tot  $p_1 \in M_1$  existeixen les coordenades locals  $z_1 : U_1 \rightarrow V_1$  i  $z_2 : U_2 \rightarrow V_2$  de forma que  $p_1 \in U_1$ ,  $f(U_1) \subset U_2$ , i la funció  $z_2 f z_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  és complexa holomorfa. Si, a més, és una bijecció, llavors parlarem d'un *biholomorfisme*. Si  $M_1 = M_2$ , la funció s'anomena *automorfisme holomorf*. Si la funció fos complexa antiholomorfa, llavors  $f$  diríem que és un *antiholomorfisme*, un *biholomorfisme* o un *automorfisme holomorf* en el mateix ordre de casos.

### 3.1.2 Forma infinitesimal de l'esfera

Com hem dit abans, l'esfera de Riemann és una superfície riemanniana. Com ho veiem això? doncs mitjançant les coordenades locals

$$z_1 : S_2 \setminus \{(0, 0, R)\} \rightarrow \mathbb{C} : (x^1, x^2, x^3) \mapsto \frac{R(x^1 + ix^2)}{R - x^3},$$

i ja que la reflexió respecte el pla que passa pels eixos  $x^1$  i  $x^2$  és una isometria de  $S_2$  es té

$$z_2 : S_2 \setminus \{(0, 0, -R)\} \rightarrow \mathbb{C} : (x^1, x^2, x^3) \mapsto \frac{R(x^1 + ix^2)}{R + x^3},$$

i amb això és suficient.

Ara examinarem de forma precisa la mètrica de l'esfera. Considerant  $R = 1$ , prenem les *coordenades esfèriques*  $(r, \theta, \varphi)$ , que es relacionen amb les euclidianes  $(x^1, x^2, x^3)$  mitjançant el canvi de coordenades

$$x^1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x^2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad x^3 = r \cos \theta,$$

on  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  i  $0 \leq \theta \leq \pi$ . A la superfície de l'esfera  $r = 1$ . Les funcions anteriors defineixen un canvi de coordenades. Els punts  $\theta = 0$  i  $\theta = \pi$ , és a dir, el pol nord i sud, correspectivament, de l'esfera, són els punts singulars del sistema de coordenades esfèric, perquè la matriu de Jacobi té la següent forma:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix};$$

i el determinant jacobinà, per tant, és  $J = \det A = r^2 \sin \theta$  i s'anul·la quan  $\theta = 0, \pi$ . La mètrica euclidiana a l'espai  $\mathbb{R}^3$  és, com sabem, de la forma

$$(dl)^2 = \sum_i (dx^i)^2.$$

Ara bé, en coordenades esfèriques aquest diferencial té una forma diferent. Però, cal introduir abans el concepte de *mètrica riemanniana*. Cal tenir present que una *forma quadràtica* (o *forma bilineal simètrica*) *definida sobre els vectors* en un punt  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  és un conjunt de nombres  $g_{ij} = g_{ji}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , referit a un sistema de coordenades  $(x^1, \dots, x^n)$ . Amb un

canvi de coordenades  $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$ , de forma que  $x_0^i = x^i(z_0^1, \dots, z_0^n)$ , llavors la forma quadràtica  $g_{ij}$  es defineix en el sistema de coordenades  $(z^1, \dots, z^n)$  com una nova forma quadràtica  $h_{kl} = h_{lk}$  relacionada segons la fórmula

$$g_{ij} = \sum_{k,l} h_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \Big|_{z^s = z_0^s, s=1, \dots, n}.$$

**Definició 3.2.** Una *mètrica de Riemann* o *mètrica riemanniana* en una regió de l'espai  $\mathbb{R}^n$  és una forma quadràtica positiva definida sobre els vectors tangents en cada punt i que depèn del punt.

Per tant, una mètrica de Riemann en una regió de l'espai  $\mathbb{R}^n$  amb coordenades  $(x^1, \dots, x^n)$  és un conjunt de funcions  $g_{ij} = g_{ji}(x^1, \dots, x^n)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , essent  $(g_{ij})$  una matriu definida positiva. Amb els canvis de coordenades, la mètrica es transforma com la forma quadràtica, és a dir, com un tensor de tipus (0,2) simètric. El producte escalar de dos vectors  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  i  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$  en un punt  $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  pren la forma

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i,j} g_{ij}(P_0) \xi^i \eta^j.$$

**Definició 3.3.** Si la matriu  $g_{ij} = g_{ji}(x^1, \dots, x^n)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , és tal que el producte  $\langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \xi^i \xi^j$  pot prendre valors tant positius com negatius (és una forma *indefinida*), llavors la matriu és una *mètrica pseudoriemanniana*.

Retornant a l'esfera, si  $(x^1, x^2, x^3)$  són les primeres coordenades, i  $(r, \varphi, \theta)$  les noves, els canvis de mètrica riemanniana produeixen un nou tensor mètric  $g'_{ij}$ . De forma resumida, s'obté el següent:

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \sum_{k,l=1}^3 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial x^l}{\partial r} = 1; \quad g'_{22} = \sum_{k,l=1}^3 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial x^l}{\partial \varphi} = r^2; \\ g'_{33} &= \sum_{k,l=1}^3 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial x^l}{\partial \theta} = r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{kl} = 0 \text{ si } k \neq l. \end{aligned}$$

Per tant, com que la mètrica esfèrica és el producte escalar  $dl^2 = \langle d\xi, d\xi \rangle$ , on cada vector  $d\xi = (dr, d\varphi, d\theta)$ , aquesta és

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2,$$

on naturalment  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  i  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Com que tots els punts de l'esfera tenen igual mòdul,  $\Delta r = 0$  i, per tant,  $dr = 0$ . Això simplifica la mètrica anterior a la següent

$$dl^2 = r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \theta d\theta^2).$$

Considerem l'aplicació de la *projecció estereogràfica* i considerem les coordenades a l'esfera  $(\theta, \varphi)$  i les coordenades polars  $(r, \varphi)$ , on  $r$  denota el mòdul del punt del pla. L'operació  $\phi : (\theta, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$  és un canvi de coordenades, i verifica  $\varphi \mapsto \varphi$  i, per la definició geomètrica de la cotangent, veiem a la fig. 3.1.1 que  $\theta \mapsto r = \cot \frac{\theta}{2}$  (és a dir,  $\theta = 2 \arctan \frac{1}{r}$ ). Per realitzar els canvis de mètrica riemanniana  $\tilde{g}_{ij} \rightarrow h_{ij}$  cal efectuar els següents càlculs: posant  $\theta = x^1$ ,

$$\varphi = x^2,$$

$$h_{11} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{g}_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial x^l}{\partial r} = \left( \frac{2}{1+r^2} \right)^2$$

$$h_{22} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{g}_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \varphi} \frac{\partial x^l}{\partial \varphi} = \sin^2 \theta;$$

i  $h_{ij} = 0$  per a  $j \neq i$ .

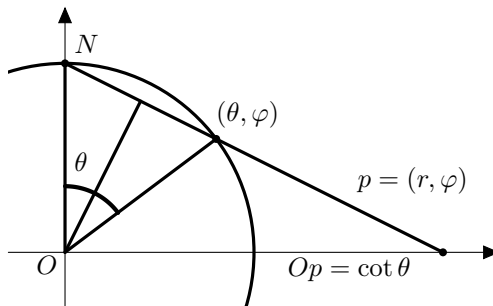


Figura 3.1.1: Secció plana de la projecció estereogràfica.

Observeu que la fórmula del sinus de l'angle doble  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ , que equival també a  $2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$ . D'aquesta manera,

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{\sec^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cot \frac{\theta}{2}}{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2r}{1+r^2}.$$

Finalment, el diferencial al quadrat de la longitud és

$$dl^2 = \frac{4}{(1+r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Donat que  $dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dx^2 + dy^2$ , per a un punt del pla  $x + iy$ , tenim  $dl_{\text{esfera}}^2 = \frac{4}{(1+r^2)^2} dl_{\text{pla}}^2$ . Observeu com si prenem distàncies «infinítament petites», la distància cordal equival a la distància sobre la superfície:

$$dl = \lim_{z_0 \rightarrow z} \tilde{d}(z_0, z) = \lim_{z_0 \rightarrow z} \frac{2|z - z_0|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z_0|^2)}} = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}.$$

### 3.1.3 Longitud i àrea d'un cercle a l'esfera

Partint del darrer model exposat, podem suposar que un cercle té centre al pol nord de l'esfera, radi  $\rho$  equival a l'arc  $\theta_0$  que descriu respecte l'eix  $z$ , és a dir,  $\rho = \theta$  és l'equació de la circumferència. En coordenades  $(\theta, \varphi)$  tenim que en els punts  $(\theta, \varphi)$  de la corba  $\theta = \rho$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $d\theta$  s'anul·la i

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = \sin^2 \rho d\varphi^2. \quad (3.1.1)$$



La longitud del cercle és, finalment,

$$l_\rho = \int_0^{2\pi} \sin \rho \, d\varphi = 2\pi \sin \rho. \quad (3.1.2)$$

El valor de longitud  $l$  d'una corba tal que, si el vector velocitat és  $v$  i la mètrica riemanniana  $g_{ij}$ , el mòdul  $\sqrt{\sum_j \sum_i g_{ij} v_i v_j} = 1$ , s'anomena *paràmetre natural*. A la fórmula (3.1.2), si  $\rho = 0 + 2k\pi$ , aleshores  $l_\rho = 2\pi$ . Per tant, el paràmetre natural és  $2\pi$ .

L'àrea  $\sigma(U)$  d'una regió  $U$  a la superfície  $r = r(u, v)$ , es concreta amb la fórmula

$$\sigma(U) = \iint_U \sqrt{g} \, du \, dv,$$

on  $\sqrt{g} \, du \, dv$  és el *diferencial de l'àrea* i  $g = \det g_{ij}$ . La mètrica riemanniana, en el cas que ens concerneix, és la de la fórmula 3.1.1. Llavors, el determinant  $g = \det g_{ij} = \sin^2 \theta$  i  $\sqrt{g} = |\sin \theta|$ . Finalment, l'àrea  $\sigma_\rho$  d'una cercle de radi  $\rho$  és

$$\sigma_\rho = \iint_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |\sin \theta| \, d\theta \, d\varphi,$$

com que  $\sin \theta \geq 0$ , podem eliminar el valor absolut i, aleshores,

$$\sigma_\rho = \int_0^\rho \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, d\theta = 2\pi (1 - \cos \rho).$$

Observeu que  $\rho = \pi$  ens proporciona la longitud de la secció plana de l'esfera i la superfície de l'esfera, que són, com era d'esperar,  $l_\pi = 2\pi$ ,  $\sigma_\pi = 4\pi$ , respectivament. Les rotacions de l'espai  $\mathbb{R}^3$  roten l'esfera sobre sobre l'origen i, llavors, transformen l'esfera en ella mateixa. La mètrica de l'esfera no queda alterada ja que la coordenada  $r$  no varia i es verifica

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = dr^2 + r^2(d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2).$$

### 3.1.4 Moviments de l'esfera

Els moviments o isometries definits per la matriu  $A = (a_j^i)$  tridimensional a  $\mathbb{R}^3$  amb uns versors de la base  $e_1, e_2, e_3$  deixen invariable la mètrica, és a dir, que per cada vector  $\xi = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$  verifiquen que a l'espai resultant, l'escalar  $\langle \xi, \xi \rangle = \langle A\xi, A\xi \rangle$ , essent

$$A\xi = \sum_{i,j} a_j^i x^j e_i.$$

És fàcilment comprovable que el grup d'isometries d'una mètrica de l'espai  $\mathbb{R}^3$  és el grup de matrius ortogonals  $O(3)$ , és a dir, tals que  $A^T A = 1$ ,  $\det A = \pm 1$ , denotant amb  $A^T$  la matriu trasposada de  $A$ . El denominem *grup ortogonal*. Si prenem sols el  $\det A = 1$  obtenim el subgrup  $SO(3)$  anomenat *grup ortogonal especial*. Per tant, el grup  $O(3)$  està contingut en el grup d'isometries de l'esfera. De fet, el grup d'isometries és exactament  $O(3)$ . Si  $\det A = 1$ , obtenim una *rotació pròpia*, és a dir, una rotació al voltant d'un cert eix, mentre que  $\det A = -1$  ens ofereix una *rotació impròpia*, és a dir, una rotació al voltant

d'un determinat eix, i una reflexió respecte el pla perpendicular a aquest eix, i que passa per  $(0, 0, 0)$ .

Introduïm un nou producte escalar: el *producte escalar hermític* a l'espai  $\mathbb{C}^2$  amb coordenades  $(z^1, z^2)$ ,  $z^1, z^2 \in \mathbb{C}$ , es defineix com

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \sum z_1^k \bar{z}_2^k.$$

Com havíem vist abans, la transformació de Möbius consisteix a prendre el quocient  $\frac{z^1}{z^2}$ .

**Definició 3.4.** Sigui  $\Lambda \in GL(2, \mathbb{C})$  una transformació lineal regular complexa de l'espai  $\mathbb{C}^2$  on s'hi defineixen unes coordenades  $(z_1, z_2)$ . Diem que aquesta és *unitària* o que pertany al *grup unitari* si preserva el producte escalar hermític

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \Lambda \xi_1, \Lambda \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

El grup  $U(2)$  és el *grup unitari*. És fàcilment demostrable que està format per totes les matrius que verifiquen la condició

$$\bar{\Lambda}^T \Lambda = 1. \quad (3.1.3)$$

Ja que el determinant del producte és el producte de determinants, es té  $\det \bar{\Lambda}^T \det \Lambda = \overline{\det \Lambda} \det \Lambda = |\det \Lambda|^2 = 1$ . Això vol dir que  $\det \Lambda = \pm 1$ . El subgrup amb determinant 1 es denotarà  $SU(2)$  i l'anomenarem *grup unitari especial*. A més, es pot comprovar que si la matriu  $\Lambda \in SU(2)$ , és a dir, compleix la condició (3.1.3), aleshores el producte de matrius ens diu que, a més que  $ad - bc = 1$ , es té  $|a|^2 + |c|^2 = 1$ ,  $|b|^2 + |d|^2 = 1$ ,  $a\bar{c} + b\bar{d} = 0$ .

