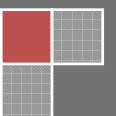
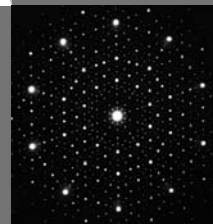
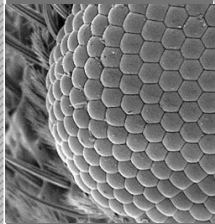
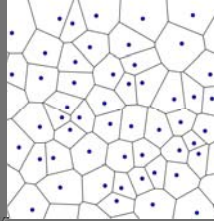
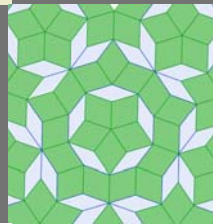
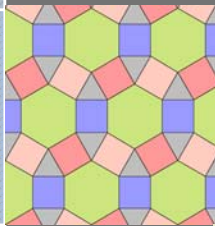


2n B
BATX

PAVIMENTACIONES DEL PLA

TREBALL DE RECERCA

"GAUSS"



ÍNDEX

	Pàg.
INTRODUCCIÓ	1
1. PAVIMENTACIÓ DEL PLA AMB POLÍGONS REGULARS: RESOLUCIÓ ALGEBRÀICA I COMPROVACIÓ GEOMÈTRICA	4
1.0. INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL	4
1.1. PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA	4
1.2. RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ I DETERMINACIÓ DE LES PAVIMENTACIONS	5
1.3. PAVIMENTACIONS REGULARS I SEMIREGULARS TROBADES	21
2. ALTRES PAVIMENTACIONS DEL PLA	25
2.0 INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL	25
2.1. PAVIMENTACIONS AMB TRIANGLES	25
2.2. PAVIMENTACIONS AMB QUADRILÀTERS	26
2.3. PAVIMENTACIONS AMB PENTÀGONS NO REGULARS	28
2.4. PAVIMENTACIONS AMB HEXÀGONS NO REGULARS	29
2.5. PAVIMENTACIONS AMB ALTRES POLÍGONS CONVEXOS	31
2.6. GENERACIÓ DE PAVIMENTACIONS I MOSAICS	32
2.7. PAVIMENTACIONS PERIÒDIQUES I NO PERIÒDIQUES. ELS MOSAICS DE PENROSE	34
3. PAVIMENTACIONS O DIAGRAMES DE VORONOI	43
3.0 INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL	43
3.1. QUÈ ÉS UNA PAVIMENTACIÓ DE VORONOI?	43
3.2. UNA MICA D'HISTÒRIA	43
3.3. ALGUNS EXEMPLES DE COM ES FA UN DIAGRAMA DE VORONOI	44
3.4. ALGUNS EXEMPLES DE LES APLICACIONS DELS DIAGRAMES DE VORONOI ...	49
4. APLICACIONS I CONNEXIONS AMB LA REALITAT	52
4.0. INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL	52
4.1. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS AMB EL MÓN ANIMAL I VEGETAL	52
4.2. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS DE PENROSE AMB LA CRISTAL·LOGRAFIA: ELS QUASICRISTALLS	55
4.3. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS AMB LA DECORACIÓ I L'URBANISME	56
4.3. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS AMB L'ART.....	61
5. CONCLUSIONS	64
5.1. CONCLUSIONS GENERALS	65
5.2. CONCLUSIONS ESPECÍFIQUES	66
6. BIBLIOGRAFIA	69
7. ANNEX: RELACIÓ DE CONSTRUCCIONS AMB GEOGEBRA	71

INTRODUCCIÓ

“No sé com puc ser vist pel món, en la meva opinió però, m’he comportat com un nen que juga a la vora del mar, i que es diverteix buscant de tant en tant una pedra més polida i una petxina més bonica del normal, mentre que el gran oceà de la veritat s’exposava davant meu completament desconegut”

Sir Isaac Newton

El meu interès inicial per les matemàtiques i, més específicament, per la geometria, que em sembla la seva part més tangible, van centrar la tria del tema del treball de recerca. Posteriorment, l’observació de paviments a Barcelona i d’alguns dibuixos de Maurits Escher, la curiositat per saber quins polígons encaixen per recobrir el pla i quins no, i els motius que hi podia haver al darrera, i la consulta de textos i d’algunes pàgines web van ajudar en la decisió. També vaig pensar que podria utilitzar el programa GeoGebra, que ja coneixia, per estudiar algunes de les parts pràctiques del tema i que això faria el treball més interessant i amè.

Tot i el que pugui semblar, hi ha força materials sobre el tema. He consultat diversos llibres, revistes i moltes pàgines web. No he trobat, però, cap tractat monogràfic dedicat a les pavimentacions, sinó capítols o apartats que hi connecten. Quant a les pàgines web, cal dir que en la majoria de casos en fan un tractament divulgatiu i una mica superficial, per la qual cosa m’ha calgut treballar molt pel meu compte.

El cert és que inicialment en sabia ben poc de tot plegat i que alguns aspectes que després he acabat estudiant, com ara els Diagrames de Voronoi o els mosaics de Penrose, he de confessar que els desconeixia absolutament i que ha estat en el decurs de les consultes i de la cerca inicial on he vist la necessitat d’estudiar-los.

La metodologia emprada durant l’elaboració del treball ha seguit l’esquema següent:

- 1) cercar informació;
- 2) delimitar aspectes rellevants;
- 3) estudiar-ne alguns a fons, si ha calgut amb càlculs algebraics o amb construccions geomètriques precises;
- 4) trobar exemples reals i experimentar amb el programa GeoGebra;
- 5) arribar a conclusions i fer la redacció final de l’apartat o aspecte estudiat.

Quant a la terminologia emprada, s'ha intentat ser rigorós i s'ha seguit la normativa recollida al *Diccionari de la Llengua Catalana*, de l'Institut d'Estudis Catalans, i al *Diccionari de matemàtiques i estadística*, publicat per la Universitat Politècnica de Catalunya en col·laboració amb Enciclopèdia Catalana (vegeu la bibliografia). Per això mateix es parla sempre de pavimentacions o de mosaics i es descarta el terme “tessel·lacions”, que s'usa en alguns llocs (es fa derivar del terme “tessel·la”, peça per construir un mosaic, que sí és normatiu), però que no reconeixen cap d'aquests dos diccionaris.

Després de les consultes inicials vaig veure que sota l'àmbit de les pavimentacions hi havia una gran diversitat d'aspectes i de problemes a estudiar i vaig haver de decidir quins eren els prioritaris i quins centrarien la meua feina. Ho vaig fer en forma de preguntes que intentaria resoldre durant el treball i vaig intentar enfocar-les de manera que, a més de tractar resultats teòrics, hi hagués una clara referència a la realitat. Aquestes són les preguntes que em vaig plantejar:

1. Com es pot recobrir el pla amb polígons regulars? Amb quins polígons es pot fer? Amb quins no? Quins motius matemàtics hi ha al darrere?
2. Es pot recobrir el pla amb un triangle qualsevol? I amb un quadrilàter qualsevol? Amb quins polígons es pot?
3. Què són els mosaics de Penrose? Quin interès tenen?
4. Què són els diagrames de Voronoi? Quines aplicacions tenen?
5. Quines pavimentacions o mosaics s'observen a la natura? Quines aplicacions tenen les pavimentacions? Quines pavimentacions trobem a Barcelona?

El desenvolupament del treball no es correspon exactament amb l'ordre de formulació de les preguntes anteriors. S'ha optat per ordenar l'estudi per capítols: el primer es dedica a estudiar les pavimentacions amb polígons regulars i, efectivament, dóna resposta a la primera pregunta de recerca; el segon es dedica a estudiar altres pavimentacions del pla i dóna resposta a la segona i a la tercera pregunta de recerca; el tercer estudia a les pavimentacions de Voronoi i respon, doncs, a la quarta pregunta de recerca; finalment, el quart capítol, que es titula “Aplicacions i connexions amb la realitat”, dóna resposta a la cinquena pregunta de recerca. En qualsevol cas, a les conclusions s'explicarà de manera específica quines són les respostes que s'han trobat per a cadascuna de les cinc preguntes que es van plantejar inicialment.

Per acabar, cal fer esment de les dificultats que han sorgit durant el desenvolupament del treball. D'entrada, la dificultat va ser la de destriar el que realment semblava d'interès d'allò que potser era accessori i delimitar unes preguntes i un temari abastable. Després també van sortir dubtes amb les fonts, sobretot amb les de la xarxa. Més endavant, van aparèixer amb algunes dificultats tècniques a l'hora de treballar amb l'equació del capítol primer i a l'hora de fer construccions amb GeoGebra. Afortunadament, les he pogut superar, personalment o a base de les ajudes *online* que té el GeoGebra, o amb l'assessorament de la meva tutora o del meu pare i, per això mateix, els vull manifestar el meu agraïment.

1. PAVIMENTACIÓ DEL PLA AMB POLÍGONS REGULARS: RESOLUCIÓ ALGEBRÀICA I COMPROVACIÓ GEOMÈTRICA

1.0. INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL

En aquest primer capítol del treball s'intentarà esbrinar quines combinacions de polígons regulars existeixen que pavimenten el pla. Em faig la pregunta següent:

Com es pot recobrir el pla amb polígons regulars (figures geomètriques amb els costats i angles iguals) de tal manera que a cadascun dels vèrtex s'uneixin el mateix nombre de polígons i amb el mateix ordre?

En primer lloc es planteja l'equació que forçosament han de complir les pavimentacions amb polígons regulars. A continuació s'estudien les solucions cas per cas, primer algebraicament i després geomètricament. Finalment es recullen totes les solucions trobades i es representen amb GeoGebra.

1.1. PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA

A part de les típiques pavimentacions, com les rajoles quadrades d'un terra qualsevol, com els hexàgons dels ruscs de les abelles i del Passeig de Gràcia, també hi ha recobriments del pla més complexos anomenats semiregulars, que estan formats per diversos tipus de polígons. És lògic preguntar-se quants tipus n'hi ha.

Sigui quina sigui la pavimentació, en cada vèrtex hi hauran de coincidir els mateixos polígons i hauran de sumar 360° . Aquesta és una condició necessària que ens conduirà a una equació sobre el nombre de costats:

Com que un polígon regular es pot descompondre en $c_i - 2$ triangles, on c_i és el nombre de costats del polígon, l'angle de cada polígon en el vèrtex valdrà (la suma dels angles de qualsevol triangle dona 180° , i per tant, si ho multipliquem pel nombre de triangles que conté el polígon regular, obtindrem la suma de tots els angles interiors que el formen. Un cop fet això, si dividim aquest nombre pel nombre de costats, que és el mateix que els d'angles, trobarem l'angle del polígon):

$$\frac{(c_i - 2) \cdot 180^\circ}{c_i}$$

Si en el vèrtex hi concorren n polígons de $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, la suma de tots els angles de tots els polígons valdrà 360° :

$$\frac{(c_1 - 2) \cdot 180^\circ}{c_1} + \frac{(c_2 - 2) \cdot 180^\circ}{c_2} + \dots + \frac{(c_n - 2) \cdot 180^\circ}{c_n} = 360^\circ$$

Que també es pot expressar amb un símbol de sumatori:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(c_i - 2) \cdot 180^\circ}{c_i} = 360^\circ$$

Si l'equació se simplifica per 180 i fem la divisió, s'obté:

$$\left(1 - \frac{2}{c_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{c_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2}{c_n}\right) = 2, \text{ o també } \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{2}{c_i}\right) = 2$$

Si sumem els uns ($1+1+1+\dots+1=n$), i passem el resultat al terme de la dreta ens queda:

$$\left(-\frac{2}{c_1}\right) + \left(-\frac{2}{c_2}\right) + \dots + \left(-\frac{2}{c_n}\right) = 2 - n$$

Si ho dividim tot per -2, queda:

$$\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \dots + \frac{2}{c_n} = \frac{n-2}{2} \text{ o també } \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = \frac{n-2}{2}$$

És molt important tenir present que aquesta condició només és necessària i que les solucions que obtinguem hauran de ser comprovades geomètricament. És a dir, és perfectament possible que trobem una solució d'aquesta equació que no sigui viable a la pràctica.

1.2. RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ I DETERMINACIÓ DE LES PAVIMENTACIONS

Per resoldre aquesta equació hem de tenir en compte que el nombre mínim de polígons regulars ha de ser 3 (si es pretén sumar 360° amb polígons convexos) i el màxim de 6, ja que l'angle més petit d'un polígon regular és de 60° (del triangle equilàter). Per tant:

$$3 \leq n \leq 6$$

Així doncs, hi ha quatre casos possibles a estudiar: nombre de polígons en cada vèrtex $n=3$, $n=4$, $n=5$, $n=6$. A continuació passo a revisar cadascun dels casos sistemàticament.

CAS $n=3$

Sembla que és el que ha de tenir més combinacions possibles. De l'equació $\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = \frac{n-2}{2}$ es

dedueix que $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2}$. Aquesta igualtat obliga a algun dels c_i a ser menor o igual que

6 (ja que si no, $c_1 > 6$ i $c_2 > 6$ i $c_3 > 6$ condueix a $\frac{1}{c_1} < \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{c_2} < \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{6}$ i en fer la suma, la

igualtat no seria certa, perquè el resultat seria menor que $\frac{1}{2}$).

D'altra banda, també s'ha de tenir en compte que cap polígon pot tenir menys de tres costats.

Aquestes condicions, donen lloc a diversos subcasos:

Subcas 1: $n = 3$ i $c_1 = 3$

Subcas 2: $n = 3$ i $c_1 = 4$

Subcas 3: $n = 3$ i $c_1 = 5$

Subcas 4: $n = 3$ i $c_1 = 6$

Subcas 1: $n = 3$ i $c_1 = 3$

El primer cas tracta de buscar una unió de tres polígons regulars (un d'ells un triangle equilàter, que és l'inicial) que encaixin segons el dibuix que es veurà a continuació.

Comencem amb el terme de l'equació que s'ha calculat abans:

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2}$$

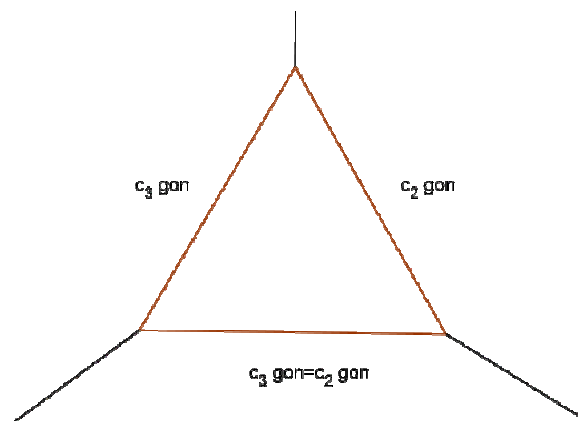
Si el primer polígon (c_1) és un triangle (3 costats), tenim que:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2}$$

Per tant:

$$\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

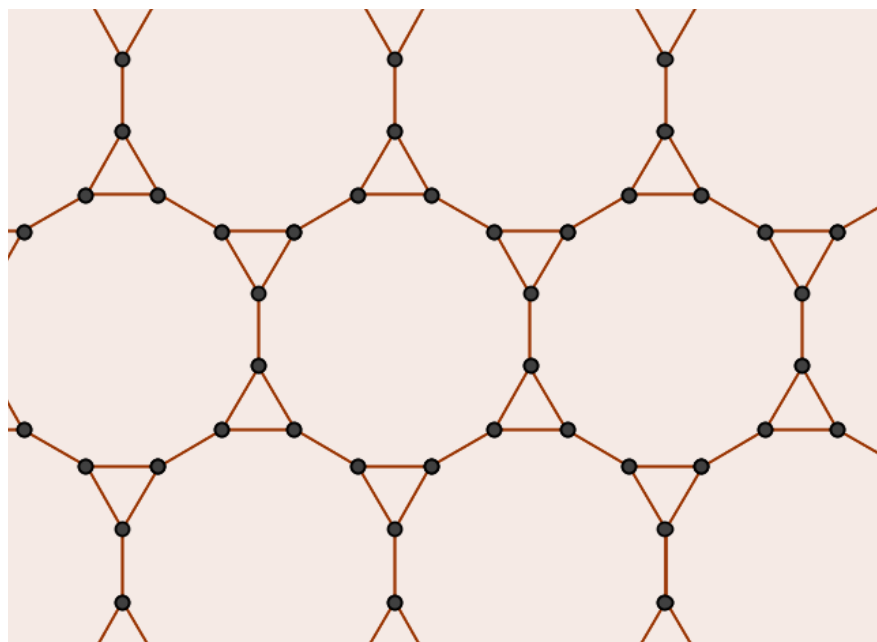
Si observem el dibuix, veiem que els dos polígons que es complementen amb el triangle han de ser iguals:



Per tant tenim: $c_2 = c_3$ i l'equació queda així:

$$\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{6}$$

De solució $c_2 = c_3 = 12$. Ara ja tenim quina serà la forma de la pavimentació:

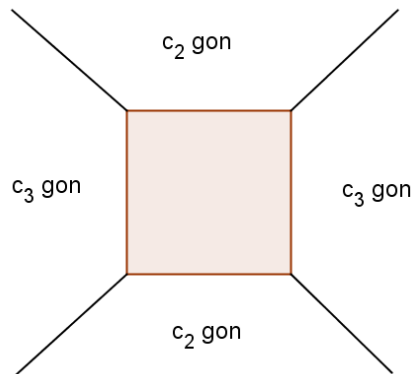


Subcas 2: $n = 3$ i $c_1 = 4$

Com en el cas anterior, tenim que $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2}$, però c_1 ara és 4. Per tant, tenim que:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{4}$$

En aquest segon subcas no es pot assegurar si els polígons que complementen la pavimentació són iguals o no:



Novament caldrà determinar entre quins valors es troben els costats dels polígons implicats per destriar les solucions possibles:

Algun dels c_i ha de ser menor o igual que 8, ja que si no, $c_2 > 8$ i $c_3 > 8$ condueix a

$\frac{1}{c_2} < \frac{1}{8}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{8}$ i en fer la suma, la igualtat no seria certa, perquè el resultat seria menor

que $\frac{1}{4}$

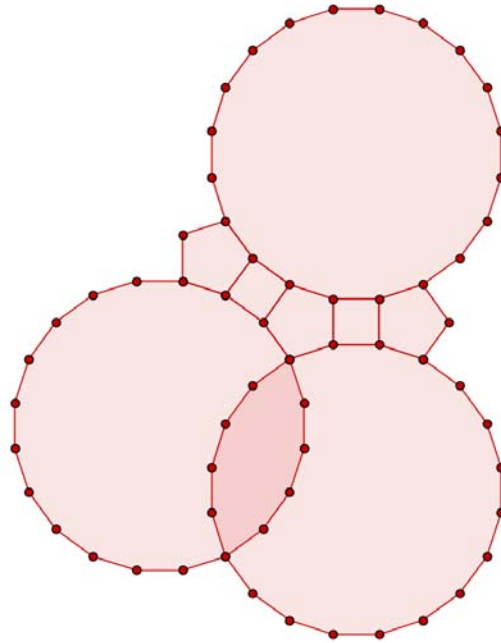
Posem, doncs, que és $c_3 \leq 8$. D'altra banda aïllem c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{c_3}} = \frac{4c_3}{c_3 - 4}$$

Com que $4 < c_3 \leq 8$ les possibles solucions són:

$$c_1 = 4, c_3 = 5 \rightarrow \frac{1}{c_2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow c_2 = 20$$

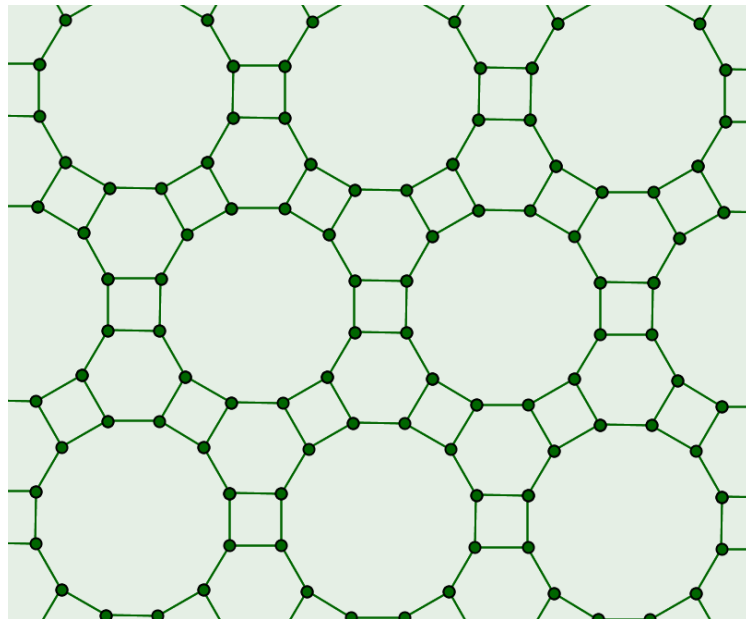
Si intentem fer el dibuix, comprovem, però, que la pavimentació no és possible:



Com ja s'ha dit, sempre cal comprovar les pavimentacions de forma gràfica, ja que, com ara ha passat, tot i que els resultats quadrin a la fórmula pot ser que no ho facin a la pràctica.

$$c_1 = 4, c_3 = 6 \rightarrow \frac{1}{c_2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow c_2 = 12$$

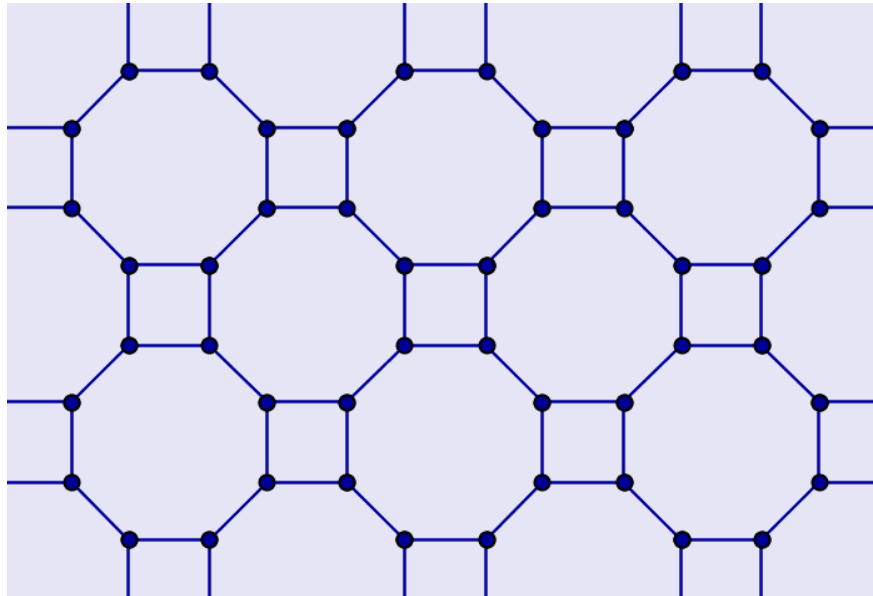
Aquesta sí que quadra:



$$c_1 = 4, c_3 = 7 \rightarrow \frac{1}{c_2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \Leftrightarrow c_2 = \text{nombre no enter}$$

$$c_1 = 4, c_3 = 8 \rightarrow \frac{1}{c_2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow c_2 = 8$$

Aquesta també quadra:

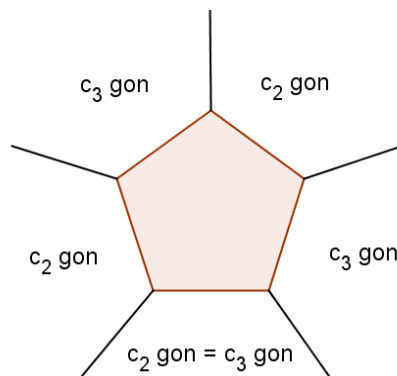


Subcas 3: $n = 3$ i $c_1 = 5$

Com en el cas anterior, tenim que $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2}$, però c_1 ara és 5. Per tant, tenim que:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{3}{10}$$

Aquí, de la mateixa manera que en el primer (quan $c_1=3$), ens trobem amb un cas en què els polígons que complementen el pentàgon inicial han de ser tots ells iguals, com s'observa en el dibuix:



Si $c_2 = c_3$, tenim que $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_2} = \frac{3}{10}$. Si aïllem el c_2 , veiem que no hi ha cap solució entera, ja

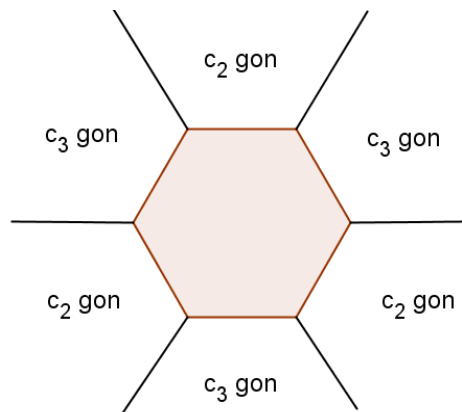
que $3c_2 = 20 \Leftrightarrow c_2 = \frac{20}{3}$.

