Fibosèries

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368 75025 121393 196418 317811

Un nombre s'anomena d'or;
d'altres en són una mina.

Autor: Pascal

A l'equip d'ESTALMAT qui ha tingut un gran impacte en la meva educació matemàtica.

ABSTRACT

El treball comença amb una recerca bibliogràfica: una breu historia dels nombres de Fibonacci des dels seus orígens abans de Crist fins a l'actualitat, la relació amb el nombre auri i l'espiral de Durero i un apartat on s'exposa i es dubta que Fibonacci estigui per tot arreu.

Hi ha uns capítols bibliogràfic-pràctics on s'han escollit un seguit de propietats seguint diferents criteris: unes perquè tenen nom propi (Cassini, Catalan, Honsberger, ...), altres perquè s'utilitzen al llarg del treball d'investigació. Totes aquestes propietats s'han demostrat de forma original.

També s'ha estudiat la relació entre la famosa seqüència i uns jocs o entreteniments matemàtics: els Nims de Fibonacci i Wythoff i les paradoxes de Hopper. Pels primers s'ha definit un nou tipus de numeració (fibonumeració) i s'han demostrat un seguit de propietats i teoremes que, posteriorment, s'utilitzen per trobar la tècnica guanyadora d'aquests Nims. Malgrat que molts articles afirmen que les paradoxes de Hopper es basen en la seqüència de Fibonacci, en el treball queda clar que no forçosament és així.

En la part d'INVESTIGACIÓ(últims capítols) s'ha fet un descobriment inesperat.

En molts llibres, articles i webs podem veure demostracions que mostren que la raó entre termes consecutius de la seqüència de Fibonacci tendeix cap al nombre auri (arrel positiva del polinomi $x^2 - x - 1$) i que la raó entre termes consecutius de la seqüència de Tribonacci tendeix cap a la arrel positiva del polinomi $x^3 - x^2 - x - 1$. Sembla natural generalitzar,seguint el mateix procés, que el quocient entre dos termes consecutius d'una k-fibosèrie tendeix cap a una arrel del k-fibopolinomi, però res més lluny de la realitat.

Aquestes demostracions tenen una escletxa: parteixen de la suposada convergència d'aquestes raons.

Per tal de poder aprofundir en aquest buit ha calgut definir conceptes nous, generalitzar als nombres complexos i demostrar propietats i teoremes, alguns d'ells inèdits.

El treball finalitza amb el Teorema de Ranchal (inèdit) que diu:

"per tot k>2 existeixen k-fibosèries en que la raó entre dos termes consecutius no convergeix"

“El camí més curt entre dos veritats de l’anàlisi real passa per l’anàlisi complex.”

Jacques Hadamard

Voldria agrair la seva participació en aquest Treball de Recerca a unes quantes persones icol·lectius:

En primer lloc, a l’Oscar Coll, el tutor d’aquest TR, qui hi ha dedicat constant atenció i consell, així com ajuda quan em quedava encallat en alguna demostració.

En segon lloc, a la Mª Dolors Magret, professora de matemàtiques de la UPC, per la seva ajuda quan començava a tenir dubtes de que el que volia demostrar no era cert i em va donar una alternativa per continuar investigant.

En tercer lloc als professors de la UPC que han comprovat empíricament amb l’ordinador la meva conjectura, però han recomanat deixar-la sense demostrar per la seva complexitat.

En quart lloc, a la Mercè Rovira per les seves indicacions en el disseny de la portada.

En cinquè lloc, al Joshua Alzina i a altra gent que tot i no haver col·laborat, sí que han ofert la seva ajuda i m’han donat ànims per acabar aquest treball.

En sisè lloc al Col·legi Koskta, on he estudiat batxillerat, per totes les facilitats que he rebut a l’hora de fer aquest treball.

I, per últim, gràcies a tu, estimat lector. Espero que aquesta lectura t’ensenyi moltes coses noves o serveixi d’alguna manera, doncs no serveix de res un text escrit si no el llegeix algú a qui li faciservei.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

Aquest TR tracta sobre la famosa successió de Fibonacci i les seves generalitzacions posteriors, començant per un recull bibliogràfic i acabant en un apartat d'investigació matemàtica, passant per alguns entreteniments i curiositats.

El que m'ha portat a fer el TR d'aquest tema és, en primer lloc, la meva gran estima a les matemàtiques. En segon lloc, que ja coneixia aquesta seqüència amb anterioritat i en coneixia algunes de les seves particularitats, cosa que ja m'havia despertat l'interès. I, en tercer lloc, el consell del meu tutor.

Aquesta tria, però, té un inconvenient, que en Fibonacci ja hi ha treballat molta gent al llarg dels segles i a pesar de tot he intentat fer un treball original i innovador, espero haver-ho aconseguit. Per exemple, en el transcurs del TR he descobert que hi ha una revista que pública trimestralment dedicada gairebé exclusivament a aquests nombres. Això ha significat dues coses: la primera, que hi ha treballat més gent del que em pensava, i la segona, que encara queden coses per a descobrir.

En el segon apartat hi són explicats els conceptes que cal dominar abans de llegir el treball així com la notació emprada en el mateix.

Per a intentar aconseguir fer un descobriment propi, però, primer m'he hagut d'informar sobre aquests fascinants números, tant a nivell matemàtic com a nivell històric i pràctic, i per això el TR comença amb uns apartats principalment bibliogràfics.

El primer d'aquests apartats és la història, que correspon al tercer, en que es sintetitza informació de diverses fonts per a escriure una història de les fibosèries. També podem trobar una biografia de Fibonacci a l'annex.

En el quart s'ha volgut estudiar la relació dels nombres amb l'auri, donada la seva famosa relació, recercant per diversos mitjans la informació ja coneguda al respecte. No s'ha indagat, però, més enllà d'aquest punt.

El següent apartat, en canvi, si bé va començar essent també essent una altra recerca, que consistia a veure on es podia trobar la seqüència fora de la ciència, es va acabar posant en dubte la veracitat de les informacions sobre on es troba, donat que vaig poder observar casos en que alguna no es complia.

Un cop acabats aquests apartats més pràctics, per al possible descobriment em calia saber quines propietats se'n coneixien per a utilitzar-les en la meva recerca. Però, com en qualsevol recerca, cal confirmar tot el que sigui possible i dubtar de tot allò que no s'hagi pogut comprovar, i per això, he hagut de fer les meves pròpies demostracions d'aquestes en l'apartat 6.

Després de tot això ha començat la investigació pròpiament dita, començant per uns jocs concrets dins d'un grup que es diuen nims, que se m'havia dit que la seva estratègia guanyadora tenia a veure amb Fibonacci i més concretament amb un sistema de numeració basat en aquest, que es defineix i analitza a l'apartat 7. La recerca sobre els nims constitueix el vuitè apartat. Aquesta part és potser una de les més curioses del TR per les seves demostracions, que semblen més pròpies de divertiments matemàtics, que no pas d'investigació, així com pel sistema de numeració, en el qual ha convingut definir una nova operació i tot.

Seguint en camins semblants, he explorat en l'apartat 9 unes estranyes figures geomètriques anomenades paradoxes de Hopper, de les quals se m'havia explicat que els costats dels seus triangles eren de Fibonacci i he intentat esbrinar el perquè.

Un cop acabat això, per a intentar innovar en Fibonacci m'he hagut d'endinsar en les generalitzacions de la seqüència per a tenir accés a més possibilitats d'investigació i a la possibilitat d'escriure algun teorema mai abans escrit, cosa que ocupa els últims quatre apartats.

En primer lloc ha calgut dotar les k-fibosèries d'estructura d'espai vectorial i analitzar-ne la base per a poder trobar una expressió del terme general, cosa que es fa en el dotzè apartat, després de l'onzè en que es parla d'un polinomi amb molta rellevància en les k-fibosèries.

Al tretzè apartat es torna a una versió menys generalitzada per a comentar el que fa de base per al descobriment del treball.

I després, en l'últim apartat, mentre investigava la coneguda propietat de la raó de temes consecutius en k-fibosèries m'he adonat d'una fal·làcia la correcció de la qual ha estat la base del meu teorema, que sembla que no ha estat descobert fins ara o com a mínim no es pot trobar amb facilitat. En cas que hagi estat un nou descobriment, demano disculpes al seu descobridor anterior, per haver-li posat nom i haver-me'n atorgat el mèrit.

De totes maneres, l'ordre en què estan els apartats no correspon a l'ordre cronològic en què es van realitzar, sinó al que ens ha semblat més apropiat i coherent.

2. PRELIMINARS.

Excepte en els cinc primers apartats, en aquest treball s'utilitzen conceptes, procediments i resultats que són d'un nivell de batxillerat alt. Per tal de poder seguir tot el treball, sense consultar altres fons, en aquest apartat s'exposen alguns conceptes, resultats i notació pròpia del treball que poden haver caigut en l'oblit o que són poc usuals a nivell de batxillerat.

2.1. Consideracions i notació

Els nombres de Fibonacci són una seqüència de nombres que per la seva senzillesa la pot comprendre qualsevol que tingui coneixements bàsics d'Aritmètica Elemental, és així:

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89, . . . on un terme és la suma dels dos anteriors

En canvi, possiblement, estem davant de la seqüència que ha donat lloc a més propietats i teoremes.

Observant la seqüència de Fibonacci i la de Lucas és natural crear un conjunt de seqüències on cada terme sigui la suma dels dos anteriors, però pot començar amb qualsevol dos nombres, en comptes de dos uns com en la seqüència de Fibonacci o un u i un tres com en la de Lucas. En el treball utilitzarem la següent notació:

Seqüència de Fibonacci $\{F_n\}_n$ amb $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ i $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

Seqüència de Lucas $\{L_n\}_n$ amb $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ i $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$

Seqüències de Fibonacci generalitzades

$\{f_n(a,b)\}_n$ amb $f_1(a,b) = a$, $f_2(a,b) = b$ i $f_n(a,b) = f_{n-2}(a,b) + f_{n-1}(a,b)$

Anant una mica més enllà podem fer una generalització més:

Anomenem k-fibosèrie a tota seqüència $\{a_n\}_n$ de nombres complexos que verifiqui

$$a_n = a_{n-k} + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{per} \quad n > k$$

Al conjunt d'aquestes el representem per Γ^k**[2.1.1]**

Com una k-fibosèrie està determinada pels k primers termes utilitzarem la següent notació:

$$\{f_n(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k)\}_n \in \Gamma^k \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) = a_1 \ ,\cdots\cdots, \ f_k(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) = a_k \\ f_n(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) = f_{n-k}(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) + \cdots + f_{n-1}(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) \end{cases}$$

A les solucions de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$ les anomenaren nombre 2-auri (Φ_2) i 2-subauri (Ψ_2)

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618..... \\ \Psi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 0{,}618..... \end{cases}$$

El nombre 2-auri (Φ_2) coincideix amb el famós nombre auri que normalment s'expressa ϕ, i el nombre 2-subauri (ψ_2) coincideix amb el nombre auri unitari que normalment s'expressa φ.

Aquests nombres verifiquen entre altres aquestes relacions:

$$\phi \cdot \varphi = -1 \qquad \sqrt{5} \cdot \phi - 1 = \phi^2 \qquad \sqrt{5} \cdot \varphi + 1 = -\varphi^2 \ \textbf{[2.1.2]}$$

2.2. Espais vectorials

Combinació lineal de vectors [2.2.1]

Donats uns vectors $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \cdots, \overrightarrow{e_k}$ d'un espai vectorial, una combinació lineal d'aquests vectors és una expressió del tipus:

$$x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} +, x_3 \cdot \overrightarrow{e_3} + \cdots x_k \cdot \overrightarrow{e_k} \quad \text{on} \quad x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k \quad \text{són escalars}$$

Vectors linealment independents [2.2.2]

Donats uns vectors $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ d'un espai vectorial, és diu que són linealment independents si qualsevol combinació lineal de resultat nul implica que els coeficients són nuls:

$$x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} +, x_3 \cdot \overrightarrow{e_3} + \cdots x_k \cdot \overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$$

Base d'un espai vectorial [2.2.3]

Una base d'un espai vectorial són uns vectors linealment independents $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ de manera que qualsevol vector de l'espai es pot expressar com a combinació lineal d'ells:

Per tot $\overrightarrow{v}$ de l'espai existeixen $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ tal que $x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} +, x_3 \cdot \overrightarrow{e_3} + \cdots x_k \cdot \overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{v}$

Dimensió d'un espai vectorial [2.2.4]

Totes les bases d'un espai vectorial tenen el mateix nombre de vectors "n", i a aquest nombre s'anomena dimensió de l'espai vectorial.

Propietat [2.2.5]

Si en un espai vectorial de dimensió "n" tenim un conjunt de "n" vectors linealment independents aleshores seran base de l'espai.

Subespais vectorials [2.2.6]

Un subconjunt S d'un espai vectorial es diu que és un subespai vectorial si per qualsevol combinació lineal de vectors de S obtenim un vector de S, es a dir:

Per qualsevol vectors $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ de S i escalars x_1 i x_2 tenim que $x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$ és de S

Un subespai vectorial és un espai vectorial per ell mateix per tant té bases i dimensió

2.3. Successions

Concepte de progressió geomètrica [2.3.1]

Una progressió geomètrica és una successió $\{a_n\}_n$ en la que un terme s'obté multiplicant l'anterior per una constant "r" anomenada raó, es a dir, $a_{n+1} = r \cdot a_n$

Suma de "n" termes d'una progressió geomètrica [2.3.2]

La suma de "n" termes $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ que estan en progressió geomètrica $a_{n+1} = r \cdot a_n$ es calcula amb l'expressió:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}$$

Concepte i definició formal de límit [2.3.3]

Es diu que una successió $\{a_n\}_n$ té límit L si quan n és molt gran (s'acosta a infinit) aleshores a_n s'acosta a L.

Formalment el límit d'una successió $\{a_n\}_n$ és L si $|a_n - L|$ és tant petit com vulguem a partir d'un cert n:

$\lim a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad$ per qualsevol ε tenim que $|a_n - L| < \varepsilon$ a partir d'un cert lloc n_0

L'espai vectorial de les successions de nombres complexos [2.3.4]

El conjunt de les successions de nombres complexos té estructura d'espai vectorial sobre els complexos amb les operacions usuals:

Suma de successions: $\{a_n\}_n + \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n$

Producte d'un complex per una successió: $z \cdot \{a_n\}_n = \{z \cdot a_n\}_n$

2.4. Polinomis

Teorema fonamental de l'àlgebra [2.4.1]

Un polinomi de grau "n" té exactament "n" arrels o zeros (incloent els complexos).

Propietat de les arrels [2.4.2]

Si un nombre complex z és arrel d'un polinomi P(x) aleshores el conjugat, $\bar{z}$, també és arrel de P(x)

Regla dels signes de Descartes [2.4.3]

El nombre de arrels positives d'un polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ amb coeficients reals és menor o igual que el nombre de canvis de signe de la seqüència $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1)$

Teorema d'acotació [2.4.4]

Siguin $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$ les arrels del polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ aleshores els mòduls d'aquestes arrels estan acotades inferior i superiorment de la següent manera:

$$\frac{1}{1+\frac{\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}}{|a_0|}} \le |r_i| \le 1+\frac{\max\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_{n-1}|\}}{|a_n|}$$

2.5. Funcions

Teorema de Bolzano [2.5.1]

Sigui f(x) una funció contínua en un interval [a,b] de manera que f(a) i f(b) són de diferent signe, aleshores podem assegurar que existeix un c entre a i b que on s'anul·la la funció $\left(f(c) = 0 \right)$

Interpretació de la derivada d'una funció [2.5.2]

La derivada d'una funció f(x) en un punt "a" coincideix amb el pendent de la recta tangent en aquest punt i s'escriu f'(a).

Algunes derivades [2.5.3]

La derivada de la funció tangent és:

$$f(x) = \mathrm{tg}\, x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2\, x$$

Les expressions per derivar una potència i un quocient de funcions són:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad\qquad f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Derivació i creixement [2.5.4]

Si la derivada d'una funció en un punt és positiva (negativa), aleshores la funció és creixent (decreixent) en el punt en qüestió.

Teorema del valor mig [2.5.5]

Sigui f(x) una funció contínua i derivable en l'interval $[a,b]$ aleshores existeix un $c \in [a,b]$ que verifica

$$f(a) - f(b) = f'(c)\cdot(a-b)$$

2.6. Lògica

Inducció completa [2.6.1]

Per demostrar que una propietat és certa per tot nombre natural n'hi ha prou en demostrar:

- Que és certa pel número 1.
- De la certesa de la propietat per un número natural qualsevol n deduir la certesa pel número n+1

Demostració per reducció a l'absurd [2.6.2]

La demostració per reducció al absurd d'una proposició es fonamenta en suposar explícitament la negació de la proposició i a partir d'aquesta hipòtesis es tracta de generar una contradicció. Si apareix la contracció, és que la proposició és certa.

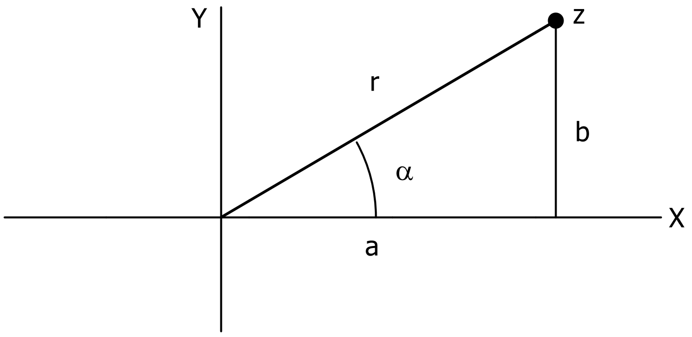
2.7. Els nombres complexos

Forma binòmica i polar d'un complex [2.7.1]

Un nombre complex es pot expressar en forma binòmica $z = a + bi$ on "a" és la part real i "b" la part imaginària o en forma polar $z = r_\alpha$ on "r" és el mòdul i "α" l'argument.