Hem vist que les isometries (o moviments) de l'esfera són les que produeix el grup  $O(3)$ . Les transformacions homogràfiques  $w = w(z)$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  que són moviments de l'esfera satisfan

$$dl^2 = \frac{4dw d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} = \frac{4dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (3.1.4)$$

Substituint  $dz d\bar{z} = |cz + d|^4 dw d\bar{w}$  i calculant directament tenim

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{4dw d\bar{w}}{(|az + b|^2 + |cz + d|^2)^2} \\ &= \frac{4dw d\bar{w}}{(|a|^2|z|^2 + b\bar{a}\bar{z} + a\bar{z}b + |b|^2 + |c|^2|z|^2 + d\bar{c}\bar{z} + c\bar{z}d + |d|^2)^2} \\ &= \frac{4dw d\bar{w}}{(|b|^2 + |d|^2 + z(\bar{a}b - c\bar{d}) + \bar{z}(\bar{a}b + c\bar{d}) + (|a|^2 + |c|^2)|z|^2)^2}. \end{aligned}$$

Donat que la igualtat (3.1.4) força que es compleixi  $|b|^2 + |d|^2 + z(\bar{a}b - c\bar{d}) + \bar{z}(\bar{a}b + c\bar{d}) + (|a|^2 + |c|^2)|z|^2 = 1 + |z|^2$ , la matriu de la homografia satisfà  $|a|^2 + |c|^2 = 1$ ,  $|b|^2 + |d|^2 = 1$ ,  $\bar{a}b - c\bar{d} = \bar{a}b + c\bar{d} = 0$ . Dit d'una altra manera, tenim una homografia isomorfa a  $SU(2)$ . Doncs, el grup de transformacions de Möbius amb tal matriu (a més a més, queden excloses les matrius  $\pm 1$ ) és isomorfe al grup de moviments de l'esfera. Hem demostrat el següent teorema:

**Teorema 3.5.** *El grup homogràfic d'isometries pròpies de l'esfera és el grup  $SU(2)/\{\pm 1\}$ .*

**Corol·lari 3.6.** *Els grups  $SU(2)/\pm 1$  i  $SO(3)$  són isomorfes.*

Noteu que hem assumit que les transformacions de Möbius són les úniques que poden ser isometries (és a dir, moviments) de l'esfera. El grup de transformacions de Möbius conjugades, també són isometries, ja que  $|w| = |\bar{w}|$ . El procediment es pot dur a terme anàlogament i tornar a obtenir el grup  $SU(2)/\pm 1$ .

## 3.2 El pla hiperbòlic

### 3.2.1 El model de Poincaré

Considerem un disc unitari centrat a l'origen  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$  i la seva frontera  $\partial\Delta$ . Abans que res definirem el concepte de *línia hiperbòlica*. Una *línia hiperbòlica* d'aquest disc és la intersecció del disc obert  $\Delta$  amb els cercles perpendiculars a  $\partial\Delta$ . La intersecció dels cercles amb la frontera està formada pels *punts finals de la línia hiperbòlica* (són dos).

**Definició 3.7.** La *mètrica hiperbòlica* en aquest disc és aquella mètrica  $\rho$  que verifica els següents punts:

- (i) Per a dos punts iguals del disc, la distància entre aquests és nul·la.
- (ii) Per a dos punts diferents  $z_1$  i  $z_2$  del disc, si la línia hiperbòlica que passa per aquests té punts finals  $a$  i  $b$  de forma que l'ordre consecutiu sigui  $a, z_1, z_2, b$ , la distància entre els dos punts és  $\log(a, b, z_2, z_1)$ .

Més endavant verificarem que la distància definida és una mètrica. El parell  $(\Delta, \rho)$  rep el nom de *model de Poincaré del pla hiperbòlic*, o *pla de Lobatxevski*. El *disc de Poincaré* també rep la denominació completa de *disc de Poincaré a la geometria de Lobatxevski* a [12, pàg. 76]. A [?, pàg. 154] se l'anomena *pla de Lobatxevski*, i s'hi utilitza la notació abreujada  $\mathcal{L}$ -pla.

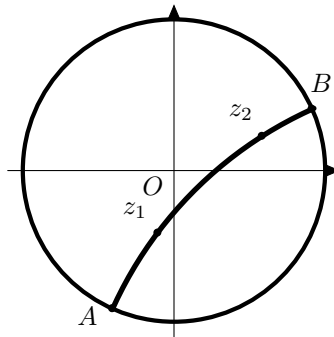


Figura 3.2.1: Línia hiperbòlica al disc de Poincaré.

### 3.2.2 Isomorfismes entre dos models hiperbòlics

Busquem ara el grup de tots els isomorfismes homogràfics del semiplà superior  $\{z = x + iy : y > 0\}$  en un disc unitari centrat a l'origen. Suposem que  $a$  té com a imatge 0. El principi de simetria ens diu que, ja que la recta real s'ha de transformar en una circumferència de radi unitat centrada a l'origen, el conjugat  $\bar{a}$  es transformarà en el simètric de 0, és a dir, en  $\infty$ . D'aquesta manera, l'aplicació ha de ser de la forma

$$z \mapsto k \frac{z - a}{z - \bar{a}}.$$

Per tal que la recta real vagi al cercle unitat, és a dir, a la frontera del disc, cal que  $|k| = 1$ , amb la qual cosa. Així, doncs, el grup d'isomorfismes homogràfics que duen el semiplà superior en

un disc unitari centrat a l'origen és de la forma:

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}.$$

En el semiplà superior la mètrica es defineix de la mateixa manera que al disc. Podem veure que la preservació d'angles ens permet veure que les línies hiperbòliques del semiplà superior tenen imatges que són línies hiperbòliques del disc. Si tenim dos punts del semiplà superior  $z_1$  i  $z_2$  la línia hiperbòlica dels quals té punts finals  $a$  i  $b$ , la conservació de la raó doble que ofereixen les homografies ens assegura que  $\tilde{\rho}(z_1, z_2) = \log(a, b, z_2, z_1) = \rho(Tz_1, Tz_2) = \log(Ta, Tb, Tz_2, Tz_1)$ , denotant amb  $\tilde{\rho}$  la mètrica del semiplà superior, i on les imatges de  $a$  i  $b$  reposen sobre la frontera del disc unitat.

Altrament, la transformació de Möbius conjugada reflecteix la raó doble respecte la recta real. Com que aquesta última serà un nombre real (els quatre punts es troben sobre un cercle), el seu conjugat serà el mateix nombre. Així, aquestes transformacions també preserven la distància hiperbòlica.

### 3.2.3 Isometries i automorfismes

Ens referirem amb la terminologia d'*isometria hiperbòlica* del disc a aquells homeomorfismes del disc en el disc que preservin la distància d'aquest. Denotarem el grup d'isometries del disc respecte la mètrica hiperbòlica amb  $\text{Isom}_\rho(\Delta)$ . Denotarem amb  $\text{Aut}(\Delta)$  els automorfismes holomorfs i antiholomorfs del disc de Poincaré. En primer lloc, abans que cerquem totes les transformacions homogràfiques que transformen el disc de Poincaré en sí mateix, és important conèixer el Lema de Schwarz:

**Lema 3.8.** (Lema de Schwarz) *Sigui una funció holomorfa del disc en el disc. Aleshores:*  
(1) *si  $f(0) = 0$ , llavors*

$$|f(z)| \leq |z|$$

a tots els punts del disc; (2) *si val la igualtat per a  $z \neq 0$  o bé  $|f'(0)| = 1$ , llavors*

$$f(z) = e^{i\theta} z.$$

**Corol·lari 3.9.** *Un automorfisme holomorf del disc de Poincaré que fixa l'origen és una rotació.*

*Demostració.* D'una banda, la funció del disc  $g(z) = f(z)/z$ , per a  $z \neq 0$ , i  $g(z) = f'(z)$ , per a  $z = 0$ , és una funció analítica, perquè  $f$  ho és, i el quocient de funcions analítiques és analítica sempre que el denominador no s'anul·li. Llavors, si  $z \neq 0$  i  $|z| = R$ , com que  $|f(z)| < 1$ , veiem que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{R}.$$

El Principi del Mòdul Màxim ens diu que amb  $|z| \leq R$ ,  $f$  seguirà sense arribar al màxim  $\frac{1}{R}$ , ja que no és constant. Així doncs, quan  $r \approx 1$  es té  $|g(z)| \leq 1$ , que equival a dir  $|f(z)| \leq |z|$  per a qualsevol punt del disc llevat de  $z$  d'al zero.

D'altra banda, si es donés la igualtat, llavors  $|g(z)| = 1$ , és a dir,  $g(z)$  té el mòdul màxim. El Principi del Mòdul Màxim ens diu que és constant en un entorn de  $z$ , així que  $|f(z)| = |z|$  per a tot punt del disc llevat del zero i aleshores és una rotació  $e^{i\theta} z$ . Si  $z = 0$ , llavors  $|g(z)| = |f'(0)| = 1$ .  $\square$

Tornant al model de Poincaré, veiem que tant les transformacions homogràfiques com les de Möbius conjugades contenen el subgrup d'automorfismes del disc. Com que, a més a més, tota transformació de Möbius preserva la distància hiperbòlica, és evident el següent fet. Ara podem enunciar el següent:

**Proposició 3.10.** *El grup d'automorfismes propis del disc de Poincaré és homogràfic.*

Resulta evident que conjugant per un automorfisme homogràfic del disc es pot assumir que fixa 0. El corol·lari del Lema de Schwarz ens diu que és una rotació. També és evident que el grup d'automorfismes holomorfs i antiholomorfs del disc de Poincaré compleix

$$\text{Aut}(\Delta) \leq \underset{\rho}{\text{Isom}}(\Delta).$$

Ara, seguint el camí contrari, si  $f$  és una isometria del disc, podem assumir que fixa 0, mitjançant la conjugació per un automorfisme homogràfic. Llavors,  $f(z) = re^{i\theta}z$ , i com que  $|f(1)| = 1$ ,  $r = 1$ , així que tenim una rotació, és a dir, es troba al grup d'automorfismes holomorfs del disc. Aquest fet ens proporciona que  $f$  és una automorfisme. Ja que hem suposat que era una isometria arbitrària, hem obtingut  $\text{Aut}(\Delta) = \text{Isom}_{\rho}(\Delta)$ . Com que qualsevol model s'obté amb una transformació homogràfica i aquesta manté la conformalitat de la mètrica, podem generalitzar el resultat obtingut de la següent manera.

**Proposició 3.11.** *Per a tot model del pla hiperbòlic, el grup d'isometries hiperbòliques pròpies respecte la seva mètrica és el seu grup d'automorfismes holomorfs, que és exactament el seu grup d'automorfismes homogràfics.*

Per tant, si volem buscar els automorfismes del disc, podem buscar directament les isometries i viceversa.

### 3.2.4 Model de Klein

Qualsevol interior d'un cercle (cercle o recta) pot ser un model del pla hiperbòlic, i es defineix de la mateixa manera que el model de Poincaré. Per exemple, el semiplà superior  $\{z = x + iy : y > 0\}$ , amb la seva mètrica hiperbòlica forma el model del semiplà superior.

El grup d'isometries hiperbòliques respecte la distància hiperbòlica del semiplà superior haurà de verificar, d'una banda, que envia el semiplà superior al semiplà superior; i que la distància hiperbòlica es preserva. Observem que les propietats fins ara trobades per al model de Poincaré segueixen essent vàlides en el model del semiplà superior, gràcies a les propietats de les homografies.

Com que hem demostrat que el grup d'isometries pròpies és el grup homogràfic d'automorfismes, només caldrà buscar les aplicacions homogràfiques que transformin la recta real en ella mateixa sense que siguin una reflexió respecte aquesta. Prenem una aplicació de  $SL(2, \mathbb{C})$  de la forma

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Com que la imatge de  $\infty$  és un nombre real (o bé  $\infty$ ), sabem que el punt límit és  $a/c$ , que és un nombre real, que el punt pol també ho és  $-d/c$ , i que la imatge del zero també,  $b/d$ . D'això se segueix immediatament que el grup d'automorfismes del semiplà superior, també anomenat *model de Klein a la geometria de Lobatxevski*, o més còmodament, model de Klein, és exactament  $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ .

### 3.3 Forma infinitesimal del model de Poincaré

De la mateixa manera que analitzavem la naturalesa mètrica de l'esfera  $S^2$ , haurem de considerar si per al model del semiplà superior existeix una mètrica riemanniana equivalent i que conservi la distància hiperbòlica. Amb aquesta finalitat, necessitem introduir abans alguns conceptes sobre la *mètrica de Lobatxevski*.

#### 3.3.1 Mètrica de Lobatxevski. Pseudoesfera.

Per a construir una *pseudoesfera* necessitem un *espai tridimensional de Minkowski*, que és la denominació general que reben els espais  $n$ -dimensionals pseudoeuclidians del tipus  $(1, n-1)$ :

**Definició 3.12.** Un espai *pseudoeuclidial  $n$ -dimensional del tipus  $(p, q)$* ,  $p + q = n$ , és un espai on el tensor mètric és de la següent forma:  $g_{ij} = 0$  per a  $i \neq j$ ;  $g_{ij} = 1$ , per a  $i \leq p$ ; i  $g_{ij} = -1$ , per a  $i \geq p + 1$ . Aquests espais es denoten amb freqüència mitjançant  $\mathbb{R}_{p,q}^n$ , o de forma més abreujada,  $\mathbb{R}_p^n$ .

Si  $p = 1$ , llavors parlem d'un *espai de Minkowski*. Per tant, el producte escalar de dos vectors  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  i  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$  té la forma

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^p \xi^j \eta^j - \sum_{j=1}^q \xi^{p+j} \eta^{p+j}.$$

Llavors, en el cas d'un espai de Minkowski de dimensió  $n$ , la mètrica riemanniana és  $g_{ij} = 0$  per a tot  $i \neq j$ ,  $g_{ij} = 1$  per a  $i = 1$ , i  $g_{ij} = -1$  per a  $i \geq 2$ . El producte escalar a  $\mathbb{R}_1^n$ , d'acord amb la definició donada, és  $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \dots - \xi^n \eta^n$ , i s'observa que el producte escalar  $\langle \xi, \xi \rangle = |\xi|^2$  no és necessàriament positiu. En el nostre cas, parlarem de  $\mathbb{R}_{1,2}^3$ . Posarem les coordenades  $(x^0, x^1, x^2)$ , de forma que la mètrica pseudoeuclidiana sigui

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2,$$

de manera que la pseudoesfera de radi  $R$  té l'equació d'un hiperboloide  $|x|^2 = R^2$ , que està contingut, evidentment, en el con  $|x|^2 = 0$ . El con està dividit en dues meitats: la meitat superior és aquella que verifica  $|x| = R$ ; i la meitat inferior que verifica  $|x| = -R$ . Considerem només la meitat superior, i introduïm les coordenades *pseudoesfèriques*  $(\rho, \chi, \varphi)$  que ens permetran definir la mètrica de la pseudoesfera:

$$x^0 = \rho \cosh \chi, \quad x^1 = \rho \sinh \chi \cos \varphi, \quad x^2 = \rho \sinh \chi \sin \varphi,$$

on  $-\infty < \rho < +\infty$ ,  $0 < \chi < +\infty$  i  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Necessitem transformar la mètrica pseudoeuclidiana en la mètrica pseudoesfèrica  $(h_{ij})$ . Els canvis de mètrica s'efectuen, de forma resumida, d'acord amb

$$\begin{aligned} h_{11} &= \sum_{k,l=0}^2 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \rho} \frac{\partial x^l}{\partial \rho} = 1; \quad h_{22} = \sum_{k,l=0}^2 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \chi} \frac{\partial x^l}{\partial \chi} = -\rho^2; \\ h_{33} &= \sum_{k,l=0}^2 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \varphi} \frac{\partial x^l}{\partial \varphi} = -\rho^2 \sinh^2 \chi, \end{aligned}$$

i  $h_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ . Amb aquest canvi, la mètrica esdevé  $dl^2 = d\rho^2 - \rho^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\varphi^2)$ . A la superfície de la pseudoesfera, el diferencial  $d\rho$  és zero, així que

$$-dl^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\varphi^2). \quad (3.3.1)$$

La mètrica anterior es coneix amb el nom de *mètrica de Lobatxevski*.