A més, el dibuix també ens explica, des d'una altra perspectiva, per què l'única solució del cas $c_1 = 4$, $c_3 = 5$, no quadra a la pràctica.

Subcas 4: $n = 3$ i $c_1 = 6$

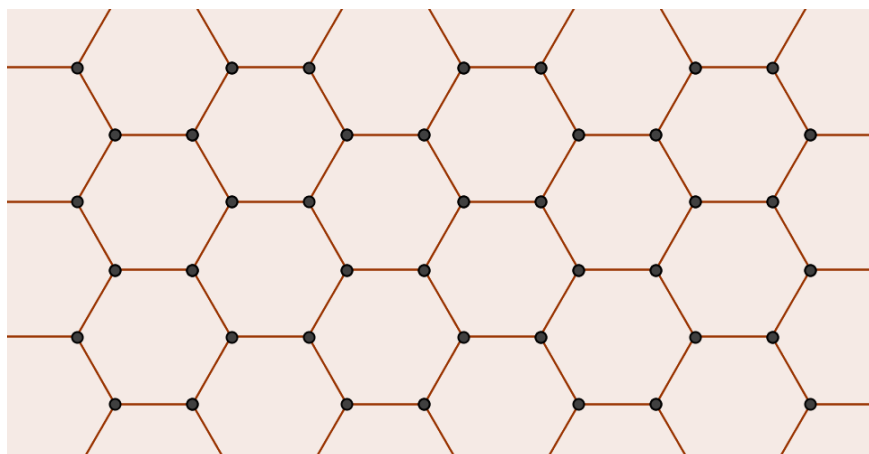
La fórmula, ara amb la forma $\frac{1}{6} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{3}$, obliga a buscar les possibles

formes de les figures que complementin l'hexàgon inicial, que no es pot assegurar si seran iguals o no, com es veu a la figura següent.



Un cas pot ser que $c_2 = c_3$, i per tant $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{3}$ i $c_2 = 6$. Aquesta solució representa una

pavimentació molt comuna en enrajolats, com per exemple al Passeig de Gràcia o en un rusc d'abelles. És la pavimentació composta per hexàgons, que seria de la següent forma:



Si c_2 és diferent de c_3 , novament caldrà determinar entre quins valors es troben els costats dels polígons implicats per destriar les solucions possibles:

Algun dels c_i ha de ser menor o igual que 6, ja que si no, $c_2 > 6$ i $c_3 > 6$ condueix a

$\frac{1}{c_2} < \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{6}$ i en fer la suma, la igualtat no seria certa, perquè el resultat seria

menor que $\frac{1}{3}$

Posem, doncs, que és $c_3 \leq 6$. D'altra banda aïllem c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{c_3}} = \frac{3c_3}{c_3 - 3}$$

Com que $3 < c_3 \leq 6$ les possibles solucions són:

$c_1 = 6, c_3 = 6 \rightarrow c_2 = 6$, que és el cas anterior ja estudiat

$c_1 = 6, c_3 = 5 \rightarrow c_2 = \frac{15}{2}$ que no és enter

$c_1 = 6, c_3 = 4 \rightarrow c_2 = 12$ que és una de les solucions ja trobades.

CAS $n=4$

De l'equació $\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = \frac{n-2}{2}$ es dedueix que $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = 1$. Aquesta igualtat obliga a

algun dels c_i a ser menor o igual que 4 (ja que si no, $c_1 > 4$ i $c_2 > 4$ i $c_3 > 4$ i $c_4 > 4$ condueix a

$\frac{1}{c_1} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_2} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{4}$ i en fer la suma, la igualtat no seria certa, perquè el

resultat seria menor que 1).

D'altra banda, també s'ha de tenir en compte que cap polígon pot tenir menys de tres costats.

Aquestes condicions, donen lloc a diversos subcasos:

Subcas 1: $n = 4$ i $c_1 = 3$

Subcas 2: $n = 4$ i $c_1 = 4$

Subcas 1: $n = 4$ i $c_1 = 3$

Les resolucions seran semblants a les que ja s'han fet, però lleugerament més complexes. Això es deu al fet que ara tenim quatre polígons i no tres. En aquest primer subcas, de la

fórmula $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = 1$, si c_1 és 3, serà:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = 1, \text{ que és el mateix que } \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{2}{3}.$$

Aquesta segona igualtat obliga a algun dels c_i a ser més petit o igual que 5 (ja que si no, $c_2 > 5$ i $c_3 > 5$ i $c_4 > 5$

conduïx a $\frac{1}{c_2} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{5}$ i en fer la suma, sortiria $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ i la

igualtat no seria certa).

Així doncs, tornem a tenir una altre sèrie de possibilitats, “subsubcasos”, amb $n=4$, $c_1=3$ i c_2 que ha d'estar entre el 3 i el 5:

Subsubcas 1.1: $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 3$

Subsubcas 1.2: $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$

Subsubcas 1.3: $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$

El que cal fer a continuació és trobar unes fites per als valors del dos polígons que queden i fer-ne la representació gràfica per comprovar si quadren o no.

Subsubcas 1.1: $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 3$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{1}{3}$$

Per començar hem de buscar una fita inferior per a c_3 , que ha de ser menor o igual que

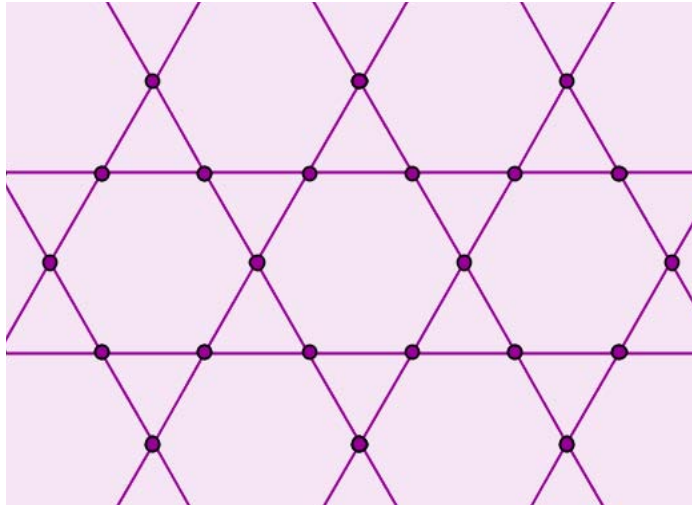
6 (ja que si no, $c_3 > 6$ i $c_4 > 6$ conduïx a $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{6}$ i en fer la suma, sortiria un

nombre més petit que $\frac{1}{3}$). Posem, doncs, que és $c_3 \leq 6$. D'altra banda aïllem c_4 :

$$c_4 = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{c_3}} = \frac{3c_3}{c_3 - 3}$$

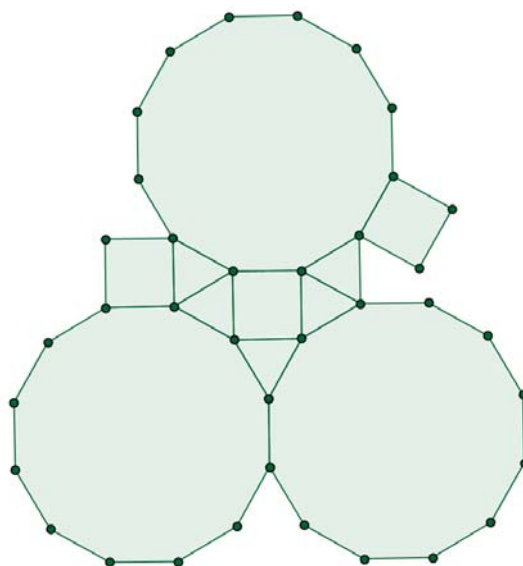
Això condueix a les possibles solucions següents:

1.1.1. $c_1 = 3, c_2=3, c_3 = 6, c_4=6$. Si en fem la representació gràfica veiem que aquesta solució sí que es compleix.

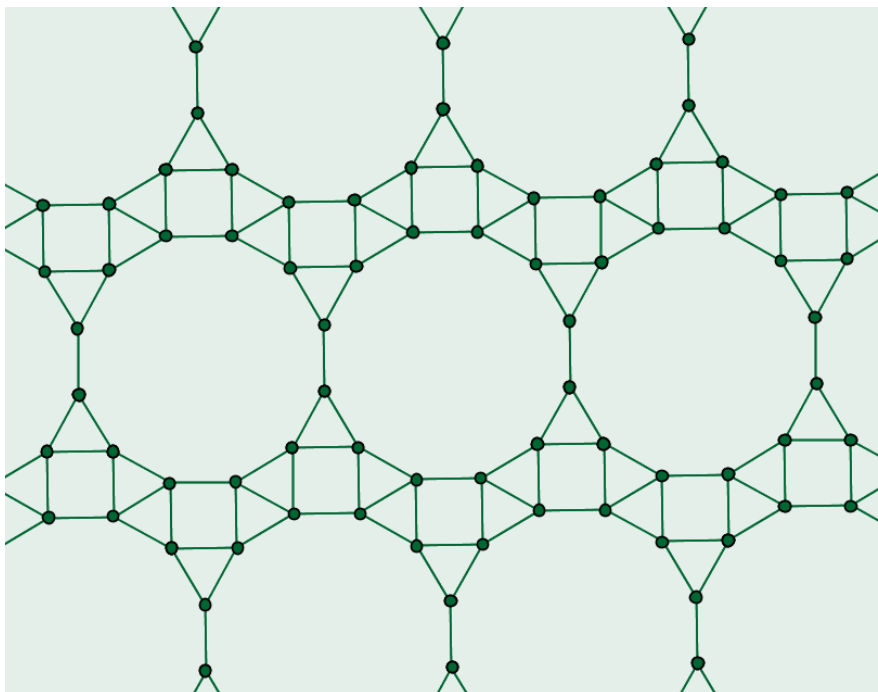


1.1.2. $c_1 = 3, c_2=3, c_3 = 5, c_4 = \frac{15}{2}$. Sense sentit.

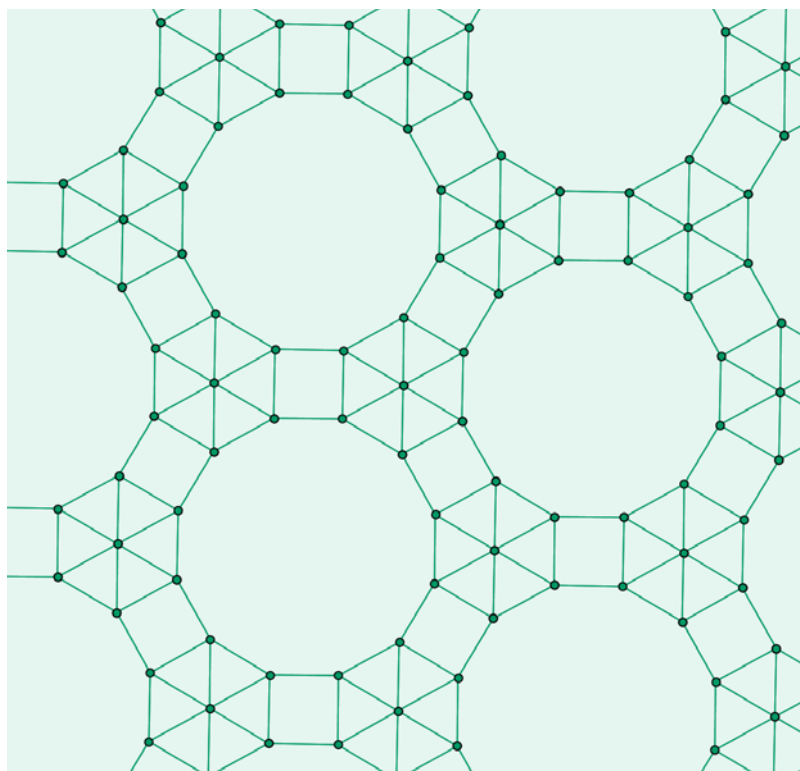
1.1.3. $c_1 = 3, c_2=3, c_3 = 4, c_4 = 12$. Amb sentit algebraic però que no quadra des del punt de vista geomètric com es pot veure al dibuix:



No obstant, si no exigim que en cada vèrtex hi hagi els mateixos polígons (un dodecàgon, un quadrat i dos triangles), obtenim pavimentacions que encaixen perfectament tot i que no són semiregulars:



En aquesta figura hi ha vèrtexs amb dos dodecàgons i un triangle equilàter i vèrtexs amb un dodecàgon, un quadrat i dos triangles



En aquesta figura hi ha vèrtexs amb sis triangles equilàters i vèrtexs amb un dodecàgon, un quadrat i dos triangles

Subsubcas 1.2: $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{5}{12}$$

Per començar s'ha de buscar una fita inferior per a c_3 , que ha de ser menor que 5 (ja que si no, $c_3 > 5$ i $c_4 > 5$ condueix a $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{5}$ i en fer la suma, sortiria

$\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} < \frac{2}{5} < \frac{5}{12}$ que és impossible). Posem, doncs, que és $c_3 \leq 5$. D'altra banda, si

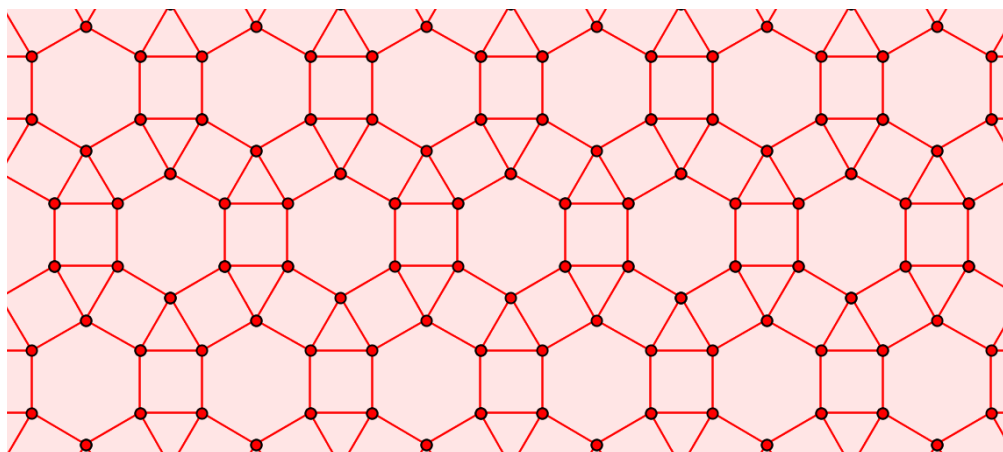
s'aïlla c_4 :

$$c_4 = \frac{1}{\frac{5}{12} - \frac{1}{c_3}} = \frac{12c_3}{5c_3 - 12}$$

Això condueix a les possibles solucions següents:

1.2.1. $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 5$, $c_4 = \frac{60}{13}$, que no té sentit.

1.2.2. $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$, $c_4 = 6$, que quadra a la perfecció.



1.2.3. $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $c_4 = 12$, que ja ha estat calculat abans i no quadra geomètricament.

Subsubcas 1.3: $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{7}{15}$$

Un cop més es busca una fita inferior per a c_3 , que ha de ser menor que 5 (ja que si no, $c_3 > 5$ i $c_4 > 5$ condueix a $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{5}$ i en fer la suma, sortiria $\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$ que és impossible). Posem, doncs, que és $c_3 \leq 5$. D'altra banda aïllem c_4 :

$$c_4 = \frac{1}{\frac{7}{15} - \frac{1}{c_3}} = \frac{15c_3}{7c_3 - 15}$$

Això condueix a les possibles solucions següents:

1.3.1. $c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = 5, c_4 = \frac{75}{20}$, que no té sentit en no ser enter.

1.3.2. $c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = 4, c_4 = \frac{60}{13}$, que no té sentit en no ser enter.

1.3.3. $c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = 3, c_4 = \frac{15}{2}$, que tampoc té sentit pel mateix motiu.

Subcas 2: $n = 4$ i $c_1 = 4$

En aquest segon subcas, de la fórmula $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = 1$, si c_1 és 4, serà:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = 1$, que és el mateix que $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{3}{4}$. Aquesta segona igualtat, de

la mateixa manera que en anteriors subcasos, obliga a algun dels c_i a ser més petit o igual que 4 (ja que si no, $c_2 > 4$ i $c_3 > 4$ i $c_4 > 4$ condueix a $\frac{1}{c_2} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{4}$ i en

fer la suma, sortiria $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} < \frac{3}{4}$ i la igualtat no seria certa).

Un cop sabem que el nombre de costats ha de ser entre el 3 i el 4, i que $n=4$ es poden establir una nova sèrie de “subsubcasos”:

Subsubcas 2.1: $n = 4, c_1 = 4, c_2 = 4$

Subsubcas 2.2: $n = 4, c_1 = 4, c_2 = 3$

El que cal fer un altre cop és trobar unes fites per als valors del dos polígons que queden i fer-ne la representació gràfica per comprovar si quadren o no.

Subsubcas 2.1: $n = 4$, $c_1 = 4$, $c_2 = 4$

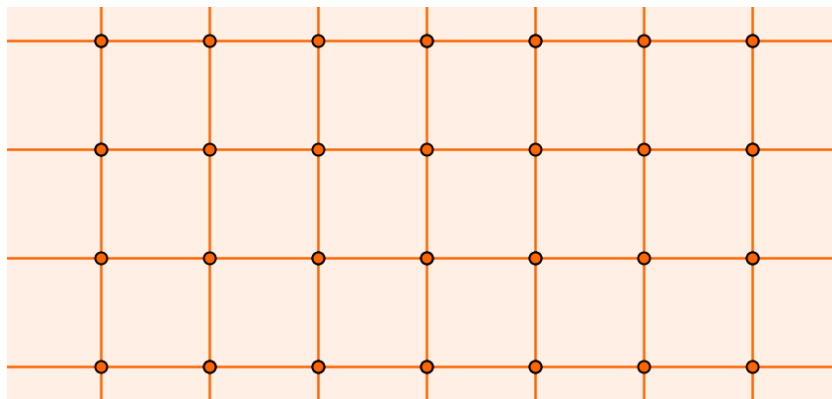
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Per començar s'ha de buscar una fita inferior per a c_3 , que ha de ser menor o igual que 4 (ja que si no, $c_3 > 4$ i $c_4 > 4$ condueix a $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{4}$ i en fer la suma, sortiria un nombre més petit que $\frac{1}{2}$). Posem, doncs, que és $c_3 \leq 4$. D'altra banda aïllem c_4 :

$$c_4 = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{c_3}} = \frac{2c_3}{c_3 - 2}$$

Això condueix a les possibles solucions següents:

2.1.1. $c_1 = 4$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$, $c_4 = 4$. Si en fem la representació gràfica veiem que aquesta solució sí que es compleix. És la pavimentació més senzilla i comuna.



2.1.2. $c_1 = 4$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $c_4 = 6$. Aquesta solució ja ha estat trobada en l'apartat 1.2.2.

Subsubcas 2.2: $n = 4$, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$

Aquest subsubcas ja ha estat estudiat en el punt 1.2, en el qual es tenia $n = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$.

CAS $n=5$

De l'equació $\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = \frac{n-2}{2}$ es dedueix que. $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} = \frac{3}{2}$. Aquesta igualtat

implica que algun dels c_i a ser menor o igual que 3 (ja que si no, $c_1 > 3$ i $c_2 > 3$ i $c_3 > 3$ i $c_4 > 3$ i

$c_5 > 3$ condueix a $\frac{1}{c_1} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_2} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{c_5} < \frac{1}{5}$ i en fer la suma, la igualtat no

seria certa, perquè el resultat seria menor que $\frac{3}{2}$). Per tant, com que un polígon té un mínim de 3 costats i hem establert un límit superior per c_2 , que és 3, podem dir que forçosament ha de ser:

$$n=5, c_1=3, c_2=3$$

Ara el que cal determinar és el nombre de costats dels altres tres polígons que ens queden, la qual cosa resoldrem de la mateixa manera que en els casos i subcasos anteriors.