La relació que hi ha entre la notació binòmica i polar és la següent:

$$z = a + bi = r_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{i} \quad \alpha = \text{arctag } \dfrac{b}{a} \\ a = r \cdot \cos\alpha & \text{i} \quad b = r \cdot \sin\alpha \end{cases}$$



El conjugat d'un complex $z = a + bi = r_\alpha$ és $\bar{z} = a - bi = r_{-\alpha}$

Operacions amb nombres complexos [2.7.2]

La suma, producte, quocient de nombres complexos en forma binòmica es defineixen com segueix:

$$z_1 = a + b\,i \qquad\qquad z_2 = c + d\,i$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i \qquad z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\,i \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (-a \cdot d + b \cdot c)\,i}{c^2 - d^2}$$

El producte, divisió i potenciació de nombres complexos en forma polar s'expressen com segueix:

$$z_1 = r_\alpha \quad \text{i} \quad z_2 = s_\beta \qquad \Rightarrow \qquad z_1 \cdot z_2 = (r \cdot s)_{\alpha+\beta} \quad , \quad \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} \quad , \quad (z_1)^n = \left(r^n\right)_{n\alpha}$$

2.8. Identitat de Bézout: nombres primers.

Identitat de Bézout [2.8.1]

Si "d" és el màxim comú divisor de dos enters "a" i "b" aleshores existeixen dos enters "x" i "y" tal que x · a + y · b = d

Definició [2.8.2]

Dos nombres enters són primers entre ells si l'únic nombre que els divideix als dos és el 1.

Corolari [2.8.3]

Dos nombres enters "a" i "b" són primers entre ells si i només si existeixen dos enters "x" i "y" tal que $x \cdot a + y \cdot b = 1$

A més els nombres "x" i "y" també seran primers entre ells.

2.9. Els nombres combinatoris i triangle de Tartaglia.

Definició [2.9.1]

L'expressió $\binom{m}{n}$ s'anomena nombre combinatori i es llegeix m sobre n.

L'expressió que dona el valor d'un nombre combinatori és :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Propietat [2.9.2]

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Definició [2.9.3]

El triangle de Tartaglia s'obté disposant els nombres combinatoris en forma de triangle com segueix:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Per la propietat [2.9.2]cada nombre s'obté sumant els dos que estan sobre ell.

3. LOS NÚMEROS DE FIBONACCI: UN POCO DE HISTORIA.

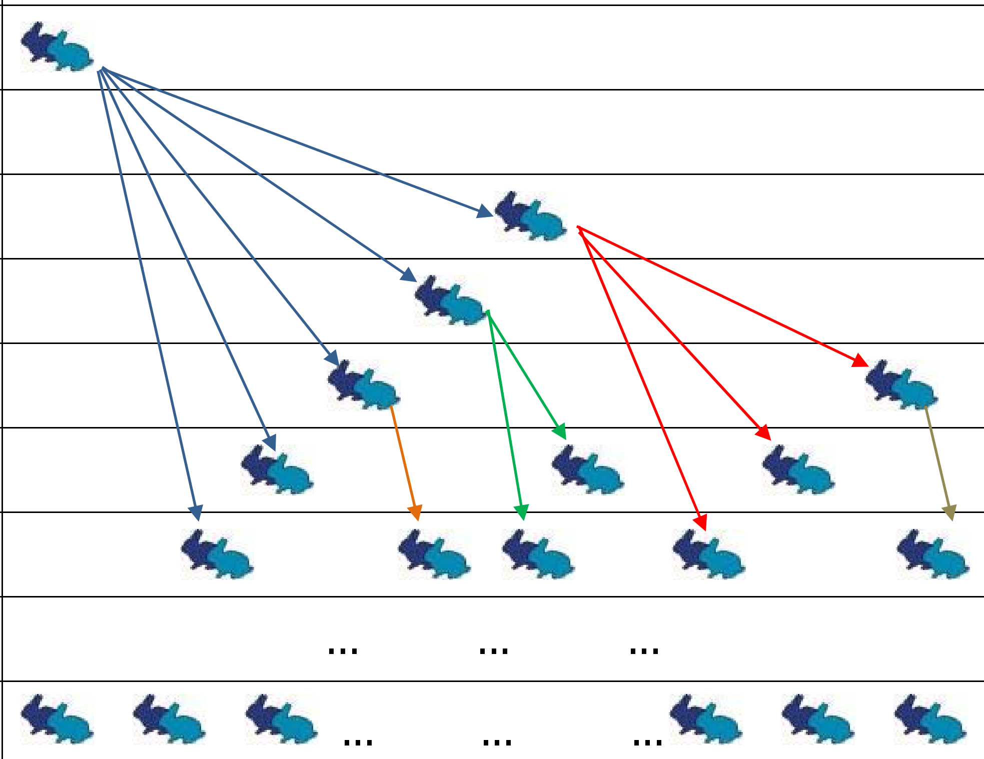
Les primeres idees bàsiques d'aquests nombres tenen origen hindú segons l'eminent professor i investigador SusanthaGoonatilake, el cual escriu que el desenvolupament de la seqüència de Fibonnacci s'atribueix en part a Pingala (220 aC), però que la primera exposició clara de la seqüència es presenta en l'obra de Virahanka (700 dC).

Tot i que la obra d'aquests últims s'ha perdut, en tenim coneixement perquè en el segle XII els matemàtics hindús, Gopala (1135) i Hemachandri (1150) els citen quan usen la seqüència per a calcular la quantitat de possibles melodies es poden fer amb notes d'un o dos cops donat un número determinat de cops totals.

Aproximadament l'any 1220 va aparèixer una obra amb títol "Liberabacci" (Llibre de l'àbac) escrita pel famós matemàtic Leonardo de Pisa (1170-1250) més conegut com Fibonacci, es a dir, fill de Bonacci. Aquest tractat contenia quasi tot el coneixement aritmètic, geomètric i algèbric de l'època i va ser molt influent en l'Europa occidental, de fet. Leonardo manifesta en l'obra haver trobat la seqüència al donar la solució del problema dels conills que textualment enunciava:

> *"Cert home tenia una parella de conills junts en un lloc tancat i volia saber quants en tindrà al cap d'un any, si per naturalesa cada mes en crien una i comencen a criar a partir del segon mes"*

Observant la figura s'observa que la solució del problema és 144, dotzè terme de la seqüència de Fibonacci.



Mes		Total parelles
1		1
2		1
3		2
4		3
5		5
6		8
7		13
...	... ...	...
12	... ...	144

Fins al segle XVII de la seqüència de Fibonacci va passar força desapercebuda, fins i tot després que Johannes Kepler (1571-1630) observés que la raó de dos termes consecutius de la sèrie tendia cap al nombre auri.

El matemàtic francès Jacques Binet (1786-1856) es recordat sobre tot per l'anomenada fórmula de Binet, que és una forma elegant d'expressar l'enèsim terme de la seqüència, tot i que el resultat era conegut per Euler, Bernoulli Daniel, i Moivre més d'un segle abans.

Tot i l'important troballa de Kepler, el verdader impulsor de la seqüència va ser Edouard Lucas (1842-1891), qui va ser el primer que la va estudiar-la amb rigor: va trobar forces propietats i en va fer una variant, que porta el seu nom "seqüència de Lucas":

1 , 3 , 4 , 7 , 11 , 18 , 29 , 47 , 76 , 123 , 199, 322 , . . .

És a partir Lucas que aquestes dues de seqüències desperten l'interès d'innumerables matemàtics a causa de la facilitat a trobar-hi propietats, fins i tot sense gaires coneixements matemàtics, i les seves inesperades aparicions en altres problemes. No gaire després es generalitza la seqüència de Fibonacci començant amb qualsevol parella de nombres:

a , b , a+b , a+2b , 2a+3b , 3a+5b , 5a+8b , 8a+13b , 13a+21b , . . .

Els resultats de Binet i les investigacions de Lucas, van ser les precursores d'un grup de matemàtics americans, que sota la direcció de Vern Hoggatt (1921-1981) i d'Alfred Brousseau (1907-1988), membre de la congregació "*Fratres Scholarum Christianaru*" , van formar "The*Fibonacci Association*" i van començar a publicar la revista trimestral "*The Fibonacci Quarterly*" al 1963.

Actualment es segueix publicant i s'ha convertit en una revista de teoria de números amb molt de prestigi, i l'associació segueix patrocinant conferencies internacionals sobre els nombres Fibonacci i les seves aplicacions.

En una de les primeres publicacions, octubre de 1963, el jove matemàtic alemany Mark Feinberg (1953-1967) va generalitzar més la seqüència de Fibonacci, fent una variant on un terme s'obté sumant els tres termes anteriors i començada amb tres uns, i va demostrar que la raó de dos termes consecutius d'aquesta seqüència tendeix cap a l'arrel real del polinomi $x^3 - x^2 - x - 1$. A aquesta seqüència la va anomenar de Tribonacci.

El 04 d'abril 1969 la revista "*Time*" va informar sobre l'increïble creixement de "The*Fibonacci Association*". Aquest mateix any, Houghton Mifflin va publicar el llibre "*Nombres de Fibonacci i Lucas*", potser, la millor introducció al món d'aquesta matèria en forma de llibre.

El matemàtic holandès Willem Wythoff Abraham (1865-1939), va publicar a "*Nieuw Archiefvoorwiskunde* 2" (1905-1907) una modificació del joc del nim. En les pròpies paraules del Dr. Wythoff:

> *"Juguen dos persones. Sobre la taula es col·loquen dos piles de fitxes, el número de cada pila és arbitrari. Els jugadors retiren alternativament fitxes de les piles i es poden un nombre arbitrari d'una pila o per igual de les dues. El jugador que retira l'última fitxa o fitxes, guanya."*

La solució del nim de Wythoff implica als nombres de Fibonacci i es pot trobar en nombrosos articles de "*The Fibonacci Quarterly*"

En un altra publicació del trimestral R. L Graham va respondre a una pregunta que s'estava plantejant d'un temps ençà: existeix una generalització de la seqüència de Fibonacci que comenci amb dos nombres primers i que no contingui cap altre primer? Va demostrar que sí i que la més senzilla és la que comença amb:

(1786772701928802632268715130455793 , 1059683225053915111058165141686995)

El Belga Zeckendorf(1901-1983) va escriure un article al 1972 on enunciava el teorema de Zeckendorf:

> *"Cada enter positiu té una representació única com a suma de dos o més números de Fibonacci no consecutius."*

Sembla ser, però, que la primera referència publicada sobre aquestes sumes es troba en un article de CG Lekkerkerker, amb data 1952-1953.

L'interès per la seqüència de Fibonacci i les seves generalitzacions ha anat creixent recentment i actualment se li estan trobant moltes aplicacions en diferents camps: computació, mercat de divises, generació de nombres aleatoris, borsa, classificació de dades, ...

4. EL NOMBRE AURI: RECTANGLES I ESPIRALS ÀURIES.

En l'art grec la perfecció de les formes és el fruit del culte a la proporció numèrica, darrera de la bellesa es troba sempre un número. Tant és així, que Plató i els pitagòrics eleven aquest transfons cultural a pensament filosòfic al afirmar que la realitat és, en últim terme, número.

La proporció àuria és, per Plató, la més bella relació entre tres números i la més reveladora de les proporcions matemàtiques. La proporció àuria va ser descoberta pels pitagòrics i amb el temps ha estat usada per artistes, filòsofs i científics de tantes maneres que s'ha acabat anomenant la divina proporció.

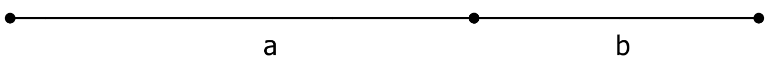
També hi ha qui creu que l'usaven els babilonis i els assiris en les seves esteles i les estrelles de 5 puntes que hi posaven i els egipcis en la construcció de les piràmides de Giza, en la seva posició i proporció, però probablement siguin simples casualitats causades per la gran quantitat de dades on es podria haver trobat.

Des del 1900 a la proporció àuria se l'anomena amb la lletra grega phi (Φ) en honor a Fidies (490 aC - 432 aC), qui l'emprava en les seves escultures.

No és fins al segle III, però, que Euclides la defineix formalment , i a més va demostrar que no podia ser racional. La proporció àuria té una definició senzilla:

> *"Es diu que un segment està dividit, en dos parts, en proporció àuria quan la part major és a la menor com el segment és al part major"*

Per tant la expressió que la defineix seria la següent:



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

I per tant el seu valor és:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ (el valor positiu)

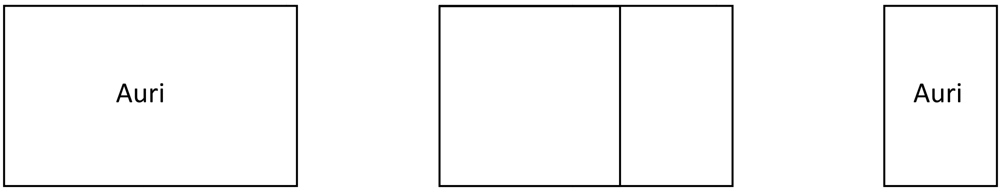
De la definició del nombre auri s'obtenen, també, dos resultats més, un per arrels i l'altre per fraccions contínues:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}$$ repetint el procés $$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

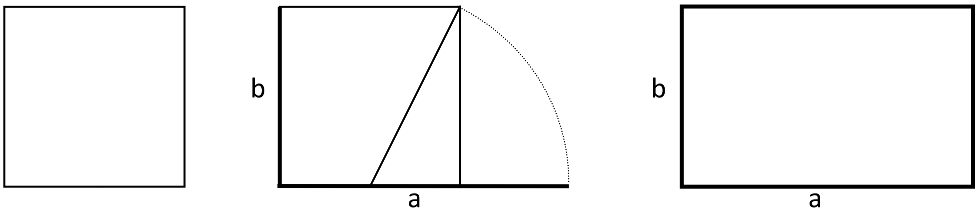
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \sqrt{1+\Phi} \Rightarrow \Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}$$ repetint el procés $$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}}}$$

Un rectangle que tingui els costats en proporció àuria s'anomena rectangle auri. Les escoles clàssiques d'art afirmen que el rectangle d'or és el rectangle més harmoniós i plaent a la vista, al respecte hi ha estudis psicològics actuals que consideren que la proporció àuria està relacionada amb la percepció de la bellesa pel cervell humà. Així es creu que obres d'arquitectura com el Partenó grec, la piràmide de Keops, la Tomba Rupestre de Mira en Àsia Menor, la façana de Nôtre-Dame de París podien haver estat construïdes seguint la proporció àuria. També apareix en quadres com L'últim sopar o la Gioconda de Leonardo da Vinci, Las Meninas de Velazquez o el quadre Leda atòmica de Dalí, com aplicació més propera, en el DNI, targes de crèdit, les caixes de cigarretes, mobles o finestres. També hi ha encara qui apunta a la divina proporció en la natura, com per exemple en la relació entre l'altura d'una persona i l'altura del seu melic, o en les proporcions del cos de molts animals.

Els rectangles d'or tenen una propietat evident, però no per això deixa de ser sorprenent: si d'un rectangle auri s'extreu un quadrat que el seu costat coincideixi amb el costat menor, el rectangle que queda també és auri.



El rectangle auri es pot construir fàcilment de la següent manera: d'un quadrat abatem sobre la base el segment que uneix el centre de la base inferior amb un vèrtex de la base superior, el rectangle d'alçada el costat del quadrat i base es costat obtingut amb l'abatiment és un rectangle auri.

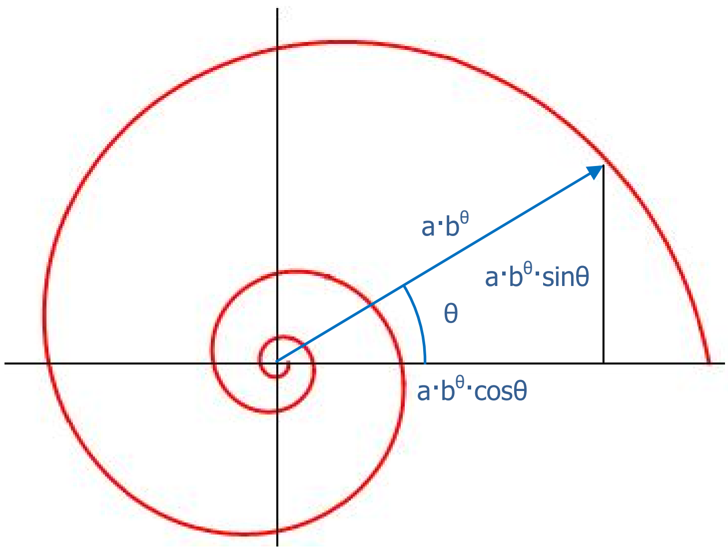


$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les espirals són unes corbes abundants en la natura i s'usen freqüentment com elements decoratius. Són conegudes matemàticament, entre altres, l'espiral d'Arquímides, la doble de Fermat, la logarítmica i algunes pseudoespirals com l'espiral de Durero i la de Fibonacci

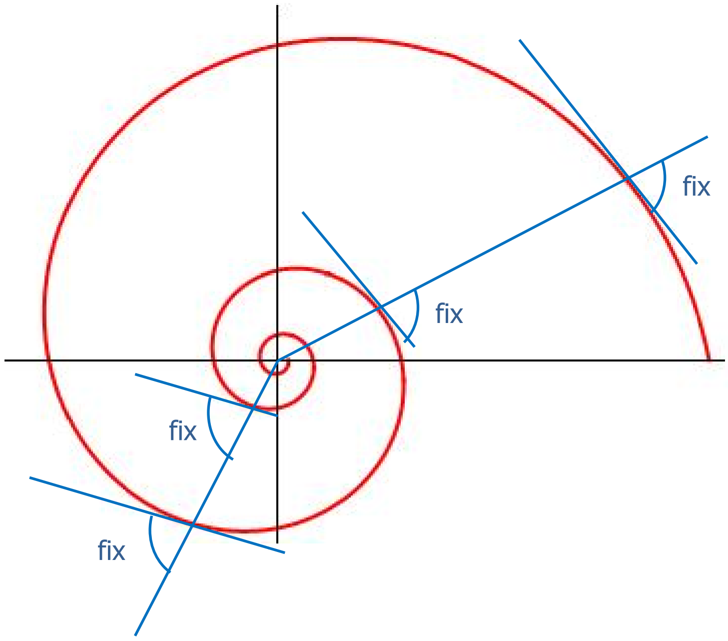
L'espiral logarítmica (estretament relacionada amb auri, com s'explicarà a continuació) ha captivat, per la seva bellesa i propietats, l'atenció de matemàtics, artistes i naturistes. Aquesta corba es defineix en forma cartesiana i polar amb les equacions:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot b^{\theta} \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = a \cdot b^{\theta} \cdot \sin\theta \end{cases} r_{\theta} \quad \text{és de l'espiral si} \quad r = a \cdot b^{\theta}$$



On el número "a" es un factor d'escala que determina la grandària de l'espiral, mentre que b controla com de forta i en quina direcció està enrotllada. Per b >1 la espiral se expandeix amb un increment θ, y para b <1 es contrau.