### 3.3.2 Projectió estereogràfica de la pseudoesfera

Constituïrem la *projectió estereogràfica* a la pseudoesfera del pla  $(x^1, x^2)$ . D'ara en endavant considerarem la pseudoesfera unitària, és a dir, el cas  $R = 1$ . L'esfera consta d'un pol nord  $(1, 0, 0)$  i d'un pol sud  $(-1, 0, 0)$ . La correspondència biunívoca ve donada a partir del següent procediment: llancem des del pol sud  $S$  una recta fins un punt de la pseudoesfera, al qual li correspon la intersecció del pla  $(x^1, x^2)$  amb aquesta recta. La figura 3.3.2 mostra la secció plana de l'hiperboloide, és a dir, la hipèrbola  $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Podem apreciar que els punts del pla projectats per l'esfera verifiquen  $(x^1)^2 + (x^2)^2 < 1$ , és a dir, la *pseudoesfera unitària* es projecta sobre el *disc de Poincaré*.

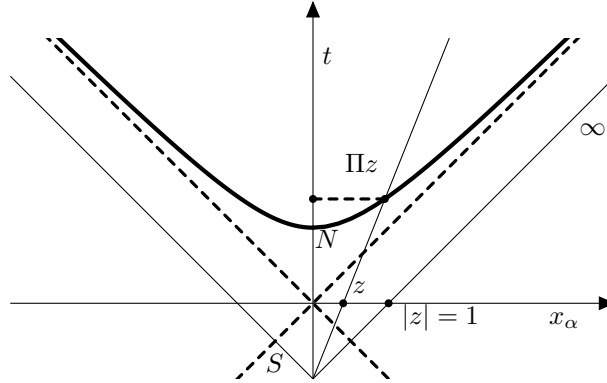


Figura 3.3.1: Projectió estereogràfica de la pseudoesfera.

Sigui  $z = x + iy$  i sigui  $\varphi$  la *projectió estereogràfica* tal que  $\phi(z) = (x^0, x^1, x^2)$ . A partir de la figura 3.3.2, mitjançant el teorema de Tales:

$$\frac{x^1}{x} = \frac{x^0 + 1}{1}, \quad \frac{x^2}{y} = \frac{x^0 + 1}{1}.$$

Aïllant  $x^1$  i  $x^2$ , i substituïnt a l'equació del con tenim que

$$(x^0)^2 = x^2(x^0 + 1)^2 + y^2(x^0 + 1)^2,$$

d'on  $(|z|^2 - 1)t^2 + 2|z|^2t + |z|^2 = 0$ ; la fórmula quadràtica ens proporciona, amb uns breus procediments algebraics, que el «temps»

$$x^0 = -\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1},$$

d'on obtenim també les fórmules per trobar  $x^1$  i  $x^2$ :

**Definició 3.13.** La *projectió estereogràfica* del disc de Poincaré a la pseudoesfera és una aplicació de la forma

$$\phi(z) = \left( \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right), \quad |z|^2 = x^2 + y^2 < 1,$$

i completant el disc amb la frontera  $\partial\Delta$  i completant la pseudoesfera amb un punt de l'infinit, definim que per a tot  $z$  amb mòdul 1 la funció adopta la forma  $\phi(z) := \infty$ .

Els punts de la frontera es troben «infinitament allunyants» ja que la seva distància hiperbòlica a un punt del disc és infinita. Afegir la frontera al disc és equivalent a afegir  $\infty$ , per exemple, a  $\mathbb{C}$ .

Ara podem trobar fàcilment la mètrica del disc de Poincaré. Amb els canvis de coordenades adequats, la matriu  $(g_{ij})$  de la mètrica pseudoeuclidiana es transforma en la mètrica  $(h_{ij})$  de la pseudoesfera en coordenades del pla. Resumim aquest procés en què

$$\begin{aligned} h_{22} &= \sum_{k,l=0}^2 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x} \frac{\partial x^l}{\partial x} = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}; \\ h_{33} &= \sum_{k,l=0}^2 g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y} \frac{\partial x^l}{\partial y} = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}. \end{aligned}$$

La resta d'elements de la matriu  $(h_{ij})$  són nuls. La mètrica, doncs, ve donada per

$$-dl^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} (dx^2 + dy^2) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dz d\bar{z},$$

mentre que el *disc de Poincaré*  $x^2 + y^2 < 1$  consisteix en aquesta mètrica, però definida positiva, és a dir,

$$dl^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dz d\bar{z}. \quad (3.3.2)$$

### 3.3.3 Isometries del model de Poincaré

Si  $w = w(z)$  és una transformació de Möbius, aleshores la condició a verificar per tal de ser moviment és

$$\frac{4dz d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4dw d\bar{w}}{(1-|w|^2)^2}. \quad (3.3.3)$$

Ja que  $dw d\bar{w} = |ad - bc|^2 |cz + d|^{-4} dz d\bar{z}$ , tenim que

$$\begin{aligned} \frac{4dw d\bar{w}}{(1-|w|^2)^2} &= \frac{4|ad - bc|^2 dz d\bar{z}}{(|cz + d|^2 - |az + b|^2)^2} \\ &= \frac{4|ad - bc|^2 dz d\bar{z}}{[|d|^2 - |b|^2 + (c\bar{d} - a\bar{b})z + (\bar{c}d - \bar{a}b)\bar{z} + (|c|^2 - |a|^2)|z|^2]^2}. \end{aligned}$$

Com que, si és una isometria, s'ha de donar (3.3.3), les condicions que buscavem són

$$|d|^2 - |b|^2 = |ad - bc|, \quad |c|^2 - |a|^2 = -|ad - bc|, \quad c\bar{d} - a\bar{b} = 0.$$

És força senzill veure que les homografies que verifiquen aquestes condicions són de la forma següent

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

per a un cert  $\alpha$  amb  $|\alpha| < 1$ . Ja que les isometries pròpies són exactament els automorfismes holomorfs, i ja que els automorfismes holomorfs són exactament els automorfismes homogràfics, obtenim el següent teorema:

**Teorema 3.14.** *Tota isometria pròpia (o tot automorfisme holomorf) del disc de Poincaré és una homografia de la forma*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1.$$



Gràcies a aquest teorema, si considerem un funció que sigui un automorfisme del disc, i que és de la forma

$$L(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z},$$

com que veiem que complirà  $L(z_1) = 0$ , la imatge de línia hiperbòlica és una recta. Els punts finals d'aquesta recta són  $A = -\frac{L(z_2)}{|L(z_2)|}$  i  $B = \frac{L(z_2)}{|L(z_2)|}$ . Amb un breu càlcul tenim

$$\log(a, b, z_2, z_1) = \log \frac{1 + |L(z_2)|}{1 - |L(z_2)|}.$$

### 3.3.4 Mètrica hiperbòlica

Ara ja podem verificar que és un espai mètric, cal provar que són certs els punts següents:

1.  $\rho(z_1, z_2) = 0$  si i només si  $z_1 = z_2$ ;
2.  $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$  (propietat simètrica);
3.  $\rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_3, z_1) + \rho(z_3, z_2)$  (propietat triangular).

La primera propietat sorgeix del fet que la distància hiperbòlica al model del disc és zero quan, gràcies a la darrera propietat trobada, es verifica que

$$\frac{1+r}{1-r} = 1, \quad r = |L(z_2)|,$$

i on  $L(z_2)$  és un automorfisme del disc. Això implica que  $\rho = 0$ , és a dir, que la imatge de  $z_2$  és 0. Però la imatge de  $z_1$  ja era zero. Com que les homografies són injectives tenim  $z_1 = z_2$ . La segona propietat sorgeix del fet que  $(a, b, c, d) = (b, a, d, c)$ . Podem assumir que  $z_3$  és 0 mitjançant una isometria hiperbòlica del disc. Cal provar, doncs, que

$$\frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|} \leq \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|} \frac{1 + |z_2|}{1 - |z_2|} = \frac{1 + |z_1 z_2| + (|z_1| + |z_2|)}{1 + |z_1 z_2| - (|z_1| + |z_2|)},$$

ja que el logaritme és una funció creixent en el domini  $[0, \infty]$ . Observeu que aquesta desigualtat equival a la següent

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1 z_2| - (|z_1| + |z_2|)},$$

i aquesta desigualtat és evident pel fet que  $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  i que

$$\frac{(1 + |z_1||z_2|)^2 - |1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{(1 + |z_1||z_2|) + |1 - \bar{z}_1 z_2|} \geq \frac{(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_2 - z_1|^2}{(|z_1| + |z_2|) + |z_2 - z_1|}.$$

## 3.4 Forma infinitesimal del model de Klein

Podriem trobar la mètrica del model hiperbòlic del semiplà superior, o *model de Klein a la geometria de Lobatxevski*, mitjançant un canvi de coordenades amb una aplicació homogràfica que portés el disc de Poincaré a  $\mathbb{H}^2$ . No obstant, existeix una forma més senzilla amb què ens estalviarem fer càlculs i haver de recórrer a la diferenciació parcial, tot i que cal resoldre una equació funcional. Suposem que la funció (la mètrica riemanniana) que busquem és  $g(z, \bar{z})$ . L'element de longitud

$$dl^2 = g(z, \bar{z})^2 dz d\bar{z}.$$

Com que el grup  $\text{Aut}(\mathbb{H}^2) = SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$  ha de preservar la distància (hiperbòlica), i.e., és isomètric, aleshores per a cada funció  $w = L(z)$  tindrem que

$$dl^2 = g(z, \bar{z})^2 dz d\bar{z} = g(w, \bar{w})^2 dw d\bar{w},$$

que equival a aquesta mateixa expressió fent arrel quadrada, és a dir,  $g(z, \bar{z}) = g(w, \bar{w})L'(z)$ . Com que el grup d'automorfismes homogràfics està generat per translacions, homotècies, i inversions, i el determinant és 1, s'haurà de verificar:

$$g(z) = g(az) \cdot a, \quad g(z) = g(z + b), \quad g(z) = g\left(-\frac{1}{z}\right) \frac{1}{|z|^2}.$$

Ja que la funció no varia amb les translacions a la recta real, tenim que  $g(z) = g(\text{Im } z)$ . D'aquesta manera, podem assumir que  $z$  és un nombre real positiu. Això mateix ens permet veure que  $g(ax) = \frac{g(x)}{a}$ , d'on es té  $g(x) = \frac{\lambda}{x}$ , en què hem denotat  $\lambda = g(1)$ . Obtenim que la mètrica riemanniana és

$$dl^2 = \lambda^2 \frac{dz d\bar{z}}{(\text{Im } z)^2}, \quad (3.4.1)$$

i ens falta per conèixer el valor de  $\lambda = g(1)$ . Per trobar-lo, com que la distància a  $i$  d'un punt  $z_0 = i\beta$ ,  $|k| = 1$ , per una línia hiperbòlica  $z = z(\tau) = i\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq \beta$ , que té com a punts finals 0 i  $\infty$ , és  $\log(0, \infty, i\beta, i) = \log \beta$ , s'haurà d'obtenir que la longitud

$$l = \lambda \int_1^\beta \frac{|d\tau|}{\tau} = \lambda \log \tau \Big|_1^\beta = \lambda \log \beta. \quad (3.4.2)$$

és igual a  $\log \beta$ . Per tant,  $g(1) = 1$ . A més, posant  $z = x + iy$ , el determinant de la matriu del tensor mètric és  $\frac{1}{y^4}$ . D'aquesta manera, l'element de superfície  $dA$  ve donat per

$$dA = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Hem observat anteriorment que el grup  $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$  és el grup de moviments del model de Klein de la geometria de Lobatxevski. Ja hem exposat abans que el grup  $SO(1, 2)$  és el grup de moviments de la pseudoesfera (és tal que  $A^T G A = G$ , essent  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ) la mètrica riemanniana de l'espai  $\mathbb{R}_{1,2}^3$ , i el grup  $SU(1, 1)$  el del model de Poincaré. Donat que totes tres són models de la mètrica de Lobatxevski, els grups de moviments en cadascuna d'aquestes superfícies són isomorfs entre sí, és a dir:

**Teorema 3.15.** *El grup homogràfic de moviments de la mètrica de Lobatxevski és isomorf al grup  $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$  en el model de Klein, al grup  $SO(1, 2)$  a la pseudoesfera, i al grup  $SU(1, 1)/\pm 1$  del model de Poincaré.*

Observeu que la distància hiperbòlica del disc, donada una homografia  $L : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$  de la forma

$$L(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

es té que la distància hiperbòlica del model de Klein  $\tilde{\rho}$  entre dos punts  $z_1$  i  $z_2$  del semiplà superior és

$$\tilde{\rho}(z_1, z_2) = \rho L(z_1, z_2) = \frac{|1 - L(\bar{z}_1)L(z_2)| + |L(z_1) - L(z_2)|}{|1 - L(\bar{z}_1)L(z_2)| - |L(z_1) - L(z_2)|}.$$

### 3.5 Polígons hiperbòlics

Retornem al model de Poincaré per exposar la noció de polígon hiperbòlic, que es definirà anàlogament per a qualsevol model del pla hiperbòlic. Amb *semiespai hiperbòlic* entendrem cadascuna de les dues parts en què queda seccionat el disc  $\Delta$  per una línia hiperbòlica. A partir d'això, definim:

**Definició 3.16.** Siguin un conjunt de línies hiperbòliques que generen cadascuna dos semiespais hiperbòlics, i siguin  $S_i$   $i = 1, \dots, n$  cadascun dels dos semiespais que generera cada línia. Llavors, un *polígon hiperbòlic*  $P$  de  $n$  costats consisteix en

$$P = \bigcap_{i=1}^n S_i.$$

Els *costats* del polígon són la part de línia hiperbòlica que es troba a la bora de la intersecció  $P$ . Els punts de la bora del polígon que es troben a dos costats diferents s'anomenen *vèrtexs* del polígon.

Ja que la distància hiperbòlica és infinita si i només si un dels dos punts està a la frontera del disc, diem que els vèrtexs del polígon que reposin sobre la frontera del disc es troben a l'infinit. Qualsevol costat d'un polígon adjacents a un vèrtex a l'infinit formen un angle igual a 0, ja que les línies hiperbòliques són ortogonals a la frontera del disc, mentre que en el cas contrari, el seu angle es troba entre 0 i  $\pi$ , sense que valgui mai la igualtat.

Quan un polígon tingui un vèrtex a la frontera direm que està a l'infinit. Per exemple, en el model de Klein, la intersecció que origina el semidisc unitari centrat a l'origen amb un semidisc unitari centrat a 2. Per tenir un costat a la frontera és necessari tenir dos vèrtexs a l'infinit.