Per començar, tenim la fórmula $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} = \frac{3}{2}$, i com que $c_1=3$ i $c_2=3$,

tindrem: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} = \frac{5}{6}$. Aquesta equació també obliga a

algun dels c_i a ser més petits o iguals que 3, amb la qual cosa serà 3 i l'equació serà

$\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} = \frac{1}{2}$. Un cop més, podem determinar una fita per a c_4 per tal que la igualtat es

compleixi. Serà un nombre menor o igual que 4 (ja que si no, $c_4 > 4$ i $c_5 > 4$ condueix a

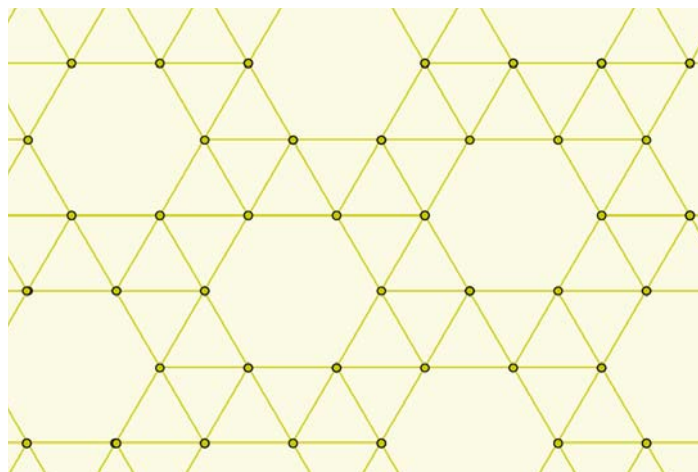
$\frac{1}{c_4} < \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{c_5} < \frac{1}{4}$ i en fer la suma, sortiria un nombre més petit que $\frac{1}{2}$). Posem, doncs,

que és $c_4 \leq 4$. D'altra banda aïllem c_5 :

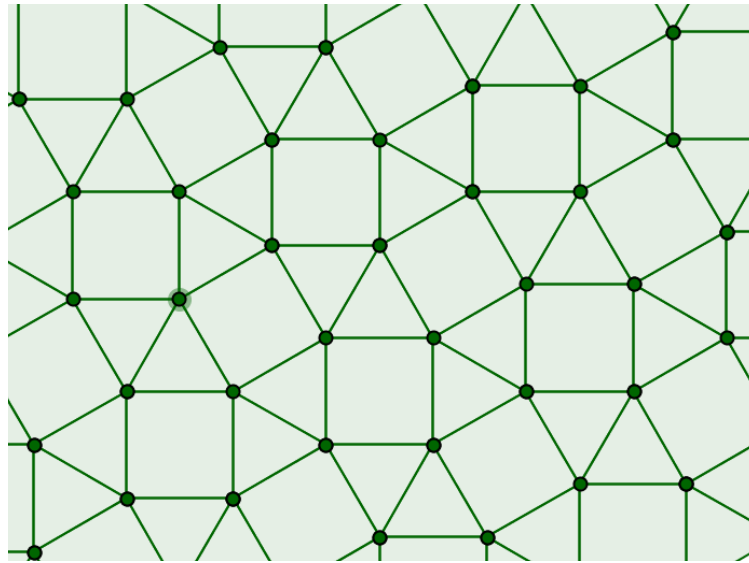
$$c_5 = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{c_4}} = \frac{2c_4}{c_4 - 2}$$

Això condueix a les possibles solucions següents:

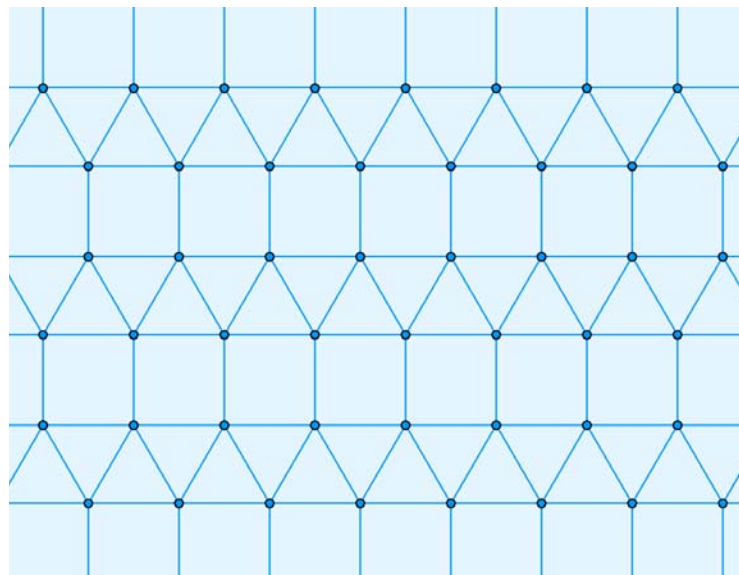
5.1. $c_1=3, c_2=3, c_3=3, c_4=3, c_5=6$, que quadra perfectament



5.2. $c_1 = 3, c_2=3, c_3 = 3, c_4=4, c_5=4$, que també quadra. A més, té dues possibles representacions gràfiques, que encaixen tant a la fórmula com a la pràctica:



Primera pavimentació, en la qual els quadrats no tenen costats comuns



Segona pavimentació, en la qual els quadrats tenen un costat comú

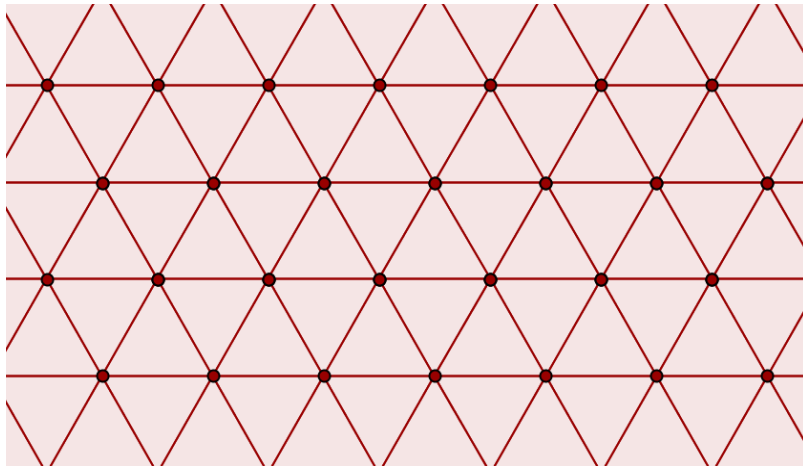
CAS $n=6$

De l'equació $\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = \frac{n-2}{2}$ es dedueix que. $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} + \frac{1}{c_6} = 2$. Aquesta igualtat

implica que tots els c_i han de ser menors o iguals que 3 (ja que si no, $c_1 > 3$ i $c_2 > 3$ i $c_3 > 3$ i

$c_4 > 3$ i $c_5 > 3$ i $c_6 > 3$ condueix a $\frac{1}{c_1} < \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{c_2} < \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{c_3} < \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{c_4} < \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{c_5} < \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{c_6} < \frac{1}{3}$ en fer la

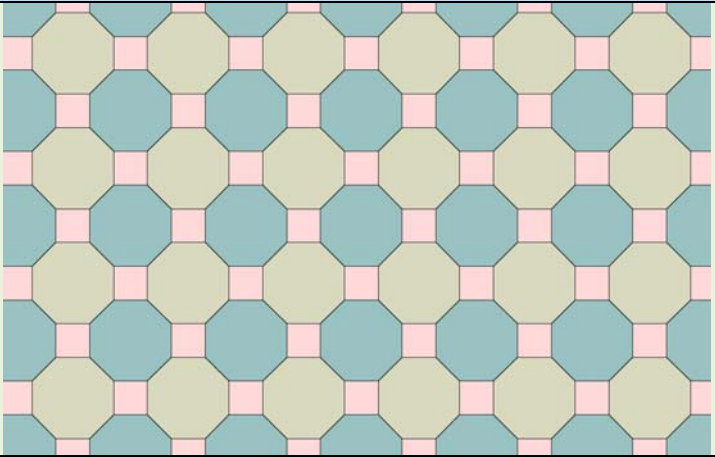
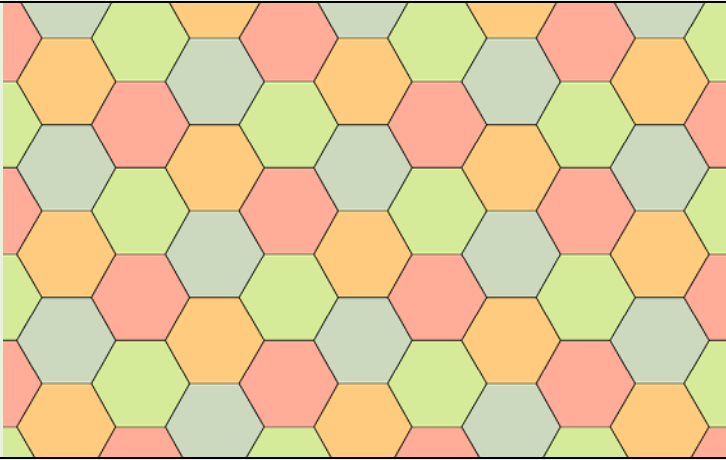
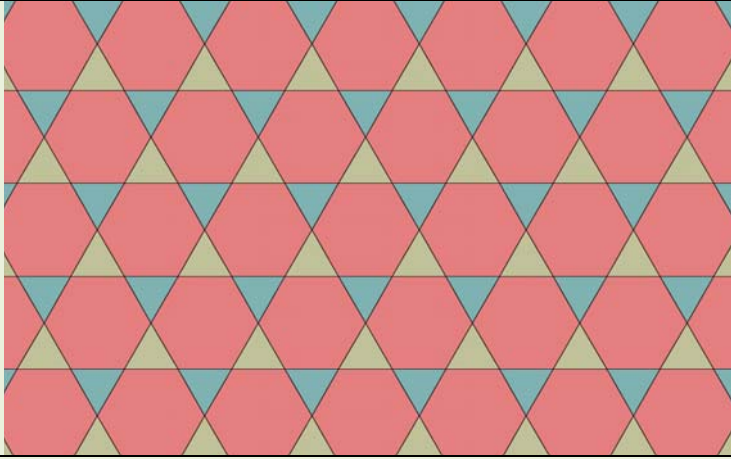
suma, la igualtat no seria certa, perquè el resultat seria menor que 2). Així doncs, l'única solució que tindrà aquest cas serà $c_1=3, c_2=3, c_3=3, c_4=3, c_5=3, c_6=3$. La representació gràfica serà així:

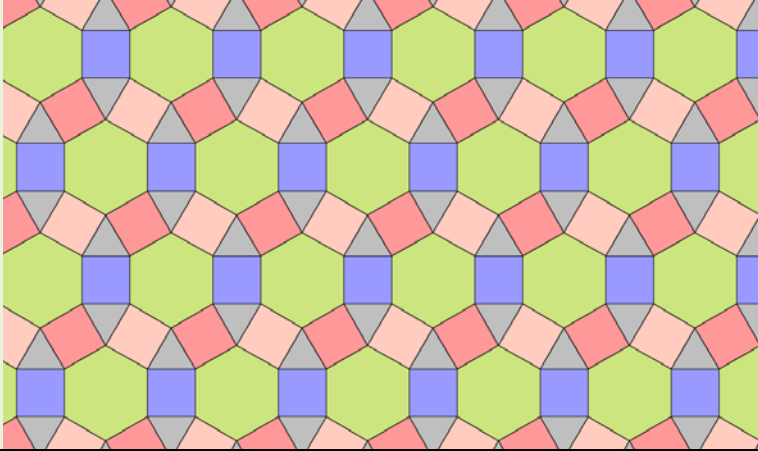
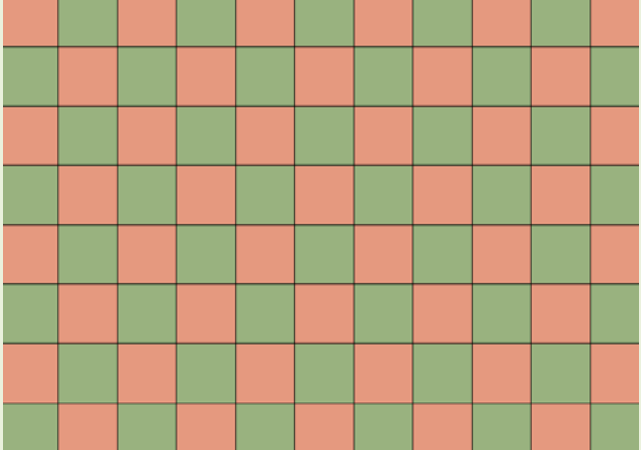
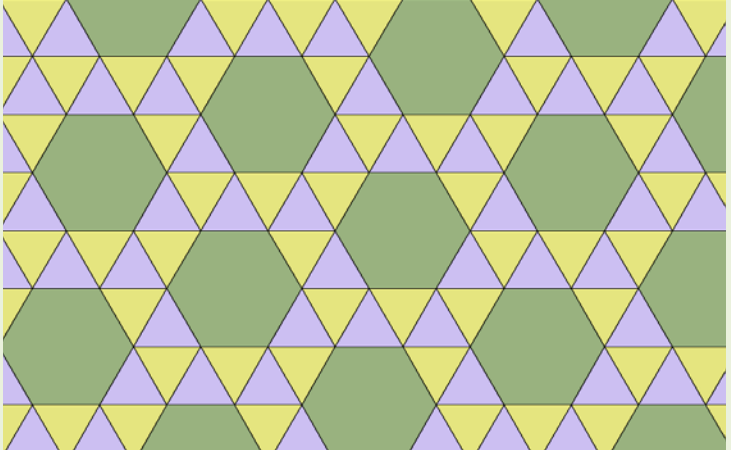


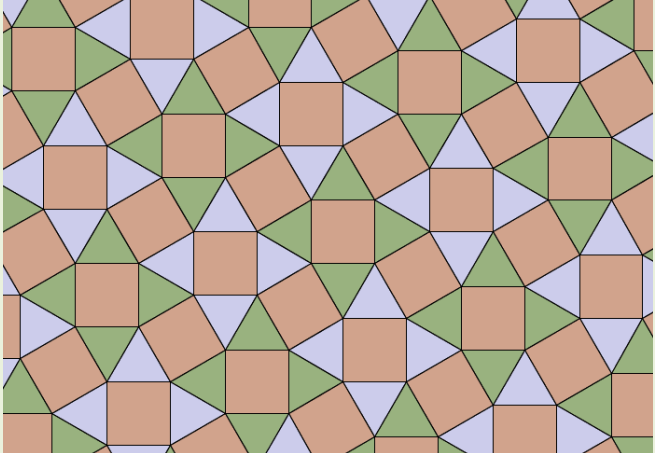
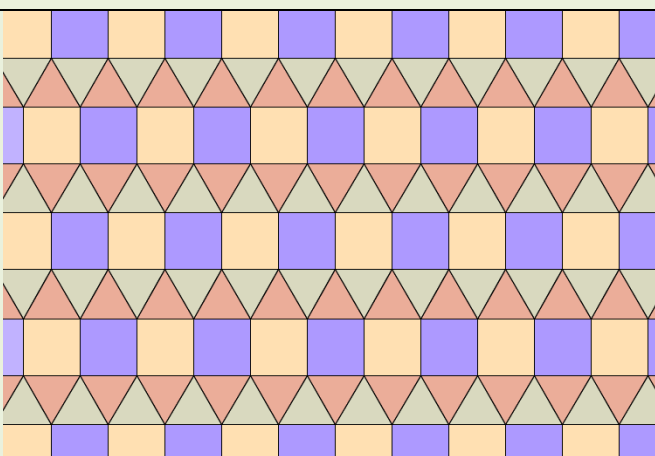
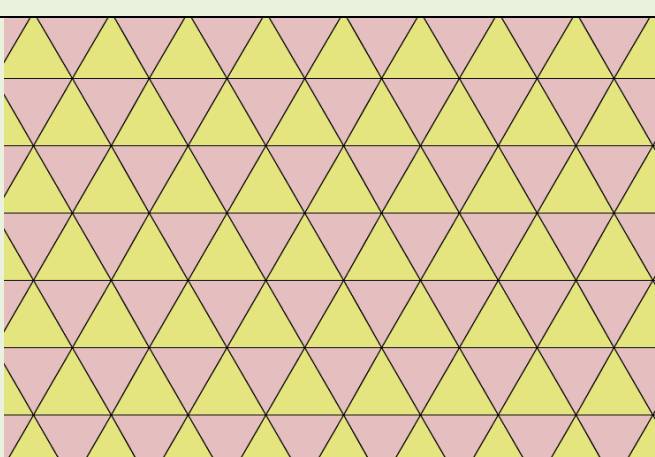
1.3. PAVIMENTACIONS REGULARS TROBADES

Per concloure aquesta part del treball, es representen en un quadre totes les pavimentacions regulars i semiregulars que s'han trobat, que són totes les existents:

DIBUIX	TIPUS
	<p>PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I DODECÀGONS ($n=3$; $c_1=3$, $c_2=12$, $c_3=12$)</p>
	<p>PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE QUADRATS, HEXÀGONS I DODECÀGONS ($n=3$; $c_1=4$, $c_2=6$, $c_3=12$)</p>

DIBUIX	TIPUS
	<p>PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE QUADRATS I OCTÀGONS ($n=3$; $c_1=4$, $c_2=4$, $c_3=8$)</p>
	<p>PAVIMENTACIÓ REGULAR A BASE D'HEXÀGONS ($n=3$; $c_1=6$, $c_2=6$, $c_3=6$)</p>
	<p>PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I HEXÀGONS ($n=3$; $c_1=3$, $c_2=6$, $c_3=6$)</p>

DIBUIX	TIPUS
	<p>PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS, QUADRATS I HEXÀGONS ($n=4$; $c_1=3$, $c_2=4$, $c_3=4$, $c_4=6$)</p>
	<p>PAVIMENTACIÓ EGULAR A BASE DE QUADRATS ($n=4$; $c_1=4$, $c_2=4$, $c_3=4$, $c_4=4$)</p>
	<p>PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I HEXÀGONS ($n=5$; $c_1=3$, $c_2=3$, $c_3=3$, $c_4=3$, $c_5=6$)</p>

DIBUIX	TIPUS
	<p>PRIMERA PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I QUADRATS ($n=5$; $c_1=3$, $c_2=3$, $c_3=3$, $c_4=4$, $c_5=4$)</p>
	<p>SEGONA PAVIMENTACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I QUADRATS ($n=5$; $c_1=3$, $c_2=3$, $c_3=3$, $c_4=4$, $c_5=4$)</p>
	<p>PAVIMENTACIÓ REGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS ($n=6$; $c_1=3$, $c_2=3$, $c_3=3$, $c_4=3$, $c_5=3$, $c_6=3$)</p>

2. ALTRES PAVIMENTACIONS DEL PLA

2.0. INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL

En el capítol anterior s'han estudiat les pavimentacions que es poden fer amb polígons regulars. En aquest nou capítol es farà una revisió general dels diversos tipus de pavimentacions que es poden construir amb polígons no regulars.

Uns tipus especial d'aquestes pavimentacions són les que es poden fer a partir de polígons no regulars però iguals entre ells. En primer lloc s'estudiarà el cas dels triangles, a continuació el del quadrilàters, el dels pentàgons, el dels hexàgons i el cas general.

També es dedica un apartat a la generació de mosaics a partir d'una peça que pavimenti i que es modifiqui a base de simetries amb efectes sorprenents.

Finalment es dedica tot un apartat a les pavimentacions no periòdiques o de Penrose.

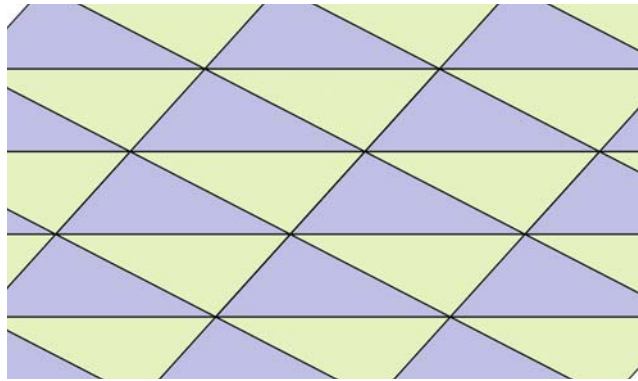
2.1. PAVIMENTACIONS AMB TRIANGLES

El primer dels casos que es treballarà serà la pavimentació del pla amb triangles. Comprovarem que amb qualsevol triangle, siguin quins siguin els seus angles, es pot fer una pavimentació.

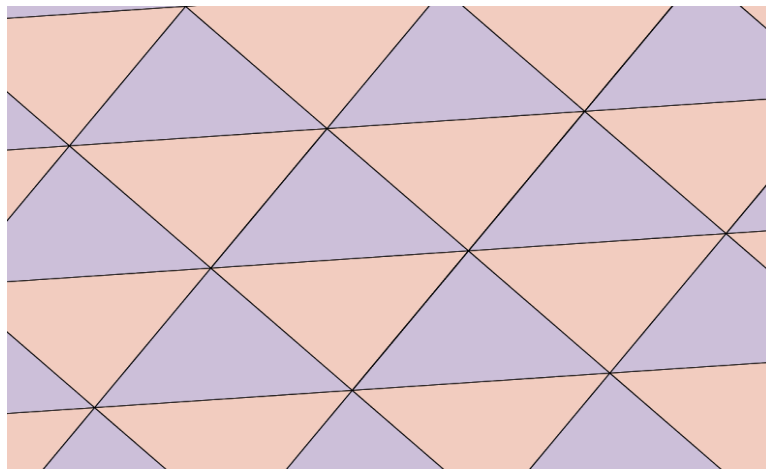
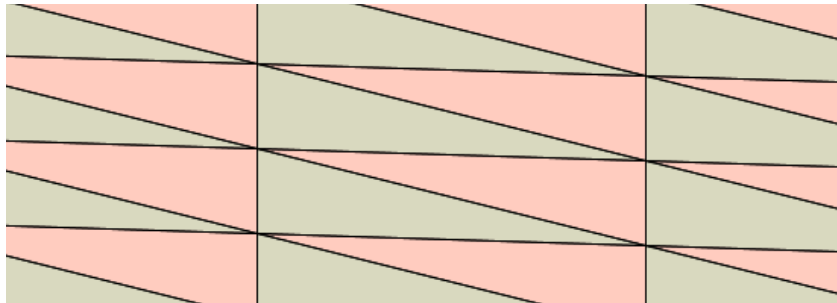
A partir d'un triangle qualsevol tracem el seu simètric respecte del punt mitjà de qualsevol costat (simetria central) de la manera representada. Podem veure que obtenim un quadrilàter, en concret, un paral·lelogram. Ja podem imaginar la resta del procés.



Un cop tenim el paral·lelogram, es tracta d'anar traçant més simetries centrals (o també amb simetries axials) fins a aconseguir una pavimentació completa, tal i com es veu al dibuix.



Aquest procés és independent del tipus de triangle que hem triat. Per tant, podem concloure que amb qualsevol triangle és possible recobrir el pla. A continuació presento dos exemples més.

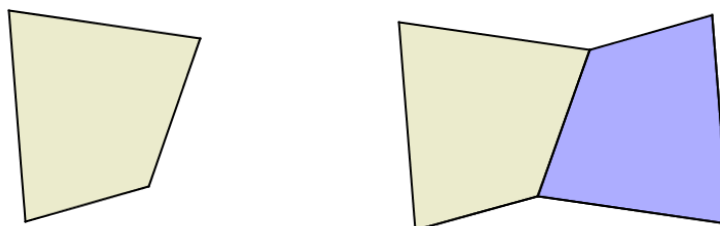


Per tant, com els possibles angles dels triangles són infinits, podem dir que és una pavimentació amb infinites possibilitats. Per aquest motiu, entre altres, els triangles han fascinat a matemàtics i artistes des de fa segles.

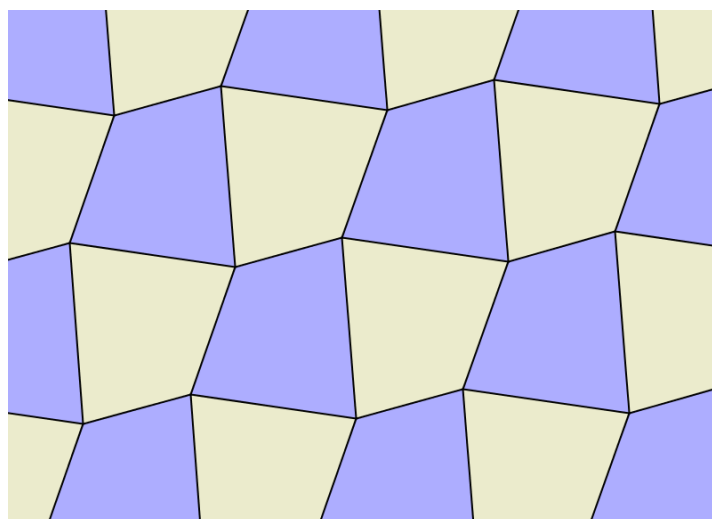
2.2. PAVIMENTACIONS AMB QUADRILÀTERS

El procés a seguir per fer una pavimentació amb quadrilàters és el mateix que per fer-ne una amb triangles. De la mateixa manera que abans, amb qualsevol quadrilàter, ja sigui còncav o convex, es podrà recobrir el pla.

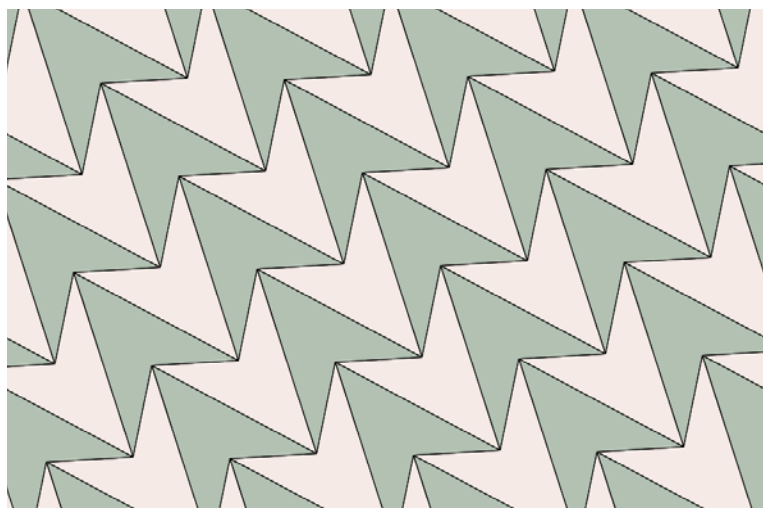
Considerem un quadrilàter qualsevol i tracem el seu simètric respecte del punt mitjà de qualsevol costat (simetria central), tal i com es veu a la imatge.



Un cop es té aquesta unió de dos quadrilàters, seguint el mateix procés de simetries centrals, es pot anar desenvolupant la pavimentació, que quadra perfectament tal i com es veu representat.