Aquesta corba es diu espiral logarítmica perquè els seus punts verifiquen que el seu radi vector (r) creix en progressió geomètrica mentre que l'angle θ decreix en progressió aritmètica. També se l'anomena espiral equiangular: l'angle de tall del radi vector amb la corba es constant.

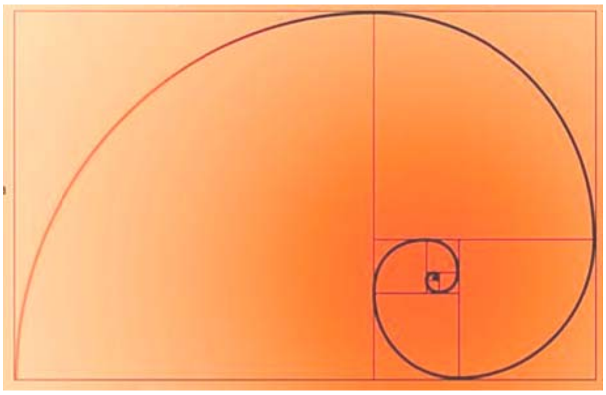


L'espiral logarítmica és la que més es troba a la naturalesa, aquí es mostren uns exemples:

- El falco s'aproxima a la seva presa segons una espiral logarítmica: la seva millor visió està en un angle fix amb la seva direcció de vol; aquest angle és el mateix del grau de l'espiral.
- Els insectes s'aproximen a la llum segons una espiral logarítmica perquè acostumen a volar amb un angle constant a la font lluminosa. Normalment el Sol és l'única font de llum i volar d'aquesta forma consisteix pràcticament a seguir una línia recta.
- Els braços de les galàxies espirals són aproximadament espirals logarítmiques. La nostra pròpia galàxia, la Via Làctia, es creu que té quatre braços espirals majors, cadascun dels quals és una espiral logarítmica d'uns 12 graus.
- Els braços dels ciclons tropicals, com els huracans, també formen espirals logarítmiques.
- En els mol·luscs són freqüents les estructures aproximadament iguals a l'espiral logarítmica. Per exemple la closca del Nautilus.
- La següent imatge és la secció transversal d'un Nautilus, en ella es veu que esta format per compartiments separats per envans i comunicats per un sifó. L'animal ocupa el compartiment més extern, que és de major grandària. A l'anar creixent el mol·lusc abandona el compartiment anterior i crea un amb la mateixa forma però més gran i ho fa de tal manera que els seus càmeres augmenten de grandària però la seva forma és invariable. I això és precisament el que defineix les espirals logarítmiques. La seva vora exterior descriu una corba que és sempre igual a si mateixa.

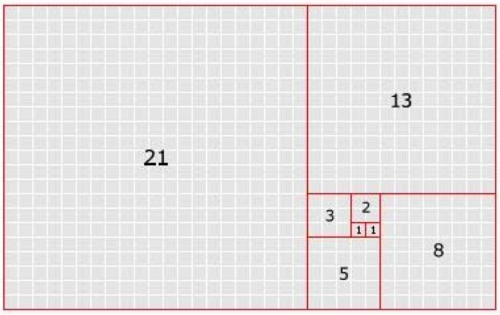
Alberto Durero (1471-1528) va publicar al 1525 una obra titulada "*Instrucció sobre la mesura amb regle i compàs de figures planes i sòlides*". Es tracta d'un llibre en el que l'autor pretén ensenyar als artistes, pintors i matemàtics de l'època diversos mètodes per traçar diverses figures geomètriques. En el llibre, Alberto descriu el mètode per traçar l'espiral que porta el seu nom, encara que també s'anomena l'espiral àuria:

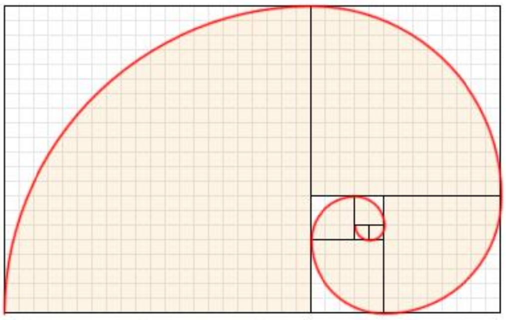
"Si prenem un rectangle auri i li traiem un quadrat de costat el costat menor de rectangle, obtenim un altre rectangle auri, si repetim el procés en aquest nou rectangle indefinidament obtindrem una successió de rectangles auris encaixats que convergeixen cap al vèrtex d'una espiral"



L'espiral de Durero és una molt bona aproximació de l'espiral logarítmica, com també ho és l'espiral de Fibonacci.

Existeixen diverses formes de representar la seqüència de Fibonacci mitjançant una espiral. La més habitual es dibuixar una seqüència de quadrats que tinguin com a costats els nombres de Fibonacci tal i com s'indica a la figura i formar l'espiral amb arcs de circumferència de radis els costats dels quadrats:





La relació entre les espirals àuria i de Fibonacci és clara si tenim en compta que la raó de termes consecutius de la seqüència de Fibonacci tendeixen al número auri i que aquesta tendència és molt ràpida.

5. ELS NOMBRES DE FIBONACCI PER TOT ARREU?

Donada la gran fama i quantitat de propietats d'aquesta seqüència no és d'estranyar que la gent l'hagi buscat i trobat en diversos llocs, així com també que l'hagin usat en les seves obres de diversa índole.

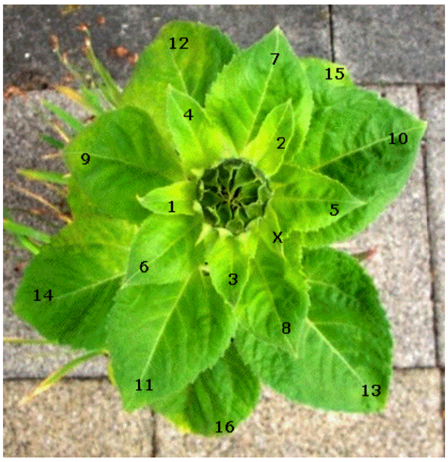
De totes maneres, aquesta recerca ha donat lloc a que es trobi en obres on no s'ha utilitzat conscientment o no s'ha utilitzat en absolut, o en suposats patrons naturals que són inexactes o incorrectes, si bé normalment sí que són tendències en aquest 2n cas.

De fet, amb qualsevol pauta matemàtica es poden trobar diferents elements que tendeixin a seguir-la si es busca prou, així que un resultat conclusiu serà només aquell que sigui predit amb anterioritat, abans d'observar el patró, cosa que no sembla haver-se fet amb Fibonacci.

FIBONACCI I LA NATURA

El primer lloc on es veu a la natura és a les fulles de les plantes:

Es diu que si les fulles d'una planta s'ordenen de dalt a baix seguint l'espiral que formen, haurien de quedar separades per l'angle equivalent a una volta pel nombre auri i per aquesta raó la diferència entre el nombre d'una fulla i el de les més propera en els "pisos" inferiors hauria de ser un nombre de Fibonacci, com es pot veure a la figura següent:

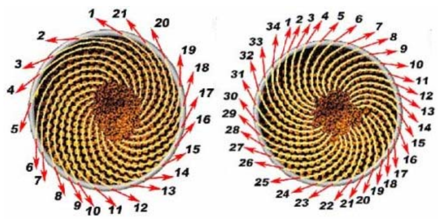


Això inclou tan sols les plantes que tenen les fulles disposades en espiral (esparses), evidentment.

Això ho defensendient que d'aquesta manera s'aprofita millor la llum del sol amb la mateixa superfície, però està demostrat que n'hi ha d'altres igual d'eficients que es poden veure en algunes plantes, contradient la teoria.

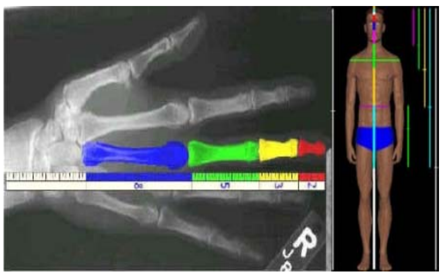
També es diu és que el nombre de pètals és sempre de Fibonacci o de Lucas, però la major part de lliris en tenen sis, que els defensors de la teoria diuen que són 3 i 3. Però aleshores trobem també les anomenades en anglès black-eyedsusans, que en tenen 14, les gazànies, que en tenen 16 i moltes altres flors que no compleixen la suposada norma, especialment a mesura que anem agafant flors de més pètals i els nombres d Fibonacci i Lucas deixen d'incloure la major part dels nombres.

A molts llocs s'explica que la quantitat d'espirals en les pinyes, en les llavors de gira-sol, en la coliflor, en les cues dels paons i en moltes altres estructures espirals naturals és un nombre de Fibonacci com es veu a a la figura:

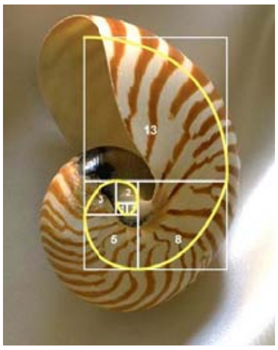


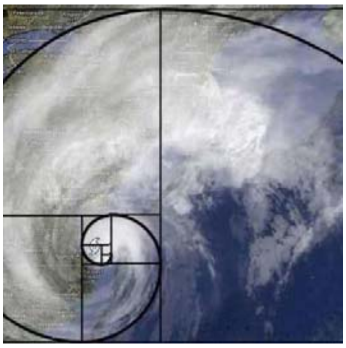
Encara que s'observa en algunes estructures espirals d'altres plantes els de Lucas en lloc d'aquests. Però hi ha estructures espirals que no estan en aquestes quantitats, fins i tot pots trobar de vegades excepcions en les anomenades com a exemples.

De tant en tant es diu que el trobem en les proporcions dels ossos dels dits (excepte el gros) que hi ha qui diu que corresponen, si ordenem de la falange petita al metacarp, 2:3:5:8, mentre que altres diuen que simplement corresponen a auri, però això sembla ser més aviat aproximat i varia per a cada persona.



També s'esmenta sovint que els espiral del nautilus, de les galàxies, de les nebuloses i molts d'altres son espirals auris o de Fibonacci, però es pot observar que aquests no corresponen





amb massa exactitud, però si que s'hi apropen:

A més a més, se'n troben freqüents excepcions en el cas de les galàxies, nebuloses i molts d'altres.

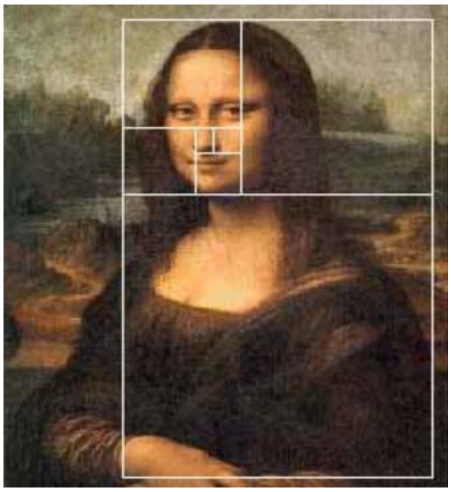
En conclusió, Fibonacci (i de vegades Lucas) poden donar aproximacions o tendències naturals, en cap cas lleis absolutes.

FIBONACCI I L'ART

En les arts plàstiques, s'acostuma a preferir el nombre auri i a utilitzar Fibonacci simplement per a aproximar-s'hi o en imitacions de les formes naturals abans esmentades,com són els casos següents:

En la façana del Partenó, s'hi observen diversos rectangles auris.

De totes maneres, hi ha qui discuteix el seu ús conscient degut a que només és present en la façana i no pas en altres proporcions importants com és la planta.



També en la *Mona Lisa* de Leonardo da Vinci s'hi poden trobar.

En canvi aquí, els rectangles auris no semblen estar posats seguint cap lògica, sinó que sembla que s'hagin posat per a intentar fer creure que s'havien usat a algú que no s'hi fixi massa. Si bé no nego la possibilitat que s'usés en aquesta o algunes altres obres (com "*Las meninas*" de Velázquez o altres dels que se'n diu) sí afirmo que en aquest cas no s'ha fet servir com a la figura i en molts casos es forcen els rectangles auris per a encaixar amb les imatges.

Tenim també el cas de Raúl Sampietro Martínez, qui no ho fa per a imitar auri, en aquest quadre, on el nombre de cercles augmenta seguint Fibonacci:

O el cas d'aquesta estranya figura anomenada torre de Fibonacci, que té algunes propietats relacionades amb la seqüència:

O com la font que se li va fer en homenatge a Pisa. Encara que se li vagi fer en honor seu, dels seus nombres i de la relació d'aquests amb auri, la quantitat de sortidors és 14, el més alt fa 18 peus i llencen aigua a 36 peus, nombres que no pertanyen a la seqüència. El que si que el relaciona a l'homenatjat són els patrons en que fan sortir l'aigua i que les proporcions del monument equivalen a auri.

FIBONACCI I LA CULTURA AUDIOVISUAL

En aquest apartat i els següents evidentment es compleix sempre perquè Fibonacci s'hi posa deliberadament per part dels autors.

- A la pel·lícula Dopo Mezzanote, surten en forma de llums de

neó i són usats per a guanyar la loteria.
- És la solució d'un dels enigmes de "el codi Da Vinci"
- En Mr. Magorium i la seva botiga màgica, Magorium fa demostrar en l'entrevista de feina a Henry Weston que coneix els nombres de Fibonacci.
- En L, canvia el mon, spin off de la famosa sèrie DeathNote, en Near, deixeble del protagonista i personatge important, té diverses manies estranyes i és un geni matemàtic. Una d'aquestes manies consisteix a disposar una sèrie d'espelmes seguint un patró basat en Fibonacci

I en moltes altres pel·lícules també hi té paper.

FIBBONACCI I LA LITERATURA

En el còmic Fox Trot, de Bill Amend, dos dels protagonistes mengen "nachos" alternativament seguint la sèrie de Fibonacci en el que anomenen "fibonachos"

En el còmic xkcd de RandallMunroe, apareix un personatge obsessionat amb buscar patrons, i la seva estima per la seva novia creix quan s'adona que el toca seguint la seqüència de Fibonacci.

És la principal font de poder de màgia matemàtica del protagonista de "màgia o bogeria" de JustineLarbalestier.

S'explora en el llibre "el problema dels conills" d'Emily Gravett.

El propi Fibonacci és un personatge a "croada en texans"

I es menciona i té papers en molts llibres més

FIBONACCI I LA MÚSICA

Es pot observar els nombres de Fibonacci en moltes composicions molt variades.

Es veu en l'escala Fibonacci, creada per BélaBartok, que es basa en intervals amb quantitat de semitons corresponent a nombres de Fibonacci fins al 13. Per tant apareixen 2a menor (1), 2a major(2), 3a menor (3), 4a (5), 6a menor (8) i 8a augmentada (13).

Està present també en la separació mesurada en compassos del tema principal de la quinta de Beethoven, que sempre correspon amb un nombre de Fibonacci, en les proporcions desenvolupament/introducció dels temes de les seves sonates de piano, que per a fer-les properes a auri usava nombres de Fibonacci, i en la coral de Kunst der Fuge de Bach.

De totes maneres hi ha qui ho nega perquè els autors no van deixar registre d'haver-ho fet conscientment.

Però els casos més evidents són en grups més recents, com és el cas del grup musical "Tool" amb el seu àlbum "Lateralus". Aquest àlbum te 13 cançons, de les quals en comentarem 1 el nom de la qual coincideix amb l'album.

Respecte aquesta cançó amb un anàlisi bàsic de la lletra veurem que parla d'un espiral auri.

També es veu que en la partitura de la bateria s'utilitza aquest ritme 1,1,2,3,5,8,13 i es va repetint.

Per últim, en les primeres estrofes (excloent la tornada), si comptem les síl·labes que hi ha entre les seves pauses, que no en els seus versos, veurem que sempre són nombres de Fibonacci. (ANNEX 7)

6. PROPIETATS DELS NOMBRES DE FIBONACCI.

Aquest últim segle la seqüència de Fibonacci ha despertat l'interès de grans matemàtics, però també la de molts aficionats amb coneixements bàsics. Als uns perquè li han trobat aplicacions en molts camps de la matemàtica i als altres per la seva senzillesa, facilitat per trobar-hi propietats i la sorprenent aparició en moltes situacions d'aritmètica, anàlisis, àlgebra o geometria.

Per aquests motius es molt senzill trobar llibres, articles i webs on ens mostrin nombroses propietats, unes de nivell elemental i altres de gran complexitat matemàtica. (ANNEX 3)

En aquest apartat s'enuncien i demostren unes propietats que tenen nom propi, altres que utilitzarem en el transcurs del treball, una que curiosament relaciona la seqüència amb el triangle de Tartaglia (concepte de nivell de secundària) i finalment veurem un tipus d'equacions que tenen per solució únicament nombres de Fibonacci i ens seran de gran utilitat en altres apartats.