**Definició 3.17.** Un *polígon hiperbòlic finit* de  $n$  costats,  $n \geq 3$ , és un polígon sense vèrtexs a l'infinit. Els polígons hiperbòlics finits s'anomenaran *triangles hiperbòlics*, *quadrilàters hiperbòlics*, etc.

#### 3.5.1 Fórmula de Gauss-Bonnet

**Teorema 3.18.** (Fórmula de Gauss-Bonnet) L'àrea hiperbòlica d'un triangle hiperbòlic amb angles interiors  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  és

$$\sigma(P) = \pi - \sum_{j=1}^3 \varphi_j.$$

Finalitzarem una demostració que es dona a [15, pàg. 33]:

*Demostració.* Sobre el model de Klein, suposem que un polígon  $P_1$  té dos dels seus vèrtexs a l'infinit, i.e., té un costat a l'infinit. Llavors, una transformació de Möbius generada per  $SL(2, \mathbb{R})$  és un moviment i, doncs, preserva l'element de superfície

$$dA = \frac{dx dy}{y}.$$

D'aquesta manera, podem assumir que el polígon té un vèrtex a  $\infty$  (formant un angle  $\varphi_1 = 0$ ), un altre a 1 (formant un angle  $\varphi_2 = 0$ ) i el restant a  $e^{i\alpha}$ , per algun  $0 < \alpha \leq \pi$ . Aquest tercer

vèrtex verifica  $\varphi_3 = \pi - \alpha$  (fig. 3.5.1 (a)). En aquest cas,  $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \infty$ , i  $\cos \alpha \leq x \leq 1$ . L'àrea d'aquest polígon és

$$\begin{aligned} \sigma(P_1) &= \iint_{P_1} y^{-2} dx dy = \int_{\cos \alpha}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} y^{-2} dy dx = \int_{\cos \alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (\arccos x) \Big|_{\cos \alpha}^1 = \alpha = \pi - \varphi_3. \end{aligned}$$

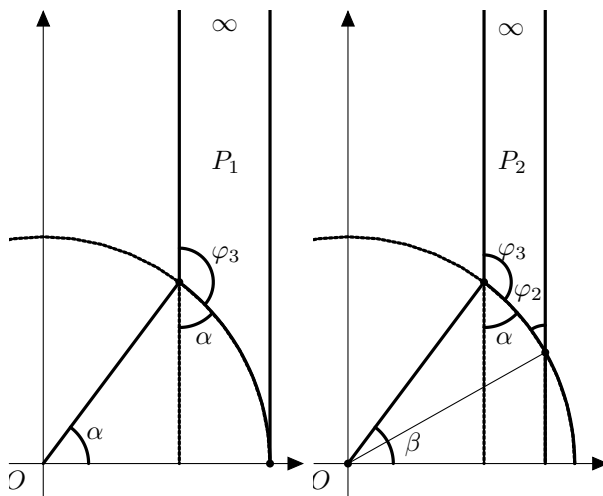


Figura 3.5.1: Dos vèrtexs a l'infinit (a) i un vèrtex a l'infinit (b).

Suposem ara que, en un polígon  $P_2$ , el vèrtex que es trobava a 1 reposa sobre un punt del cercle unitari centrat a  $O$ , és a dir,  $e^{i\beta}$ . Llavors, observem que  $\varphi_2 = \beta$ . Tenint en compte que  $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \infty$ , i  $\cos \alpha \leq x \leq \cos \beta$ , l'àrea és, en aquest cas,

$$\sigma(P_2) = \int_{\cos \alpha}^{\cos \beta} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} y^{-2} dy dx = (\arccos x) \Big|_{\cos \alpha}^{\cos \beta} = \beta - \alpha = \pi - \varphi_2 - \varphi_3. \quad (3.5.1)$$

Suposem ara que, en un polígon  $P_3$ , no hi ha cap vèrtex sobre la recta completada, i que aquest que es trobava a  $\infty$  ara es troba a un punt  $p$  tal que  $\text{Im } p = \text{Im } e^{i\beta}$  (fig. 3.5.1 (b)). Suposem ara que  $P_3$  té angles hiperbòlics  $\psi_1$  al vèrtex  $p$ ,  $\psi_2$  al vèrtex  $e^{i\beta}$ , i  $\psi_3$  al vèrtex  $e^{i\alpha}$ . Aquests angles són tals que  $\psi_2 = \varphi_2$ . El polígon hiperbòlic  $P_2$  té àrea

$$\sigma(P_2) = \pi - \varphi_2 - \varphi_3 = \pi - \psi_2 - \varphi_3.$$

El polígon hiperbòlic  $P_2 - P_3$  té un vèrtex a l'infinit, així que la fórmula (3.5.1) és vàlida per aquest:

$$\sigma(P_2 - P_3) = \pi - (\varphi_3 - \psi_3) - (\pi - \psi_1) = \psi_3 + \psi_1 - \varphi_3.$$

A partir d'això, calculem l'àrea de la manera següent:

$$\sigma(P_3) = \sigma(P_2) - [\sigma(P_2) - \sigma(P_3)] = \sigma(P_2) - \sigma(P_2 - P_3);$$

i substituïnt

$$\sigma(P_3) = \pi - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3.$$

Gràcies a què les homografies conserven angles euclidians (i per tant, hiperbòlics), sabem que l'àrea seguirà essent la mateixa en tots els models del pla hiperbòlic.  $\square$

Observeu que els triangles euclidians no són triangles hiperbòlics (no existeixen) ja que els seus angles sumen  $\pi$  i, doncs,  $\sigma(P) = 0$ . Un polígon hiperbòlic finit  $P$  de  $n$  costats i angles  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  es pot descomposar en  $n$  triangles, unint l'origen de coordenades, amb una línia hiperbòlica, amb cadascun dels vèrtexs. Aquestes línies formen  $n$  angles  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  entre elles en el punt 0, i formen, també, els angles  $\theta_1, \dots, \theta_n$  amb els vèrtexs de  $P$ . La suma de les àrees és:

$$\sigma(P) = n\pi - \sum \gamma - \sum \theta.$$

Però, com que  $\sum \gamma = 2\pi$ , i donat que la suma dels angles és  $\sum \theta = \sum \varphi$ , obtenim el següent teorema:

**Teorema 3.19.** *Donat un polígon hiperbòlic finit  $P$  de  $n$  costats i angles  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , la seva àrea hiperbòlica és*

$$\sigma(P) = (n - 2)\pi - \sum \varphi.$$

Noteu que aquesta fórmula és vàlida per a tots els models del pla hiperbòlic a la geometria de Lobatxevski, i l'àrea dels polígons és la mateixa en tots els casos.

### 3.5.2 Subconjunts convexos

**Definició 3.20.** Sigui  $S$  un subconjunt d'un model hiperbòlic. Si per a cada parella de punts  $z_1, z_2$  de  $S$  existeix sempre una línia hiperbòlica que passa per tots dos de forma que el segment de línia  $[z_1, z_2] \in S$ , llavors aquest subconjunt s'anomena *convex*.

Enumerem certes propietats evidents dels conjunts convexos:

1. Si  $S$  és convex, qualsevol subconjunt que s'obté sota l'acció d'una homografia és convex.
2. L'interior de  $S$  i el seu complementari són convexos.
3. Si  $S_1, S_2, \dots$  són subconjunts convexos, on  $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ , llavors  $\bigcup_j S_j$  és convex.
4. Si  $S_1, S_2, \dots$  són subconjunts convexos, aleshores  $\bigcap_j S_j$  és convex.

Com a conseqüència d'això, observem que tot semidisc que produeix una línia hiperbòlica és un subconjunt convex, ja que sota l'acció de la transformació de Möbius adequada, podem aconseguir que la línia hiperbòlica es transformi en el segment  $[-1, 1]$ , i la meitat del disc de Poincaré és convexa. D'aquest fet s'obté que tot polígon hiperbòlic de  $n$  vèrtexs

$$P = \bigcap_{i=1}^n S_i,$$

és convex ja que cada semiespai  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ho és.

### 3.5.3 Cercles hiperbòlics

Considerem el model arbitrari del pla hiperbòlic  $H$  amb mètrica hiperbòlica  $\rho_H$ :

**Definició 3.21.** Un *cercle hiperbòlic* de radi  $\varrho$  i centre  $a$  en el disc és un conjunt de punts que es troben a la mateixa distància hiperbòlica de  $a$ . L'interior d'aquest cercle s'anomena *disc hiperbòlic*.

Concretament, en el model de Poincaré, veiem que, ja que les rotacions són isometries, tot cercle hiperbòlic centrat a l'origen s'origina de rotar un punt que es trobi a una distància hiperbòlica  $\varrho$  un arc de  $2\pi$  rad. Obtenim que aquest cercle és un cercle euclidià, i que té radi  $R$ , on  $\varrho = \rho_H(R, 0)$ . Llavors

$$e^\varrho = \frac{1+R}{1-R} \implies R = \frac{e^\varrho - 1}{e^\varrho + 1} = \tanh \frac{\varrho}{2}.$$

Recordem que al disc de Poincaré, el quadrat del diferencial de la longitud és

$$dl^2 = \frac{2}{(1-|z|^2)^2} (dx^2 + dy^2),$$

mentre que el diferencial d'àrea és

$$dA = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dx dy.$$

A partir dels resultats anteriors, veiem que tota corba suau  $z = z(\tau) = \alpha(\tau) + i\beta(\tau)$  amb  $a \leq \tau \leq b$  la longitud es defineix d'acord amb les fórmules que segueixen:

$$l = 2 \int_a^b \frac{|\dot{z}(\tau)|}{1-|z(\tau)|^2} d\tau, \quad \dot{z}(\tau) = \left( \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\beta}{d\tau} \right),$$

on el mòdul  $|z(\tau)| < 1$ . Posem un exemple:

Per una banda, dibuixem un segment  $z(\tau) = \tau$  on  $0 \leq \tau \leq a$ .

$$l = 2 \int_0^a \frac{d\tau}{1-\tau^2} = \log \frac{1+\tau}{1-\tau} \Big|_0^a = \log \frac{1+a}{1-a}.$$

La longitud pot tenir signe negatiu, però això només proporciona el sentit en què es recorre la corba. Aquest resultat ens indica que si una recta  $z = k\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq a$ , és tal que un punt  $z_1 \in \Delta$  verifica  $z_1 = ka$ , la fórmula que obtenim és la de la distància hiperbòlica:

$$l = 2 \int_0^a \frac{k}{1-k^2\tau^2} d\tau = \log \frac{|k|^2\tau + |k|}{|k|^2\tau - |k|} \Big|_0^a = \log \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|} = \rho(z_1, 0).$$

Si  $a = 1$ , previsiblement, hauriem d'obtenir una longitud «infinitament gran» ja que arribem als límits del disc, i coincidint amb  $\rho(1, 0) = \infty$ . Com hem advertit anteriorment, ens referim a  $\infty$  sense cap signe i d'acord amb la conveniència exposada amb anterioritat.

Podem expressar la mètrica del disc de Poincaré en coordenades polars  $(r, \varphi)$  d'acord amb què, com hem vist anteriorment,  $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ , i adoptant la forma

$$dl^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

on  $0 \leq r < 1$  i  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Sigui  $\gamma$  un cercle de radi  $r = R$ . En primer lloc, els punts que reposen sobre el cercle ( $r = R$ ) verifiquen  $dr = 0$ . Per això, la mètrica sobre el cercle és  $dl^2 = \frac{4r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$ , d'on la longitud del cercle  $\gamma$  de radi  $R$  és

$$l_R = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1-R^2} d\varphi = \frac{4\pi R}{1-R^2}. \quad (3.5.2)$$

En segon lloc, l'àrea de la regió  $U$  determinada per la funció  $\Gamma = \Gamma(r, \varphi)$ , que verifica  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , és

$$\sigma_R(U) = \iint_U \sqrt{g} d\varphi dr.$$

Com que l'arrel quadrada del determinant de la matriu del tensor mètric és

$$\sqrt{g} = \left| \frac{4r}{(1-r^2)^2} \right|,$$

passem a calcular l'àrea:

$$\sigma_R = \iint_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left| \frac{4r}{(1-r^2)^2} \right| d\varphi dr = 4 \int_0^R \frac{r}{(1-r^2)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi dr.$$

La derivada  $\frac{d}{dr} \frac{1}{1-r^2} = \frac{r}{(1-r^2)^2}$ . Doncs l'àrea resulta ser

$$\sigma_R = \frac{8\pi}{1-R^2}. \quad (3.5.3)$$

Així, l'àrea de tot el disc de Poincaré correspon al límit  $\lim_{R \rightarrow 1} \frac{8\pi}{1-R^2} = \infty$ . Com que  $R = \tanh \frac{\varrho}{2}$ , les equacions (3.5.2) i (3.5.3) es transformen, respectivament, en les fórmules  $l_R = 2\pi \sinh \varrho$ ,  $\sigma_R = 4\pi \sinh^2 \frac{\varrho}{2}$ . Resumint tota aquesta informació apareix el següent teorema:

**Teorema 3.22.** *Donat un cercle hiperbòlic de radi (hiperbòlic)  $\varrho$ , la longitud d'aquest és*

$$l_R = 2\pi \sinh \varrho;$$

*l'àrea hiperbòlica d'un disc hiperbòlic de radi (hiperbòlic)  $\varrho$ , és*

$$\sigma_R = 4\pi \sinh^2 \frac{\varrho}{2}.$$





## Capítol 4

# Transformacions de Möbius $n$ -dimensionals

### Resum

Les transformacions de Möbius del pla completat es poden definir amb l'isomorfisme  $\mathcal{M} \approx SL(2, \mathbb{C}) / \pm 1$ , amb les coordenades homogènies. Aquest capítol consistirà a «importar» a l'espai euclidià (i pseudoeuclidià)  $n$ -dimensional les característiques d'aquestes funcions, i a l'espai hiperbòlic  $n$ -dimensional, que posteriorment definirem. En primer lloc, per la seva naturalesa complexa, és a dir, impliquen la multiplicació, el quocient, la conjugació, etc, definits per als nombres complexos. En segon lloc, no podem generalitzar la definició del pla de transformació de Möbius, és a dir, la transformació lineal racional. Altrament, el grup  $\mathcal{M}$  gaudeix de propietats úniques, e.g., que transformen cercles en cercles.

### 4.1 L'espai $n$ -dimensional completat

Tornem a redefinir, abans que res, el grup  $\mathcal{M}$ :

**Definició 4.1.** El grup general de les transformacions de Möbius  $\widetilde{\mathcal{M}}$  del pla completat és el grup generat per la composició de reflexions (inversions) respecte cercles i rectes ampliades. El subgrup que preserva l'orientació és el grup de les transformacions de Möbius (homogràfiques)  $\mathcal{M}$ , mentre que els elements de  $\widetilde{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$  s'anomenen transformacions de Möbius conjugades.

Observeu que en aquesta definició «pla completat» no té un sentit complex, sinó que pot interpretar-se com el pla  $\mathbb{R}^2$  a què afegim un punt de l'infinit.