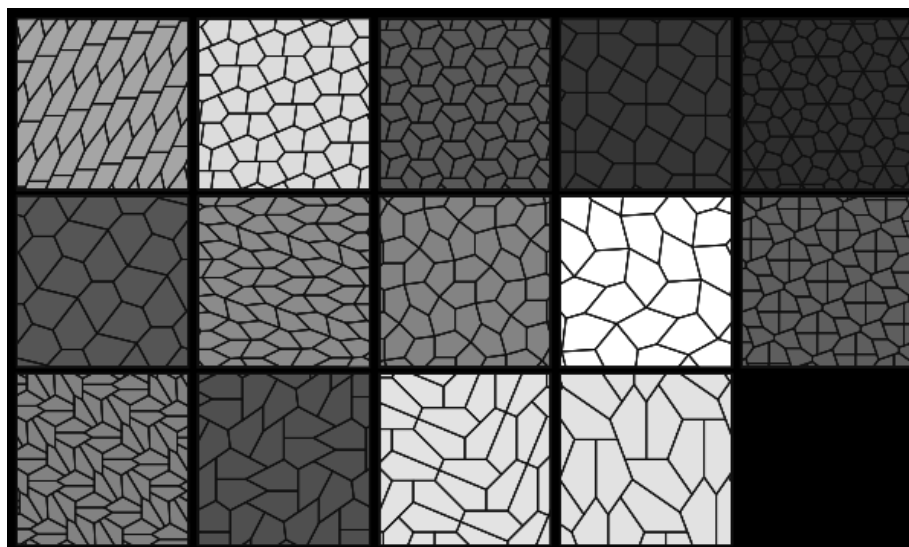


Com s'ha dit anteriorment, aquest tipus de pavimentació formada a partir de quadrilàters també es pot desenvolupar si aquests són còncaus, és a dir, si tenen un angle de més de 180 graus. A la imatge es pot veure que són d'una gran bellesa.



2.3. PAVIMENTACIONS AMB PENTÀGONS NO REGULARS

Tot i que amb pentàgons regulars resulta impossible realitzar una pavimentació del pla, sí que és possible fer-la amb pentàgons no regulars. Tanmateix, aquests pentàgons han de pertànyer a una de les catorze famílies de la imatge amb les quals es pot dur a terme la pavimentació. No és segur del tot que només es pugui pavimentar el pla amb aquests tipus de pentàgons. Fins ara, ningú ha descobert cap altre pentàgon que pavimenti el pla ni ha demostrat que no n'hi hagi cap més.

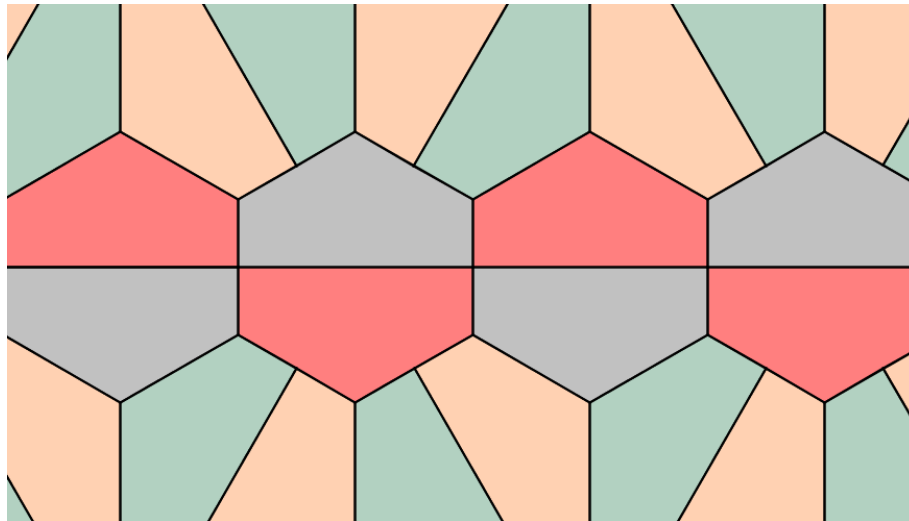
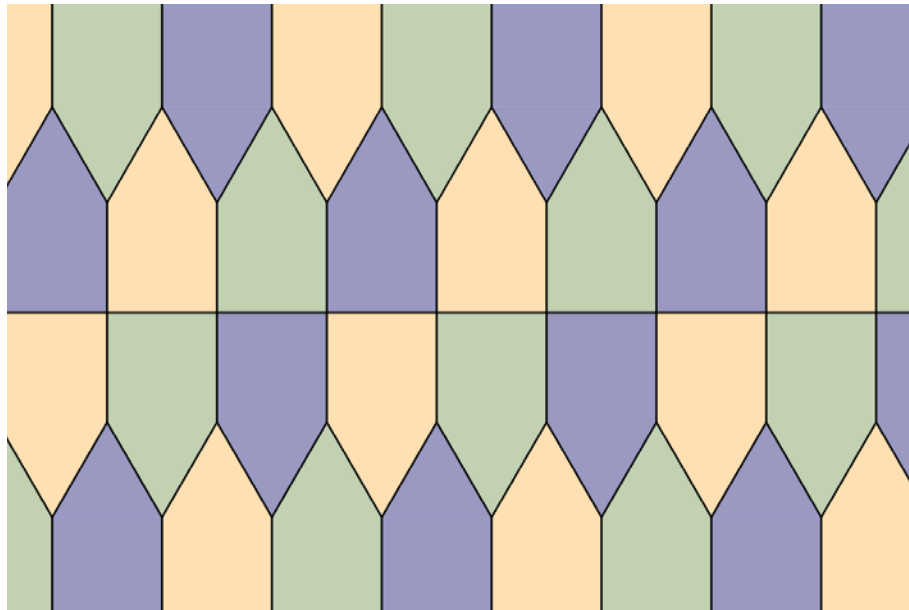


Catorze famílies de pentàgons que pavimenten el pla.

(Imatge extreta de "Encara hi ha misteris amb els pentàgons? A Martin Gardner, *in memoriam*," del professor Claudi Alsina).

La determinació dels pentàgons que permeten pavimentar no és senzilla, però, un cop es té el polígon el procés és idèntic als que s'han vist anteriorment: anar desenvolupant el mosaic amb simetries centrals.

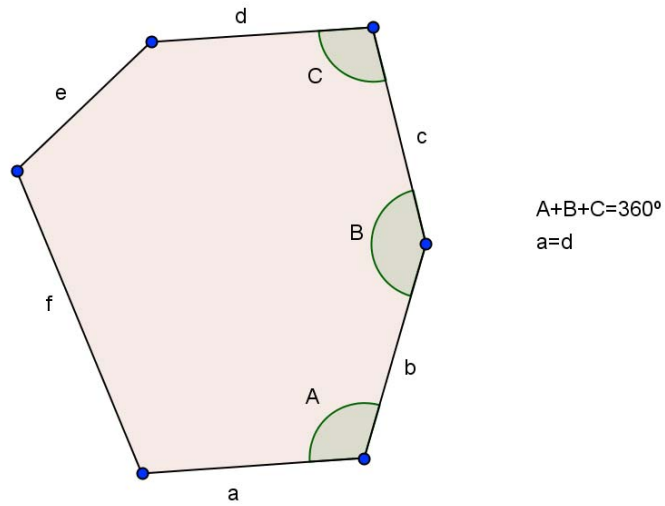
Per construir els exemples que es presenten a continuació amb el programa GeoGebra s'han agafat uns dels casos més senzills que hi ha. Si es para atenció, es pot veure que el primer mosaic està fet a base de rectangles i triangles equilàters, pavimentació que concorda, més o menys, amb un dels primers casos de pavimentacions semiregulars que vaig treballar. En el segon, es veu de forma clara que els pentàgons són hexàgons regulars sobre els quals s'ha traçat un segment que els divideix en dos.



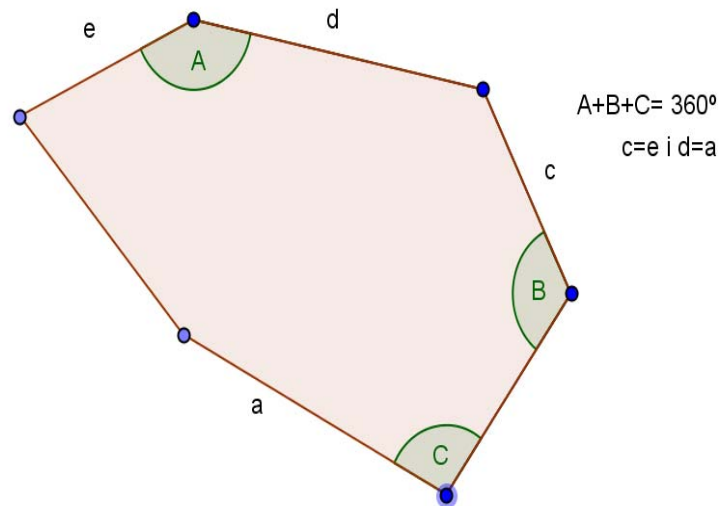
2.4. PAVIMENTACIONS AMB HEXÀGONS NO REGULARS

A més de l'hexàgon regular, que ja hem vist que pavimenta el pla, es coneixen tres tipus més d'hexàgons convexos que ho fan (el matemàtic K. Reinhart ho va demostrar a la seva tesi doctoral del 1918):

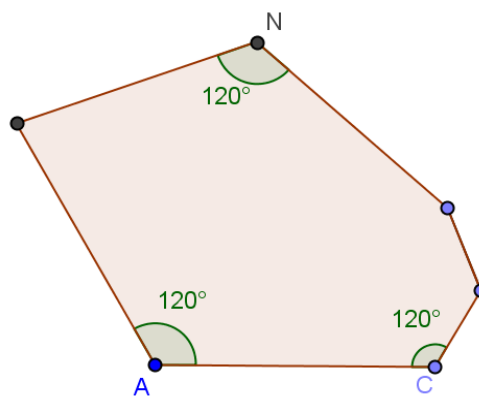
- a) Pavimentació amb hexàgons de tipus 1: dos costats iguals i 3 angles consecutius (dos adjacents als costats iguals) que sumen 360°



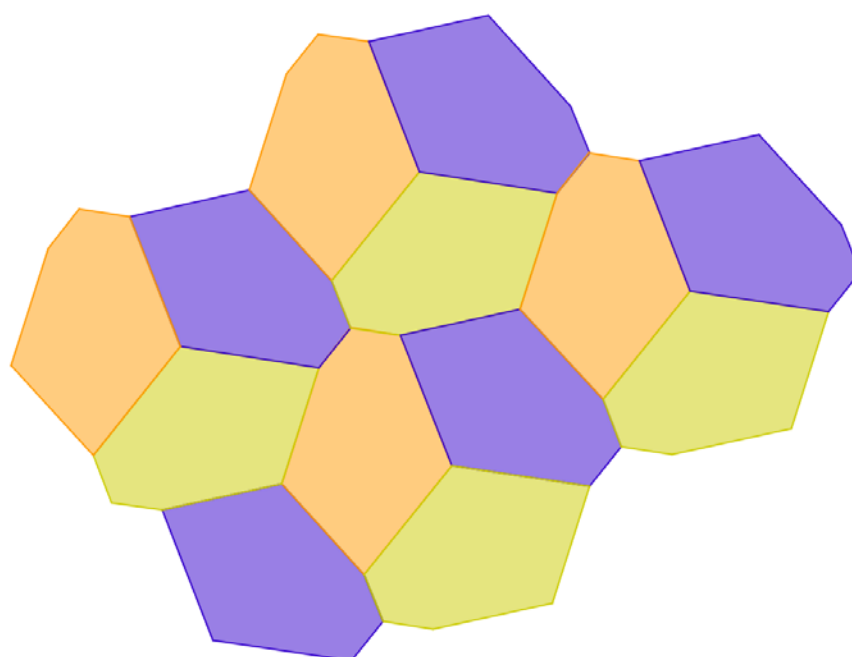
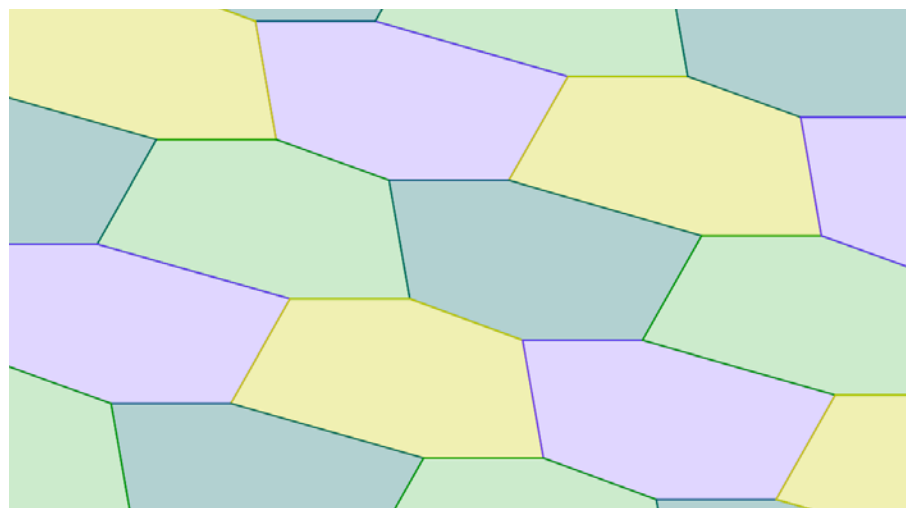
b) Pavimentació amb hexàgons de tipus 2: tres angles no consecutius sumen 360° i dues parelles de costats adjacents als angles són iguals



c) Pavimentació amb hexàgons de tipus 3: tres angles de 120° no consecutius i tres parelles de costats iguals



De la mateixa manera que en el cas anterior, la dificultat que es presenta és trobar la forma del polígon, però quan aquesta ja es té, el procés passa novament per aplicar simetries centrals respecte dels punts mitjans dels costats o algun altre moviment del pla. En els dibuixos següents, per exemple, es presenten dues pavimentacions possibles fetes amb hexàgons (la primera de tipus 1 i la segona de tipus 3).



2.5. PAVIMENTACIONS AMB ALTRES POLÍGONS CONVEXOS

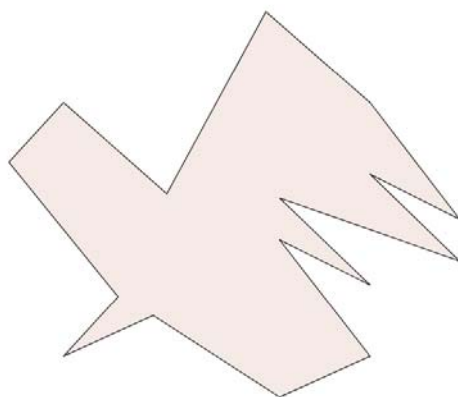
Està demostrat que no es pot recobrir el pla amb polígons convexos de més de sis costats. Una explicació intuïtiva s'obté a partir de l'observació de les pavimentacions ja tenim fetes: en les pavimentacions amb triangles, sempre trobem sis polígons a cada vèrtex. A les pavimentacions amb quadrilàters, en trobem quatre. Si pavimentem amb pentàgons, podem veure que sempre hi ha vèrtexs amb quatre polígons i vèrtexs amb tres polígons. Si la

pavimentació està construïda amb hexàgons, veiem que sempre hi ha tres polígons a cada vèrtex. Per tant, si intentem pavimentar amb heptàgons la intuïció ens diu que aquesta hauria de ser amb vèrtexs de tres polígons i de dos polígons. Així doncs, com que és obvi que amb dos polígons no es té una pavimentació (haurien de tenir vèrtexs de 180° i no es consideraria un vèrtex, sinó un costat), amb qualsevol polígon de més de sis costat no podrem pavimentar el pla. Certament, fer una demostració rigorosa de tot això és probablement molt complicat i queda fora de l'abast d'aquest treball.

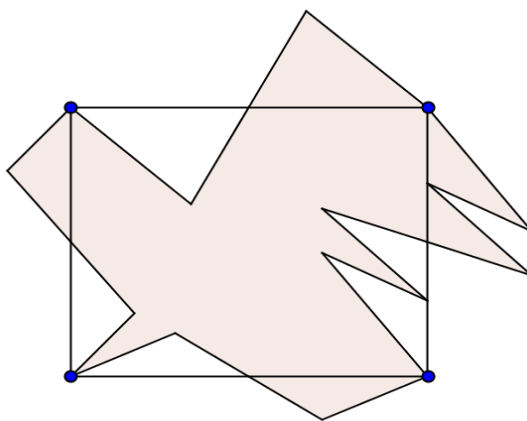
2.6. GENERACIÓ DE PAVIMENTACIONS I MOSAICS

A més de les pavimentacions que ja s'han estudiat, hi ha moltes altres maneres de generar mosaics per al pla. En aquesta part de treball ens centrarem en un tipus especial de pavimentació format per polígons de molt més de sis costats. Això podria semblar una contradicció, ja que s'acaba d'explicar que no hi ha polígons de més de sis costats que pavimentin el pla. No obstant, cal tenir present que ara ens referirem a polígons còncaus i les regles canvien completament.

La idea central és generar pavimentacions noves a partir de la modificació de les peces de les pavimentacions estudiades. La figura que es veu a la imatge següent, per exemple, permet far un mosaic encara que d'entrada això sembli impossible.

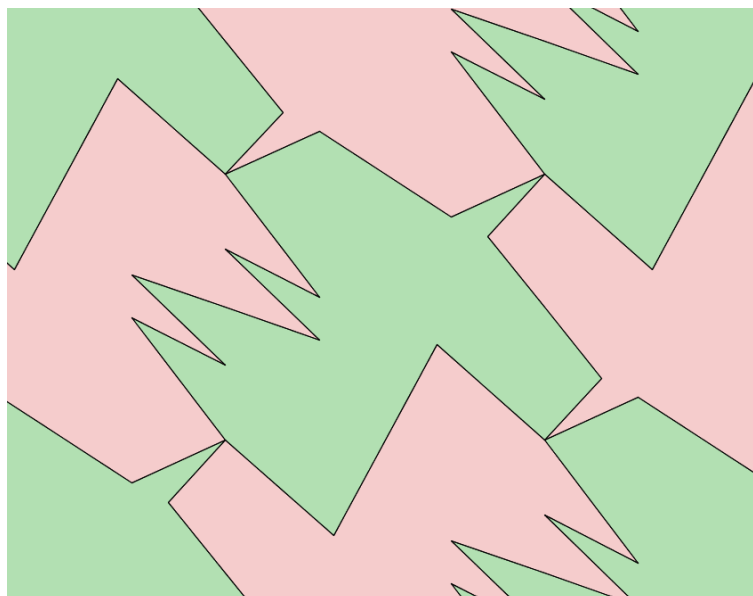


Tot i que a simple vista no s'aprecia, si ens hi fixem podem trobar una relació entre aquest polígon i un rectangle qualsevol. Vegem la imatge:

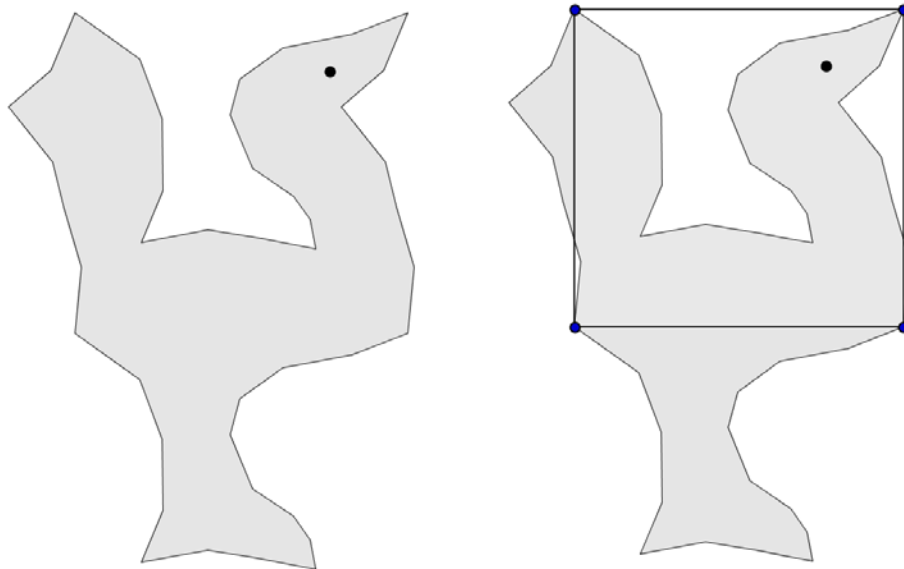


Podem veure que el procés que s'ha utilitzat per obtenir aquest polígon és “extreure” parts del rectangle partint des del punt mig de cada costat i col·locar-les simètricament al seu costat (simetries centrals respecte del punt mitjà). Amb aquest procediment s'aconsegueix que en fer una còpia del polígon i fer-lo rotar 180° , encaixi amb el primer.

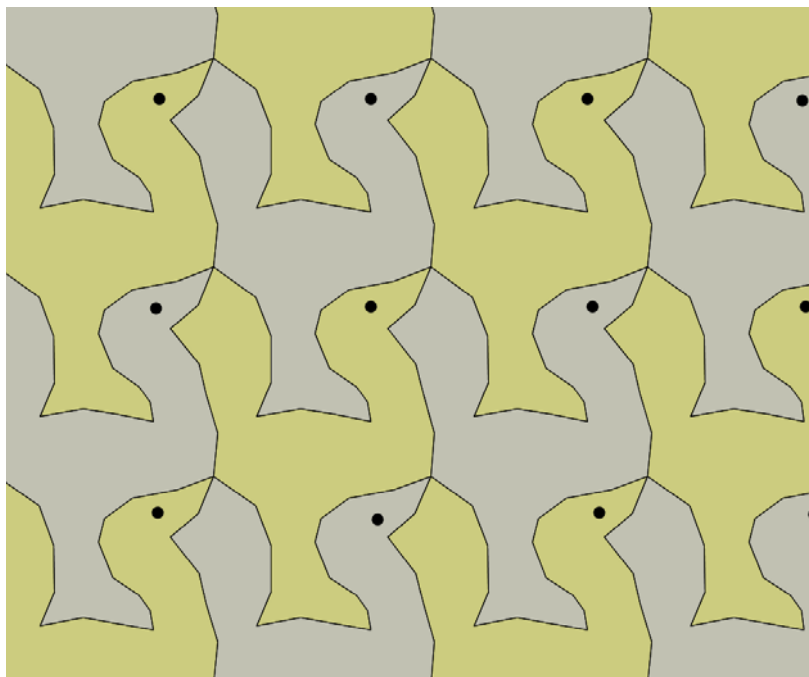
En dur a terme aquest procés, s'obté un mosaic com el que es veu a continuació (com sempre, fet am el programa GeoGebra).



Aquesta tècnica, tot i que pugui semblar molt poc comuna, ha estat utilitzada per artistes antics i moderns de nombroses cultures. El fet és que amb aquest procediment es poden aconseguir figures animals, objectes, etc. A continuació, per exemple, es realitza una pavimentació tractant d'imitar la silueta d'uns ocells. El procés ha estat semblant a l'anterior, tot i que amb una petita variació: en comptes de retallar i enganxar parts en un mateix costat del polígon, s'ha optat per fer-ho amb costats homòlegs, com es veu a la imatge.



Un cop s'ha aconseguit la forma del polígon, s'han realitzat translacions successives fins a aconseguir la pavimentació que es veu a continuació.



Aquest mètode permet generar una quantitat il·limitada de pavimentacions i és molt usat en decoració.

2.7. PAVIMENTACIONS NO PERIÒDIQUES: ELS MOSAICS DE PENROSE

2.7.1. EL DESCOBRIMENT DE ROGER PENROSE

Quan una pavimentació no té translacions que facin que coincideixi amb ella mateixa diem que és no periòdica. Totes les pavimentacions amb què s'ha treballat fins ara eren

periòdiques i, per tant, es pot pensar que els mosaics no periòdics seran de gran complexitat o fins i tot que no existeixen. Tanmateix, això no és pas així.