6.1. Algunes propietats de la seqüència de Fibonacci.

Hi ha propietats dels nombres de Fibonacci que tenen nom propi i altres que ens són necessàries pel desenvolupament del treball. Passem a enunciar-les i demostrar-les.

Identitat d'Honsberger [6.1.1]

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_{m+1} \cdot F_n$$

En efecte:

Ho demostrarem per inducció sobre m

Per m = 1 i m = 2 la identitat és evident

$$F_{n+1} = F_{n-1} \cdot F_1 + F_2 \cdot F_n = F_{n-1} \cdot 1 + 1 \cdot F_n = F_{n-1} + F_n$$

$$F_{n+2} = F_{n-1} \cdot F_2 + F_3 \cdot F_n = F_{n-1} \cdot 1 + 2 \cdot F_n = F_{n-1} + F_n + F_n = F_n + F_{n+1}$$

Si ho suposem cert fins a m, per m+1 tenim

$$F_{n+m+1} = F_{n+m} + F_{n+m-1}$$

|| Per hipòtesis d'inducció

$$(F_{n-1} \cdot F_m + F_{m+1} \cdot F_n) + (F_{n-1} \cdot F_{m-1} + F_m \cdot F_n)$$

|| Agrupant convenientment i traient factor comú

$$F_{n-1} \cdot (F_m + F_{m-1}) + (F_m + F_{m+1}) \cdot F_n = F_{n-1} \cdot F_{m+1} + F_{m+2} \cdot F_n$$

c.v.d.

Identitat de d'Ocagne [6.1.2]

$$F_m \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{m+1} = (-1)^n \cdot F_{m-n}$$

En efecte:

Ho demostrarem per inducció sobre n

Per n=1 i n=2 tenim que la identitat és evident

$$F_m \cdot F_2 - F_1 \cdot F_{m+1} = F_m \cdot 1 - 1 \cdot F_{m+1} = (-1) \cdot F_{m-1}$$

$$F_m \cdot F_3 - F_2 \cdot F_{m+1} = F_m \cdot 2 - 1 \cdot F_{m+1} = F_m + F_m - F_{m+1} = F_m - F_{m-1} = F_{m-2} = (-1)^2 \cdot F_{m-2}$$

Si ho suposem cert fins a n per a n+1 tenim

$$F_m \cdot F_{n+2} - F_{n+1} \cdot F_{m+1} = F_m \cdot (F_{n+1} + F_n) - (F_n + F_{n-1}) \cdot F_{m+1}$$

|| Multiplicant i agrupant convenientment

$$(F_m \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{m+1}) + (F_m \cdot F_n - F_{n-1} \cdot F_{m+1})$$

|| Per hipòtesis d'inducció

$$(-1)^n \cdot F_{m-n} + (-1)^{n-1} \cdot F_{m-n+1} = -(-1)^{n+1} \cdot F_{m-n} + (-1)^{n+1} \cdot F_{m-n+1} = (-1)^{n+1} \cdot F_{m-n-1}$$

c.v.d.

Identitat de Cassini [6.1.3]

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

En efecte:

Per $n = 2 \quad \Rightarrow \quad F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1 = (-1)^2$

Suposem que sigui cert fins a n aleshores per n + 1 tenim

$$F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n \cdot (F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1} \cdot (F_{n+1} - F_n) = F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1}$$

Que per hipòtesis d'inducció és $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$

c.v.d.

Identitat de Catalan [6.1.4]

$$F_n^2 - F_{n-k} \cdot F_{n+k} = (-1)^{n-k} \cdot F_k^2$$

En efecte:

$$F_n^2 - F_{n-k} \cdot F_{n+k}$$

|| Aplicant Ocagne a F_{n-k} i Honsberger a F_{n+k}

$$F_n^2 - (F_n \cdot F_{k+1} - F_k \cdot F_{n+1})(-1)^k (F_{n-1} \cdot F_k + F_{k+1} \cdot F_n)$$

||

$$F_n^2 - (F_n \cdot (F_k + F_{k-1}) - F_k \cdot F_{n+1})(-1)^k (F_{n-1} \cdot F_k + (F_k + F_{k-1}) \cdot F_n)$$

||

$$F_n^2 - (F_k(F_n - F_{n+1}) + F_nF_{k-1})(-1)^k (F_k(F_{n-1} + F_n) + F_{k-1}F_n)$$

||

$$F_n^2 - (-F_kF_{n-1} + F_nF_{k-1})(-1)^k (F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n)$$

||

$$F_n^2 - (-1)^k (F_nF_{k-1}F_kF_{n+1} + F_{k-1}^2F_n^2 - F_nF_{k-1}F_kF_{n-1} - F_k^2F_{n+1}F_{n-1})$$

||

$$F_n^2 - (-1)^k (F_nF_{k-1}(F_k(F_{n+1} - F_{n-1}) + F_nF_{k-1}) - F_k^2F_{n+1}F_{n-1})$$

||

$$F_n^2 - (-1)^k (F_n^2F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2F_{n+1}F_{n-1})$$

Amb distributives traient factors comuns i amb $F_a + F_{a-1} = F_{a+1}$

Si apliquem Cassini $F_{k-1}\cdot F_{k+1} = (-1)^k + F_k^2$,distributives i traiem factor comú obtenim

$$F_n^2-(-1)^k(F_n^2((-1)^k-F_k^2)-F_k^2F_{n+1}F_{n-1}) = (-1)^k(F_n^2F_k^2-F_k^2F_{n+1}F_{n-1}) = F_k^2(F_n^2-F_{n+1}F_{n-1})(-1)^k$$

Finalment aplicant Cassini obtenim

$$F_k^2(F_n^2-F_{n+1}F_{n-1})(-1)^k = (-1)^{n-k}F_k^2$$

c.v.d.

Identitat de Gelin-Cesàro [6.1.5]

$$F_n^4 - F_{n-2}\cdot F_{n-1}\cdot F_{n+1}\cdot F_{n+2} = 1$$

En efecte:

Si elevem al quadrat la identitat de Cassini obtenim

$$(F_{n-1}\cdot F_{n+1}-F_n^2)^2 = ((-1)^n)^2$$
$$\Downarrow$$
$$F_n^4 - 2\cdot F_{n-1}\cdot F_{n+1}\cdot F_n^2 + (F_{n-1}\cdot F_{n+1})^2 = 1$$
$$\Downarrow \quad \text{Traient factor comú}$$
$$F_n^4 + F_{n-1}\cdot F_{n+1}\cdot(-2F_n^2 + F_{n-1}\cdot F_{n+1}) = 1$$
$$\Downarrow \quad \text{Aplicant la identitat de Cassini}$$
$$F_n^4 + F_{n-1}\cdot F_{n+1}\cdot((-1)^n - F_n^2) = 1$$
$$\Downarrow \quad \text{Afegim el terme } F_2^2 \text{ que és 1}$$
$$F_n^4 + F_{n-1}\cdot F_{n+1}\cdot((-1)^{n-2}\cdot F_2^2 - F_n^2) = 1$$
$$\Downarrow \quad \text{Aplicant la identitat de Catalan amb k=2}$$
$$F_n^4 - F_{n-2}\cdot F_{n-1}\cdot F_{n+1}\cdot F_{n+2} = 1$$

c.v.d.

Identitat de Candido [6.1.6]

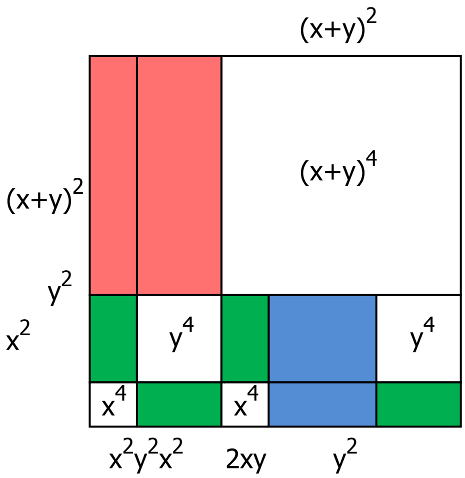
$$\left(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2\right)^2 = 2\cdot\left(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4\right)$$

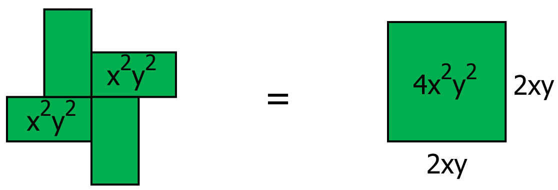
En efecte:

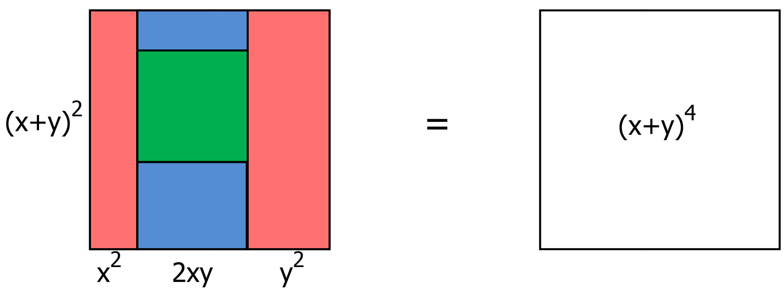
En realitat aquesta és una propietat dels nombres naturals que per la seva naturalesa es pot aplicar a qualsevol fibosèrie, com és la de Fibonacci. La propietat és la següent:

$$\left(x^2 + y^2 + (x+y)^2\right)^2 = 2\cdot\left(x^4 + y^4 + (x+y)^4\right)$$

que es pot demostrar gràficament:







Si posem $x = F_n$, $y = F_{n+1}$ $\Rightarrow$ $x + y = F_{n+2}$ obtenim la propietat en qüestió.

c.v.d.

Propietat [6.1.7]

Per x = 2 i x = 3 es verifica $F_x + F_{x+2} + F_{x+4} + F_{x+6} + \cdots + F_{x+n} = F_{x+n+1} - 1$ on n és parell o 0

En efecte:

Per n = 0 és evident $F_2 = F_3 - 1$ i $F_3 = F_4 - 1$

Suposem que sigui cert fins a n aleshores per n + 2 tenim

$$F_x + F_{x+2} + F_{x+4} + F_{x+6} + \cdots + F_{x+n} + F_{x+n+2} = F_{x+n+1} - 1 + F_{x+n+2} = F_{x+n+3} - 1$$

c.v.d.

Propietat [6.1.8]

$$-F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + (-1)^n F_n = (-1)^n F_{n-1} - 1$$

En efecte:

Per n =2 tenim $-F_1 + F_2 = F_1 - 1$

Suposem que sigui cert fins a n, aleshores per n + 1 tenim

$$-F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + (-1)^n F_n + (-1)^{n+1} F_{n+1} = (-1)^n F_{n-1} - 1 + (-1)^{n+1} F_{n+1} = -(-1)^{n+1} F_{n-1} - 1 + (-1)^n F_{n+1} =$$

$$= (-1)^{n+1}(F_{n+1} - F_{n-1}) - 1 = (-1)^{n+1} F_n - 1$$

c.v.d.

Propietat [6.1.9]

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

En efecte:

Per n =1 tenim $F_1^2 = F_1 \cdot F_2$

Si és cert fins a n per n+1 tenim

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$$

c.v.d.

Propietat [6.1.10]

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

En efecte:

Per n=1 és evident $F_1 = F_3 - 1$

Si suposem cert per a n $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

Aleshores per a n+1 tenim:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

c.v.d.

6.2. Eltriangle de Tartaglia i la seqüència de Fibonacci.

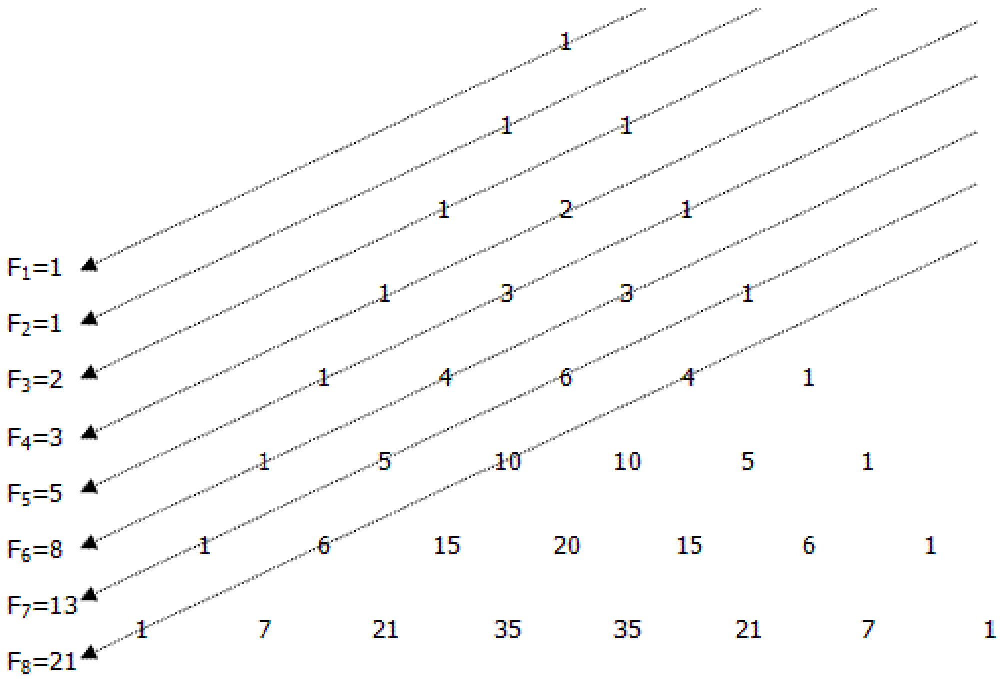
A secundària en el tema de combinatòria s'estudia el triangle de Tartaglia, anomenat també triangle de Pascal (veure figura), on un nombre s'obté sumant els dos que estan a sobre d'ell, aquest triangle s'estudia per la seva gran quantitat de propietats i utilitats, potser la més famosa és segurament la del càlcul dels coeficients delBinomi de Newton, $(a+b)^n$, que es pot fer de manera molt eficient amb el triangle.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
. . . .
. . . .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . .

Donada la gran quantitat de propietats de Fibonacci i de Tartaglia no és d'estranyar que en tinguin algunade conjunta.

Observant el triangle veiem que sumant diagonals consecutives amb una inclinació adient obtenim la successió de Fibonacci



Aquesta relació la concretem amb la següent propietat

Propietat [6.2.1]

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots$$

En efecte:

Ho demostrarem per inducció sobre n

Per n = 1, 2, 3, 4 la relació es veu en el triangle de Tartaglia.

Suposem que es verifica per valors més petits que n, per n-1 i n-2 tindrem:

$$F_{n-2} = \binom{n-3}{0} + \binom{n-4}{1} + \binom{n-5}{2} + \binom{n-6}{3} + \cdots$$

$$F_{n-1} = \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \binom{n-5}{3} + \binom{n-6}{4} + \cdots$$

Sumant les dues expressions tenim

$$F_n = \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{1} + \binom{n-4}{2} + \binom{n-5}{2} + \binom{n-5}{3} + \binom{n-6}{3} + \binom{n-6}{4} + \cdots$$

Aplicant la propietat [2.9.2] obtenim

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \binom{n-5}{4} + \cdots$$

c.v.d.

6.3. Equacions amb solució els nombres de Fibonacci i de Lucas.

Una equació diofàntica és una equació, generalment amb vàries variables, per a la qual només es permeten solucions enteres. El seu nom fa referència al matemàtic grec Diofant d'Alexandria, un dels primers a estudiar aquest tipus de problemes.

Curiosament hi ha equacions diofàntiques que la solució té a veure amb els nombres de Fibonacci i Lucas. Concretament demostrarem els següents resultats:

Teorema [6.3.1]

Les solucions de l'equació diofàntica $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$ plantejada sobre els nombres naturals són les parelles de nombres consecutius de la seqüència de Fibonacci i les solucions trivials (0,1) i (1,0)

(a,b) és solució no trivial de $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$ aleshores

existeix un "k" tal que $F_k = a$ i $F_{k+1} = b$

Abans de demostrar el teorema observem que:

- L'única solució amb x = y és $(1,1) = (F_1, F_2)$
- Si (a,b) és solució amb $1 < b$ aleshores $a < b$

$$\left(a^2 + ab - b^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad a < b \right)$$

Anem ara a demostrar el teorema:

La implicació cap a l'esquerra del teorema és la identitat de Cassini [6.1.3]

La implicació cap a la dreta la demostrarem per inducció sobre "y":

- Si y < 5 la implicació cap a la dreta es certa

  - Si $y=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-1\pm1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-1+\sqrt{5\pm4}}{2}=\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

  Les úniques solucions són $(0,1)$ i $(1,1)=(f_1,f_2)$

  - Si $y=2 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-4\pm1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-2+\sqrt{20\pm4}}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{-2+\sqrt{24}}{2} \\ x=1 \end{cases}$

  l'única solució entera és $(1,2)=(f_2,f_3)$

  - Si $y=3 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x-9\pm1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-3+\sqrt{45\pm4}}{2}=\begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{cases}$

  l'única solució entera és $(2,3)=(f_3,f_4)$

  - Si $y=4 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x-16\pm1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-4+\sqrt{80\pm4}}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{-4+\sqrt{84}}{2} \\ x=\dfrac{-4+\sqrt{76}}{2} \end{cases}$

  no hi ha cap solució entera.

- Fixat un nombre n suposem que per tota y < n les solucions de l'equació $x^2+xy-y^2=\pm1$ són del tipus (F_k,F_{k+1}). Anem a provar que si (a,n) és una solució també és del tipus (F_k,F_{k+1})

  Si (a,n) és solució de $x^2+xy-y^2=\pm1$ aleshores $a<n$ i $(n-a,a)$ també és solució doncs,

  $$(n-a)^2+(n-a)a-a^2 = n^2+a^2-2an+na-a^2-a^2 = -a^2-an+n^2 = \pm1$$

  Com $(n-a,a)$ és una solució amb $a<n$, per hipòtesi d'inducció tenim que existeix un "k" amb

  $$F_k=n-a \text{ i } F_{k+1}=a \quad \Rightarrow \quad n=F_k+F_{k+1}=F_{k+2}$$

c.v.d.