L'*esfera de Riemann  $n$ -dimensional* és una esfera  $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de dimensió  $n$  i radi  $R$ , centrada a l'origen de coordenades. Considerem les coordenades  $(x^1, \dots, x^n)$  d'un punt  $x$ , i la norma  $|x|^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$ . Llavors, l'esfera és

$$S_n = \{x : |x|^2 = R^2\}.$$

Noteu que en cap moment es prendrà la solució de norma negativa.

**Definició 4.2.** La *projecció estereogràfica* és una aplicació  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow S_n \setminus \{N\}$  (concretament, un homeomorfisme), entenent per  $N$  el pol nord de l'esfera. La fórmula de  $\phi$  és

$$\phi(x) = \left( \frac{2R^2 x^1}{|x|^2 + R^2}, \dots, \frac{2R^2 x^n}{|x|^2 + R^2}, R \frac{|x|^2 - R^2}{|x|^2 + R^2} \right). \quad (4.1.1)$$

La demostració de la fórmula és idèntica que la del cas del pla. Si definim  $\phi(\infty) = (0, 0, R)$ , veiem que l'aplicació  $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S_n$  també és un homomorfisme, on hem denotat  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  la unió de l'espai euclidià  $n$ -dimensional amb un punt de l'infinit.

**Definició 4.3.** Definim l'espai euclidià  $n$ -dimensional completat (de notació  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ ), o simplement, com anomenarem a partir d'ara, l'espai completat, com la unió de l'espai euclidià  $n$ -dimensional amb un punt de l'infinit.

Anàlogament al cas del pla, la distància cordal consisteix en la norma euclidianana

$$\bar{d}(x_1, x_2) = |\phi(x_2) - \phi(x_1)|,$$

i obviament és una mètrica. A partir de la fórmula (4.1.1) s'obté que

$$\bar{d}(x_1, x_2)^2 = \frac{4R^4|x_2 - x_1|^2}{(R^2 + |x_1|^2)(R^2 + |x_2|^2)}.$$

Si  $x_2$  és suficientment proper a  $x_1$ , llavors el segment que representa la distància cordal roman sobre la superfície de l'esfera. En aquest cas passem al diferencial de longitud

$$dl = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \sqrt{\frac{4R^4|x_2 - x_1|^2}{(R^2 + |x_2|^2)(R^2 + |x_1|^2)}} = \frac{2|dx|}{1 + |x|^2},$$

on se sobreentén que  $dx = \lim x_2 - x_1$ . Les rotacions de l'espai  $\mathbb{R}^{n+1}$  roten l'esfera, transformant-la en ella mateixa. La mètrica de l'esfera no queda alterada. Els moviments definits per la matriu  $A = (a_j^i)$ , de dimensió  $n + 1$ , que deixen invariada la mètrica de l'esfera, verifiquen que es preserva el producte escalar  $\langle \xi, \xi \rangle = \langle A\xi, A\xi \rangle$ , per a cada vector  $\xi = (\xi^i)$  i on

$$A\xi = \sum_{i,j} a_j^i \xi^j e_i,$$

essent  $e_1, \dots, e_{n+1}$  la base de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Fàcilment veiem que s'ha de verificar  $A^T A = 1$ , o el que és el mateix,  $a_i^k a_j^k = \delta_j^i$ , on s'abreua que hi ha sumació respecte  $k$ . A més, el determinant de  $A$  és  $\pm 1$ . El grup de matrius  $A^T A$  de dim  $A = n + 1$  es denota amb  $O(n + 1)$  i és el grup ortogonal, mentre que el subgrup amb  $\det A = 1$  es denota  $SO(n + 1)$  i s'anomena grup ortogonal especial.

## 4.2 Reflexions respecte a esferes generalitzades

### 4.2.1 El grup de transformacions de Möbius

Hem donat a l'inici d'aquest capítol una nova definició del grup  $\mathcal{M}$ . Per introduir aquest grup cal tenir present què entendrem per reflexió.

**Definició 4.4.** Considereu una esfera (o hiperesfera)  $S(a, R)$  de dimensió  $n - 1$ , amb centre  $a = (a^i)$  i radi  $R > 0$ . Una reflexió (o inversió) respecte  $S(a, R)$  és una aplicació definida per

$$T(x) = \frac{R^2}{|x - a|^2}(x - a) + a. \quad (4.2.1)$$

És natural definir  $a \mapsto \infty$  i  $\infty \mapsto a$ . El punt  $T(x)$  és simètric de  $x$  respecte a  $S(a, R)$ . Observeu que  $x = T(x)$  si i només si  $x$  és un punt de l'esfera. Com és d'esperar,  $T^2(x) = x$ .

És d'especial importància la inversió

$$J(x) = \frac{x}{|x|^2},$$

és a dir, la inversió respecte l'esfera  $S(0, 1)$ , i que de vegades es denota  $J(x) = x^*$ . Definim ara el concepte de pla (o hiperplà) a  $\mathbb{R}^n$ . Una pla (o hiperplà) (completat amb un punt de l'infinit)  $H(a, \lambda)$  de dimensió  $n - 1$  a l'espai euclidià de dimensió  $n$ , on  $a = (a^j)$  és un vector de l'espai i  $\lambda$  és un escalar, és un conjunt de punts

$$H(a, \lambda) = \{x : \langle x, a \rangle = \lambda\} \cup \{\infty\},$$

on denotem, naturalment, amb  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , el producte escalar. Per comoditat, no fem distinció entre un punt o el vector que va des de l'origen a aquest punt.

A partir d'aquesta definició, busquem una reflexió  $T$  respecte  $H(a, \lambda)$  de forma que, evidentment, es verifiqui que

$$\frac{x + T(x)}{2} \tag{4.2.2}$$

pertany al pla. Tota reflexió respecte aquest pla té la forma  $x \mapsto x + \mu a$ , així que, com que es té la fórmula (4.2.2),

$$\left\langle \frac{2x + \mu a}{2}, a \right\rangle = \langle x, a \rangle + \frac{\mu}{2}|a|^2 = \lambda,$$

d'on s'obté immediatament que

$$\mu = 2 \frac{\lambda - \langle x, a \rangle}{|a|^2}.$$

**Definició 4.5.** Considereu un pla (o hiperplà)  $H(a, \lambda)$  de dimensió  $n - 1$ . Una *reflexió* (o inversió) respecte  $S(a, R)$  és una aplicació definida per

$$T(x) = x - 2a \frac{\langle x, a \rangle - \lambda}{|a|^2}. \tag{4.2.3}$$

Així, podem reescriure també  $T(x)$  com  $x - 2[\langle x, a \rangle - \lambda]a^*$ . Si  $a$  és la normal al pla, llavors  $T(x) = x - 2\langle x, a \rangle a^*$ . De vegades la reflexió  $T$  es denota

$$\text{Ref}_H(x).$$

Anomenarem *k-esferes* (o *k-hiperefes*) qualssevol esferes o plans de dimensió  $k$ , mentre que si no s'especifica el valor de  $k$  se sobreentendrà que  $k = n - 1$ .

Ara ja podem definir, recíprocament al cas del pla, en què consisteixen les transformacions de Möbius:

**Definició 4.6.** El *grup general de transformacions de Möbius* de l'espai completat, que denotem amb  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ , és el grup generat per la composició de reflexions respecte esferes generalitzades. El subgrup que preserva la orientació és el *grup de les transformacions de Möbius*, i el denotem  $\mathcal{M}_n$ . Els elements de  $\widetilde{\mathcal{M}}_n \setminus \mathcal{M}_n$  són les *transformacions de Möbius conjugades*.

### 4.3 Propietats de composició

D'antuvi, cal posar força èmfasi en la següent definició, ja que és bàsica per a entendre l'equivalent del que anomenavem funció conforme al pla complex.

**Definició 4.7.** Sigui  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  una aplicació sobre una regió  $\Omega$  de l'espai completat on hi ha definida una mètrica riemanniana  $g_{ij}$  definida sobre els vectors. Si la mètrica  $g'_{ij}$  de la regió  $\Omega$ , després d'actuar  $\varphi$ , és proporcional a la inicial en cada punt de  $\Omega$ , llavors diem que les dues mètriques  $g_{ij}$  i  $g'_{ij}$  defineixen una mateixa *estructura conforme*. L'aplicació  $\varphi$  que conserva l'estructura conforme rep el nom d'*aplicació conforme*.

Per exemple, les aplicacions conformes del pla complex  $\mathbb{C}$  són les funcions analítiques.

Considereu la transformació  $J(x) = \frac{x}{|x|^2}$ . Els elements de la seva matriu de Jacobi són

$$(\nabla J)_j^i = \frac{\partial J^i}{\partial x^j} = \frac{\delta_j^i |x|^2 - 2x^i x^j}{|x|^4} = \frac{1}{|x|^2} \left( \delta_j^i - 2 \frac{x^i x^j}{|x|^2} \right),$$

o bé, denotant  $\frac{1}{|x|^2} = \mu(x) = \mu$ , i denotant

$$Q = q(x) = (q_j^i) = \frac{x^i x^j}{|x|^2},$$

es reescriu en forma matricial com

$$\nabla J = \mu(1 - 2Q).$$

A partir del càlcul del producte matricial

$$(q^2)_j^i = \sum_{k=1}^n \frac{x^i x^k}{|x|^2} \frac{x^k x^j}{|x|^2} = \frac{x^i x^j}{|x|^2} \sum_{k=1}^n \frac{(x^k)^2}{|x|^2} = \frac{x^i x^j}{|x|^2},$$

obtenim que  $Q^2 = Q$ , d'on  $(1 - 2Q)^2 = 1^2 - 4Q + 4Q^2 = 1$ . Donat que, a més,  $1 - 2Q = (1 - 2Q)^T$ , s'obté que  $1 - 2Q \in O(n)$ , és a dir,  $1 - 2Q$  és una rotació del grup ortogonal, així que és conforme.

La reflexió

$$T(x) = \frac{R^2}{|x - a|^2} (x - a) + a \tag{4.3.1}$$

respecte a una hiperesfera  $S(a, R)$  és fruit de la composició  $GFJF^{-1}$ , on  $F(x) = x + a$  i  $G(x) = R^2 x$ , així que (4.3.1) és conforme.

**Lema 4.8.** *Les reflexions respecte a hiperesferes són funcions conformes.*

A més, a la reflexió respecte a un hiperpla, que evidentment és conforme, amb normal  $\nu = (\nu^i)$  és

$$T(x) = \sum_i \left( x^i - 2 \frac{\nu^i}{|\nu|^2} \langle x, \nu \rangle \right) e_i, \tag{4.3.2}$$

on  $e_i$  són els versors de la base de l'espai completat. Noteu que (4.3.2) és igual a

$$\sum_{i,j} \left( \delta_j^i x^j - 2 \frac{\nu^i \nu^j}{|\nu|^2} x^j \right) e_i = \sum_{i,j} (\delta_j^i - 2q(\nu)_j^i) x^j e_i,$$

o en forma matricial  $T = 1 - 2Q$ . Però, com que  $1 - 2Q \in O(n)$ , obtenim que  $T$  consisteix en una rotació: *pròpia*, si  $\det T = 1$ , quan representa un gir al voltant d'un cert eix; o bé *impròpia* si, a més, reflecteix un pla perpendicular a aquest eix. Per tant, podem expressar els resultats obtinguts en la següent proposició:

**Lema 4.9.** *Tota aplicació del grup  $\widetilde{\mathcal{M}}^n$  està generada per les següents i només per les següents aplicacions:*

- (i) Homotècia:  $x \mapsto Rx$ ,  $R > 0$ ;
- (ii) Translació:  $x \mapsto x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii) Rotació:  $x \mapsto Ax$ ,  $A \in O(n)$ ;
- (iv) Inversió:  $x \mapsto x/|x|^2$ .

### 4.3.1 Teorema de Liouville

A més de les inversions de  $\mathbb{R}^n$ , tindrem inversions per a qualsevol mètrica riemanniana (o pseudoriemanniana), tenint present que per a un tensor mètric  $g_{ij} = g_{ij}(x_0^1, \dots, x_0^n)$ , el mòdul d'un vector  $x$  en el punt  $x_0$  és

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x^i x^j = |x|^2,$$

així que la inversió es defineix com

$$x \mapsto \frac{x}{g_{ij} x^i x^j},$$

on abreviem la sumació respecte els índexs  $i, j$ .

Observeu que és una aplicació conforme ja que  $\lambda(x) = -\langle x, x \rangle^{-4}$  és constant i depèn de cada punt. Per altra banda, en un espai pseudoeuclidià del tipus  $(p, q)$  es té

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{i=1}^q (x^i)^2; \tag{4.3.3}$$

s'hi pot definir una homotècia  $x \mapsto Rx$ ,  $R > 0$ , una translació  $x \mapsto x + a$ , una rotació  $x \mapsto Ax$ ,  $A \in O(p, q) = \text{Isom}(\mathbb{R}_{p,q}^n)$ , i una inversió  $x \mapsto x/\langle x, x \rangle$ , segons la fórmula (4.3.3).

Tenim, com hem vist anteriorment, que les transformacions de Möbius són transformacions conformes. Per tant, ara podem suposar que  $\varphi$  defineix un homeomorfisme d'ordre major que 3. Posem que la funció  $y^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, \dots, x^n)$  transforma la regió  $U$  en la regió  $V$  de l'espai euclidià completat, ambdues diferents del buit. Podem suposar, conjugant amb la transformació de Möbius adequada, que  $0 \in U$  i  $\varphi(0) = 0$ .

Com que és conforme, el jacobí defineix una aplicació conforme, és a dir, les dues mètriques són proporcionals

$$|dy| = \lambda(x)|dx|,$$

per a  $dy = \sum_{\alpha} dy^{\alpha} e_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} a_{\beta}^{\alpha} dx^{\beta} e_{\alpha}$ , per a la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de l'espai completat i per a  $A = (a_{\beta}^{\alpha}) = \left( \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right)$ .

Per a aquest capítol farem ús del conveni de sumació d'Einstein, segons el qual abreviarem el símbol de sumatori quan hi hagi índexs repetits. Per exemple,  $dy = dy^{\alpha} e_{\alpha}$  se sobreentendrà que es suma respecte  $\alpha$ , de 1 a  $n$ .