L'any 1974 el matemàtic de la Universitat d'Òxford Roger Penrose, va publicar un treball sobre mosaics no periòdics a partir d'algunes idees recollides en un llibre de Johannes Kepler (l'*Harmonices Mundi* del 1619). Aquest tipus de pavimentació estava poc estudiat i el seu descobriment va causar un gran impacte en el món matemàtic a causa del seu caràcter no periòdic.

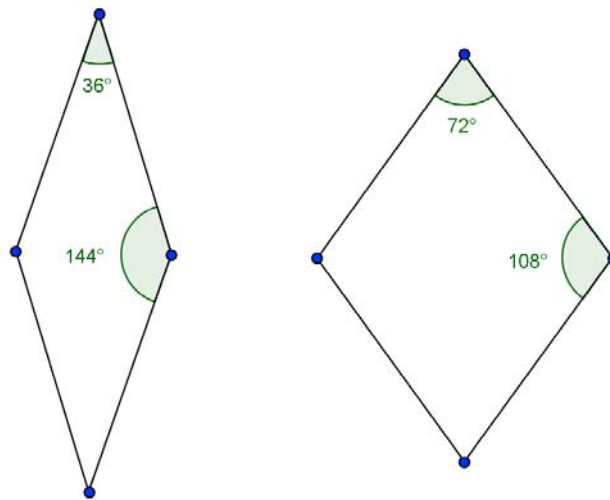
El mèrit de Penrose va consistir a trobar dos quadrilàters senzills, relacionats amb el pentàgon i amb el nombre d'or, que duen a una pavimentació no periòdica força vistosa.



Roger Penrose al vestíbul del Mitchell Institute for Fundamental Physics and Astronomy (Texas A&M University), dempeus sobre un terra decorat amb el seu mosaic

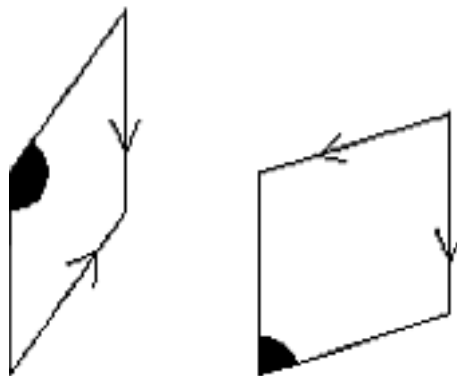
2.7.2 ELS MOSAICS DE PENROSE AMB DOS QUADRILÀTERS

Els primers mosaics de Penrose estan construïts a base de dos quadrilàters diferents. Concretament es tracta de dos rombes amb angles de 36° i 144° o 72° i 108° , tal i com es veu a la imatge construïda amb GeoGebra.



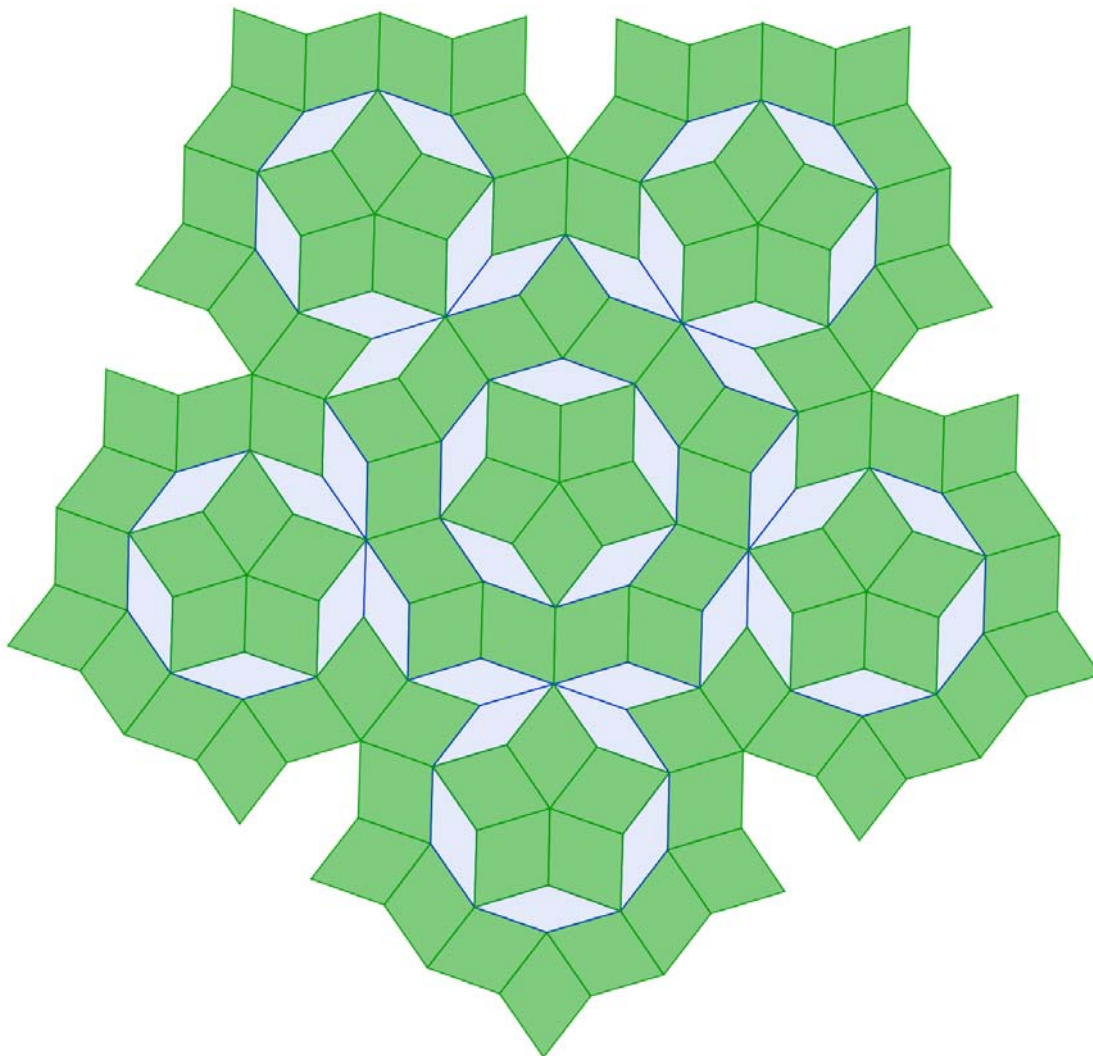
Si ens hi fixem, podem veure una multitud de coincidències entre els angles. Si fem operacions simples veiem que $72=36 \cdot 2$, que $108=36 \cdot 3$, que $144=36 \cdot 4$, i que tots aquests angles sumats donen 360° , que és una condició necessària per pavimentar el pla.

Ja hem vist que amb quadrilàters es pavimenta el pla de forma regular. Això pot portar a confusió. El punt central, la clau del mosaics de Penrose és que absolutament sempre s'hauria de pavimentar el pla de forma no periòdica. En capítols anteriors hem vist que la forma de fer pavimentacions periòdiques amb quadrilàters és posar-los tots en la mateixa direcció. Per tant, per fer-ne de no periòdiques hem de fer justament el contrari. Ens pot ajudar la il·lustració següent:



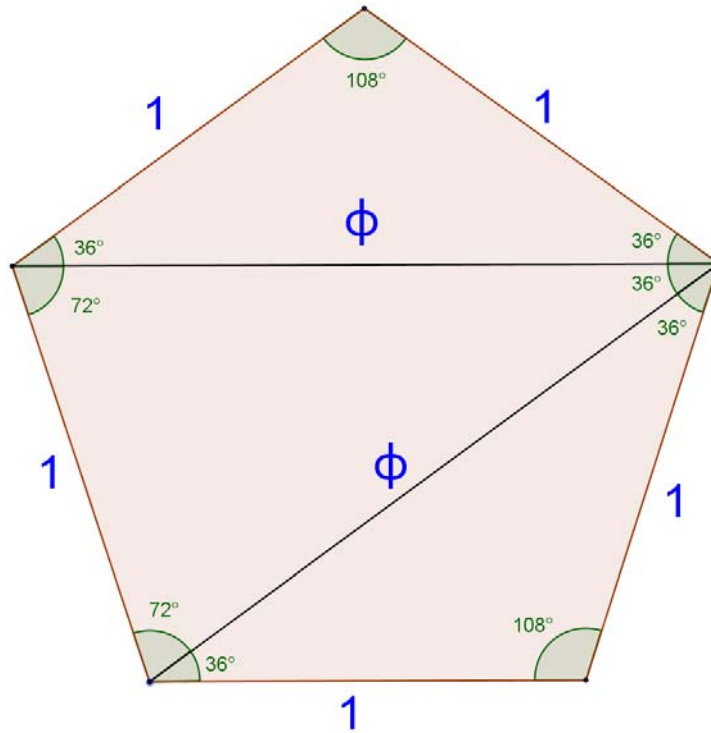
Quan es construeix un mosaic de Penrose, dos vèrtexs adjacents han d'estar tots dos en blanc o els dos han de ser de color negre. Si dues vores es troben una al costat de l'altra totes dues han d'estar en blanc, o totes dues han de tenir una fletxa. Si les dues vores adjacents tenen fletxes, les dues fletxes han d'apuntar en la mateixa direcció.

Amb aquestes normes, que poden semblar una mica rebuscades, es pot desenvolupar un mosaic de Penrose. A més, cal dir que hi ha diverses formes de fer-ho. A continuació es presenta un mosaic de Penrose fet amb GeoGebra.



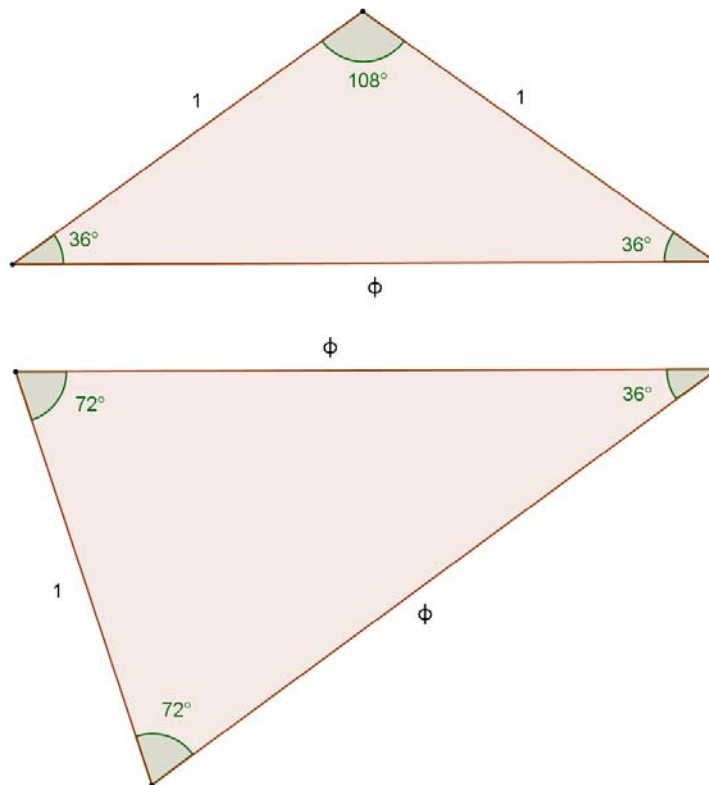
2.7.3 ELS MOSAICS DE PENROSE AMB DARDS I ESTELS

Posteriorment, Roger Penrose, juntament amb altres investigadors, va proposar un nou tipus de mosaic no periòdic utilitzant exclusivament dos tipus de peces: les llances (en anglès *darts*) i els estels (*kites*). Totes dues peces s'obtenen a partir del pentàgon regular:

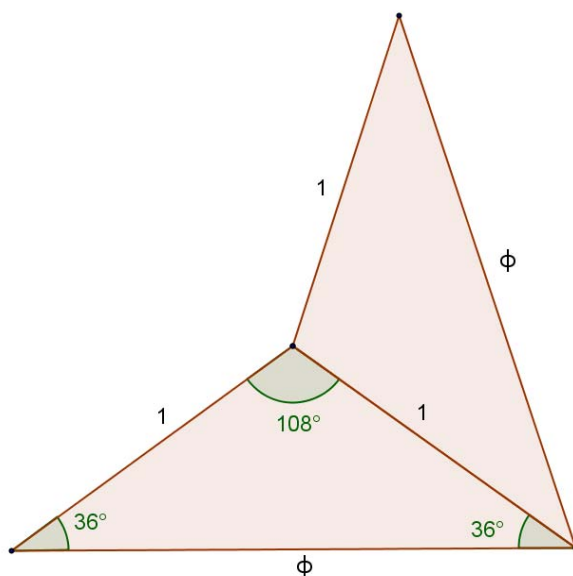


Si el costat del pentàgon regular és de mida 1 les diagonals tenen per mida el nombre d'or phi ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$); la proporció entre les diagonals del pentàgon regular i els seus costats és àuria).

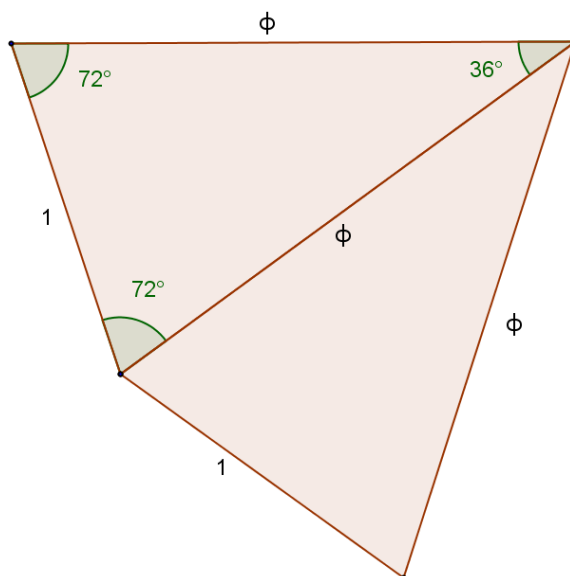
Ara prenem els dos tipus de triangle d'aquesta descomposició:



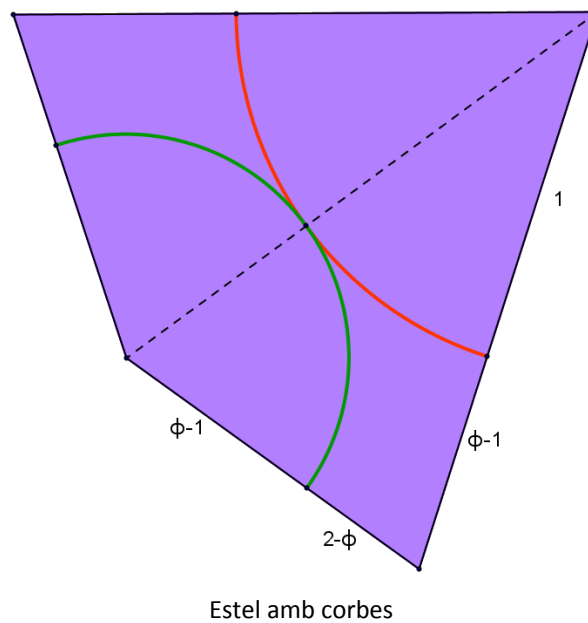
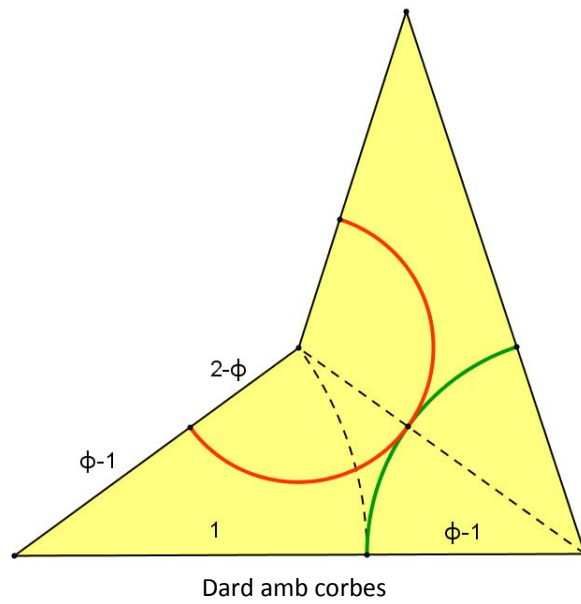
Unim dos triangles del primer tipus per fer un dard:



I dos del segon tipus per fer un estel:



Per tal d'obtenir un mosaic que no fos periòdic, Penrose va incloure marques i etiquetes de colors de manera que podien anar encaixant, però sense que es repetís cap part de l'enrajolat de manera periòdica. Es divideix cada costat de les dues peces en dues parts, tal com es mostra a les figures següents, de manera que estiguin en proporció àuria:



Els radis dels arcs “verd” i “vermell” i els segments que queden definits sobre cada costat, tots ells relacionats amb la proporció àuria, compleixen les proporcions següents:

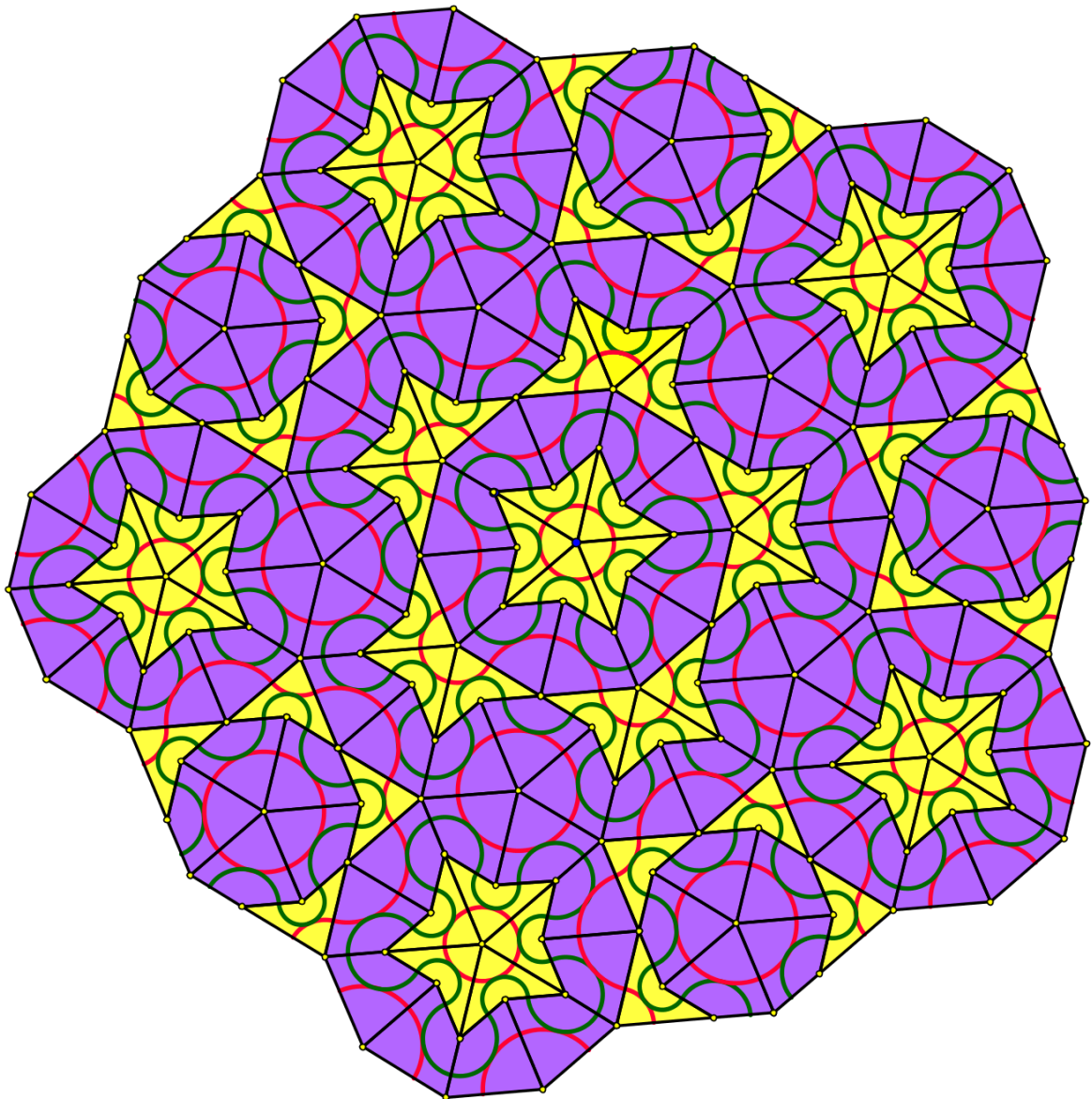
$$\frac{\phi-1}{2-\phi} = \frac{1}{\phi-1} = \phi$$

Efectivament:

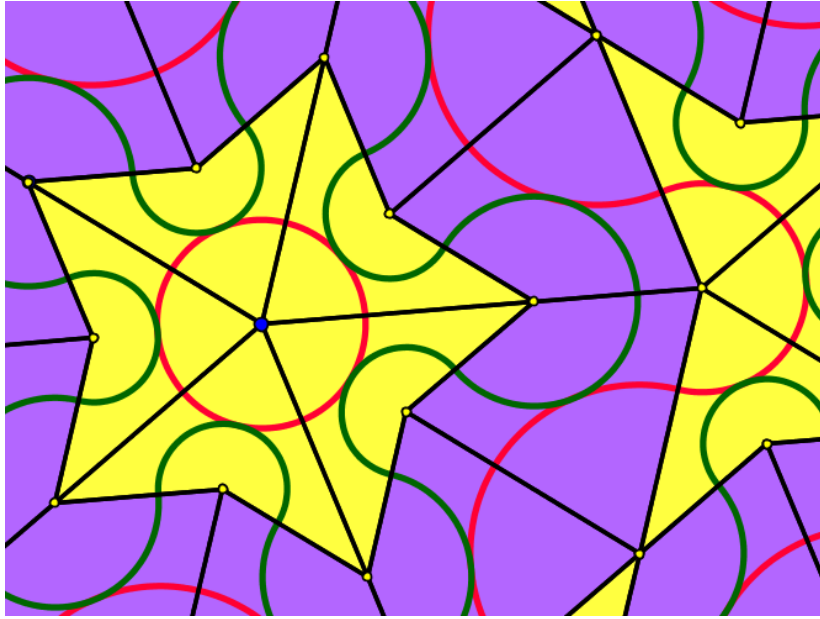
$$\frac{\phi-1}{2-\phi} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)}{2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}\right)}{\left(\frac{4-(1+\sqrt{5})}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{5}-3+5-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\phi-1} = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ara ja podem construir mosaics de Penrose. Haurem d'encaixar les corbes verdes amb les verdes i les vermelles amb les vermelles. Cal tenir en compte que, en general, es necessiten més *estels* que *dards* (en una proporció que, per mosaics infinits, seria exactament $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$). A continuació presento un exemple construït amb GeoGebra:



Mosaic aperiòdic de Penrose amb dards i estels



Detall del mosaic anterior
Cal observar la continuïtat del traç de les corbes verdes i vermelles

3. PAVIMENTACIONS O DIAGRAMES DE VORONOI

3.0. INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL

En aquest capítol s'estudiarà un tipus de pavimentacions molt diferents de les anteriors. Es tracta de les anomenades pavimentacions de Dirichlet o de manera més habitual diagrames de Voronoi. Aquests mosaics es presenten associats a un conjunt de punts del pla i estan formats per les regions poligonals constituïdes pels punt que es troben més a prop dels punts donats inicialment. El seu interès pràctic és divers: en problemes logístics, en problemes de difusió de senyals, en problemes d'emergències, etc.

3.1. QUÈ ÉS UNA PAVIMENTACIÓ DE VORONOI?

Donat un conjunt de punts del pla, el diagrama o la pavimentació de Voronoi associada a aquests punts és una descomposició o partició del pla de manera que a cada punt dels donats li correspon una regió, la dels punts del pla que són més propers a ell.

La pavimentació de Voronoi té nombroses aplicacions i s'utilitza, per exemple, per determinar àrees d'influència d'antenes de telefonia mòbil i de parcs de bombers, per al control de trànsit, per a l'anàlisi de dades meteorològiques i en epidemiologia.