Propietat [6.3.2]

Un nombre "n" és de Fibonacci si i només si $5n^2+4$ o $5n^2-4$ és un quadrat perfecte

En efecte:

Com "n" i $5n^2\pm4$ tenen la mateixa paritat per tot valor de "n", tenim la següent equivalència:

$$\frac{n+\sqrt{5n^2\pm4}}{2}=m \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5n^2\pm4}=2m-n \quad \Leftrightarrow \quad 5n^2\pm4=4m^2-4nm+n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+nm-m^2=\pm1$$

On "n" i "m" són nombres naturals

L'últim membre de l'equivalència ens indica que "n" i "m" són solucions del teorema [6.3.1] i per tant és una parella de nombres de Fibonacci consecutius.

c.v.d.

Propietat [6.3.3]

Un nombre de Lucas L_n, amb n>1, és la suma del anterior i el posterior al corresponent en la sèrie de Fibonacci $F_{n-1} + F_{n+1}$

En efecte:

Pels primers valors d'"n" és evident: $n = 2 \Rightarrow L_2 = F_1 + F_3$, $n = 3 \Rightarrow L_3 = F_2 + F_4$

Si ho considerem demostrat fins a n-1 veiem que és cert per n:

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1} = (F_{n-3} + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_n) = (F_{n-3} + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_n) = F_{n-1} + F_{n+1}$$

c.v.d.

Propietat [6.3.4]

$$5 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 4 = L_n^2$$

En efecte:

En primer lloc anem a transformar l'enunciat

$$5 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 4 = L_n^2 = (F_{n-1} + F_{n+1})^2 = F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2$$

$||$ Per la propietat [6.1.3]

$$F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n + F_{n+1}^2$$

La igualtat obtinguda $5 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 4 = F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n + F_{n+1}^2$ és equivalent a una evidència com es mostra a continuació :

$$5 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 4 = F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n + F_{n+1}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 2 = F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 2 = 2 \cdot F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2 \cdot F_n \cdot F_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot F_n^2 + (-1)^n \cdot 2 = 2 \cdot F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_n \cdot F_{n-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n+1} = 2 \cdot F_{n-1} \cdot (F_{n-1} + F_n) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n+1} = 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n+1}$$

c.v.d.

Teorema [6.3.5]

Les solucions de l'equació diofàntica $5x^2 \pm 4 = y^2$ plantejada sobre els nombres naturals són les parelles de nombres on el primer és de la seqüència de Fibonacci i el segon el corresponent de la de Lucas.

(a, b) és solució de $5x^2 \pm 4 = y^2$ $\Leftrightarrow$ existeix un "n" tal que $F_n = a$ i $L_n = b$

En efecte:

La implicació cap a l'esquerra del teorema és la propietat [6.3.4]

Per demostrar la implicació cap a la dreta observem que $5x^2 \pm 4$ és un quadrat perfecte i pel teorema [6.3.2] "x" és un nombre de Fibonacci $(x = F_n)$ i per tant tenim $5 \cdot F_n^2 \pm 4 = y^2$ i per la propietat [6.3.4] obtenim que "y" és el nombre de Lucas corresponent.

c.v.d.

7. FIBOPARTICIÓ D'UN NOMBRE NATURAL

Anomenarem fibopartició d'un nombre natural "n" a una sèrie de nombres de Fibonacci ordenats, no consecutius, que sumin "n", però excloent F_1, més concretament:

$n = F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r}$ és una fibopartició de "n" $\Leftrightarrow$ $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_r > 1$ i $n_i \neq n_k + 1$

Teorema [7.1]

Tot nombre natural es pot fibopartir, es a dir:

Per tot nombre natural "n" existeix una sèrie ordenada $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_r > 1$ tal que

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} \qquad \text{amb} \qquad n_i \neq n_k + 1$$

En efecte:

Ho provarem per inducció sobre n.

En els primers casos l'existència de la sèrie és evident:

$1 = 1 = f_2$	$2 = 2 = f_3$	$3 = 3 = f_4$
$4 = 3 + 1 = f_4 + f_2$	$5 = 5 = f_5$	$6 = 5 + 1 = f_5 + f_2$
$7 = 5 + 2 = f_5 + f_3$	$8 = 8 = f_6$	$9 = 8 + 1 = f_6 + f_2$
$10 = 8 + 2 = f_6 + f_3$	$11 = 8 + 3 = f_6 + f_4$	$12 = 8 + 3 + 1 = f_6 + f_4 + f_2$

Suposem que és cert fins "n-1" , anem a provar que per "n" també existeix la sèrie:

Si n és un nombre de Fibonacci evidentment ja està fibopartit en cas contrari estarà entre dos nombres de Fibonacci consecutius, es a dir, existeix $x \in N$ tal que $F_x < n < F_{x+1}$

Per hipòtesis d'inducció existeix una fibopartició de $n - F_x$

$$F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} = n - F_x < F_{x+1} - F_x = F_{x-1} \quad \text{amb} \quad n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_r > 1 \quad \text{i} \quad n_i \neq n_k + 1$$

Del que es dedueix:

- $x - 1 > n_1$
- $F_x + F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} = n \qquad \text{amb} \qquad x \text{ i } n_i \neq n_k + 1$

c.v.d.

Teorema [7.2]

La fibopartició un nombre natural és única

Per tot $n \in N$ existeix una única sèrie $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_r$ tal que

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} \qquad \text{amb} \qquad n_i \neq n_k + 1$$

Ho provarem per reducció al absurd:

Si un nombre Natural té dos fiboparticions diferents $n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 1$ i $m_1 > m_2 > \cdots > m_r > 1$

$$F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} = F_{m_1} + F_{m_2} + F_{m_3} + \cdots + F_{m_s} \qquad \text{amb} \qquad n_i \neq n_k + 1 \;,\; m_i \neq m_k + 1$$

Podem suposar que $n_i \neq m_k$ (els que fossin iguals els podem simplificar), i en particular suposem que $F_{n_1} < F_{m_1}$ o el que és el mateix $F_{n_1+1} \leq F_{m_1}$

Per la propietat [6.1.7] podem deduir que:

$$F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} < F_{n_1+1}$$

I per tant

$$F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} < F_{n_1+1} \leq F_{m_1} \leq F_{m_1} + F_{m_2} + F_{m_3} + \cdots + F_{m_s}$$ que és un absurd

c.v.d.

7.1. Fibonumeració

A partir de la fibopartició de nombres naturals es pot idear una nova manera de numeració que anomenarem fibonumeració:

- Un nombre natural només estarà representat per dos símbols 0 i 1.
- No hi poden haver dos uns consecutius
- Els uns i zeros expressaran la presència o absència respectivament dels nombres de Fibonacci sent de dreta a esquerra aquests nombres ordenats des d'F_2 fins a F_∞.

Aquí tenim uns exemples de nombres expressats en la fibonumeració

$$50 = 34 + 13 + 3 = 1\cdot F_9 + 0\cdot F_8 + 1\cdot F_7 + 0\cdot F_6 + 0\cdot F_5 + 1\cdot F_4 + 0\cdot F_3 + 0\cdot F_2 = 10100100_{fib}$$

$$74 = 55 + 13 + 5 + 1 = 1\cdot F_{10} + 0\cdot F_9 + 0\cdot F_8 + 1\cdot F_7 + 0\cdot F_6 + 1\cdot F_5 + 0\cdot F_4 + 0\cdot F_3 + 1\cdot F_2 = 100101001_{fib}$$

Direm que un número natural és fiboparell si l'últim sumand de la seva fibopartició té subíndex parell i fibosenar en cas contrari:

$$\left.\begin{array}{c} n = F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} \\ n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_r > 1 \quad \text{i} \quad n_i \neq n_k + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} n \text{ és fiboparell} \Leftrightarrow n_r \text{ és parell} \\ n \text{ és fibosenar} \Leftrightarrow n_r \text{ és senar} \end{cases}$$

Està clar que hi ha infinits nombres fiboparells i els podem numerar de manera creixent, per aquest motiu es podem escriure con una successió creixent $\{FP_n\}_n$ i els fibosenars es escriurem $\{FS_n\}_n$

7.2. Alguns resultats sobrefibonumeració

A continuació s'exposaran un seguit de propietats i teoremes que ens seran útils en propers apartats.

Proposició [7.2.1]

No hi ha dos nombres naturals consecutius que siguin fibosenars, això es pot expressar així:

Per tot fibosenar FS_n tenim que $FS_n - 1$ i $FS_n + 1$ són fiboparells

En efecte:

En primer lloc s'expliquen el passos per sumar 1 en a un nombre expressat en fibonumeració:

Primer: Si acaba en zero, transformem aquest en 1 i si acaba en 1 el transformem en zero i afegim 1 a la xifra anterior (és a dir, una més a l'esquerra, que ha de ser 0 perquè partim d'un nombre que no tenia dos 1 seguits, i és correcte perquè 1+1=2).

Exemples: 100101010_{fib} + 1=100101011* ; 1010101_{fib}+1=1010110*

L'asterisc (*) indica que no està ben expressat en fibonumeració ja que té dos uns seguits, cal arreglar-ho.

Segon: Si amb això queden dos 1 seguits (perquè la xifra anterior a on s'hagi afegit 1 estava prèviament ocupada) apliquem $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ i transformem els dos 1 en 0 i afegim 1 a la xifra anterior als dos (que també haurà de ser 0 pel mateix motiu que en el pas 1). A aquest procés l'anomenarem emportar-se (els 1).

Seguint amb els exemples d'abans: 100101011*=100101100* ; 1010110*=1011000*

Tercer: Repetim el pas 2 fins que no quedin dos uns seguits, es a dir quedin ben expressats en fibonumeració.Acabantels exemples:

100101100*=100110000*=101000000_{fib} 1011000*=1100000*=10000000_{fib}

A continuació anem a demostrar la proposició:

Tot fibosenar acaba en zero, per tant, per a formar $FS_n + 1$, en el pas 1 transformem aquest 0 del final en 1 i al emportar-nos-el tantes vegades com sigui necessari aquest 1 sempre es mourà una quantitat parell de xifres (com que es mou juntament amb el de la seva esquerra a la posició a l'esquerra del segon, el primer es mou dos xifres cada vegada que s'emporta: ···011*···=···100···), i mai quedaran 1 a la dreta d'aquest. Per tant l'últim 1 queda sempre a la posició de F_2 o a alguna desplaçada una quantitat parell de posicions F_{2+2n}, per tant és sempre fiboparell.

Com que després de fibosenar ha d'anar fiboparell, abans també, perquè si no després del fibosenar del darrera n'hi hauria un altre.

c.v.d.

Proposició [7.2.2]

Si n i n+1 són fiboparells aleshores n – 1 i n + 2 són fibosenars

En efecte:

Si un fiboparell acaba en 0, la xifra anterior també ha de ser 0 perquè si no seria fibosenar, així que al sumar-l'hi 1 (de la manera descrita en l'anterior proposició) només caldrà fer el pas 1, així que ens quedarà un fiboparell acabat en 1

Si el fiboparell acaba, en canvi, en 1, al sumar-l'hi 1 aquest es convertirà en 0 i s'afegirà 1 a la segona xifra. A partir d'aquí, pel mateix motiu que en la proposició 9.1.1 es pot moure una quantitat parell de xifres a l'esquerra, per tant la última xifra és F_{3+2n}, per tant és fibosenar.

Si després de fiboparell acabat en 0 en ve un acabat en 1, i després d'aquest sempre va fibosenar, com a molt podrà haver dos fiboparells seguits, el primer acabarà en 0 i el segon en 1, però també podrà haver-n'hi un de sol

c.v.d.

Teorema [7.2.3]

Per tot número natural "n" es verifica $n = FS_n - FP_n$

En efecte:

Per començar considerem:

Primer: Tot fibosenar acaba en 0 i si li traiem aquest 0 ens quedarà un fiboparell (perquè totes les xifres s'hauran desplaçat una posició a la dreta, per això anomenarem a aquesta operació desplaçament a la dreta i ho expressarem així: $\vec{n}$ i a la operació d'afegir un 0 l'anomenarem desplaçament a l'esquerra i l'expressarem $\overleftarrow{n}$, la primera d'aquestes operacions només es pot fer amb nombres acabats en 0).

Exemple: $\overrightarrow{10010010010} = 1001001001$ i $\overleftarrow{1001001} = 10010010$

Segon: Si desplacem a l'esquerra un fiboparell ens donarà un fibosenar pel mateix motiu.

Tercer: Com que tot fibosenar es pot fer desplaçant a l'esquerra un fiboparell i tot fiboparell desplaçat a l'esquerra dona fibosenar, el conjunt dels fibosenars és equivalent al dels fiboparells desplaçats a l'esquerra, es a dir $FS_n = \overleftarrow{FP_n}$.

Quart: Com que desplaçar mou tots els 1 en una mateixa direcció una sola xifra, un nombre desplaçat tindrà com a fibopartició els termes immediatament següents (cap a l'esquerra) o anteriors (cap a la dreta) a cadascun dels termes del nombre original.

Per tant al restar $FS_n - FP_n$ ens queda:

$$(F_n + F_m + \cdots + F_l) - (F_{n-1} + F_{m-1} + \cdots + F_{l-1}) = (F_{n-2} + F_{m-2} + \cdots + F_{l-2})$$

Que serà $\overrightarrow{FP_n}$ si FP_n acaba en 0 i $\overrightarrow{FP_n - 1} + 1$ si acaba en 1 (perquè l'1 en que acaba FP és F_2 que traiem per a poder desplaçar i després de la resta si fem per separat aquest F_2 amb l'F_3 que li correspon queda un F_1 que és aquest 1 que afegim al final).

A continuació anem a provar el teorema per inducció:

- Pels primers casos $n = FS_n - FP_n$ és evident

$$1 = FS_1 - FP_1 = 2 - 1 \qquad 2 = FS_2 - FP_2 = 5 - 3$$
$$3 = FS_3 - FP_3 = 7 - 4 \qquad 4 = FS_4 - FP_4 = 10 - 6$$

- Si ho suposem cert fins a n, per a n+1 tenim que $1 = (FS_{n+1} - FP_{n+1}) - (FS_n - FP_n)$

  I ens podem trobar en tres casos:

  - Que FP_n acabi en 0 i per tant FP_{n+1} acabi en 1:
  - En aquest cas FP_n i FP_{n+1} només es diferencien en aquesta última xifra i la diferència entre ells és 1, per tant FI_n i FI_{n+1} només es diferencien en un 1 a la segona xifra començant per la dreta i la seva diferència és 2. Ens queda per tant:

  $$1 = (FS_n + 2 - FP_n - 1) - (FS_n - FP_n)$$

  - Que FP_n i FP_{n+1} acabin en 1:

    En aquest cas el resultat és $1 = \left(\overrightarrow{FP_{n+1} - 1} + 1\right) - \left(\overrightarrow{FP_n - 1} + 1\right)$ d'on podem simplificar els 1 de dins dels dos parèntesis. Com que $FP_n - 1$ i $FP_{n+1} - 1$ es diferencien en dos (perquè abans de restar l'1 han d'estar per força separats per un fibosenar i prou), i el nombre que els separa no es pot desplaçar a la dreta (és FP_n, que hem dit que acaba en 1), no hi ha cap fibopartició vàlida entre $\overrightarrow{FP_{n+1} - 1}$ i $\overrightarrow{FP_n - 1}$ i són per tant nombres consecutius.

  - Que FP_n acabi en 1 i FP_{n+1} acabi en 0:

    En aquest cas en queda com a resultat $1 = \left(\overrightarrow{FP_{n+1}}\right) - \left(\overrightarrow{FP_n - 1} + 1\right)$, i com que entre els dos nombres a traslladar només n'hi ha un acabat en zero (el FI que els separa) només hi haurà una fibopartició vàlida entre els dos i es diferenciaran per tant en 2, donant com a resultat $1 = \left(\overrightarrow{FP_n - 1} + 2\right) - \left(\overrightarrow{FP_n - 1} + 1\right)$

c.v.d.

8. NIMS AMB FIBOESTRATÈGIA

El Nim és un joc de taula molt antic. Hi ha autors que li atribueixen origen oriental, mentre d'altres fixen el seu origen a Europa (Alemanya o Regne Unit). És un joc molt famós, fins al punt de veure's reflectit en llibres, com el best-seller "El ocho" de Catherine Neville, i fins i tot la cèlebre pel·lícula, "El año pasado en Marienbad", en la qual el protagonista sembla haver-se enlluernat amb el Nim i amb ell mata el temps en el balneari de Marienbad, a Txecoslovàquia, famós en tota Europa des del segle XVI.

En 1910 Xerris Leonard Bouton, professor de matemàtiques de la Universitat d'Harvard, el va batejar el joc amb el nom de Nim, un verb anglès en desús que significa retirar, llevar o robar, i va publicar una anàlisi completa del joc (Charles L. Bouton, «Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory», publicat en 1910 en Annals of Mathematics, serie II, vol 11, págs. 93-94).

Del Joc del Nim n'hi ha moltes versions, però en general totes tenen en comú que juguen dos jugadors. Es col·loquen un nombre arbitrari de fitxes (llumins, escuradents, pedres) sobre una superfície, disposats en una o diverses files. Tant el nombre de files com el nombre de fitxes en cada fila són també arbitraris. El dos jugadors van prenent fitxes alternativament seguint una sèrie de regles. Guanya o perd, segons la versió, el jugador que pren l'ultima fitxa.

Algunes versions del joc són les següents:

- El Nim clàssic, també anomenat joc de Marienbad

  Es disposen les fitxes en diverses files. Cadascun dels jugadors, en el seu torn, retira el nombre de fitxes que vulgui, amb la condició que estiguin en la mateixa fila. Guanya el jugador que retira l'última fitxa.

  La tècnica guanyadora d'aquest Nim la va donar Xerris Leonard Bouton, i es basa el l'expressió binaria del nombre de fitxes de cada fila.