Siguin  $A\eta_i$ ,  $A\eta_j$ ,  $A\eta_k$  tres vectors tals que  $\langle A\eta_{\alpha}, A\eta_{\beta} \rangle = 0$ ,  $\alpha, \beta = i, j, k$ . Com que  $\langle A\eta_i, A\eta_j \rangle = 0$  per a tot  $x$ , la derivada direccional al llarg del vector  $\eta_k$  de la funció  $F(x) = \langle A\eta_i, A\eta_j \rangle$  és

$$\nabla_{\eta_k} F(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \eta_k^{\gamma} \langle A\eta_i, A\eta_j \rangle = g_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \eta_i^{\alpha} \eta_j^{\beta} \eta_k^{\gamma}.$$

D'altra banda, l'expressió

$$\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \eta_i^\alpha \eta_j^\gamma, A\eta_k \right\rangle, \quad (4.3.4)$$

pot reescriure's com

$$g_{pq} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \eta_i^\alpha \eta_j^\beta \frac{\partial y^p}{\partial x^\gamma} \eta_k^\gamma = g_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \eta_i^\alpha \eta_j^\beta \eta_k^\gamma,$$

i és equivalent, doncs, a  $\nabla_{\eta_k} F(x)$ . Com que la funció  $F(x)$  és constant (sempre és zero), llavors la derivada direccional és nul·la, així que podem igualar (4.3.4) a zero. Tenim

$$\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \eta_i^\alpha \eta_j^\gamma, A\eta_k \right\rangle = 0. \quad (4.3.5)$$

Suposem que tenim  $n$  vectors ortogonals  $\eta_1, \dots, \eta_n$ , de forma que  $\eta_i = \eta_1$ ,  $\eta_j = \eta_2$  i  $\eta_k = \eta_3, \dots, \eta_n$ . Hem demostrat que  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \eta_i^\alpha \eta_j^\gamma$  és perpendicular a  $A\eta_k$ , i.e., a  $A\eta_3$ , a  $A\eta_4, \dots$  i a  $A\eta_n$ . Per tant,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \eta_i^\alpha \eta_j^\gamma$  pertany a l'espai vectorial de base  $\{A\eta_1, A\eta_2\}$ :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta = \tau A\eta_1 + v A\eta_2, \quad (4.3.6)$$

on és les funcions hauran de ser, per definició,  $\tau = \tau(x)$  i  $v = v(x)$  són tals que

$$\begin{aligned} \tau(x) |A\eta_1|^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta, A\eta_1 \right\rangle; \\ v(x) |A\eta_2|^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta, A\eta_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Aquest resultat ens servirà per provar el següent teorema, que és de gran importància:

**Teorema 4.10.** (Teorema de Liouville). *Sigui  $\varphi$  un funció conforme amb derivades parcials d'ordre  $k \geq 4$  d'una regió  $U$  a l'espai euclidià  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ ,  $n \geq 3$ . Llavors,  $\varphi$  és composició d'homotècies, rotacions, translacions i inversions. Més concretament, és la restricció  $T|_U$  d'una transformació de Möbius  $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ .<sup>1</sup>*

**Corol·lari 4.11.** *Els automorfismes d'una regió de l'espai  $U$  en ella mateixa són restriccions de transformacions de Möbius, és a dir,*

$$\text{Aut } U = \widetilde{\mathcal{M}}_n(U).$$

En el llibre [12, vol. 1, pàg. 107-109] es demostra el teorema per a 3 dimensions. Nosaltres, però, el demostrarem per a  $n$ -dimensions, fent ús dels càlculs anteriors a l'exposició del teorema.

*Demostració.* Utilitzant els càlculs anteriors veiem que

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{\lambda^2 |\eta_1|^2} \left( \frac{1}{2} \eta_2^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle A\eta_1, A\eta_2 \rangle \right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\eta_2^\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}}{\lambda(x)}; \\ v(x) &= \frac{1}{\lambda^2 |\eta_2|^2} \left( \frac{1}{2} \eta_1^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle A\eta_1, A\eta_2 \rangle \right) = \frac{\eta_1^\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}}{\lambda(x)}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

<sup>1</sup>El teorema és vàlid, fins i tot, per a funcions de menor suavitat.

Dividint entre  $\lambda(x) = \rho^{-1}(x)$  i substituint a (4.3.6) obtenim

$$\frac{\partial^2(\rho y)}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta = \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \right) y. \quad (4.3.8)$$

La derivada direccional d'aquesta expressió al llarg del vector  $\eta_3$  és

$$\nabla_{\eta_3} \left( \frac{\partial^2(\rho y)}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \right) = \nabla_{\eta_3} \left[ \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \right) y \right],$$

i la regla del producte ens permet veure, calculant directament, que

$$\frac{\partial^2(\rho y)}{\partial x^\beta \partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \eta_3^\beta = \underbrace{\left( \frac{\partial^3 \rho^\beta}{\partial x^\beta \partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \eta_3^\beta \right)}_{(i)} y + A \eta_1 \underbrace{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta}_{(ii)}.$$

Recordem que podem permutar els subíndexs 1, 2, 3 i, com que les expressions (i) i (ii) són simètriques, també ho ha de ser l'expressió de la dreta:

$$\sum_{\beta, \gamma, \delta} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \right) \frac{\partial y}{\partial x^\beta} \eta_3^\beta = \sum_{\beta, \gamma, \delta} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \eta_2^\gamma \eta_3^\delta \right) \frac{\partial y}{\partial x^\beta} \eta_1^\beta,$$

d'on s'obté  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \eta_1^\gamma \eta_2^\delta \equiv 0$ , ja que la resta de termes no són nuls, i s'anul·la si i només si  $\eta_1$  i  $\eta_2$  són ortogonals. Per tant, el tensor  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}$  és proporcional al tensor mètric, així que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} = \omega(x) g_{\gamma\delta}, \quad (4.3.9)$$

on  $g_{\gamma\delta}$  és la mètrica de  $U$ . Suposem que, en lloc de tres vectors ortogonals, tenim tres vectors arbitraris  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  i  $\xi_3$ . Anem a demostrar ara que la funció  $\omega(x)$  és constant per a tot  $x \in U$ . Derivant obtenim

$$\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta \partial x^\beta} \xi_1^\gamma \xi_2^\delta \xi_3^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \omega(x) \xi_1^\gamma \langle \xi_2, \xi_3 \rangle,$$

on permutant els índexs 1 i 2 s'obté

$$\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta \partial x^\beta} \xi_2^\gamma \xi_1^\delta \xi_3^\beta = \omega(x) \xi_2^\gamma \langle \xi_1, \xi_3 \rangle.$$

Restant aquesta a la primera obtenim

$$\left\langle \frac{\partial \omega}{\partial x^\gamma} \xi_1^\gamma \xi_2 - \frac{\partial \omega}{\partial x^\alpha} \xi_2^\alpha \xi_1, \xi_3 \right\rangle = 0.$$

Permutant els índexs 1, 2, 3 es dedueix que la derivada de  $\omega$  és nul·la i, doncs, és una constant. Així, la igualtat anterior es reescriu com  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} = \omega g_{\gamma\delta}$ , per a un cert  $\omega$  constant. Això ens indica, a més, que  $\rho$  és una funció de la forma  $\rho(x) = a_1 |x - x_0|^2 + b_1$ , amb constants  $a_1$  i  $b_1$ . Com que  $\lambda(x) = \rho^{-1}(x)$ ,  $\lambda$  és de la forma

$$\lambda = a_2 |y - y_0|^2 + b_2,$$

d'on  $(a_1 |x - x_0|^2 + b_1)(a_2 |y - y_0|^2 + b_2) = 1$ . Com que hem suposat  $\varphi(0) = 0$ , tenim  $x_0 = y_0 = 0$ . Llavors  $|x - x_0|^2 = R^2$  es transformarà en l'esfera  $|y - y_0|^2 = R^2$ , i utilitzant la darrera suposició,  $|x|^2 = |y|^2 = R^2$ . Calculant

$$|y| = \int_0^x |dy| = \int_0^x \lambda(x) |dx| = \int_0^{|x|} \frac{dt}{at^2 + b}. \quad (4.3.10)$$

Per tal que l'expressió anterior sigui igual a  $|x|$  cal que  $a$  sigui 0, i en aquest cas, la funció  $\lambda$  és una constant; o que  $b$  sigui 0, i en aquest cas obtenim, aplicant una inversió  $x \mapsto x^*$ :

$$|y| = \int_0^{|x|} \frac{dt}{a} = \frac{|x|}{a}, \quad (4.3.11)$$

d'on  $\lambda$  és una constant. □

Observeu que el teorema ha estat demostrat per a una mètrica arbitrària, així que aquest teorema és valid també per a mètriques pseudoeuclidials. Un cas particular del corollari és que  $\text{Aut } \widehat{\mathbb{R}}^n = \widetilde{\mathcal{M}}_n$ .

### 4.3.2 Inversa, pol i punt límit

Al capítol segon, per demostrar que una transformació de Möbius és composició de homotècies, rotacions, translacions i inversions vam usar la següent fórmula:

$$z \mapsto -\frac{1}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} = -\frac{1}{|c|^2} \left( \frac{|c|}{c} \right)^2 \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Això ens permet generalitzar aquesta fórmula en una transformació del grup  $\mathcal{M}_n$ , que es defineix de la següent manera: si escollim  $A, C \in O(n)$ , on  $c = \lambda C e_1$ ,  $\lambda > 0$  i  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , una transformació de Möbius pot expressar-se com

$$x \mapsto -\frac{Cx + d}{|Cx + d|^2} + \frac{Ac}{|c|^2}.$$

Inspeccionem les propietats d'aquesta aplicació: en primer lloc, la inversa. Haureu pogut notar com la inversa d'una homotècia, d'una rotació, d'una translació o d'una inversió és, novament, una homotècia, una rotació, una translació o una inversió, correspectivament. Per tant, n'hi ha prou amb invertir cadascuna de les funcions que componen el conjunt. Podem formular-la d'acord que resulta de la composició ordenada de

$$x \mapsto Cx, \quad x \mapsto x + d, \quad x \mapsto x^*, \quad x \mapsto x + Ac^*.$$

Llavors, d'una banda, si  $C = (c_j^i)$ ,  $C^{-1} = \Gamma = (\gamma_j^i)$  és tal que

$$\sum_{k=1}^n c_k^i \gamma_j^k = \delta_j^i.$$

D'altra banda, la inversa de la *translació*  $x \mapsto x + d$  és  $x \mapsto x - d$ ; la *inversió* té inversa  $x \mapsto x^*$ ; i la translació  $x \mapsto x + Ac^*$  té inversa  $x \mapsto x - Ac^*$ , com és obvi. La funció resultant de la composició en el ordre invers és

$$x \mapsto \Gamma \left( \frac{x - Ac^*}{|x - Ac^*|^2} - d \right).$$

A partir d'aquesta fórmula, s'obté que el *punt límit* és  $Ac/|c|^2$ , i el *punt pol*  $-\Gamma d = -C^{-1}d$ .



## 4.4 Imatges d'hiperesferes

Ara hem de comprovar que les transformacions de Möbius de  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  transformen hiperesferes en hiperesferes. Això ho veurem de la següent manera. D'acord amb el Lema 4.9, el grup  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  està generat per homotècies, rotacions, translacions i inversions. Aquestes tres primeres transformacions és evident que transformen hiperesferes en hiperesferes. Cal verificar, per tant, que la inversió ho verifica.

Donada una hiperesfera euclidiana  $H$  de radi  $R$  i centre  $x_0$ , observeu que la reflexió

$$T(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} = \frac{x - x_0}{R^2},$$

verifica que, per a  $x$  un punt de l'esfera,

$$|T(x)|^2 = \frac{1}{R^4} \sum_i (x^i - x_0^i)^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Si es tinguéssim un hiperplà  $\Pi$  i una hiperesfera euclidiana  $H$  intersecant-se, en tots els punts d'intersecció  $M$  les tangents formarien un angle constant  $\alpha$ . Si  $L$  és una transformació de Möbius de forma que  $L(\infty) = P$ , i de forma que  $L(x) \neq \infty$  per a tot  $x \in H, \Pi$ , llavors és evident que l'hiperplà  $\Pi$  no pot transformar-se en un hiperplà, de la mateixa manera que  $H$  no pot transformar-se en un hiperplà. En el conjunt de punts  $L(M)$  les tangents formen un angle  $\alpha$ . Això vol dir que, com que hi ha una intersecció amb una hiperesfera, i el conjunt de punts  $L(\Pi)$  és suau, en aquella zona el conjunt és «una mica» esfèric. Amb això no hi ha prou, per exemple, una altra hiperesfera euclidiana,  $H_2$ , i repetir el raonament. En acumular moltes esferes, s'haurà de mantenir un angle  $\alpha$  a les tangents de tots els punts del conjunt  $L(\Pi)$ , així que es tractarà d'una hiperesfera.

Pel que fa a l'actuació de rotacions, translacions i homotècies, és evident que transformen hiperesferes en hiperesferes.

**Teorema 4.12.** *Les transformacions de Möbius de  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  transformen hiperesferes en hiperesferes.*

Considerem ara dues esferes euclidianes  $S_1(a_1, R_1)$  i  $S_2(a_2, R_2)$ . Hem de concloure que entre aquestes dues superfícies existeix sempre una transformació de Möbius de forma que  $S_1 \mapsto S_2$  i viceversa. Això és evident pel següent raonament:

Siguin  $T_1$  i  $T_2$  dues aplicacions de la forma

$$T_i(x) = \frac{x - a_i}{|x - a_i|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Noteu que  $T_1$  i  $T_2$  porten, respectivament,  $S_1$  i  $S_2$  a la hiperesfera  $H_0(0, 1)$ . És obvi que l'aplicació que busquem és  $T_2^{-1}T_1$ .

En el cas de dos hiperplans, com a mínim l'aplicació entre aquests dos ha de fixar el punt de l'infinit. Això ens diu que mitjançant rotacions, translacions i homotècies tornem a obtenir hiperplans. Amb la superposició òptima d'aquestes aplicacions podem relacionar dos hiperplans arbitraris.

Per tant, ja que, com hem vist abans, existeixen aplicacions de forma que  $H_0(0, 1)$  es transforma en un hiperpla, és natural concloure amb el següent fet:

**Corol·lari 4.13.** *Donades dues hiperesferes arbitràries  $H_1$  i  $H_2$ , sempre existeix una transformació de Möbius de forma que  $H_1 \mapsto H_2$ .*

### 4.5 Extensió de Poincaré

D'acord amb el que hem vist, una transformació de Möbius  $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$  porta l'esfera de Riemann  $S_n$  a una hiperesfera  $\Sigma$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Composant a l'esquerra de la projecció estereogràfica  $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S_n$  per l'aplicació  $T$ , veiem que  $\overline{T} = T\varphi$  (novament anomenada *projecció estereogràfica*) envia  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  a la hiperesfera  $\Sigma$ . La projecció estereogràfica d'una hiperesfera  $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  és

$$\varphi(S) = S_n \cap H,$$

per una certa hiperesfera  $H \subset \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$  orthogonal a  $S_n$ . Com que  $T$  preserva angles euclidians, llavors

$$\overline{T}\varphi(S) = \Sigma \cap H',$$

on  $H' = T(H)$ .

Denotem amb  $\text{Ref}_S$  la reflexió respecte  $S$ . Com que el fet de ser orthogonal obliga a què la reflexió de  $H'$  fixi  $\Sigma$  (la denotem mitjançant  $\text{Ref}_{H'}|_{\Sigma}$ ), llavors observem com

$$\widetilde{T} \text{Ref}_S = \text{Ref}_{H'}|_{\Sigma},$$

on  $|_{\Sigma}$  denota restricció de la funció en el conjunt  $\Sigma$ .