El mètode per determinar les regions que corresponen a cada punt és relativament senzill, tot i que es complica si es consideren molts punts: es tracta de traçar les mediatrises dels segments que uneixen els punts implicats i seleccionar, després, els segments de mediatrisa adequats.

3.2. UNA MICA D'HISTÒRIA

René Descartes ja va pensar en els diagrames de Voronoi al segle XVI, i van ser utilitzats el 1850 en la investigació de formes quadràtiques i en controls d'epidèmies de còlera. Finalment, a principis del segle XX, Georgy Voronoi (matemàtic del qual pren nom aquesta pavimentació) va estendre la seva definició a dimensions més grans.

Georgy Voronoi (1868-1908) va ser un matemàtic rus descendent de pares de la mateixa professió. Des de la seva joventut va destacar per ser brillant, especialment en l'àlgebra. Quan encara anava a la escola, va resoldre un problema plantejat per un professor de la universitat de Kíev que sortia a un diari de matemàtica elemental. Això, el va dur a escriure la seva primera publicació. No gaire temps després, va ingressar a la universitat de Sant Petersburg, on es va unir a la facultat de matemàtiques i física. La seva època d'estudiant,

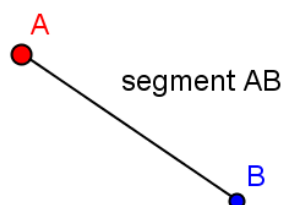
marcada sobretot per les seves grans qualitats de matemàtic, va tenir un final complicat ja que la seva situació familiar era inestable i tenia dificultats econòmiques. A causa d'això, va haver de treballar de professor de matemàtiques, sovint ensenyant matemàtiques simples, i amb àmbits d'estudi poc agradables i sorollosos. Després de graduar-se, va escriure una tesi i va decidir quedar-se a la universitat i treballar per a la seva qualificació docent. En ser anomenat professor de matemàtiques pures, va escriure la seva tesi doctoral. Poc després d'això, va assistir a una conferència a Alemanya on va conèixer un matemàtic que estava realitzant estudis semblants. A causa de la seva deteriorada salut, va morir a l'edat de quaranta anys.

Durant la seva vida com a matemàtic, es va dedicar majoritàriament a la teoria dels nombres –particularment en els nombres algebraics i en la geometria dels nombres- i a les pavimentacions, estudiant i definint el que avui es coneix com a diagrama de Voronoi.

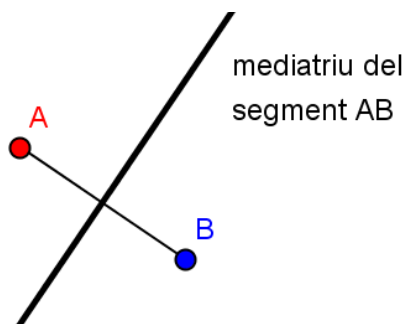
3.3. ALGUNS EXEMPLES DE COM ES FA UN DIAGRAMA DE VORONOI

El cas més senzill és el del diagrama associat a dos punts del pla A i B.

En primer lloc es traça el segment d'extremes A i B.

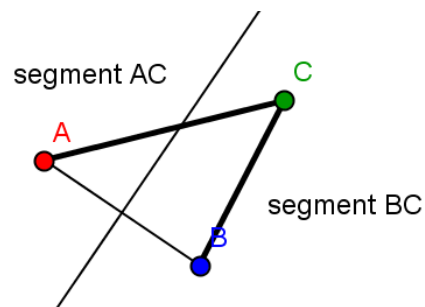


A continuació tracem la perpendicular pel punt mig del segment, és a dir, la recta mediatriu.

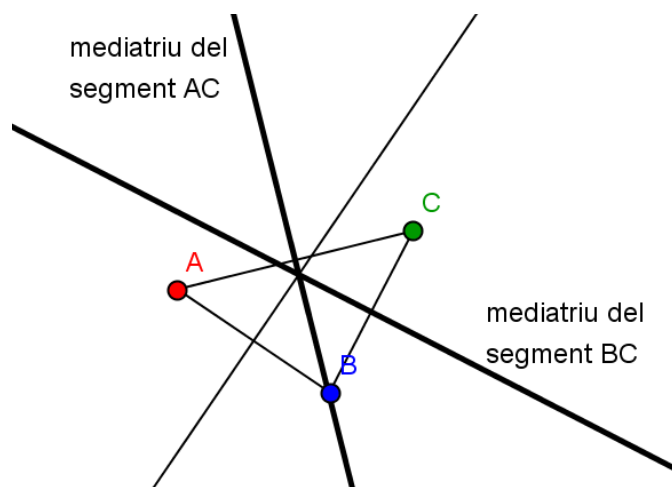


En aquest cas la pavimentació de Voronoi té només dues regions: les delimitades per la mediatriu.

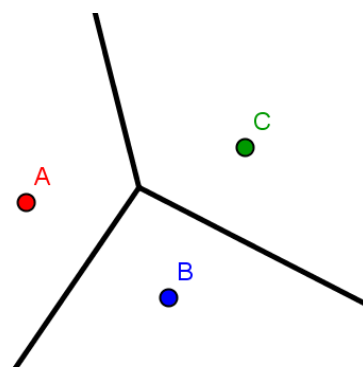
Si afegim un tercer punt C, el que cal fer és traçar els segments entre el nou punt i els dos ja existents.



Un cop es tenen els segments, es tracen les mediatrís de tots tres.

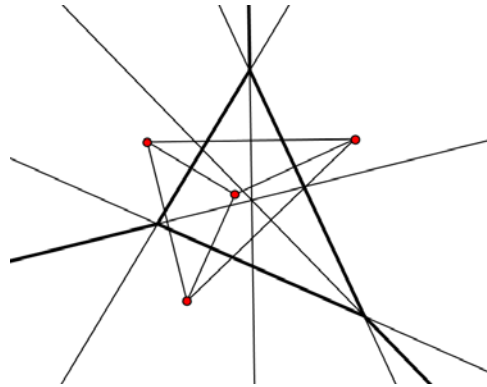


Aquestes tres mediatrís es tallen en el circumcentre del triangle de vèrtexs ABC. Aquest circumcentre és el punt d'intersecció de les semirectes que defineixen el diagrama de Voronoi. Només cal ocultar els segments i les semirectes que no interessen.

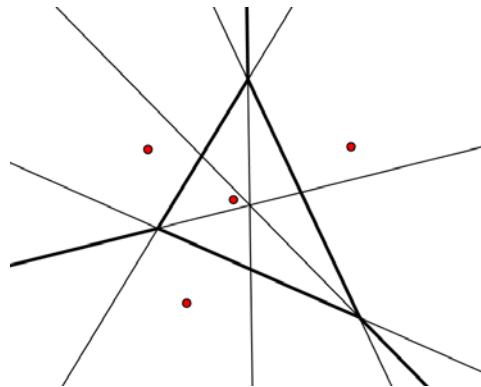


Amb quatre punts la situació es complica.

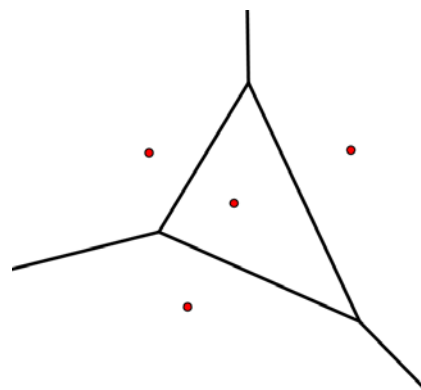
Com en els casos anteriors es tracen els segments i les mediatris.



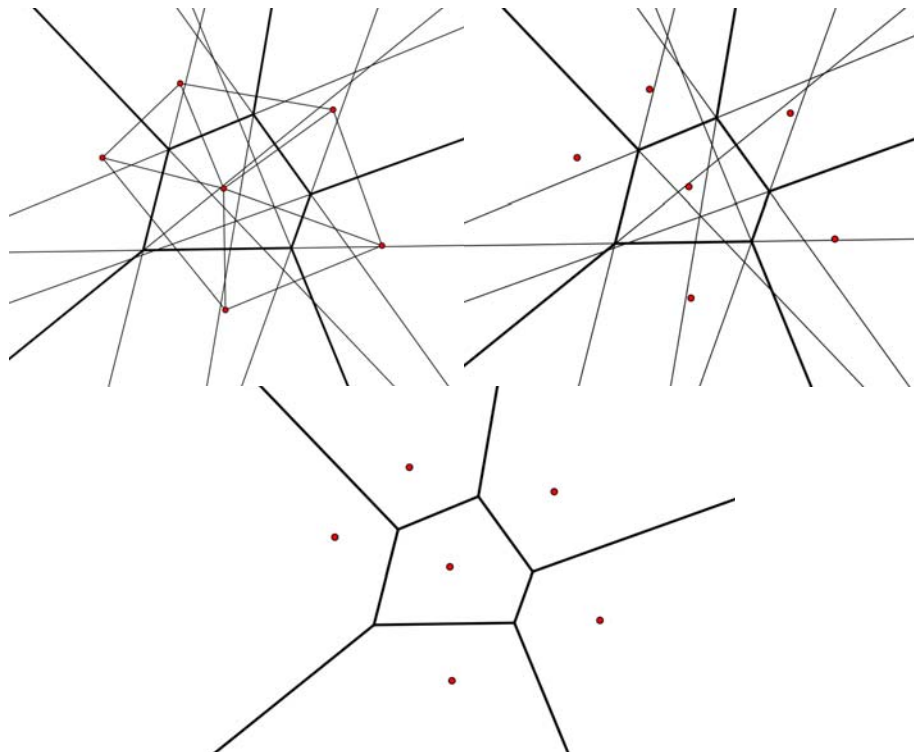
Ocultem els segments i deixem els circumcentres que seran els vèrtexs de la pavimentació.



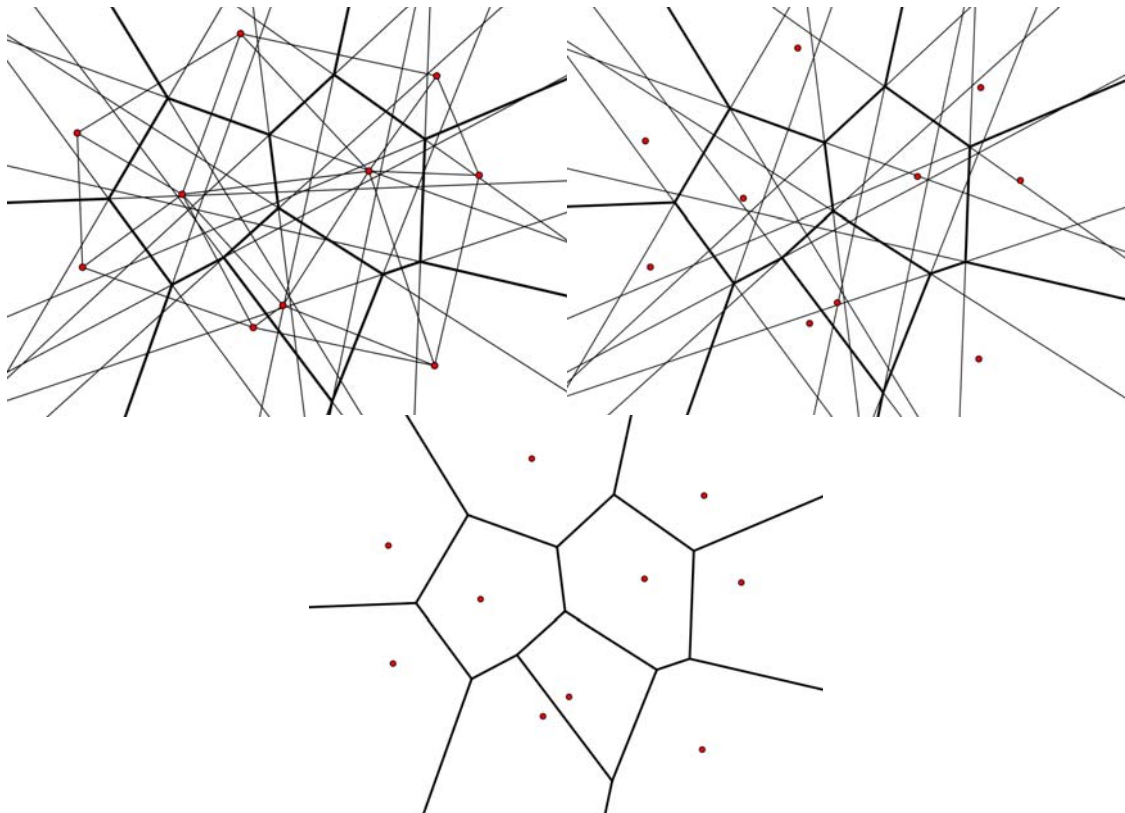
Novament seleccionem les semirectes que ens interessin.



Si en comptes de quatre punts en considerem, per exemple cinc, es veu que la complexitat inicial del diagrama augmenta considerablement.



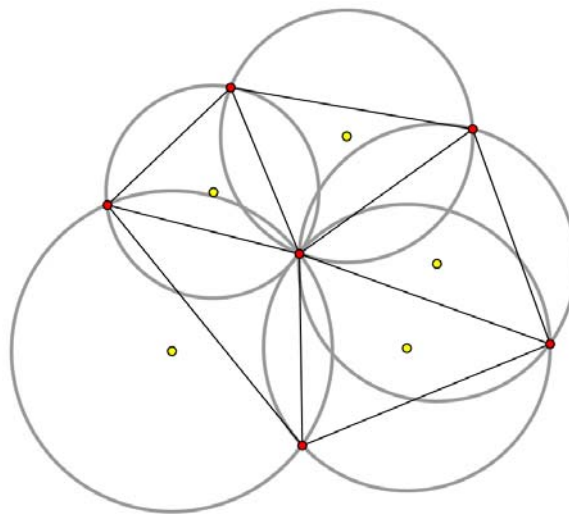
I si n'agafem deu, ja resulta pràcticament impossible distingir les parts de la mediatriu que ens interessin per fer el diagrama.



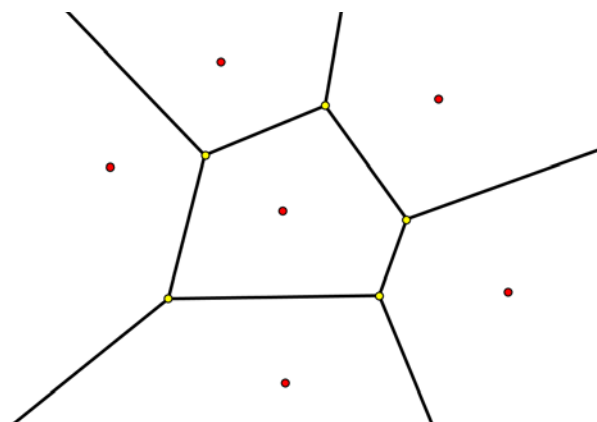
Per tant, ja es veu que per fer un diagrama de Voronoi amb un nombre considerable de punts és massa difícil, lent i amb facilitat es pot cometre una equivocació. No obstant, es pot utilitzar un altre mètode molt més pràctic, que explicaré a continuació amb ajuda d'imatges.

Aquest mètode més senzill per obtenir la pavimentació de Voronoi consisteix a traçar prèviament la Triangulació de Delaunay: conjunt de triangles (determinats pels punts inicials) tals que les seves circumferències circumscrites no inclouen en el seu interior cap dels punts inicials.

En l'exemple següent els punts inicials estan marcats en vermell i els circumcentres dels triangles de la Triangulació de Delaunay en groc:

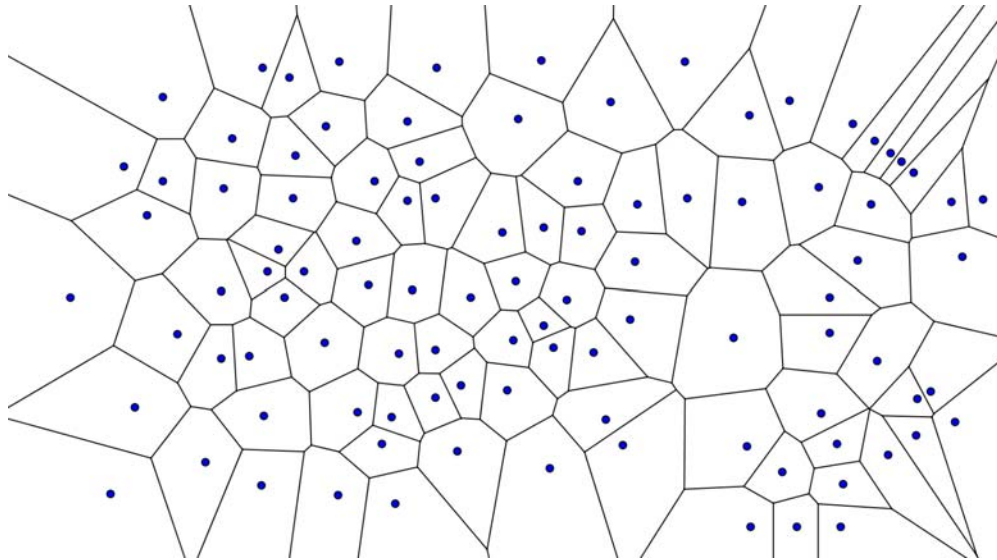


A continuació s'oculten les circumferències. Ara és senzill determinar els segments de mediatriu (dels costats dels triangles de la Triangulació de Delaunay) que cal considerar per obtenir la pavimentació de Voronoi:



El programa GeoGebra, que s'ha utilitzat per fer tots els dibuixos, té una aplicació específica gràcies a la qual es genera el diagrama de Voronoi automàticament a partir dels punts

introduïts. A continuació, per exemple, es veu la pavimentació associada a cent punts, que seria molt difícil de fer manualment.

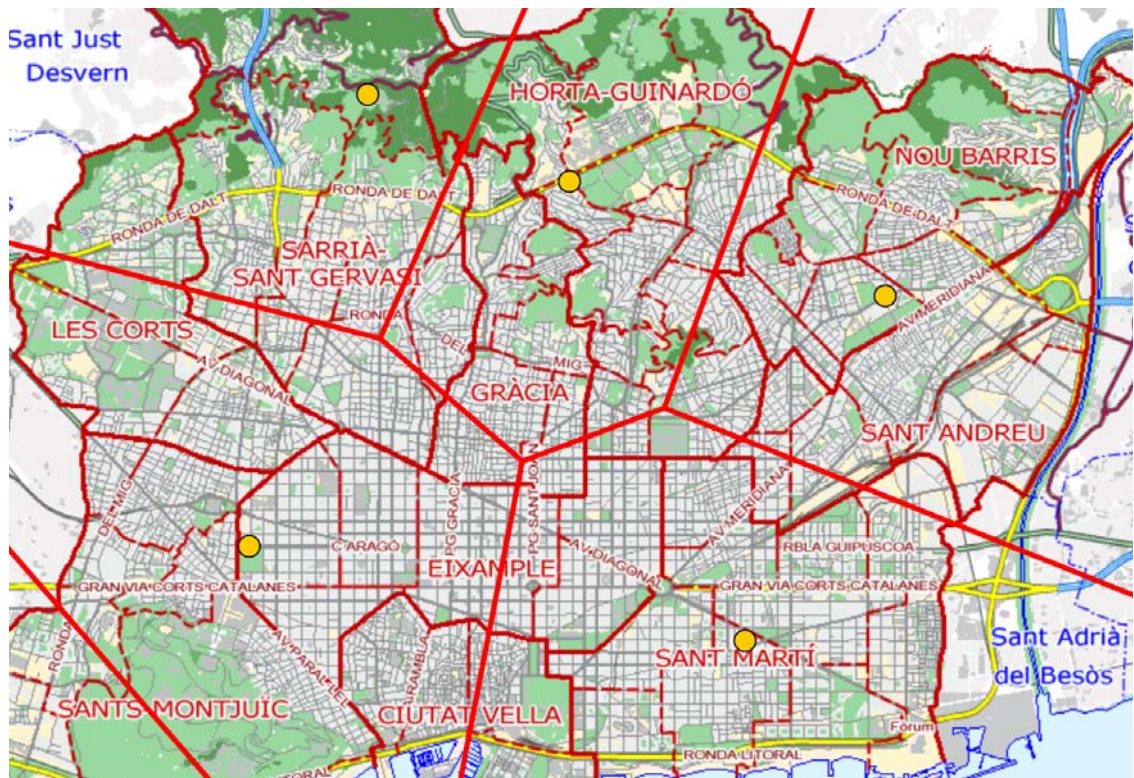


3.4. ALGUNS EXEMPLES DE LES APLICACIONS DELS DIAGRAMES DE VORONOI

Com ja s'ha dit, els diagrames de Voronoi s'apliquen a diverses situacions, com ara per a la determinació d'àrees d'influència d'antenes de telefonia mòbil i de parcs de bombers, per al control de trànsit, per a l'anàlisi de dades meteorològiques, en epidemiologia, etc.

A continuació es presenten i es comenten alguns exemples d'aplicació construïts a partir de la inserció d'imatges que permet el programa GeoGebra (de tal manera que s'hi poden superposar diagrames de Voronoi).

En el primer, a partir d'un mapa de l'Ajuntament de Barcelona sobre la situació dels parcs de bombers de la ciutat (en groc), s'ha aplicat el diagrama de Voronoi per determinar quines són les àrees d'influència de cada parc:



Això podria tenir utilitat de cara a veure quin parc de bombers ha d'actuar a cada zona en cas d'incendi, tot i que també caldria tenir en compte altres factors, com ara quines vies són més ràpides o quines tenen més trànsit.

Amb el mateix procés que en la figura anterior, s'ha determinat quina és l'àrea d'influència de cada capital de província a Catalunya. Es veu clarament que el diagrama no coincideix amb les divisions provincials.



En aquest altre exemple s'han triat com a punts del diagrama totes les capitals europees (marcades amb estrelles en el mapa). S'aprecia clarament que la coincidència amb les línies de frontera és més aviat escassa.



4. APLICACIONS I CONNEXIONS AMB LA REALITAT

4.0. INTRODUCCIÓ AL CAPÍTOL

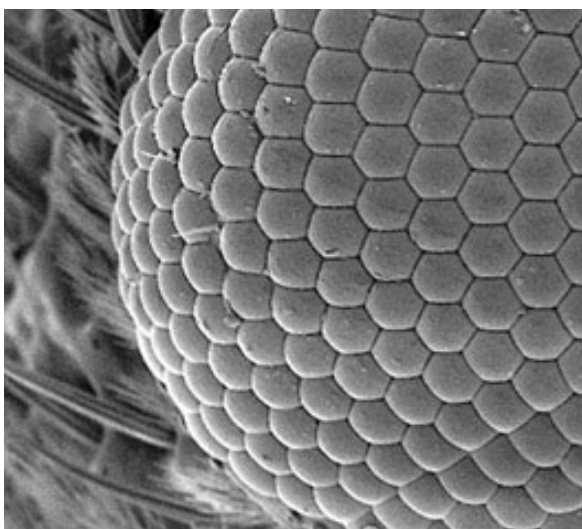
En aquest capítol es parlarà d'atenció, en primer lloc, a les riques connexions del món de les pavimentacions amb el món natural. Veurem que els models matemàtics o geomètrics presentats tot sovint tenen una correspondència amb la realitat.

D'altra banda també es tractaran les relacions que hi ha entre els paviments i l'urbanisme, i aquí es parlarà especialment dels paviments de Barcelona. Finalment, es dedicarà un apartat a comentar les relacions que hi ha entre els mosaics i l'art.

4.1. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS AMB EL MÓN ANIMAL I VEGETAL

A la natura existeixen nombroses pavimentacions regulars o no regulars que tenen una sorprenent similitud amb molts dels casos que s'han estudiat en aquest treball. A continuació, es presenten imatges dels exemples més comuns amb un breu comentari i els models geomètrics corresponents.