- El joc del Misère

  És el mateix que el Nim clàssic però perd al dur-se l'última fitxa.

- La versió més senzilla

  Es disposen les fitxes en una pila. Cada jugador retira, en el seu torn, un mínim d'una fitxa i un màxim d'm. Perd el jugador que retira l'última fitxa.

  La tècnica guanyadora és senzilla i es basa en criteris de divisibilitat.

- El Nim de Fibonacci

  Inventat fa alguns anys per Robert I. Gaskell i fet famós per Martin Gadner en el seu llibre "Gran circo matemático". Es disposen les fitxes en una pila. El primer jugador pot retirar tantes com vulgui, però no totes. A continuació, cada jugador retira en el seu torn al menys una fitxa , però com a màxim el doble de les que hagi retirat l'altre jugador a l'anterior jugada. Guanya el joc qui aconsegueixi retirar l'última fitxa.

  La tècnica guanyadora és complexa i es basa en els nombres de Fibonacci d'aquí el seu nom.

- El Nim de Wythoff

  Es disposem les fitxes en dues piles no necessàriament iguals. Cada jugador en el seu torn retira el nombre de fitxes que vulgui d'una pila o de les dues, en aquest últim cas ha de retirar el mateix nombre de fitxes de les dues. Guanya qui retira les últimes fitxes.

  La tècnica guanyadora força complexa també es basa en els nombres de Fibonacci.

8.1. La fiboestratègia guanyadora pel Nim de Fibonacci.

Hi ha una tècnica senzilla per fibopartir un nombre natural petit (1, ... , 50) mentalment, veiem un exemple:

> Per fibopartir el número 31 es comença pel nombre de Fibonacci més gran possible, 31 = 21 + … , sumant a continuació el més gran possible, 31 = 21 + 8 + … , i desprès el següent, 31 = 21 + 8 + 2 i així s'obté la fibopartició.

Abans s'ha exposat el joc del Nim de Fibonacci, anem a donar la estratègia guanyadora o "fiboestratègia" d'aquest joc:

> Suposem que queden "n" fitxes i ens toca jugar, el que hem de fer és fibopartir el nombre "n" i retirar tantes fitxes com el nombre més petit de la fibopartició feta.

Es clar que si ens toca jugar primer i el nombre de fitxes és un nombre de Fibonacci no podrem aplicar la fiboestratègia i per tant l'altre jugador si juga correctament ens guanyarà.

Anem a provar que realment la fiboestratègia és guanyadora, més concretament:

(1) Si un jugador aplica la fiboestratègia aleshores l'altre no la podrà aplicar.

(2) El primer jugador que pot aplicar la fiboestratègia la pot aplicar successivament.

(3) El jugador que aplica la fiboestratègia successivament guanya.

- L'enunciat (1) és evident ja que si quan resten "n" fitxes un jugador retira el nombre de Fibonacci més petit de la fibopartició de "n"

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + \cdots + F_{n_r} \qquad \text{amb} \qquad n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_r > 1 \qquad \text{i} \qquad n_i \neq n_k + 1$$

Tenim que $F_{n_{r-1}}$ és com a mínim $F_{n_r} + F_{n_r+1} = F_{n_r} + F_{n_r} + F_{n_r-1} > 2 \cdot F_{n_r}$ a no ser que $F_{n_r-1} = 0$ cosa que només passaria amb $n_r = 1$ però aquest no entra en les fiboparticions.

c.v.d.

- Anem a provar l'enunciat (2)

Un cop has tret el nombre més petit i l'altre no pot treure el següent (que anomenarem F_i), els nombres més grans que aquest es quedaran sense modificar (perquè traient només part de F_i quedaran aquests factors més la fibopartició del residu de l'últim, F_i-x, i els nombres que sortiran en aquesta última no podran ser majors a F_i).

Per tant ens centrarem només en aquest F_i.

Aplicant la propietat [6.1.7] $F_i = F_{i-1} + F_{i-3} + F_{i-5} + \cdots + F_k + 1$ on k=2 o k=3. L'altre jugador està obligat a treure com a mínim l'1 (si treu només l'1, queda 1 o dos, per tant el pots treure), i pot treure a més a més part del que queda.

Això ho farà traient tots fins al factor F_l i part de F_{l+2}, deixant com a nombre mes petit de la fibopartició F_{l+2} (si no en treu res) o inferior, i fent això et permet treure un màxim de, com a molt poc,

$$2 \cdot (F_l + F_{l-1} + F_{l-3} + F_{l-5} + \cdots + F_k + 1) = 2 \cdot F_{l+1} = F_{l+1} + F_l + F_{l-1} > F_{l+2}$$

per tant sempre podràs treure el nombre més petit restant perquè el teu límit serà més alt.

c.v.d.

- Anem a provar que la fiboestratègia és guanyadora (3)

Com que l'altre mai pot treure el següent nombre de la fibopartició perquè el seu límit no li permet, l'altre mai pot treure totes les fitxes, i com que el nombre inicial és un natural finit i se li van restant naturals, a la llarga el joc s'acaba. Si l'altre és impossible que guanyi per eliminació guanya qui usa la fiboestratègia.

c.v.d.

8.2. La fiboestratègia guanyadora pel nim de Wythoff.

Si analitzem el joc amb poques peces observem que si quan ens toca jugar hi ha dues files amb un nombre de fitxes com els de les parelles

$$(1\ ,\ 2)\ ,\ (3,\ 5)\ ,\ (4\ ,\ 7)\ ,\ (6\ ,\ 10)\ ,\ (8\ ,\ 13)\ ,\ (9\ ,\ 15)\ ,\ ...$$

perdrem segur si l'oponent juga bé.

Generalitzant aquestes parelles són les formades per un nombre fiboparell i el fibosenar de mateix índex (FP_n , FS_n). A aquestes parelles de nombres les anomenarem parelles perdedores.

Anem a demostrar que l'estratègia guanyadora consisteix en jugar sempre de manera que li deixem a l'altre jugador una parella perdedora (FP_n , FS_n).

Per demostrar-ho cal demostrar que:

(1) D'una parella no perdedora (a, b) mitjançant un moviment legal s'obté una parella perdedora.

(2) D'una parella perdedora (FP_n , FS_n) mitjançant un moviment legal no es pot obtenir una parella perdedora.

- Anem a demostrar (1)

  Si anomenem c a b-a, i suposant que a és el petit de la parella, ens trobem amb dues possibilitats:

  - $a<FP_c$, cas en el qual s'ha de treure peces a b fins a formar parella perdedora, que es pot fer perquè:

    Si a és un FP, aplicant la propietat $n = FS_n - FP_n$ sabem que la diferència entre a i el FS amb que fa parella perdedora és inferior a c.

    Si a és un FS sempre necessitarà un nombre inferior a sí mateix per a fer parella.

  - $a>FP_c$, cas en el qual restes als dos fins a arribar a la parella (FP_c , FS_c) que es pot fer per aplicació de $n = FS_n - FP_n$, donat que la diferència c es conservaria.

c.v.d.

- Anem a demostrar (2)

  Tenint en compte $n = FS_n - FP_n$ sabem que per a passar d'una parella perdedora a una altra hem d'alterar els dos nombres i la diferència entre ells, cosa que no permet cap jugada legal (si restem a només un dels dos nombres, l'altre no serà la seva parella i si restem als dos, la diferència seguirà sent la mateixa, i només hi ha una parella perdedora amb una diferència concreta).

c.v.d.

9. FIBOPARADOXES DE HOPPER

Normalment s'anomena paradoxa de Hopper a una qüestió de matemàtica recreativa, en la que tallant i reordenant les peces d'un polígon traçat sobre paper quadriculat, el nombre de quadres que el composen, que corresponen a l'àrea, és diferent (aparentment) en l'original i en la reconstrucció.

El distingit matemàtic i historiador de la matemàtica Martin Gardner, en el seu interessant i conegut llibre "Mathematics, MagicandMystery" (Dove Publications, Nova York 1956) ofereix moltes modalitats d'aquest joc.

La titulació genèrica amb el nom de Hopper la justifica Gardner amb que la primera de la sèrie, també la més senzilla, apareix publicada en el llibre de William Hopper "RationaiRecreations" (1794, Vol. 4, pàg. 286). Diverses variants que la milloren van ser popularitzades en el llibre de W. W. Rouse Ball "Mathematical Recreations and Essays" (1868). D'aquí van passar a diversos textos, i així es troben en la inoblidable sèrie dels de Rei Pastor - Puig Adam, cap als anys de 1930, on oportunament s'aprofita el valor didàctic i pedagògic del passatemps.

A continuació es mostren algunes paradoxes que podem trobar en articles, llibres o per la xarxa:

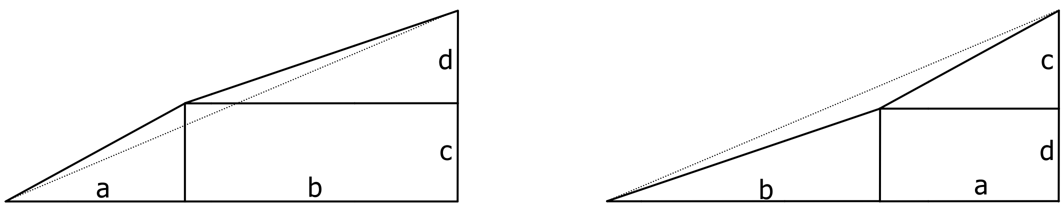
- En aquesta primera s'observa que el dos triangles tenen la mateixa àrea (13 x 5 / 2 = 32,5 u^2), i els dos contenen dos triangles rectangles iguals, però en el primer muntatge l'àrea del rectangle (8 x 2 = 16 u^2) té un quadrat més que el rectangle del segon muntatge (5 x 3 = 15 u^2)

L'engany d'aquesta paradoxa es basa en la no proporcionalitat dels triangles rectangles que la formen

$$\frac{2}{5} \neq \frac{3}{8} \neq \frac{5}{13}$$

I per tant les hipotenuses dels triangles no tenen la mateixa direcció, es a dir, el punt de contacte de les hipotenuses del triangles petits es tracta d'un vèrtex que segons el muntatge sobresurt o no arriba a la hipotenusa del triangle total.

En la figura es veu el parany exagerat



Per tal que l'engany no es pugui apreciar al primer cop d'ull les següents proporcions haurien de ser el més semblants possibles:

$$\frac{c}{a} \approx \frac{d}{b} \approx \frac{c+d}{a+b}$$

Aquestes aproximacions són equivalents a que els valors de

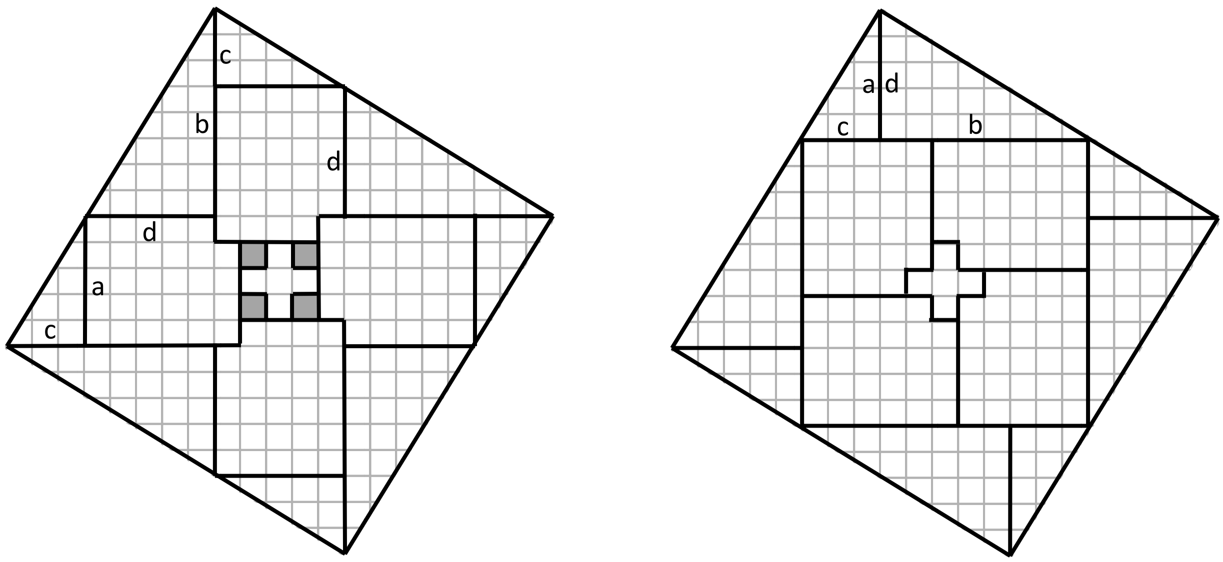
$$\left|\frac{c}{a} - \frac{d}{b}\right| = \frac{|c \cdot b - a \cdot d|}{a \cdot b} \qquad \left|\frac{c}{a} - \frac{c+d}{a+b}\right| = \frac{|c \cdot b - a \cdot d|}{a \cdot (a+b)} \qquad \left|\frac{d}{b} - \frac{c+d}{a+b}\right| = \frac{|c \cdot b - a \cdot d|}{b \cdot (a+b)}$$

siguin el més petit possible i si fixem les bases "a" i "b" dels triangles es redueix a que $c \cdot b - a \cdot d = \pm 1$ Aquesta expressió, per la propietat [2.8.3], ens indica que es podrà fer un parany mínim si i només si les bases "a" i "b" són nombres primers entre ells i en conseqüència les altures "c" i "d" també ho seran.

Hi ha una infinitat de solucions, però, entre elles quatre nombres consecutius de Fibonacci ja que aplicant la identitat d'Ocagne en el cas que m=n+2i m=n+1tenim

$$F_{n+2} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+3} = (-1)^n \cdot F_2 = \pm 1 \quad F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n \cdot F_1 = \pm 1$$

- Aquesta paradoxa és una de les més espectaculars i se la devem a Martin Gardner.



Si superposem els dos quadrats observarem que són iguals però en canvi el primer te quatre quadrats més.

A més de l'exposat en la primera paradoxa $(c \cdot b - a \cdot d = \pm 1)$, si observem el muntatge veiem que

$$a = d \qquad i \qquad b = c + d$$

Substituint aquests valors obtenim

$$c \cdot (c + a) - a \cdot a = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad c^2 + c \cdot a - a^2 = \pm 1$$

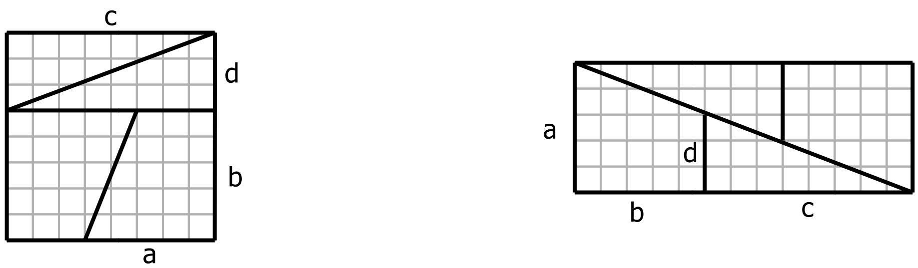
Pel teorema [6.3.1] les solucions d'aquesta equació diofàntica son dos nombres de Fibonacci consecutius

$$c = F_n \qquad i \qquad a = F_{n+1}$$

i per tant per fer un trencaclosques com aquest els costats dels triangles hauran de ser quatre nombres de Fibonacci

$$a = F_{n+1} \qquad b = c + d = c + a = F_n + F_{n+1} = F_{n+2} \qquad c = F_n \qquad d = a = F_n$$

- L'última paradoxa que estudiarem és poder la mes coneguda i no per ser senzilla deixa de ser espectacular



Les mateixes peces diferentment distribuïdes formen un quadrat d'àrea ($8^2 = 64$) o un rectangle d'àrea (13 x 5 = 65)

Observant les figures deduïm que:

$$c = a + d = b + d \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Si imposem que la diferència d'àrees del quadrat i el rectangle sigui ± 1 obtenim

$$a \cdot (b + c) - c^2 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b + a \cdot c - c^2 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a \cdot c - c^2 = \pm 1$$

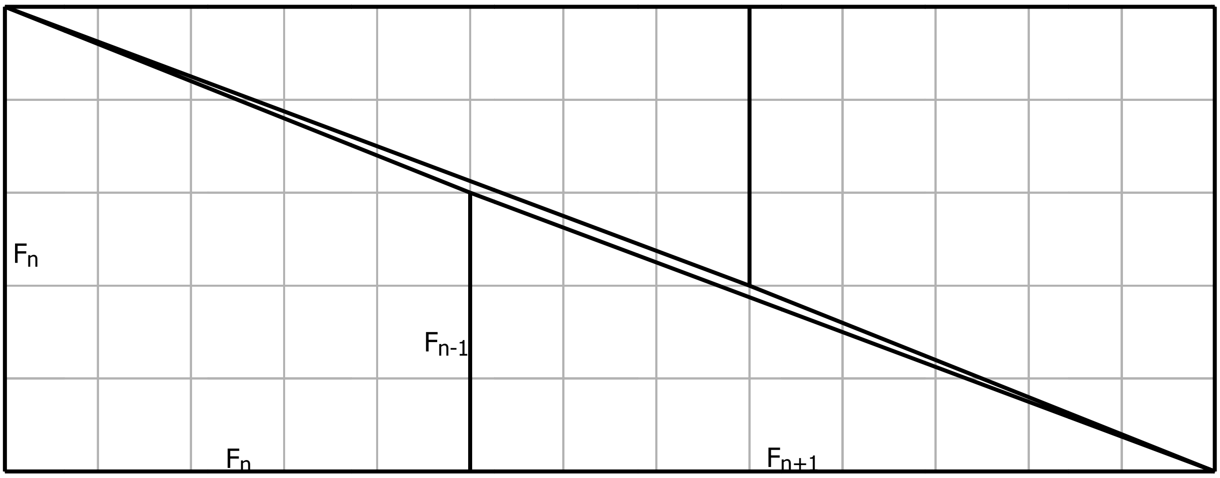
I per tant un altre cop pel teorema [6.3.1] les solucions d'aquesta equació diofàntica son dos nombres de Fibonacci consecutius

$$a = F_n \quad \text{i} \quad c = F_{n+1}$$

i per tant per fer un trencaclosques com aquest els costats dels triangles hauran de ser quatre nombres de Fibonacci

$$a = F_n \qquad b = a = F_n \qquad c = F_{n+1} \qquad d = c - b = F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

Anem a calcular a continuació quin gruix té l'escletxa de l'engany



Com es tracta d'un paral·lelogram de base la hipotenusa del triangle rectangle i àrea una unitat quadrada l'altura del paral·lelogram (gruix de l'escletxa) és

$$h = \frac{\text{Àrea}}{\text{Base}} = \frac{1}{\sqrt{(F_{n+1})^2 + (F_{n-1})^2}}$$

Per el cas que s'ha exposat tenim que el gruix és

$$h = \frac{\text{Àrea}}{\text{Base}} = \frac{1}{\sqrt{8^2 + 3^2}} = 0{,}117$$

Tenint en compte que la resolució de la vista humana està entre 0,1 i 0,2 mm l'engany no es podrà apreciar si agafem com unitat el centímetre i uns nombres de Fibonacci superiors a $F_4 = 3$

10. EL K-FIBOPOLINOMI

Més endavant veurem que les k-fibosèries[2.1] estan molt relacionades amb el polinomi

$$P_k(x) = x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x^2 - x - 1$$

Per aquest motiu l'anomenarem k-fibopolinomi i en aquest apartat es fa un estudi profund de les seves arrels. (ANNEX 6)

Propietat [10.1]

El k-fibopolinomi es pot expressar:

$$P_k(x) = x^k - \frac{x^k - 1}{x - 1} = \frac{x^{k+1} - 2 \cdot x^k + 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

En efecte:

$$P_k(x) = x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x^2 - x - 1 = x^k - \left(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x^2 + x + 1\right)$$

L'expressió del parèntesi és la suma dels k primers termes de la progressió geomètrica $\left\{x^{n-1}\right\}_n$ [2.3.2]

$$P_k(x) = x^k - \frac{x \cdot x^{k-1} - 1}{x - 1} = x^k - \frac{x^k - 1}{x - 1} = \frac{x^{k+1} - 2 \cdot x^k + 1}{x - 1}$$

c.v.d.