**Definició 4.14.** Cada funció  $\text{Ref}_{H'}$  s'anomena *extensió de Poincaré* de la reflexió  $\text{Ref}_S$ .

Sigui  $\tau(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0)$ . Per a cada reflexió respecte una hiperesfera  $S(a, R)$  (respectivament, un hiperpla  $H(a, t)$ ), l'extensió de Poincaré es pot veure com la funció  $\overline{T}(x)$ , que és la reflexió respecte  $S(\tau(a), R)$  (respectivament, la funció  $LT(x)$ ). La funció  $\overline{T}$ , a més, preserva el semiespai superior

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x = (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) : x^{n+1} > 0\}.$$

Val a dir que la funció  $\tau$  també s'anomena projecció estereogràfica.

#### 4.5.1 Extensió de Poincaré de $\mathcal{M}_2$

Considerem el pla completat  $\widehat{\mathbb{C}}$  on cada punt  $z = (x^1, x^2)$ . La projecció estereogràfica

$$\tau : (x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, 0),$$

que genera a partir del pla completat el conjunt de punts  $z = (x^1, x^2, x^3)$  amb la propietat  $x^3 = 0$ , a l'espai euclidià  $\mathbb{R}^3$ , juntament amb  $\tau(\infty) = \infty$ . Posem  $x^3 = r$ , per a  $r \in \mathbb{R}^+$ . En primer lloc, una transformació de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

sotmesa a la normalització  $ad - bc = 1$ , es pot expressar com la funció  $T = T_1 + iT_2$  sobre cada punt del pla completat llevat dels punts singulars, que són 0 i  $\infty$  (a l'esfera de Riemann els punts singulars el pol nord i el pol sud). Escrivint  $T(z) = (az + b)\overline{(cz + d)}^*$ , per a  $(z, r)$  tenim

$$\begin{aligned} z &\mapsto \frac{(az + b)\overline{cz + d} + a\bar{c}r^2}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2}; \\ r &\mapsto \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2}. \end{aligned}$$

*Conclusió.* L'extensió de Poincaré de  $\mathcal{M}_2$  és

$$\tau(z, r) = \left( \frac{(az + b)\overline{cz + d} + a\bar{c}r^2}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2}, \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2} \right). \quad (4.5.1)$$

## 4.6 La raó doble

A l'espai  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  no té sentit l'expressió amb què identificavem la raó doble. No obstant, existeix una aplicació amb propietats gairebé idèntiques, amb l'oportuna distinció en la orientació.

Havíem vist que la distància cordal era

$$\tilde{d}(x_1, x_2) = |\phi(x_2) - \phi(x_1)|.$$

Calculant directament obtenim

$$\tilde{d}(x_1, x_2) = \frac{2|x_2 - x_1|}{\sqrt{(1 + |x_2|^2)(1 + |x_1|^2)}}; \quad \tilde{d}(x_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |x_1|^2}}. \quad (4.6.1)$$

**Definició 4.15.** La *raó doble* de quatre punts  $x, x_2, x_3, x_4 \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  diferents és

$$|x, x_2, x_3, x_4| = \frac{\tilde{d}(x, x_3) \tilde{d}(x_2, x_4)}{\tilde{d}(x, x_4) \tilde{d}(x_2, x_3)}.$$

Una propietat important és que, substituïnt d'acord amb (4.6.1), s'obté que és vàlid substituir les distàncies cordals per les distàncies euclidianes a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Altrament, si  $x, x_2, x_3$  o  $x_4 = \infty$ , la raó doble és, correspectivament,

$$\frac{|x_2 - x_4|}{|x_2 - x_3|}, \frac{|x - x_3|}{|x - x_4|}, \frac{|x_2 - x_4|}{|x - x_4|}, \frac{|x - x_3|}{|x_2 - x_3|}.$$

Això és pren per definició i es raona a partir de límits quan els punts en qüestió tendeixen a  $\infty$ .

**Proposició 4.16.** *Sigui  $T$  una aplicació bijectiva. Aleshores,  $T(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , és una transformació de Möbius si i només si*

$$|x_1, x_2, x_3, x_4| = |y_1, y_2, y_3, y_4|. \quad (4.6.2)$$

*Demostració.* Provem, en primer lloc, la condicionalitat en un sentit, és a dir, provem que és necessari que l'equació anterior sigui certa perquè  $T \in \widehat{\mathcal{M}}_n$ . Els resultats anteriors ens permeten provar solament que les homotècies, les rotacions, les translacions i les inversions preserven el valor d'aquesta funció.

En primer lloc tenim el cas de les rotacions i les translacions. Com que són isometries, la distància es preserva i, d'aquesta manera, la raó doble queda invariada sota l'acció d'aquestes. Les homotècies  $x \mapsto Rx$ , com que  $R$  és un nombre positiu, és cert que  $|Ra - Rb| = R|a - b|$ , i partint d'aquesta base, s'obté immediatament el fet.

Finalment, a les inversions  $J(x) = x^*$  veiem que

$$|J(x_1) - J(x_2)| = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1||x_2|}.$$

Així que resulta evident el resultat

$$\frac{|J(x) - J(x_3)||J(x_2) - J(x_4)|}{|J(x) - J(x_4)||J(x_2) - J(x_3)|} = \frac{|x - x_3||x_2 - x_4|}{|x - x_4||x_2 - x_3|}.$$

En segon lloc, provem l'altre sentit de la condició. Suposem que  $T$  és una bijecció de l'espai  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Podem assumir que  $T$  fixa  $\infty$  composant a l'esquerra per la transformació de Möbius adequada, que ja hem demostrat que preserva la raó doble. En aquest cas,

$$|y, \infty, y_3, y_4| = |x, \infty, x_3, x_4|,$$

on hem denotat  $y_i = T(x_i)$   $i = 1, 2, 3, 4$ . A més,  $|y, y_2, \infty, y_4| = |x, x_2, \infty, x_4|$ . D'aquí es té per la definició que

$$\frac{|y_2 - y_4|}{|x_2 - x_4|} = \frac{|y - y_4|}{|x - x_4|} = \frac{|y - y_3|}{|x - x_3|} = k = \text{const.}$$

Per simplificar la notació, posarem  $F(x) = \frac{1}{k}T(x)$ . Això ens proporciona que

$$|F(x) - F(x_4)| = |x - x_4|,$$

així que  $F$  és una isometria i, per tant,  $T(x) = kF(x)$  també. Ja que és una isometria,  $T$  només pot ser composició de translacions i rotacions:  $T(x) = Ax + B$ , on  $B \in \mathbb{R}^n$  i  $A \in O(n)$ . Hem obtingut, d'aquesta manera, una transformació de Möbius.  $\square$

#### 4.6.1 Principi de simetria

Considerem una hiperesfera  $S$  sobre l'espai euclidià completat, que asumirem sense perdre generalitat que té centre a l'origen. Llavors, la reflexió d'un punt  $x$ , que posem considerar que està a l'interior de la hiperesfera, és el punt que verifica les condicions següents:

1. Es troba en la direcció i el sentit del vector  $\xi$  que uneix l'origen (el centre) i el punt  $x$ .
2. Si llancem una recta (hi ha moltes) perpendicular a  $\xi$  pel punt  $x$ , i aquesta talla l'esfera en un punt  $x_0$ , llavors el mòdul del vector és

$$\sec \alpha = \frac{\langle \xi, \xi \rangle \langle \xi_0, \xi_0 \rangle}{\langle \xi, \xi_0 \rangle},$$

essent  $\xi_0$  el vector que uneix l'origen amb el punt  $x_0$ .

Pel fet que una recta que creua per  $x$  i  $x_0$  es transforma en un cercle, i amb l'escaient interpretació de la simetria respecte a un pla, tenim el següent teorema:

**Teorema 4.17.** (Principi de simetria) *Les transformacions de Möbius preserven la simetria respecte les esferes generalitzades.*

#### 4.6.2 Distorsió de diàmetres

El grup de moviments de l'esfera  $S_2$ , i.e.  $O(3)$ , és isomorfe al grup de les transformacions  $SU(2)/\pm 1$ . De la mateixa manera,  $O(n+1)$  és el grup de moviments de l'esfera  $S_n$ . Les translacions i rotacions pertanyen al grup de moviments de l'espai  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . De fet, no hi ha altres transformacions de Möbius a  $\text{Isom}(\widehat{\mathbb{R}}) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_n$ . Com que són moviments, preserven els diàmetres dels conjunts. Les reflexions respecte a un hiperpla preserven els diàmetres, ja que preserven la longitud.

**Proposició 4.18.** *Considerem la reflexió  $T = \text{Ref}_S$  d'una hiperesfera  $S(a, R)$ :*

$$\text{Ref}_S(x) = \frac{R^2(x - a)}{|x - a|} + a.$$

*Sigui  $B$  és un conjunt tancat que no conté  $a$ , i sigui  $\rho$  és la distància de  $a$  al conjunt  $B$ . Llavors el diàmetre (euclidià) és*

$$\text{diam}(T(B)) = \sup_{x_1, x_2 \in B} |x_1 - x_2| \leq \frac{2R^2}{\rho}. \quad (4.6.3)$$

Si  $\infty \in B$ , llavors

$$\frac{R^2}{\rho} \leq \text{diam}(T(B)) = \sup_{x_1, x_2 \in B'} |x_1 - x_2| \leq \frac{2R^2}{\rho}. \quad (4.6.4)$$

*Demostració.* Com en el cas planar, les rotacions i translacions adequades ens permeten assumir  $a = 0$ . Així doncs,  $T(x) = \frac{R^2 x}{|x|^2}$ . La distància mínima des del zero al conjunt és  $\rho$ , així que una hiperesfera  $E(0, \rho)$  és a l'exterior de  $B$  i, a més, és tangent a aquest conjunt.

La hiperesfera  $T(E)$  és  $E' \left(0, \frac{R^2}{\rho}\right)$ . Si  $B$  està completament a l'exterior de  $S$  (respectivament, a l'interior de  $S$ ), aleshores el cercle  $E$  va a l'interior (respectivament, a l'exterior) de  $S$  i  $E'$  acota  $T(B)$ , i el seu diàmetre ha de ser com a molt igual a  $\text{diam}(E') = \frac{2R^2}{\rho}$ .

Si  $B$  conté una part de l'esfera  $S$ , el cercle  $E$  es troba a l'interior, mentre que  $E'$  a l'exterior de l'esfera, d'on  $T(B)$  queda acotat per  $E'$ .

Si  $\infty$  està en el conjunt, llavors per definició  $\infty$  va a 0, i el diàmetre de  $T(B)$ , doncs, és igual o major al radi de  $E'$ .  $\square$

## 4.7 El model de Poincaré

Començarem, com en el cas del pla, treballant sobre el *model de Poincaré* a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Considerem l'hiperdisc

$$\mathbb{B}^n = D(0, 1),$$

de dimensió  $n - 1$ , centrat a l'origen i amb radi 1, i la seva frontera  $\partial \mathbb{B}^n$ .

**Definició 4.19.** Cada *línia hiperbòlica*  $L$  d'aquest hiperdisc és la intersecció de  $\mathbb{B}^n$  amb cercles perpendiculars a  $\partial \mathbb{B}^n$ . La intersecció amb la frontera està formada pels *punts finals de la línia hiperbòlica* (són dos). La *mètrica hiperbòlica* en aquest hiperdisc  $d_{\mathbb{B}} : \Delta^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  és aquella que verifica les condicions següents:

- (i) Si  $y_1, y_2 \in \mathbb{B}^n$ ,  $y_1 = y_2$ , llavors  $d_{\mathbb{B}}(x_1, x_2) = 0$ ;
- (ii) Si  $y_1, y_2 \in \mathbb{B}^n$ ,  $y_1 \neq y_2$ , essent la línia hiperbòlica  $L$  tal que  $a, y_1, y_2, b$  s'hi troben en aquest ordre (l'ordre és indispensable); aleshores, la longitud

$$d_{\mathbb{B}}(y_1, y_2) = \log |a, b, y_2, y_1|.$$

Verifiquem que  $\rho$  és una mètrica. Comprovem si per a tots els punts  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{B}^n$ ,

1.  $d_{\mathbb{B}^n}(y_1, y_2) = 0$  si i només si  $y_1 = y_2$ ;
2.  $d_{\mathbb{B}^n}(y_1, y_2) = d_{\mathbb{B}^n}(y_2, y_1)$  (propietat simètrica);
3.  $d_{\mathbb{B}^n}(y_1, y_2) \leq d_{\mathbb{B}^n}(y_1, y_3) + d_{\mathbb{B}^n}(y_3, y_2)$  (propietat triangular).

Doncs bé, la demostració és evident pel fet que si escollim tres punts arbitraris de l'hiperdisc, inevitablement passa un pla per tots tres. La intersecció d'aquest pla amb l'hiperdisc és el model de Poincaré bidimensional  $\Delta = \mathbb{B}^2$ , que ja vam demostrar que era un espai mètric.

Com a corol·lari d'aquest fet, podeu observar que donat un hiperdisc  $D(a, \delta)$  arbitrari i la mètrica  $d_D$  definida anàlogament  $d_{\mathbb{B}}$ ,  $(D, d_D)$  és un espai mètric.

## 4.8 Forma infinitesimal del model de Poincaré

### 4.8.1 Espai de Minkowski

Per a construir una *pseudoesfera  $n$ -dimensional* tornarem a treballar a un espai de Minkowski. En aquest cas, l'espai  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  (és un espai pseudoeuclidià del tipus  $(1, n)$ ). El producte escalar de dos vectors  $\xi_1$  i  $\xi_2$  en un punt  $x_0$  serà de la forma

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \xi_1^1 \xi_2^1 - \sum_{k=2}^{n+1} \xi_1^k \xi_2^k, \quad \langle \xi, \xi \rangle = (\xi^1)^2 - \sum_{k=2}^{n+1} (\xi^k)^2 = |\xi|_{1,n}^2, \quad (4.8.1)$$

i no és necessàriament positiu. Utilitzarem la notació  $(t, x^1, \dots, x^n)$  per les coordenades d'un punt<sup>2</sup>  $P$ . La mètrica d'aquest espai és

$$dl^2 = dt^2 - \sum_{k=1}^n (dx^k)^2.$$

La pseudoesfera  $n$ -dimensional està formada per tots els punts amb el quadrat del mòdul (el que s'ha definit a la fórmula (36)) igual a  $R^2$  tenen l'equació de l'hiperboloide

$$t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^n)^2 = R^2.$$

Considerem la fulla superior, és a dir,  $R > 0$ . Aquesta situació és del tot inasumible a l'espai euclidià, ja que no hi ha punts que estiguin a una distància negativa de 0, és a dir, el producte escalar és estrictament positiu.

### 4.8.2 Projectió estereogràfica de la pseudoesfera

Constituïrem la *projectió estereogràfica* a la pseudoesfera en el disc de Poincaré. Prendrem radi  $R = 1$ . La mateixa figura que hem usat al capítol tercer podem utilitzar-la ara. Aquesta mostra la hipèrbola  $t^2 - (x^\alpha)^2 = 1$ ,  $x^\alpha = x^1, \dots, x^n$ .