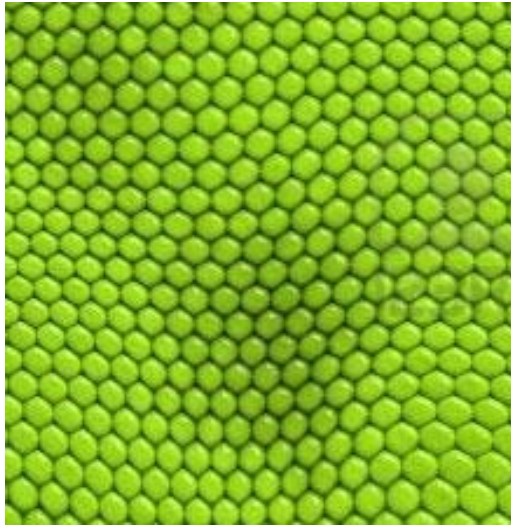
El primer exemple, potser el més clar de tots, podria ser la pavimentació feta a partir d'hexàgons regulars que presenta un rusc d'abelles, l'ull de nombrosos insectes com el de la libèl·lula o la pell de certs rèptils. Cal dir que els ruscs adquireixen forma de mosaic a base d'hexàgons a partir d'esferes o circumferències comprimides. De fet, l'ocupació de l'espai a base d'hexàgons és una de les més econòmiques possibles (un màxim de cel·les en un mínim d'espai), i per això mateix també apareix aquesta mateixa distribució en els ulls i en les pells d'alguns animals.



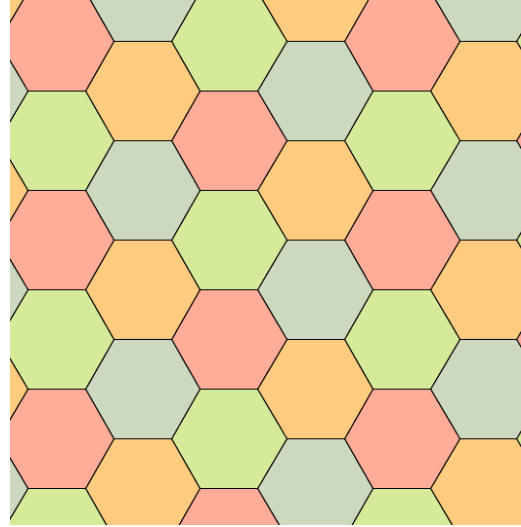
Ull d'una libèl·lula



Rusc d'abelles

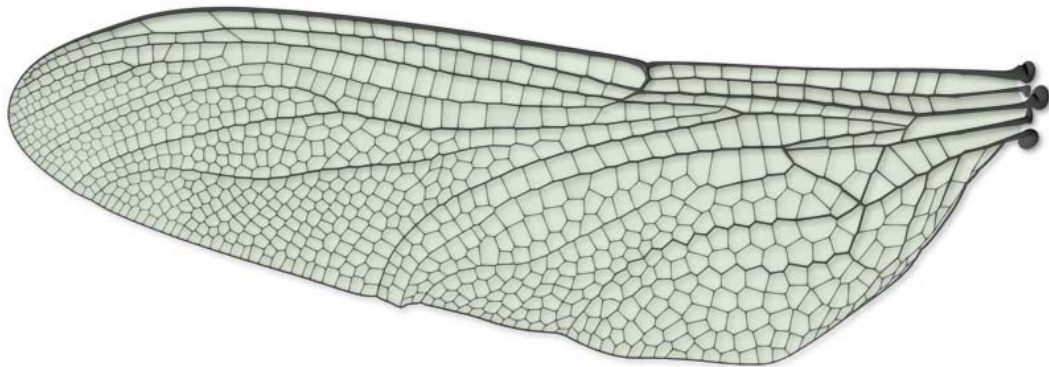


Pell d'iguana



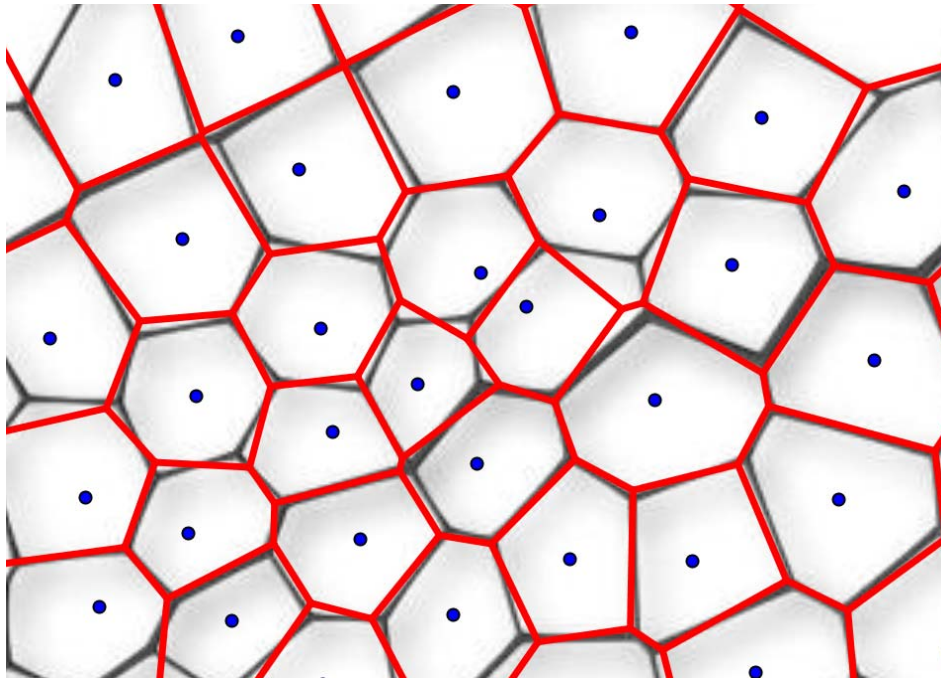
Model geomètric

L'ull de la libèl·lula no és l'única part del seu cos que manté una gran relació amb la geometria i amb les pavimentacions que he treballat. A les seves ales, podem veure una estructura enormement semblant a un diagrama de Voronoi, tal i com es veu a la imatge que es presenta a continuació.



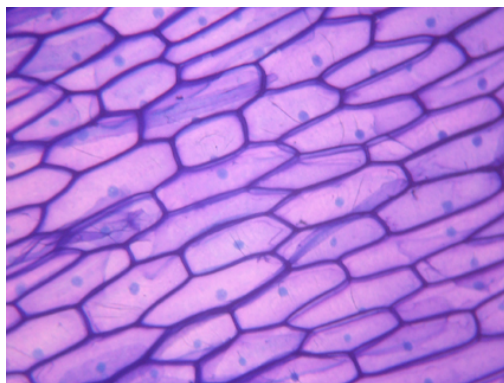
Ala de libèl·lula

Lògicament, si s'analitza amb deteniment aquesta ala, es trobaran algunes incorreccions i petites desviacions, però tot i així, es pot veure clarament que manté una forta relació amb les pavimentacions o diagrames de Voronoi. Per comprovar-ho, s'han buscat de forma aproximada els punts centrals de les cel·les d'una fracció ampliada de l'ala. Com es veu, no tots quadren a la perfecció, però tot i així les coincidències són molt grans. Els motius biològics que hi ha darrere d'aquesta coincidència són difícils d'esbrinar tot i que podríem fer la hipòtesis que deuen tenir relació amb el creixement cel·lular.

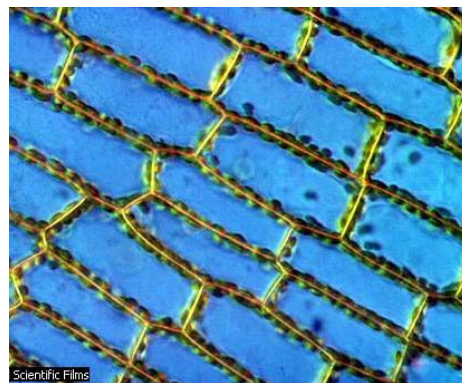


Detall de l'ala de libèl·lula i model geomètric

Un altre exemple, tot i que menys conegut i més irregular, és l'estructura que formen els teixits cel·lulars de nombroses parts dels cossos dels animals i plantes. Com es veu a la imatge d'aquest teixit vegetal d'una ceba, les cèl·lules es disposen en forma de pavimentació formada per hexàgons, pentàgons i quadrilàters. Aquesta estructura també ens pot recordar a un diagrama de Voronoi, on els punts són els nuclis cel·lulars.



Teixit d'una ceba



Cloroplasts

Per últim, una altra pavimentació que trobem en el món animal és la de les escates de la majoria dels peixos, que tot i que sembli una de les formes menys exactes compleix un patró matemàtic basat en semicircumferències que formen una pavimentació.



Escates d'una madrilleta vera (espècie de peix petit)

4.2. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS DE PENROSE AMB LA CRISTAL·LOGRAFIA: ELS QUASICRISTALLS

En primera instància els mosaics de Penrose no semblaven tenir gran cosa a veure amb la natura. De manera sorprenent, però, les investigacions del professor israelià de l'Institut de Tecnologia de Haïfa, Daniel Shechtman, han demostrat que són el model matemàtic dels anomenats quasicristalls.

Aquest investigador, des del 1982 i en contra de la majoria d'opinions científiques, va perseverar en la recerca dels anomenats quasicristalls una autèntica revolució en el món de la cristal·lografia que només considerava possibles les ordenacions d'àtoms periòdiques i veia com a una simple especulació la possibilitat que existissin ordenacions no periòdiques dels àtoms.

El 1984 Shechtman i els seus col·laboradors van descobrir una forma de crear un aliatge d'alumini amb manganès (Al_6Mn) i la van observar amb rajos X. El seu diagrama de difracció presentava una ordenació no periòdica de tipus pentagonal. Això entrava en contradicció amb els models vigents en el món de la cristal·lografia. Hi havia un error?

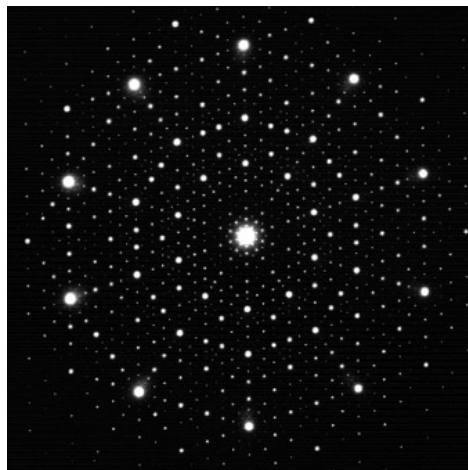
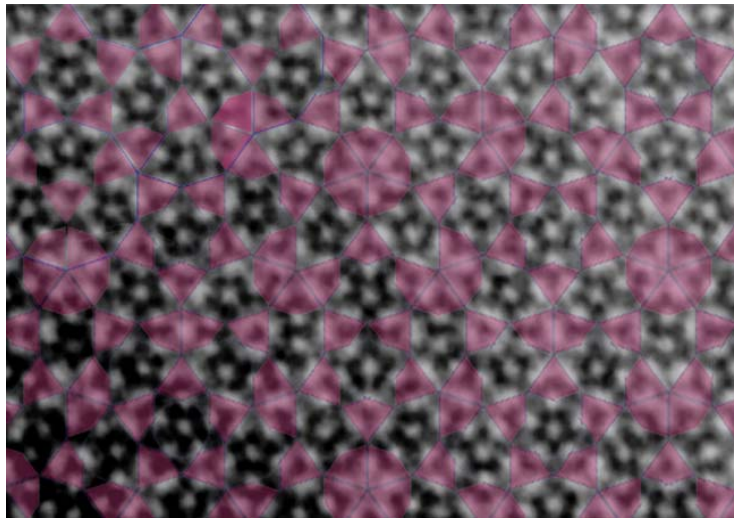


Diagrama de difracció d'electrons d'una mostra de Al_6Mn

La perseverança del professor Shechtman i del seu equip va acabar per mostrar que estaven davant d'una troballa inesperada. Van batejar aquestes estructures com a “quasicrystals” i l'aliatge avui dia es coneix com a Shechtmanita. Per aquest descobriment el professor Shechtman va rebre el Premi Nobel de Química del 2011.

Avui existeixen un centenar de tals aliatges i tothom reconeix els mosaics de Penrose com a model matemàtic d'aquestes estructures.



Àtoms del sistema $Al_{72}Ni_{20}Co_8$ sobre un recobrint aperiòdic diferent

Al nord est de Rússia s'han trobat algunes roques que contenen quasicristalls però es creu que tenen origen no terrestre, que procedeixen d'algun meteorit.

La virtut d'aquests nous materials rau en la seva gran duresa i la gran resistència a temperatures elevades. Totes dues degudes a la manca de periodicitat. La manca de simetria de translacions fa que hi hagi molt pocs defectes en el material (simplificant, podria dir-se que els quasicristalls no troben el pla per on trencar-se).

Els aliatges d'alumini utilitzats en la indústria aeroespacial tenen una duresa d'uns 100 kg/mm^2 , mentre que els aliatges d'alumini quasicristal·lins arriben a dureses d'uns 1000 kg/mm^2 (el diamant arriba als 1600 kg/mm^2). Obren, doncs, un nou camp d'aplicacions.

4.3. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS AMB LA DECORACIÓ I L'URBANISME

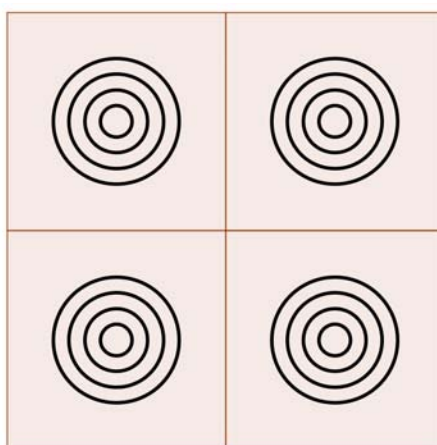
Bona part de les pavimentacions que s'han estudiat, i també altres de més complexes, apareixen amb freqüència a terres de carrers, edificis i monuments. A continuació, podem veure nombroses fotografies que s'han realitzat per Barcelona de pavimentacions del sòl i

d'altres extrems d'Internet que també fan referència a la nostra ciutat. En els casos nous, es comparen amb un model geomètric.

La primera i més coneguda és la pavimentació construïda a partir de quadrats, d'una gran simplicitat i eficàcia. Es troba en nombrosos terrenys de tot tipus d'edificis, en enrajolats urbans, etc. A les imatges, es veuen tres típics enrajolats dels carrers de Barcelona formats per quadrats que s'han fotografiat.



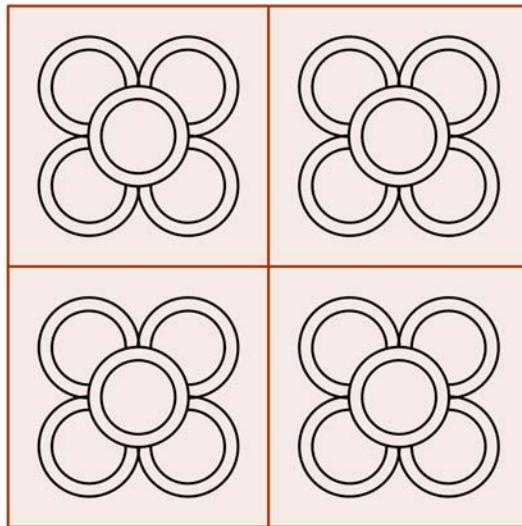
Tot i així, com a l'última de les imatges anteriors, a vegades s'hi afegixen nous elements geomètrics per decorar-les. El model geomètric fet amb GeoGebra és el següent:



En aquest sentit, un exemple interessant és la rajola que l'arquitecte Josep Puig i Cadafalch va dissenyar i introduir per a l'entrada de la casa Amatller del Passeig de Gràcia de Barcelona ara fa més d'un segle. Es va basar en el trèvol de quatre fulles, símbol panteista que admirava. La rajola va ser tot un èxit i poc temps després va ser inclosa al mostrari de rajoles de la ciutat. Avui és força freqüent a les voreres i fins i tot s'usa com a símbol de la ruta modernista.



El model geomètric, fet amb GeoGebra és el següent:



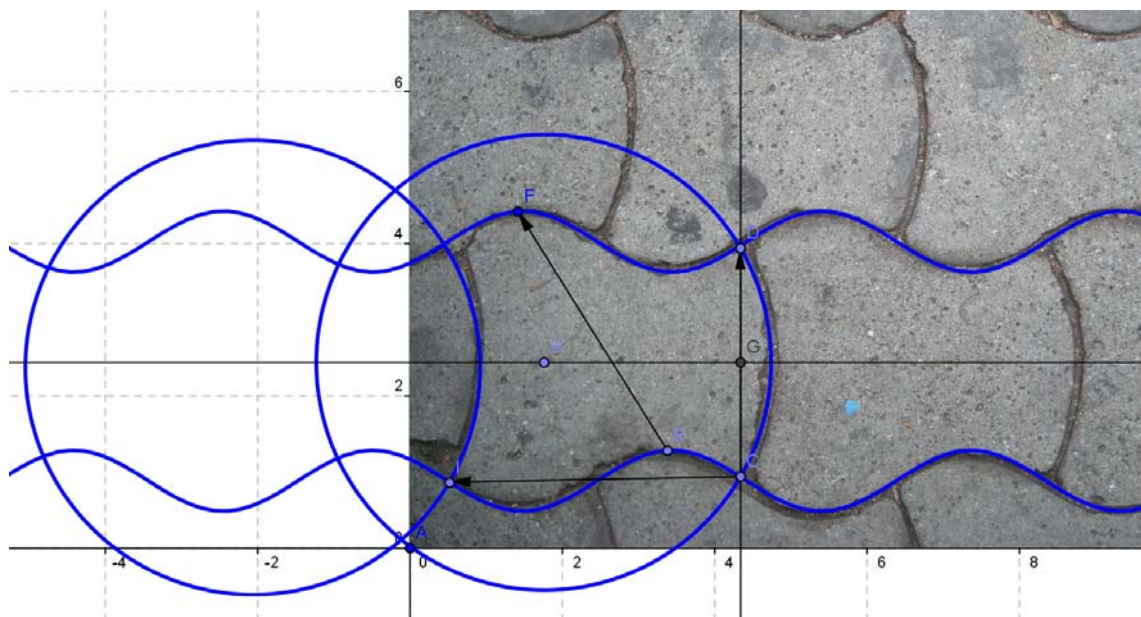
Una altra exemple, potser més lligat amb l'art que no pas amb l'urbanisme, són les famoses rajoles hexagonals del Passeig de Gràcia. En aquesta fotografia es veu que no només intervé la curiosa forma sinó que es veuen relleus típics de l'estètica gaudiniana.



Al mateix Passeig de Gràcia, a diverses zones d'aparcament, es pot trobar un tipus de pavimentació poc comuna. És força vistosa i complexa i no s'ha treballada fins ara.



El model geomètric d'aquesta pavimentació és més complex. En la construcció que s'ha fet amb GeoGebra com a model, es pot veure que cada peça del mosaic està formada per una ona sinusoidal i arcs de circumferència.



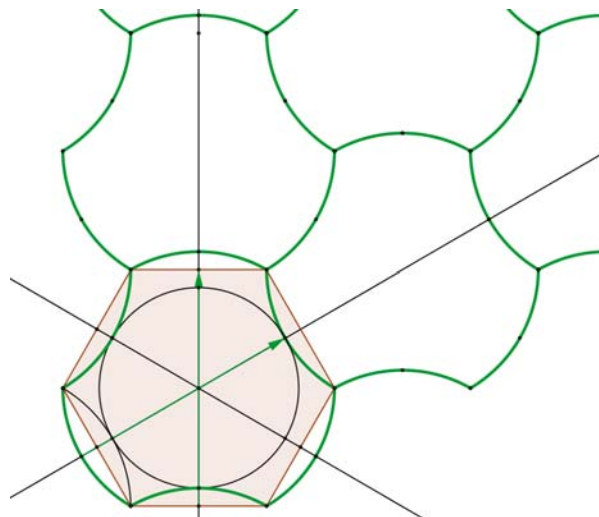
Una tercera rajola lligada amb els hexàgons és la situada al sostre del mercat de Santa Caterina de Barcelona. A la imatge de l'esquerra es veu una vista aèria del sostre on s'aprecia un mosaic fet a partir d'hexàgons, que han estat decorats de diferents colors. Si es pren una imatge del sostre més ampliada, a la dreta, es veu que els hexàgons estan construïts a la vegada per hexàgons més petits.



També s'ha trobat un mosaic constituït per hexàgons curvilinis que pavimenta algunes zones d'aparcament de cotxes (per exemple al Campus Nord de la UPC). A sota, es compara amb un model d'una sola rajola feta amb GeoGebra i on es veuen de forma més clara els aspectes geomètrics de la figura, que es compon a partir de sis arcs de circumferència.



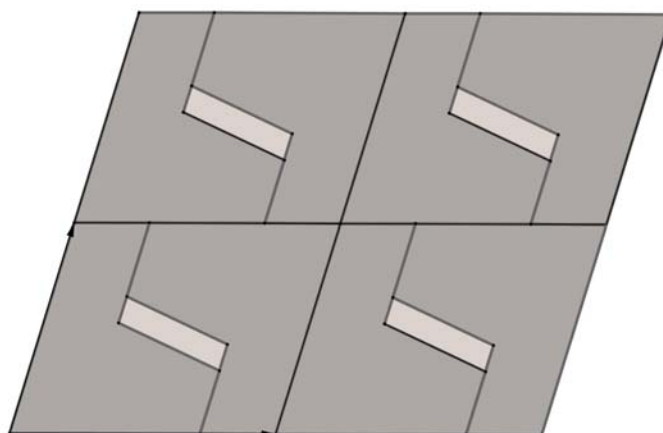
De fet, la construcció del model geomètric es basa en l'hexàgon regular. Sobre cada costat, alternativament, s'afegeix o es sostreu un segment circular. La pavimentació es pot completar fàcilment amb translacions tal i com es veu a la imatge següent:



Una altra pavimentació ben curiosa es pot trobar a la plaça de la Reina Maria Cristina de Barcelona. Es basa en la geometria del paral·lelogram i presenta uns motius de decoració prou interessants.



Com ja s'ha dit, es tracta d'una pavimentació basada en el paral·lelogram i el seu model geomètric fet amb GeoGebra és el següent:

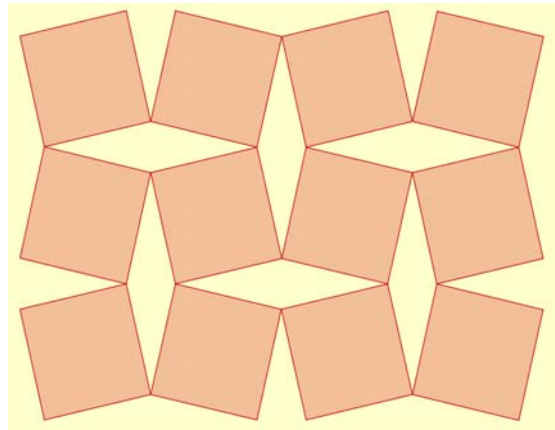


4.4. ALGUNES RELACIONS DE LES PAVIMENTACIONS AMB L'ART

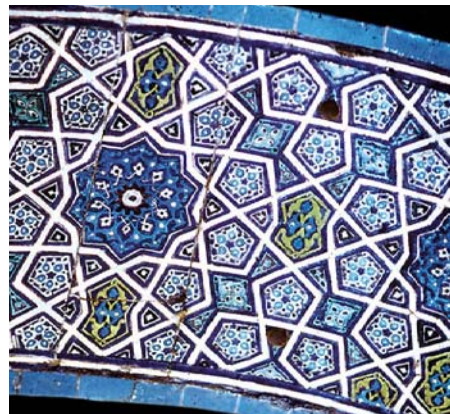
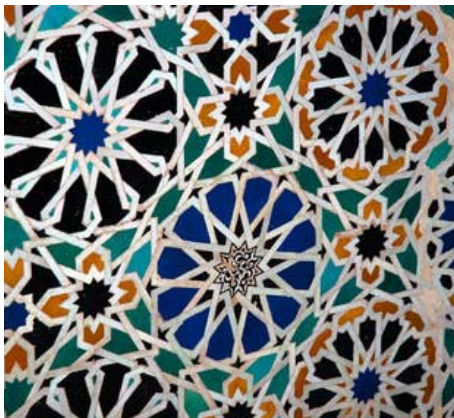
Les relacions dels mosaics o de les pavimentacions amb l'art són extraordinàries i mereixerien tot un estudi per elles mateixes. En aquest treball només es comentaran alguns aspectes.