Propietat [10.2]

La funció polinòmica $P_k(x) = x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x^2 - x - 1$ talla a l'eix X en: (ANNEX 4)

- Un únic punt de l'interval (1.5 , 2) si k és senar.
- En dos únics punts: un de l'interval (1.5 , 2) i l'altre de (–1 , –0.5) si k és parell.

En efecte:

Observem que $P_k(x)$ és una funció polinòmica i per tant es tracta d'una funció contínua.

- En primer lloc veurem que independentment de la paritat de k, $P_k(x)$ talla a l'eix X en un únic punt positiu de l'interval (1.5 , 2).

  La imatge de x = 1.5 és negativa:

$$P_k(1.5) = \frac{(1.5)^{k+1} - 2 \cdot (1.5)^k + 1}{1.5 - 1} = \frac{-0.5 \cdot (1.5)^k + 1}{0.5} = -(1.5)^k + 2 < 0 \quad \text{si } k > 1$$

  La imatge del 2 és positiva:

$$P_k(2) = \frac{2^{k+1} - 2 \cdot 2^k + 1}{2 - 1} = 1 > 0$$

  Per tant pel Teorema de Bolzano [2.5.1] existeix un $c \in (1.5, 2)$ tal que $P_k(c) = 0$

  Per la regla dels signes de Descartes [2.4.3], aquesta arrel és única ja que només hi ha un canvi de signe en la sèrie dels coeficients del k-fibopolinomi.

- En segon lloc veurem que si k és senar no talla a l'eix X negatiu.

Un senzill anàlisis de l'expressió [10.1] de la funció $P_k(x)$ ens mostra que és negativa en tot punt n < 0:

$$\text{Com } n^k < 0 \quad \Rightarrow \quad P_k(n) = n^k - \frac{n^k - 1}{n-1} < 0$$

- Per acabar veurem que si k és parell la funció $P_k(x)$ talla a l'eix X negatiu en un únic punt en l'interval (–1, –0.5)

  La imatge del –0.5 és negativa:

$$P_k(-0.5) = \frac{(-0.5)^{k+1} - 2\cdot(-0.5)^k + 1}{-0.5-1} = \frac{-2.5\cdot(-0.5)^k + 1}{-0.5} = 1.25\cdot(0.5)^k - 2 < 0 \quad \text{si } k > 1$$

  La imatge del –1 és positiva:

$$P_k(-1) = \frac{(-1)^{k+1} - 2\cdot(-1)^k + 1}{-1-1} = 1 > 0$$

  Per tant pel Teorema de Bolzano[2.5.1] existeix un $c \in (-1,-0.5)$ tal que $P_k(c) = 0$

  La unicitat es demostra observant que la derivada de $P_k(x)$ és negativa per tot x< 0 i per tant és decreixent [2.5.4]

$$P_k(x) = \frac{x^{k+1} - 2\cdot x^k + 1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad P_k{'}(x) = \frac{\left((k+1)\cdot x^k - 2k\cdot x^{k-1}\right)\cdot(x-1) - \left(x^{k+1} - 2\cdot x^k + 1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$P_k{'}(x) = \frac{k\cdot x^{k+1} - (3k-1)\cdot x^k + 2k\cdot x^{k-1} - 1}{(x-1)^2}$$

  Com x és negativa obtenim:

$$k\cdot x^{k+1} - (3k-1)\cdot x^k + 2k\cdot x^{k-1} - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad P_k{'}(x) = \frac{k\cdot x^{k+1} - (3k-1)\cdot x^k + 2k\cdot x^{k-1} - 1}{(x-1)^2} < 0$$

c.v.d.

Definició [10.3]

A l'arrel real positiva del k-fibopolinomi l'anomenarem nombre k-auri i l'escriurem Φ_k i a l'arrel negativa del k-fibopolinomi, només si k és parell, l'anomenarem nombre k-subauri i l'escriurem Ψ_k

Propietat [10.4]

El límit dels nombres k-auris quan k tendeix a infinit és 2 $\lim_{k\to\infty} \Phi_k = 2$

En efecte:

Per la propietat [10.1] i la definició de Φ_k tenim:

$$(\Phi_k)^{k+1} - 2\cdot(\Phi_k)^k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Phi_k)^k\cdot(\Phi_k - 2) = -1 \quad \Rightarrow \quad (\Phi_k)^k = \frac{1}{2-\Phi_k}$$

Per la propietat [10.2]sabem que $1.5 < \Phi_k < 2$ per tant:

$$\lim_{k\to\infty}(\Phi_k)^k = \infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty} 2-\Phi_k = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\Phi_k = 2$$

c.v.d.

Pel teorema fonamental de l'àlgebra [2.4.1] sabem que el polinomi $P_k(x)$ té exactament k arrels complexes, les anomenarem:

$$g_1\,,\,g_2\,,\cdots,\,g_{k-1}\,,\,g_k$$

Propietat [10.5]

El mòdul de les arrels $g_1\,,\,g_2\,,\cdots,\,g_{k-1}\,,\,g_k$ del polinomi $P_k(x)$ estan acotats inferiorment per 0.5 i superiorment per 2.

En efecte:

Pel teorema d'acotació del mòdul de les arrels d'un polinomi [2.4.4] obtenim l'acotació de les arrels del k-fibopolinomi:

$$\frac{1}{1+\dfrac{\max\{|-1|,|-1|,\cdots,|1|\}}{|-1|}} \le |g_i| \le 1+\frac{\max\{|-1|,|-1|,\cdots,|-1|\}}{|1|}$$

Que és $0.5 \le |g_i| \le 2$

c.v.d.

Aquesta acotació del mòdul de les arrels de k-fibopolinomi no és força bona, dons $\Psi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 0.5\ldots$ i per la propietat [10.4] sabem que $\lim_{k\to\infty}\Phi_k = 2$

Si calculem les arrels de $P_k(x)$ per k = 2, 3, 4, ... , 100 per un mètode aproximatiu (a l'ANNEX 6 es pot veure per k < 16) observem:

- Totes tenen multiplicitat 1.
- L'arrel de mòdul més gran és Φ_k.
- Si k és parell, l'arrel de mòdul més petit és Ψ_k.
- Totes les arrels (excepte les conjugades) tenen diferent mòdul.

Aquestes observacions ens porten a la següent conjectura per tot k > 0 (veure agraïments)

Conjectura [10.6]

Les arrels $\{g_i\}$ del k-fibopolinomi $P_k(x)$ es poden ordenar de la següent manera

$$g_1\,,\,g_2\,,\cdots,\,g_{k-1}\,,\,g_k \quad \text{amb} \quad |g_1| \le |g_2| \le \cdots \le |g_{k-1}| < g_k = \Phi_k \quad \text{i si k és par } g_1 = \Psi_k$$

On la igualtat de mòdul només es produeix en cas de ser arrels conjugades.

11. EL K-FIBOESPAI

Al conjunt de k-fibosèriesΓ^k (subconjunt de les successions de nombres complexos) [2.1.1]

$$\{ f_n(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) \}_n \in \Gamma^k \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) = a_1 ,\cdots\cdots, \; f_k(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k) = a_k \\ f_n(a_1,a_2,\cdots,a_k) = f_{n-k}(a_1,a_2,\cdots,a_k) + \cdots + f_{n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_k) \end{cases}$$

L'anem a dotar d'una estructura d'espai vectorial amb les operacions usuals [2.3.4] sobre els nombres complexos. Per fer-ho provarem que és un subespai de les successions del nombres complexos

Proposició [11.1]

La combinació lineal de k-fibosèries també ho és i a més es verifica:

$$\lambda \cdot \{ f_n(a_1,\cdots,a_k) \}_n + \mu \cdot \{ f_n(b_1,\cdots,b_k) \}_n = \{ f_n(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) \}_n$$

En efecte:

Provarem per inducció sobre "n" que

$$\lambda \cdot f_n(a_1,\cdots,a_k) + \mu \cdot f_n(b_1,\cdots,b_k) = f_n(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k)$$

- Per n = 1, ... ,k tenim

$$\begin{array}{ccccc} \lambda \cdot f_1(a_1,\cdots,a_k) + \mu \cdot f_1(b_1,\cdots,b_k) & = & \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1 & = & f_1(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot f_k(a_1,\cdots,a_k) + \mu \cdot f_k(b_1,\cdots,b_k) & = & \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k & = & f_k(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) \end{array}$$

- Si ho suposem cert per tot natural menor que "n" tenim

$$\lambda \cdot f_n(a_1,\cdots,a_k) + \mu \cdot f_n(b_1,\cdots,b_k)$$

$$||$$

$$\lambda \cdot (f_{n-k}(a_1,\cdots,a_k) + \cdots + f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)) + \mu \cdot (f_{n-k}(b_1,\cdots,b_k) + \cdots + f_{n-1}(b_1,\cdots,b_k))$$

$$||$$

Distributives i associatives

$$\lambda \cdot f_{n-k}(a_1,\cdots,a_k) + \mu \cdot f_{n-k}(b_1,\cdots,b_k) + \cdots + \lambda \cdot f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k) + \mu \cdot f_{n-1}(b_1,\cdots,b_k)$$

$$||$$

Per hipòtesis d'inducció

$$f_{n-2}(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) + f_{n-1}(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) = f_n(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \cdots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k)$$

c.v.d.

En virtut d'aquesta propietat el conjunt Γ^k és tancat respecte a la suma i producte per un complex i per tant serà un subespai vectorial de les successions [2.2.6].

Aquest espai vectorial l'anomenarem k-fiboespai.

Proposició [11.2]

El subespai Γ^k té dimensió k i $\{ f_n(1,0,\cdots,0) \}_n$, $\{ f_n(0,1,0,\cdots,0) \}_n ,\cdots, \{ f_n(0,\cdots,0,1) \}_n$ són una base que l'anomenarem canònica.

En efecte:

Si una combinació lineal és nul·la, tenim:

$$\lambda_1 \cdot \{ f_n(1,0,\cdots,0) \}_n + \cdots + \lambda_k \cdot \{ f_n(0,\cdots,0,1) \}_n = \{ 0 \}_n$$
$$\Downarrow$$
$$\{ f_n(\lambda_1,0,\cdots,0) \}_n + \{ f_n(0,\cdots,0,\lambda_k) \}_n = \{ f_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_k) \}_n = \{ 0 \}_n$$
$$\Downarrow$$
$$f_1(\lambda_1,\cdots,\lambda_k) = \lambda_1 = 0, \quad \cdots \quad , f_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_k) = \lambda_k = 0$$

Per tant són independents.

També són generadores ja que qualsevol k-fiboèrie s'expressa com una combinació lineal d'elles

$$\{ f_n(a_1,\cdots,a_k) \}_n = a_1 \cdot \{ f_n(1,0,\cdots,0) \}_n + \cdots + a_k \cdot \{ f_n(0,\cdots,0,1) \}_n$$

c.v.d.

El resultat d'aquesta proposició implica que Γ^k té dimensió "k" i tota base tindrà "k" k-fibosèries independents.

Teorema [11.3]

Existeix una base de Γ^k formada per "k" progressions geomètriques

En efecte:

Si una progressió geomètrica no nul·la $\{ a \cdot r^{n-1} \}_n$ és k-fibosèrie verifica:

$$a \cdot r^n = a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^{n-2} + a \cdot r^{n-3} + \cdots + a \cdot r^{n-k+1} + a \cdot r^{n-k}$$
$$\Downarrow$$
$$a \cdot r^{n-k} \cdot \left(r^k - r^{k-1} - \cdots - r^2 - r - 1 \right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r^k - r^{k-1} - \cdots - r^2 - r - 1 = 0$$

Per tant les progressions geomètriques que són k-fibosèries són les que tenen per raó les arrels del k-fibopolinomi, que per la conjectura [10.6] són:

$$g_1 \ , g_2 \ , \cdots , g_{k-1} \ , g_k \quad \text{amb} \quad |g_1| \le |g_2| \le \cdots \le |g_{k-1}| < g_k = \Phi_k$$

Anem a veure ara que les k-fibosèries $\left\{(g_1)^{n-1}\right\}_n , \left\{(g_2)^{n-1}\right\}_n , \cdots , \left\{(g_{k-1})^{n-1}\right\}_n , \left\{(g_k)^{n-1}\right\}_n$ són linealment independents per reducció al absurd:

Suposem que s'anul·la una combinació lineal

$$A_1 \cdot \left\{(g_1)^{n-1}\right\}_n + A_2 \cdot \left\{(g_2)^{n-1}\right\}_n + \cdots + A_{k-1} \cdot \left\{(g_{k-1})^{n-1}\right\}_n + A_k \cdot \left\{(g_k)^{n-1}\right\}_n = \{0\}_n$$

amb algun coeficient no nul, per exemple $A_1 \neq 0$

Desenvolupant els k primers termes de la combinació lineal obtenim el sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_k = 0 \\ A_1 \cdot (g_1)^1 + A_2 \cdot (g_2)^1 + \cdots + A_{k-1} \cdot (g_{k-1})^1 + A_k \cdot (g_k)^1 = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_1 \cdot (g_1)^{k-2} + A_2 \cdot (g_2)^{k-2} + \cdots + A_{k-1} \cdot (g_{k-1})^{k-2} + A_k \cdot (g_k)^{k-2} = 0 \\ A_1 \cdot (g_1)^{k-1} + A_2 \cdot (g_2)^{k-1} + \cdots + A_{k-1} \cdot (g_{k-1})^{k-1} + A_k \cdot (g_k)^{k-1} = 0 \end{cases}$$

Considerem el polinomi

$$Q(x)=(x-g_2)\cdot(x-g_3)\cdot\ \cdots\ \cdot(x-g_{k-1})\cdot(x-g_k)$$

que s'anul·la per totes les g_i excepte per g_1:

$$Q(g_1)\neq 0\quad,\quad Q(g_2)=0\quad,\quad\cdots\quad,\quad Q(g_{k-1})=0\quad,\quad Q(g_k)=0$$

Si desenvolupem el polinomi obtindrem una expressió com la següent:

$$Q(x)=(x-g_2)\cdot(x-g_3)\cdot\ \cdots\ \cdot(x-g_{k-1})\cdot(x-g_k)=B_{k-1}x^{k-1}+B_{k-2}x^{k-2}+\cdots+B_2x^2+B_1x^1+B_0$$

Si multipliquem les equacions del sistema pels coeficients de P(x), sumem totes les equacions i agrupem convenientment obtenim:

$$\begin{array}{rl}
 & B_0\cdot\left(A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}+A_k=0\right)\\
 & B_1\cdot\left(A_1\cdot g_1+A_2\cdot g_2+\cdots+A_{k-1}\cdot g_{k-1}+A_k\cdot g_k=0\right)\\
 & \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
 & B_{k-2}\cdot\left(A_1\cdot(g_1)^{k-2}+A_2\cdot(g_2)^{k-2}+\cdots+A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^{k-2}+A_k\cdot(g_k)^{k-2}=0\right)\\
+ & B_{k-1}\cdot\left(A_1\cdot(g_1)^{k-1}+A_2\cdot(g_2)^{k-1}+\cdots+A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^{k-1}+A_k\cdot(g_k)^{k-1}=0\right)\\
\hline
 & A_1\left(B_0+B_1\cdot g_1+\cdots+B_{k-1}\cdot(g_1)^{k-1}\right)+\quad\cdots\quad+A_k\left(B_0+B_1\cdot g_k+\cdots+B_{k-1}\cdot(g_k)^{k-1}\right)=0\\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad||\\
 & A_1\cdot Q(g_1)+A_2\cdot Q(g_2)\quad+\quad\cdots\quad+A_{k-1}\cdot Q(g_{k-1})+A_k\cdot q(g_k)=0
\end{array}$$

Per definició de Q(x) obtenim $A_1\cdot Q(g_1)=0$, que és una contradicció per hipòtesis i per definició de Q(x).