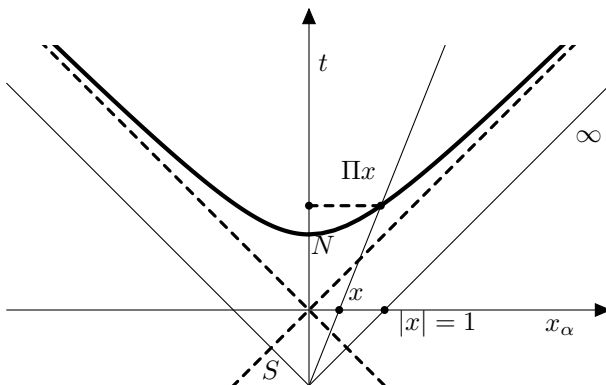


Figura 4.8.1: Projectió estereogràfica de la pseudoesfera.

Els punts de la pseudoesfera es projecten sobre l'hiperdisc unitari centrat a l'origen, amb coordenades  $y^1, \dots, y^n$ . Més concretament tenim aplicant el Teorema de Tales que

$$\frac{x^1}{y^1} = \frac{t+1}{1}, \dots, \frac{x^n}{y^n} = \frac{t+1}{1}. \quad (4.8.2)$$

<sup>2</sup>A la física moderna, els punts  $P = (t, x^1, \dots, x^n)$  se solen anomenar successos.

Aquests han de verificar  $t^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 = 0$ , és a dir, han de tenir mòdul unitat. Substituint l'equació de la pseudoesfera en aquesta equació:

$$t^2 = (y^1)^2(t+1)^2 + \dots + (y^n)^2(t+1)^2.$$

La solució positiva (és a dir, la meitat superior) és

$$t = \frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2},$$

essent  $|y|$  la norma euclidiana  $n$ -dimensional. Ja que  $x^j = y^j(t+1)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , trobem les fórmules explícites de la projecció estereogràfica:

$$t = \frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2}, \quad x^1 = \frac{2y^1}{1 - |y|^2}, \dots, \quad x^n = \frac{2y^n}{1 - |y|^2}.$$

Afegint un punt de l'infinit a la pseudoesfera, i afegint la frontera de  $\mathbb{B}^n$ , és a dir,  $\partial \mathbb{B}^n$ , definim  $\phi(\partial \mathbb{B}^n) := \infty$ . Clarament,  $\phi$  és un homeomorfisme, ja que establim una correspondència biunívoca entre els punts de la bola de Poincaré i la pseudoesfera «completada». Mentre que a la pseudoesfera evaluem la longitud amb la mètrica de Minkowski, això és,  $dl^2 = dt^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^n)^2$ . Entre dos punts (successos),  $P_1 = (t_1, x_1^1, \dots, x_1^n)$  i  $P_2 = (t_2, x_2^1, \dots, x_2^n)$ , l'interval *espai-temporal* entre ambdós punts és

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(t_1 - t_2)^2 - \sum_j (x_1^j - x_2^j)^2}.$$

Per tant, la mètrica recíproca a la distància cordal amb què està dotada l'esfera, establerta sobre la pseudoesfera completada amb  $\infty$ , és l'interval *espai-temporal* entre les seves projeccions estereogràfiques:

$$\tilde{\rho}(y_1, y_2) = |\phi(y_1) - \phi(y_2)|.$$

Calculant directament, obtenim

$$\tilde{\rho}(y_1, y_2) = \frac{2|y_2 - y_1|}{\sqrt{(1 - |x_2|^2)(1 - |x_1|^2)}}; \quad \tilde{\rho}(x_1, \partial \mathbb{B}^n) = \frac{2}{\sqrt{(1 - |x_1|^2)}},$$

la notació  $\tilde{\rho}(x_1, \partial \mathbb{B}^n)$  indica distància respecte a un punt de la frontera.

Anàlogament a com hem construït la mètrica en el disc de Poincaré, tornem a obtenir que de les fórmules de la projecció estereogràfica al cas planar i al cas  $n$ -dimensional són equivalents. Això ens diu, a més, que en entorns suficientment petits, la mètrica del model  $n$ -dimensional de Poincaré (a la geometria de Lobatxevski) queda definida pel diferencial de la longitud:

$$dl = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2|\Delta y|}{\sqrt{(1 - |y|^2)(1 - |y + \Delta y|^2)}} = \frac{2|dy|}{1 - |y|^2}.$$

A partir d'aquests càlculs, veiem que tota corba suau  $L$  al model de Poincaré  $n$ -dimensional de la forma  $y(\tau) = (y^1(\tau), \dots, y^n(\tau))$  i  $\alpha \leq \tau \leq \beta$  té longitud

$$l = \int_L dl = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\dot{y}(\tau)|}{1 - |y(\tau)|^2} d\tau, \quad \dot{y}(\tau) = \left( \frac{dy^1}{d\tau}, \dots, \frac{dy^n}{d\tau} \right),$$

on naturalment  $|y(\tau)| < 1$ . Posem un exemple:

**Exemple 4.20.** Dibuixem un segment  $y(\tau) = (\tau r^1, \dots, \tau r^n)$ , on el vector unitari  $r = (r^j)$ ,  $0 \leq \tau \leq \alpha$ , és de forma que  $\alpha|r| < 1$ , i  $y_1 = \alpha r$ , és a dir,  $y_1^j = \alpha r^j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Llavors, la longitud d'aquest segment és

$$l = 2 \int_0^\alpha \frac{|r| d\tau}{1 - \tau|r|^2} = \log \left. \frac{|r|^2 \tau + |r|}{|r|^2 \tau - |r|} \right|_0^\alpha = \log \frac{1 + |y_1|}{1 - |y_1|}.$$

Examinarem aquesta qüestió més endavant, quan introduïm els moviments de  $\mathbb{B}^n$ .

## 4.9 Moviments de la mètrica hiperbòlica

Les úniques aplicacions bijectives que preserven la raó doble són les transformacions de Möbius. Per tant, el grup d'isometries de la mètrica hiperbòlica està format per les aplicacions de  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  que transformen l'hiperdisc en ell mateix, és a dir,  $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{B}^n)$ . A més, el Teorema de Liouville ens diu que  $\text{Aut}(\mathbb{B}^n) = \widetilde{\mathcal{M}}_n$ . Finalment,  $\text{Aut}(\mathbb{B}^n) = \text{Isom}(\mathbb{B}^n)$ .

Sigui  $T$  un automorfisme de  $\mathbb{B}^n$  de forma que  $T(y_1) = 0$ . Com a conseqüència del darrer fet,

$$d_{\mathbb{B}}(y_1, y_2) = d_{\mathbb{B}}(0, T(y_2)).$$

La línia hiperbòlica  $L$  que passa pel 0 és una recta. Per tant, la distància hiperbòlica entre  $x_1$  i  $x_2$  és

$$l = \int_L dl = \log \left. \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right|_0^{|T(y_2)|} = \log \frac{1 + |T(y_2)|}{1 - |T(y_2)|}.$$

## 4.10 El model de Klein

El *model de Klein  $n$ -dimensional de la geometria de Lobatxevski* es defineix com

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \widehat{\mathbb{R}}^n : x^n > 0\}.$$

Gràcies a què el grup  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  preserva la distància hiperbòlica, el següent enunciat és cert:

**Proposició 4.21.** *El grup de moviments de  $\mathbb{H}^n$  és exactament  $\text{Aut}(\mathbb{H}^n) = \widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{H}^n)$ , on*

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{H}^n) = \{T \in \widetilde{\mathcal{M}}_n : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n\}.$$

De fet, és una propietat exportable a qualsevol model  $(H, d_H)$  de l'espai hiperbòlic. Ja hem anat veient com els conceptes que havíem establert als models bidimensionals són certs per a dimensions més elevades. Donat que la mètrica del model de Poincaré  $n$ -dimensional és la mateixa que a  $\Delta$ , amb la transformació de Möbius oportuna, el tensor mètric de  $\mathbb{B}^n$  resulta transformar-se de forma que

$$dl = \frac{|dy|}{y^n}, \quad y^n > 0.$$

També es pot obtenir aquest resultat amb una equació funcional de la següent manera: suposem que la mètrica riemanniana que busquem és  $g_{ij} = g_{ij}(y^1, \dots, y^n)$ . De les equacions obtingudes al cas planar, sabem que

$$g(y) = g(ry) \cdot r, \quad g(y) = g(y + b), \quad g(y) = g\left(-\frac{y}{|y|^2}\right) \frac{1}{|y|^2},$$



per a  $r > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^n/y^n$ . Donat que  $g(y) = g(y + b)$  tenim que  $g(y^1, \dots, y^n) = g(y^n)$ . D'aquesta manera, com que  $y^n > 0$ ,  $g(ry) = g(y)/r$ , d'on s'obte

$$g(y) = \frac{g(1)}{y}.$$

Obtenim que la mètrica riemanniana és

$$g(y^1, \dots, y^n) = \frac{g(1)}{y^n}, \quad dl = g(1) \frac{|dy|}{y^n}. \quad (4.10.1)$$

Per trobar  $g(1)$  prenem una distància senzilla. El versor  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  es troba a una distància  $\log |0, \infty, 2e_n, e_n| = \log 2$ , del punt  $2e_n$ , per un segment de línia hiperbòlica  $L$ . La parametrització  $L : [1, 2] \rightarrow \mathbb{H}^n$  és  $L(\tau) = (0, \dots, 0, \tau)$ , on  $1 \leq \tau \leq 2$ . Per tant, s'ha de tenir que

$$l = \int_{\gamma} dl = g(1) \int_1^2 \frac{d\tau}{\tau} = g(1) \log \tau \Big|_1^2 = g(1) \log 2, \quad (4.10.2)$$

és igual a  $\log 2$ . Per tant,  $g(1) = 1$ . Així doncs, la mètrica del model de Klein  $\mathbb{H}^n$  ve donada per l'expressió

$$dl = \frac{|dy|}{y^n}. \quad (4.10.3)$$



## Conclusió

Arribat's a aquest punt, és l'hora de comprovar si hem assolit els finalitats que ens vam proposar:

En primer lloc, hem exposat un recull organitzat de propietats i característiques de les transformacions de Möbius, juntament amb les seves aplicacions a la geometria hiperbòlica; a més, hem demostrat la majoria sense consultar cap demostració prèvia, tot i que, com era d'esperar, les proves han estat força semblants. Tot i això, quan ha estat oportú, ja hem esmentat en quina prova ens hem recolçat. En el cas del Teorema de Liouville, ha estat d'especial satisfacció haver pogut el·laborar la demostració del teorema per a  $n$  dimensions, a partir de la demostració del cas tridimensional. Malgrat això, el teorema és cert per a funcions menys suaus que 4-difeomorfismes, i això no ha estat possible demostrar-ho.

En segon lloc, analitzem l'afinitat entre el primer i el segon bloc. Podem observar, sense anar més enllà, com les propietats de les transformacions planars i espacials són gairebé idèntiques, pel que fa a les propietats de composició, les superfícies que on les hem estudiat, les propietats de conservació d'angles, les imatges d'esferes generalitzades i la classificació d'aquestes, així com l'analogia entre un gran nombre de característiques de la mètrica hiperbòlica.

En tercer lloc, podem dir que els lligams entre la geometria complexa i l'anàlisi complex són evidents. A més a més, la qüestió fonamental era percebre com les superfícies i la seva mètrica semblen indissolubles dels seus grups de moviments. Ho hem advertit quan parlavem del pla completat i de l'esfera, o dels seus semblants a la geometria hiperbòlica, el disc de Poincaré i la pseudoesfera. Al final, obtenim que les transformacions de Möbius, d'una banda, ens ajuden a simplificar la geometria en dos dimensions i, de l'altra, ens ajuden a demostrar proposicions que involucren superfícies a l'espai.

En quart lloc, el grau de dificultat s'eleva progressivament, a fi d'atènyer l'objectiu d'adherir el contingut que, ostensiblement, agrupa coneixement de diverses àrees d'estudi de la matemàtica. En general, s'ha aconseguit que la matèria sigui força contínua en la mesura que els principis fonamentals o subjacents —que de vegades són més complexos que els consegüents— no s'han inserit a l'encet d'una exposició, sinó com a contingut successiu. En resum, els nostres objectius s'han assolit òptimament.

Per concluir, cal afegir que les transformacions de Möbius segueixen essent un camp d'investigació actual, i se segueixen publicant articles periòdicament. Tot el contingut de la nostra recerca és genuïnament introductori, però alhora útil perquè el lector pugui fer el tast de diversos camins per on després pot interessar-se.



# Bibliografía

- [1] ADAMS, Robert A.. *Cálculo*. Addison Wesley: Madrid, 2009.
- [2] AHLFORS Lars V.. *Complex analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. New Delhi: McGraw Hill, 2013.
- [3] AHLFORS, Lars V.. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*. New York: McGraw Hill, 1973.
- [4] AHLFORS, Lars V.. *Möbius transformations in several dimensions*. Minneapolis: University of Minnesota, School of Mathematics, 1981.
- [5] AHLFORS, Lars V.; SARIO, Leo. *Riemann Surfaces*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1960.
- [6] ANDERSON, James W.. *Hyperbolic Geometry*. London: Springer, 2005.
- [7] APOSTOL, Tom M.. *Calculus: Introducción, con vectores i geometría analítica*. Vol. II. 2a edició. Barcelona: Editorial Reverté, 1979-1980.
- [8] BEARDON, Alan F.. *The Geometry of Discrete Groups*. New York : Springer-Verlag, 1983.
- [9] BOIARCHUK, Alekséi K.. *Matemática superior: Problemas resueltos*. 5 vol. Moscú: Editorial URSS, 2001.
- [10] BOVORIK, Alexandre V.; BOVORIK, Anna. *Mirrors and Reflections: The Geometry of Finite Reflection Groups*. New York: Springer-Verlag New York, 2010.
- [11] BRONSHTEIN, Ilya; SEMENDIAEV, Konstantin. *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*. Moscú: Editorial Mir, 1977.
- [12] DUBROVIN, Borís A.; FOMENKO, Anatoli T.; NÓVIKOV, Sierguéi P. *Geometría moderna: Métodos y aplicaciones*. 2 volums. Moscú: Editorial URSS, 2000.
- [13] FARKAS, Hershel M.; KRA, Irwin. *Riemann surfaces*. New York : Springer-Verlag, 1980.
- [14] GÓMEZ LÓPEZ, Mariola; CORDERO GRACIA, Marta. *Análisis complejo: Definiciones, Teoremas y Resultados*. Madrid: García-Maroto, 2011.
- [15] HIDALGO, Rubén A.. *Transformaciones de Möbius: Una introducción*. Valparaíso: Departament de Matemàtica, Universitat Tècnica Federico Santa María, 2012. Disponible a internet: [rhidalgo.mat.utfsm.cl/files/moebius.pdf](http://rhidalgo.mat.utfsm.cl/files/moebius.pdf)
- [16] KATSUHIKO, Matsuzaki; MASAHIKO, Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. New York : Oxford University Press, 1998.