Des d'una perspectiva històrica val la pena esmentar en primer lloc el mosaics romans. Els van utilitzar amb gran profusió per decorar els terres i les parets de les seves construccions amb gran habilitat i durant molts segles, de tal manera que se'n troba per tot arreu, molts de força ben conservats i molts amb motius geomètrics relacionats amb els aspectes que s'han

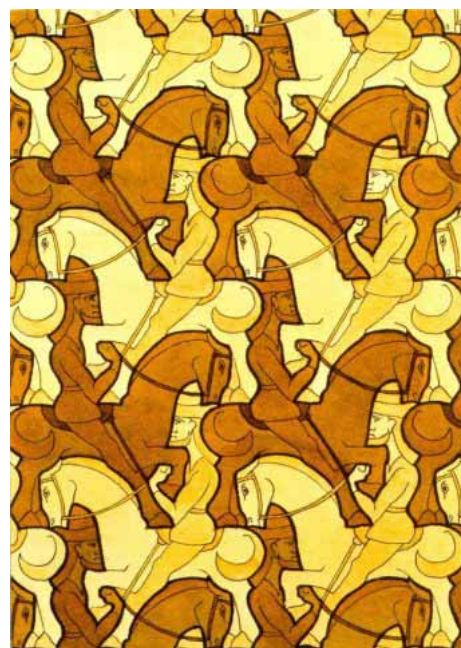
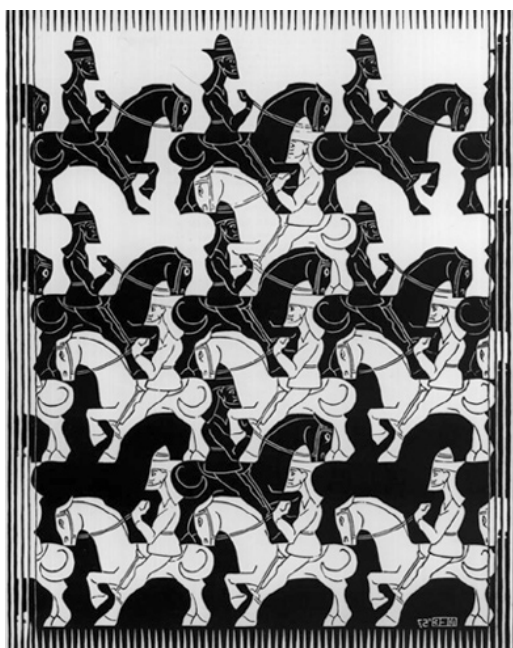
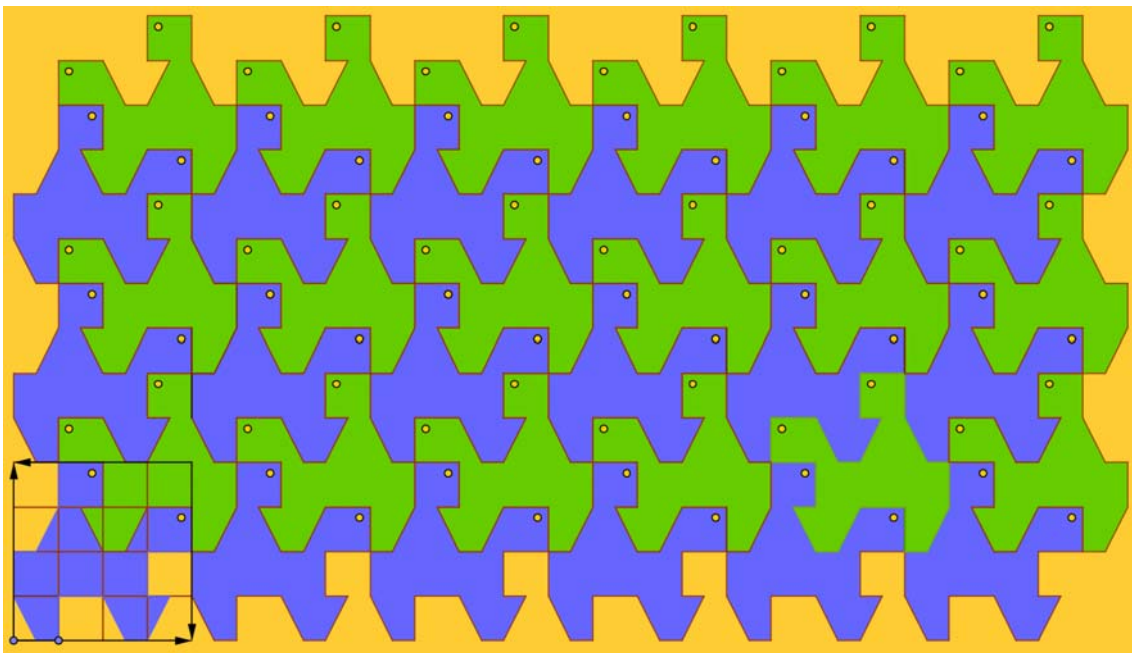
estudiat. El mosaic següent, per exemple, és del segle II d. C., es conserva al Metropolitan Museum of Art de Nova York i prové d'Antioquia, a l'actual Turquia. Al centre s'hi representa la figura de Bacus, però té com a motiu fonamental una composició geomètrica a base de quadrats i de rombes força elegant i equilibrada. També s'hi adjunta el model geomètric fet amb GeoGebra:



Uns altres grans mestres de les decoracions geomètriques amb mosaics foren el àrabs. Des del segle VII, en què comença la seva expansió que els durà des de l'Índia fins a la Península Ibèrica, però sobretot a partir del segles X i XI quan la seva cultura arriba a la màxima esplendor, van emprar motius geomètrics en les decoracions de tota mena de construccions que encara avui podem admirar. No deixa de ser curiós que l'aplicació pràctica dels mosaics no regulars descoberts per Penrose, en certa manera, ja era coneguda de molt abans. N'hi ha prou de mirar alguns dels bellíssims mosaics que hi ha al palau de l'Alhambra (primera figura mostrada) o al palau de Darb-i-Imam a Isfahan (segona figura) per trobar el mateix tipus de pavimentacions:



Per tancar aquest apartat dedicat a les relacions dels mosaics amb l'art cal esmentar la figura de Maurits Cornelius Escher (1898-1972), artista holandès que creà una nombrosa col·lecció de dibuixos, pintures i gravats inspirats en elements de la matemàtica i de la geometria de gran virtuosisme. Avui és una figura mundialment reconeguda i té un museu dedicat a la seva obra a l'Haia. Entre molts d'altres aspectes, Escher va fer nombroses obres i estudis relacionades amb els mosaics o les pavimentacions del pla. Els "Genets", per exemple, és un mosaic fet amb un polígon còncav amb forma esquemàtica de genet que s'ha reproduït amb GeoGebra. A continuació també es mostren dos dibuixos d'Escher basats en el mateix esquema, però més elaborats:



5. CONCLUSIONS

En la bibliografia consultada, tant als llibres com a la xarxa, he trobat molta informació referent als mosaics o a les pavimentacions i he descobert que moltes persones hi han dedicat molt de temps d'estudi durant molts anys. Tanmateix, la majoria de la feina que he fet es pot dir que és en bona part original, perquè en aquests documents, en general, només hi apareixen els resultats finals i no hi he trobat ni els càlculs, ni les deduccions, ni les construccions. Així, per exemple, en el primer capítol, dedicat a estudiar les pavimentacions amb polígons regulars, és fàcil trobar als llibres i a les pàgines web les onze solucions que existeixen. Enlloc, però, no he trobat la justificació de per què només són onze, ni la resolució de l'equació que em dedico a estudiar primer algebraicament i després geomètricament. En aquest sentit, la feina que he tingut ha estat àrdua i m'ha demanat molta dedicació.

Tot i que pugui semblar que es tracta d'un tema relativament restringit, el cert és que la seva amplitud m'ha sorprès. Cada porta que obria feia aparèixer tot un món que per ell mateix podria convertir-se en un treball. M'he vist obligat, doncs, a triar només alguns aspectes i a tractar-los en alguns casos de manera superficial. La metodologia que he seguit en el decurs del meu treball (que ja esmento a la introducció tot i que aquí la recalco) m'ha ajudat a no perdre'm en un món amb tantes possibilitats i sempre he procurat seguir les mateixes passes: 1) cercar informació; 2) delimitar aspectes rellevants; 3) estudiar-ne alguns a fons, si ha calgut amb càlculs algebraics o amb construccions geomètriques precises; 4) trobar exemples reals i experimentar amb el programa GeoGebra; 5) arribar a conclusions i fer la redacció final de l'apartat o aspecte estudiat.

Vull fer esment especial de l'ajuda que m'ha prestat el programa GeoGebra. Es tracta d'un programari lliure que m'ha permès fer totes les construccions (88 arxius recollits a l'annex) i totes les comprovacions de manera àgil i elegant. Amb aquest programa he pogut experimentar, fer tota mena de proves sobre les conjectures i representar els mosaics de manera molt precisa. Si tota aquesta feina s'hagués hagut de fer dibuixant amb regla i compàs, el treball hauria estat inabastable.

Fetes aquestes consideracions inicials, passo a comentar les conclusions del meu treball. Les agruparé en dos blocs: d'una banda explicitaré un conjunt de conclusions que fan referència a aspectes generals i, de l'altra, esmentaré les conclusions més específiques i intrínseques, que són les que realment connecten amb les preguntes que em vaig formular inicialment.

5.1. CONCLUSIONS GENERALS

1. El món de les pavimentacions o dels mosaics és d'una gran riquesa i complexitat amb multiplicitat d'aspectes i d'aplicacions. Des d'un punt de vista matemàtic, s'hi conjuguen la geometria i l'àlgebra de manera permanent tal i com s'ha pogut veure explícitament en el capítol dedicat a l'estudi de les pavimentacions amb polígons regulars o en el dedicat als mosaics de Penrose. Sorpren que coses aparentment desconnectades, com ara el nombre d'or i els mosaics tinguin alguna relació.
2. La matemàtica i la geometria ens apareixen com a model de diverses situacions del món físic, des dels ruscs de les abelles, als teixits o als quasicristalls.
3. La matemàtica i la geometria també ens apareixen com a model per a altres activitats humanes com el disseny, l'arquitectura o l'art.
4. Les tres conclusions anteriors porten a concloure que hi ha fortes connexions entre moltes de les branques del coneixement humà que té, doncs, unes característiques més globals del que es podria pensar.
5. L'ajuda dels programes informàtics, com ara el GeoGebra, que permeten treballar simultàniament aspectes algebraics i aspectes geomètrics, dona una dimensió experimental a les matemàtiques que les fa més intuïtives. Tanmateix, amb el programa només podem fer comprovacions, no demostracions. Una de les característiques de les matemàtiques, que les diferencia de les ciències experimentals, és precisament la possibilitat de fer demostracions deductives, com ara la del primer capítol en què es demostra que només hi ha onze pavimentacions possibles del pla amb polígons regulars, això sí, potser guiades o ajudades per l'experiència.
6. Malgrat l'important volum de feina i d'estudi que ha comportat aquest treball, encara hi ha força aspectes en els quals es podria aprofundir i que permetrien fer nous treballs de recerca monogràfics dedicats als Diagrames de Voronoi, als mosaics de Penrose, a Maurits Escher, als mosaics de l'Alhambra o a mil temes més.
7. Tot i que es parteixi d'un nivell bàsic de coneixements de matemàtiques, es pot arribar a veure que en el món de les pavimentacions del pla encara hi ha problemes oberts, com ara els referents a les pavimentacions amb pentàgons convexos.

5.2. CONCLUSIONS ESPECÍFIQUES

Quant a les preguntes que es feien en iniciar el treball i que es recollien a la introducció, es reprenen ara per comentar les respostes que s'hi han pogut trobar.

1. Com es pot recobrir el pla amb polígons regulars? Amb quins polígons es pot fer? Amb quins no? Quins motius matemàtics hi ha al darrere?

Aquesta pregunta es respon al capítol 1:

A partir de la condició que en un punt del pla hi coincideixin els polígons regulars i que els seus angles sumin 360° , es troba una equació que és condició necessària perquè la pavimentació sigui possible. L'estudi exhaustiu de totes les solucions possibles d'aquesta equació i la comprovació geomètrica del seu sentit permet concloure que hi ha només onze maneres possibles de recobrir el pla amb polígons regulars: tres, les anomenades regulars, amb polígons del mateix tipus, i vuit, les semiregulars, que combinen polígons de diversos tipus.

2. Es pot recobrir el pla amb un triangle qualsevol? I amb un quadrilàter qualsevol? Amb quins polígons es pot?

Aquestes preguntes es responen al capítol 2:

Amb qualsevol triangle es pot pavimentar el pla perquè amb dos triangles iguals es forma un paral·lelogram que pot recobrir el pla.

Amb qualsevol quadrilàter, convex o còncav, es pot pavimentar el pla. N'hi ha prou de fer simetries centrals respecte dels punts mitjans de cada costat.

Amb polígons convexos de més costats tot plegat es complica: amb pentàgons només es poden fer algunes pavimentacions i el problema és obert; amb hexàgons el problema està resolt i només és possible pavimentar en algunes casos específics; amb polígons de més costats no és possible.

Es poden generar mosaics amb formes curioses a partir d'altres pavimentacions amb senzills exercicis de simetria que donen lloc a polígons còncaus que permeten pavimentar el pla.

3. Què són els mosaics de Penrose? Quin interès tenen?

Aquesta pregunta també es respon al capítol 2 i en part també al 4:

Els mosaics de Penrose són pavimentacions no periòdiques, és a dir, no hi ha translacions que facin que coincideixi sobre ella mateixa i les va començar a estudiar el matemàtic Roger Penrose, de la universitat d'Oxford, a partir dels anys 70 del segle passat. Les més senzilles es poden fer amb dos rombes relacionats amb el pentàgon regular. També són de gran interès les formades amb els anomenats “dards” i “estels” amb proporcions relacionades amb el nombre d'or.

Aquests mosaics són el model geomètric d'un descobriment molt recent: els quasicristalls.

4. Què són els diagrames de Voronoi? Quines aplicacions tenen?

Aquesta pregunta es respon en part al capítol 3 i en part al 4:

Donat un conjunt de punts del pla, el diagrama o la pavimentació de Voronoi associada a aquests punts és una descomposició o partició del pla de manera que a cada punt dels donats li correspon una regió, la dels punts del pla que són més propers a ell.

La pavimentació de Voronoi té nombroses aplicacions i s'utilitza, per exemple, per determinar àrees d'influència d'antenes de telefonia mòbil i de parcs de bombers, per al control de trànsit, per a l'anàlisi de dades meteorològiques i en epidemiologia.

5. Quines pavimentacions o mosaics s'observen a la natura? Quines aplicacions tenen les pavimentacions? Quines pavimentacions trobem a Barcelona?

Aquestes preguntes es responen al capítol 4:

El món de les pavimentacions presenta força connexions amb el món natural del qual en són model geomètric en nombrosos casos, com ara els ruscs de les abelles, els ulls dels insectes, les pells dels rèptils, diversos teixits cel·lulars, etc.

Menció especial mereixen el cas de les ales de la libèl·lula i la seva correspondència sorprenent amb els Diagrames de Voronoi i els mosaics de Penrose com a model dels recentment descoberts quasicristalls.

Les pavimentacions s'empren i s'han emprat com a elements decoratius o artístics. A Barcelona, per exemple, s'han pogut trobar nombroses pavimentacions del pla que s'han fotografiat i estudiat des del punt de vista geomètric.

Tot i l'elevat volum de feina que he tingut i els entrebancs que he hagut d'afrontar, la valoració final de l'experiència és molt positiva: he descobert tot un món que ignorava o que només coneixia de manera superficial i he hagut de relacionar coneixements molt diversos de geometria, d'àlgebra, d'informàtica, de ciències, d'art i d'arquitectura que es conjuguen en el tema que he triat fent honor a una famosa frase de Galileu.

“[L'univers] no pot ser llegit fins que hem après el llenguatge i ens hem familiaritzat amb els caràcters amb què és escrit. És escrit en llenguatge matemàtic, i les lletres són triangles, cercles i altres figures geomètriques, sense les quals és humanament impossible de comprendre'n una sola paraula.”

Galileu (Galileo Galilei)

6. BIBLIOGRAFIA

6.1. LLIBRES I REVISTES

- ALSINA, C. *Geometria cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*. Barcelona: Rubes, 2005.
- ALSINA, C.; GARCIA, J.LL.; JACAS, J. *Temas clau de Geometria*. Barcelona: Edicions de la UPC, 1992.
- BOLT, B. “¿Qué es la geometría?”. *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 19, (novembre de 1998): pàgines 5-16.
- CASTELNUOVO, E. *La Geometria*. Barcelona: Ketres, 1981.
- COLLETE, J.P. *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Siglo XXI, 1985. (2 vols)
- DE LA FUENTE, C. La armonía de las proporciones en el patrimonio histórico-artístico. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas* núm. 56 (gener 2011): pàgines 38-56.
- DORAN, L. I HERNÁNDEZ, E. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid, 1999.
- DURAN, X. i PIQUERAS, M. *Pasejades per la Barcelona científica*. Barcelona: Ajuntament de Barcelona, 2002.
- ERNST, B. *El espejo mágico de M. C. Escher*. Colònia: Benedikt Taschen Verlag GmbH, 1994.
- PUJOL, R. i ÀLVAREZ, R. *L'altra geometria*. Barcelona: Casals, 1997.
- SABATÉ, D. *La geometria a secundària*. Barcelona: ICE-UNIFF-UPC, 2003.

6.2. DICCIONARIS I ENCICLOPÈDIES

- Diccionari de la llengua catalana. Institut d'Estudis Catalans*. Barcelona: Edicions 3 i 4, Edicions 62, Editorial Moll, Enciclopèdia Catalana, Publicacions de l'Abadia de Montserrat, 1995.
- Diccionari de matemàtiques i estadística*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana i Universitat Politècnica de Catalunya, 2002.
- Enciclopedia de las matemáticas*. 9 vol. Moscú-Madrid: MIR-Rubiños, 1993.
- NEWMAN, J.R. *SIGMA. El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Grijalbo, 1985. (7 volums)

6.3. PÀGINES WEB

6.3.1. Sobre mosaics en general:

<http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa.htm>

<http://www.disfrutalasmatemáticas.com/geometria/teselaciones.html>

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/09-10MasterFPS/Grafos4.pdf

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/nonperiodic.html>

<http://demonstrations.wolfram.com/PentagonTilings/>

<http://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000177%5C00000016.pdf>

6.3.2. Sobre aplicacions de les pavimentacions a la ciència

<http://www.ehu.es/~mtwmastm/IJIFCT.pdf>

<http://ciencia.ara.cat/centpeus/2011/10/06/nobel-de-quimica-els-quasicristalls-i-el-palau-de-lalhambra/>

www.ub.edu/.../4.%20Luís%20López%20-%20Quasi-Cristalls.pptx

<http://www.nature.com/news/the-quasicrystal-from-outer-space-1.9728>

<http://arstechnica.com/science/news/2012/01/the-quasicrystal-that-fell-to-earth.ars>

http://www.phy.princeton.edu/~steinh/Steinhardt_Rendiconti%20Lincei%202012.pdf

6.3.3. Sobre mosaics i art

<http://www.metmuseum.org/Collections/search-the-collections/130014059>

<http://qfwfq78.blogspot.com.es/2008/08/mosaicos.html>

<http://www.escherinhetpaleis.nl/>

http://www.eteraestudios.com/docs_html/nbyn_htm/about_index.htm

6.3.4. Història de les matemàtiques, enciclopèdia matemàtica i diccionari IEC


































<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Voronoy.html>

<http://mathworld.wolfram.com/>
















<http://dlc.iec.cat/>










7. ANNEX: RELACIÓ DE CONSTRUCCIONS AMB GEOGEBRA

7.1. CONSTRUCCIONS AMB GEOGEBRA CORRESPONENTS AL CAPÍTOL 1 (33 arxius)


















 n=5 4.4.3.3.3 (2).ggb	 (n=3__3,12,12).ggb	 (n=3__4,6,12).ggb	 (n=3__4,8,8).ggb
 (n=3__6,6,6).ggb	 (n=4__3,3,6,6).ggb	 (n=4__3,4,4,6).ggb	 (n=4__4,4,4,4).ggb
 (n=5__3,3,3,3,6).ggb	 (n=5__4,4,3,3,3).ggb	 (n=5__4,4,3,3,3)(2).g	 (n=6__3,3,3,3,3,3).gg
 3 3.12.12.ggb	 3 4.6.12.ggb	 3 4.8.8.ggb	 3 6.6.6.ggb
 3 12.6.4.ggb	 cas n=3 c_1=4.ggb	 cas n=3 c_1=5.ggb	 cas n=3 c_1=6.ggb
 cas n=4 3.4.4.6.ggb	 cas n=4 4.4.4.4.ggb	 cas n=5 3.3.3.3.6.ggb	 cas n=6 3.3.3.3.3.3.gg
 Casn4_33412.ggb	 Casn4_33412 (2).ggb	 Casn4_33412 (3).ggb	 casn=3,4,5,20.ggb
 n=3 6.6.6.ggb	 n=3; 3,12,12.ggb	 n=4 3.3.6.6.ggb	 n=5 4.4.3.3.3.ggb
 gon=gon.ggb			

7.2. CONSTRUCCIONS AMB GEOGEBRA CORRESPONENTS AL CAPÍTOL 2 (24 arxius)













 triangles.ggb	 pentagon no regular casetes.ggb	 pentagons.ggb
 pentagons irregulars-hexagons.ggb	 poligon irregular.ggb	 Poligons.ggb
 hexàgons no regulars.ggb	 hexagons no regulars.ggb	 hexagons no regulars.2.ggb
 hexàgons no regulars_tipus3.ggb	 hexàgons no regulars_tipus3_mosa	 hexàgons no regulars_tipus3_mosa
 hexàgons no regulars_tipus 1.ggb	 hexàgons tipus 2.ggb	 pollastresss.ggb

 mosaics de Penrose 1.ggb	 Dards i estels.ggb	 mosaics de Penrose 2_estrella.ggb
 penrose 1.ggb	 penrose_tools1.ggb	 mosaics de Penrose rombes.ggb
 penrose_tools2.ggb	 quadrilaterals.ggb	 Subdivisió àuria segment.ggb

7.3. CONSTRUCCIONS AMB GEOGEBRA CORRESPONENTS AL CAPÍTOL 3 (17 arxius)

 Voronoi_mapa catalunya.jpg.ggb	 2 punts.ggb	 3 punts.ggb	 4 punts.ggb
 6 punts.ggb	 10 punts.ggb	 100 PUNTS.ggb	 DIAGRAMA SENZILL.ggb
 6 punts triangulacio de delauney.ggb	 Voronoi 4 punt.ggb	 Voronoi 4 punts_bis.ggb	 europa pilítica.ggb
 imageBCN_1.ggb	 Voronoi 3 punt.ggb	 Voronoi 7 a mà.ggb	 Voronoi 14.ggb
 Voronoi_bombers_BCN.ggb			

7.4. CONSTRUCCIONS AMB GEOGEBRA CORRESPONENTS AL CAPÍTOL 4 (12 arxius)

 trèvol puig i cadafalch.ggb	 Libelula.ggb	 paviment trigonomètric.ggb
 paviment pàrquing reina ma cris.ggb	 rajola hexagonal curvilínia.ggb	 paviment trigonomètric_bis.ggb
 mosaic pàrquing hexàgon curvilini.ggb	 Rajola Barcelona cercles.ggb	 rajola hexagonal curvilínia_bis.ggb
 model mosaic romà.ggb	 Genets_1.ggb	 Genets_2.ggb