Per tant el conjunt $\left\{(g_1)^{n-1}\right\}_n,\left\{(g_2)^{n-1}\right\}_n,\cdots,\left\{(g_{k-1})^{n-1}\right\}_n,\left\{(g_k)^{n-1}\right\}$ són "k" k-fibosèries linealment independents i com la dimensió de Γ^k és k es tracta d'una base [2.2.5].

c.v.d.

Definició [11.4]

A la base trobada en el teorema anterior l'anomenarem base k-geomètrica i l'escriurem:

$$\left\{(g_1)^{n-1}\right\}_n,\left\{(g_2)^{n-1}\right\}_n,\cdots,\left\{(g_{k-1})^{n-1}\right\}_n,\left\{(g_k)^{n-1}\right\}$$

I per la conjectura [10.6] la podem ordenar de manera que verifica:

$$|g_1|\leq|g_2|\leq\cdots\leq|g_{k-1}|<g_k=\Phi\qquad\text{i si k és par}\quad g_1=\Psi_k$$

On la igualtat de mòdul només es produeix en cas de ser arrels conjugades.

En el cas k =2 una base del 2-fiboespai són les progressions geomètriques de raó:

$$g_1=\Psi_2=\varphi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\qquad\text{i}\qquad g_2=\Phi_2=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

12. EXPRESSIONS DEL TERME GENERAL DE LES 2-FIBOSÈRIES

Fins aquí hem definit el terme general d'una k-fibosèrie per una expressió de recurrència, es a dir, amb una expressió que conté els termes anteriors. En aquest apartat anem a trobaraltres expressions del terme general i algunes d'elles només en funció de l'índex.

12.1. Expressió del terme general d'una 2-fibosèrie.

L'expressió del terme general d'una 2-fibossèrie és

$$f_n(a,b) = \frac{2b-a+a\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \phi^{n-1} + \frac{a-2b+a\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \varphi^{n-1} \qquad \textbf{[12.1.1]}$$

$$\text{on} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{i} \qquad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

En efecte:

Per [11.4] les progressions $\left\{\phi^{n-1}\right\}_n$ i $\left\{\varphi^{n-1}\right\}_n$ són base del 2-fiboespai i per tant qualsevol 2-fibosuccessió s'expressarà com a combinació lineal d'elles:

$$f_n(a,b) = \lambda \cdot \phi^{n-1} + \mu \cdot \varphi^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \mu = a \\ n=2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = b \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim les següent solucions en funció d' "a" i "b":

$$\lambda = \frac{2b-a+a\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \qquad \text{i} \qquad \mu = \frac{a-2b+a\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

c.v.d.

12.2. Fórmula de Binet.

Aplicant l'expressió [12.1.1] a la successió de Fibonacci (a = 1 , b = 1) i de Lucas (a = 1 , b = 3) obtenim la coneguda fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^n - \varphi^n\right) \qquad \text{i} \qquad L_n = \phi^n + \varphi^n \qquad \textbf{[12.2.1]}$$

En efecte:

$$F_n = f_n(1,1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \phi^{n-1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \varphi^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \phi^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \varphi^{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^n - \varphi^n\right)$$

$$L_n = f_n(1,3) = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \phi^{n-1} + \frac{-5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \varphi^{n-1} = \phi^n + \varphi^n$$

c.v.d.

12.3. Altres expressions del terme general de la seqüència de Fibonacci.

En aquest apartat es demostren algunes de les moltes (ANNEX 3) expressions curioses del terme general de la seqüència de Fibonacci.

Notació: [x] expressa arrodoniment de "x" a nombre enter

Propietat [12.3.1]

$$F_n = \frac{F_{n-1} + \sqrt{5 \cdot F_{n-1}^2 - 4 \cdot (-1)^n}}{2}$$

En efecte:

Aplicant en primer lloc la propietat [6.3.4] i a continuació la [6.3.3] tenim

$$\frac{F_{n-1} + \sqrt{5 \cdot F_{n-1}^2 - 4(-1)^n}}{2} = \frac{F_{n-1} + L_{n-1}}{2} = \frac{F_n + F_{n-1} + F_{n-2}}{2} = \frac{F_n + F_n}{2} = F_n$$

c.v.d.

Propietat [12.3.2]

$$F_n = \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right]$$

En efecte:

De la fórmula de Binet [12.2.1] s'obté

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^n - \varphi^n\right) = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \underset{\Uparrow}{=} \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right]$$

$$\left(|\varphi| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| < 0.5 \right)$$

c.v.d.

Propietat [12.3.3]

$$F_n = \left[\phi \cdot F_{n-1}\right] \quad \text{per } n > 2$$

En efecte:

$$F_n - \phi \cdot F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^n - \varphi^n\right) - \phi \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^{n-1} - \varphi^{n-1}\right)$$

$$|| $$

$$\frac{\phi^n - \varphi^n \cdot \phi - \phi^n + \varphi^{n-1} \cdot \phi}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1} \cdot \phi - \varphi^n \cdot \phi}{\sqrt{5}}$$

$$|| \qquad \phi \cdot \varphi = -1 \quad [2.1.2]$$

$$\frac{-\varphi^{n-2} + \varphi^{n-1} \cdot \phi}{\sqrt{5}} = \varphi^{n-2} \cdot \frac{\varphi - 1}{\sqrt{5}}$$

Com n >2 tenim que

$F_n - \phi \cdot F_{n-1} = \varphi^{n-2} \cdot \frac{\varphi - 1}{\sqrt{5}} < 0.5$ i com F_n és enter $F_n = [\phi \cdot F_{n-1}]$

c.v.d.

Propietat [12.3.4]

$$F_n = \frac{\phi^n - F_{n-1}}{\phi}$$

En efecte:

Per la fórmula de Binet

$$\frac{\phi^n - F_{n-1}}{\phi} = \frac{\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^{n-1} - \varphi^{n-1}\right)}{\phi} = \frac{\sqrt{5}\phi^n - \phi^{n-1} + \varphi^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot \phi} = \frac{\phi^{n-1} \cdot \left(\sqrt{5} \cdot \phi - 1\right)}{\sqrt{5} \cdot \phi} + \frac{\varphi^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot \phi}$$

|| Per [2.1.2]

$$\frac{\phi^{n-1} \cdot \phi^2}{\sqrt{5} \cdot \phi} - \frac{\varphi^{n-1} \cdot \varphi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^n - \varphi^n\right)$$

L'última expressió és la fórmula de Binet del terme F_n[12.2.1]

c.v.d.

Propietat [12.3.5]

$$F_n = \phi^{n-1} + \varphi \cdot F_{n-1}$$

En efecte:

Aplicant [2.1.2] a la propietat anterior tenim

$$F_n = \frac{\phi^n - F_{n-1}}{\phi} = \frac{\phi^n}{\phi} - \frac{F_{n-1}}{\phi} = \phi^n - \frac{1}{\phi} \cdot F_{n-1} = \phi^{n-1} + \varphi \cdot F_{n-1}$$

c.v.d.

Propietat [12.3.6]

$$F_n = \frac{\varphi^n - F_{n-1}}{\varphi}$$

En efecte:

Per la fórmula de Binet tenim

$$\frac{\varphi^n - F_{n-1}}{\varphi} = \frac{\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^{n-1} - \varphi^{n-1}\right)}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} \cdot \varphi^n - \phi^{n-1} + \varphi^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot \varphi} = \frac{-\phi^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot \varphi} + \frac{\varphi^{n-1} \cdot \left(\sqrt{5} \cdot \varphi + 1\right)}{\sqrt{5} \cdot \varphi}$$

|| Per [2.1.2]

$$\frac{\phi^{n-1} \cdot \phi}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^{n-1} \cdot \varphi^2}{\sqrt{5} \cdot \varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\phi^n - \varphi^n\right)$$

L'última expressió és la fórmula de Binet del terme F_n[12.2.1]

c.v.d.

Propietat [12.3.5]

$$F_n = \varphi^{n-1} + \phi \cdot F_{n-1}$$

En efecte:

Aplicant [2.1.2] a la propietat anterior tenim

$$F_n = \frac{\varphi^n - F_{n-1}}{\varphi} = \frac{\varphi^n}{\varphi} - \frac{F_{n-1}}{\varphi} = \varphi^{n-1} - \frac{1}{\varphi} \cdot F_{n-1} = \varphi^{n-1} + \phi \cdot F_{n-1}$$

c.v.d.

Propietat [12.3.5]

$$F_n = \frac{F_{n-1}^2 - (-1)^n}{F_{n-2}}$$

En efecte:

Aplicant la identitat de Cassini[6.1.3] obtenim

$$\frac{F_{n-1}^2 - (-1)^n}{F_{n-2}} = \frac{F_{n-2}F_n}{F_{n-2}} = F_n$$

c.v.d.

12.4. Altres expressions del terme general de la seqüència Lucas.

Totes aquestes es demostren de forma anàloga als seus equivalents de Fibonacci

$$L_n = \left[\phi^{n-1}\right] L_n = \left[\phi \cdot L_{n-1}\right] L_n = \frac{\sqrt{5} \cdot \phi^n - L_{n-1}}{\phi} \quad L_n = \frac{\sqrt{5} \cdot \varphi^n + L_{n-1}}{\varphi}$$

13. RAÓ ENTRE TERMES CONSECUTIUSDE K-FIBOSÈRIES I ELS NOMBRES K-ÀURIS.

De fal·làcies matemàtiques n'hi ha moltes, una molt sorprenent i molt senzilla és la que demostra:

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

La manera de provar-ho és la següent:

Si anomenem $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ obtenim:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$$

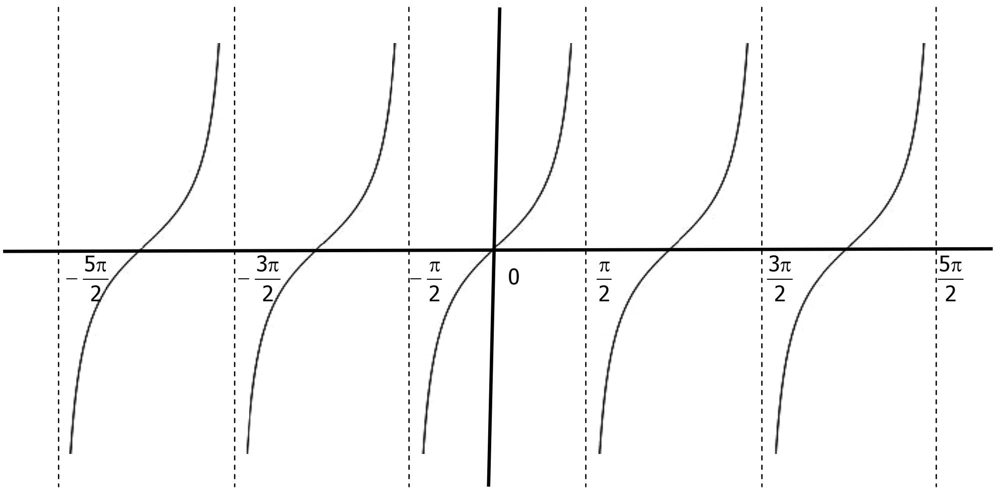
I d'això es dedueix: $S=1-S \quad \Rightarrow \quad S=\frac{1}{2}$

A primer cop d'ull és clar que aquest resultat és fals, però l'errada d'aquesta demostració és molt subtil: la suma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ no existeix i és fa un greu error en posar-li nom i treballar amb ella.

En aquest apartat s'exposen demostracions de teoremes i possibles generalitzacions sobre els nombres de Fibonacci que no són del tot certes, i finalment és dona una solució.

13.1. Lemes preliminars.

El gràfic de la funció y = tg x és



Com es tracta d'una funció periòdica de període π $\left(\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}(x+n\cdot\pi) \right)$, centrarem l'estudi en un període, concretament en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Per aquest motiu definim:

Definició [13.1.1]

Donat un nombre real $A \left(A \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \right)$ definirem el seu representant canònic mòdul π al nombre A_π que verifica:

$$\text{existeix un nombre enter n tal que } A = A_\pi + n\cdot\pi \quad \text{i} \quad A_\pi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

De la mateixa definició es desprèn l'existència i la unicitat del representant canònic mòdul π i les següents propietats

$$\operatorname{tg}(A) = \operatorname{tg}(A_\pi) \qquad \text{i} \qquad (A + n\cdot\pi)_\pi = A_\pi$$

Lema [13.1.2]

Per tot nombre $r \in (-\pi, \pi) - \{0\}$ es verifica que existeix un K > 0 de manera que per tot nombre real A es verifica $\left| (A+r)_\pi - A_\pi \right| \geq K$

En efecte:

Per definició tenim:

$$\begin{cases} (A+r)_\pi = A + r + n\cdot\pi \ \text{ amb } \ -\dfrac{\pi}{2} \leq A + r + n\cdot\pi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ A_\pi = A + m\cdot\pi \ \text{ amb } \ -\dfrac{\pi}{2} \leq A + m\cdot\pi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Canviant de signe la segona desigualtat i sumant convenientment obtenim:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} \leq A + r + n\cdot\pi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \geq -A - m\cdot\pi \geq -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\pi \leq r + (n-m)\cdot\pi \leq \pi$$

I com per hipòtesis $-\pi \leq r \leq \pi$ tenim que $|n - m| \leq 1$ i per tant si posem $K = \operatorname{Min}\{|r-\pi|, |r|, |r+\pi|\}$ obtenim

$$\left|(A+r)_\pi - A_\pi\right| = \left|A + r + n\cdot\pi - A - m\cdot\pi\right| = \left|r + (n-m)\cdot\pi\right| \geq K$$

c.v.d.

Lema [13.1.3]

$$\left| \operatorname{tg}(A) - \operatorname{tg}(B) \right| \geq \left| A_\pi - B_\pi \right|$$

En efecte:

Com la funció tangent és contínua i derivable en l'interval $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pel teorema del valor mig [2.5.5] tenim que existeix un $C \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}(A_\pi) - \operatorname{tg}(B_\pi) = \operatorname{tg}'(C)\cdot(A_\pi - B_\pi)$

Com la funció tangent es creixent en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ podem prendre valors absoluts

$$\left|\operatorname{tg}(A_\pi) - \operatorname{tg}(B_\pi)\right| = \operatorname{tg}'(C)\cdot\left|A_\pi - B_\pi\right|$$

Per [2.5.3] sabem que $\operatorname{tg}'(C) \geq 1$ i tenint en compte [13.1.1] podem escriure

$$\left|\operatorname{tg}(A) - \operatorname{tg}(B)\right| = \left|\operatorname{tg}(A_\pi) - \operatorname{tg}(B_\pi)\right| = \operatorname{tg}'(C)\cdot\left|A_\pi - B_\pi\right| \geq \left|A_\pi - B_\pi\right|$$

c.v.d.

13.2. Demostracions incorrectes.

La propietat més important de la seqüència de Fibonacci diu que el límit delaraó de dos termes consecutius de la successió de Fibonacci és el número auri:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

És freqüent trobar en llibres, articles i webs la següent demostració:

Si anomenem $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = x$ obtenim:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{x}$$

Del que es dedueix $x = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \phi \quad$ i $\quad x_2 = \varphi$

Com els termes són positius tenim que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$

Una demostració semblant la va fer el malaurat Mark Feinberg als 15 anys per demostrar que el quocient de termes consecutius de Tribonacci (per nosaltres la 3-fibosèrie $\{F_n(1,1,1)\}_n$) tendeix cap a la arrel positiva de polinomi $x^3 - x^2 - x - 1$ (per nosaltres l'arrel 3-àuria (Φ_3) del 3-fibopolinomi)

Si anomenem $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} = x$ obtenim:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}(1,1,1) + f_{n-2}(1,1,1) + f_{n-3}(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} + \frac{f_{n-2}(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} + \frac{f_{n-3}(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{f_{n-2}(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} + \frac{f_{n-3}(1,1,1)}{f_{n-2}(1,1,1)} \cdot \frac{f_{n-2}(1,1,1)}{f_{n-1}(1,1,1)} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Del que es dedueix $\quad x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \phi_3$

La demostració anterior es podria fer per qualsevol 3-fibosèrie $\{f_n(a,b,c)\}_n$ i obtindríem el mateix resultat.

Una demostració semblant podríem fer per provar que una k-fibosèrie de nombres reals positius tendeix cap al nombre k-auri:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k) + f_{n-2}(a_1,\cdots,a_k) + \cdots + f_{n-k}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} + \frac{f_{n-2}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} + \cdots + \frac{f_{n-k}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{f_{n-2}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} + \cdots + \frac{f_{n-k}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-k+1}(a_1,\cdots,a_k)} \cdot \frac{f_{n-k+1}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-k+2}(a_1,\cdots,a_k)} \cdots \frac{f_{n-2}(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-1}}$$

Del que es dedueix $x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-1}} \Rightarrow x^k - x^{k-1} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \phi_k$

Totes aquestes demostracions no tenen per què ser certes doncs parteixen del supòsit que la successió de raons de termes consecutius té límit, i per tant, caldria provar prèviament l'existència d'aquest límit, cosa que s'ignora i no té perquè ser certa en general.

13.3. Últims teoremes.

En aquest apartat aprofundirem una mica més en la relació entre la raó de dos termes consecutius d'una k-fibosèrie i el nombre k-auri (Φ_k) .

Proposició 13.3.1

La raó de dos termes consecutius d'una 2-fibosèrie de nombres reals positius convergeix cap el nombre auri .

En efecte:

Ho provarem aplicant la definició formal de límit.

En primer lloc observem que $R_n = \frac{f_{n+1}(a,b)}{f_n(a,b)} > 1$ i que:

$$R_n = \frac{f_{n+1}(a,b)}{f_n(a,b)} = \frac{f_n(a,b) + f_{n-1}(a,b)}{f_n(a,b)} = 1 + \frac{f_{n-1}(a,b)}{f_n(a,b)} \Rightarrow R_n = 1 + \frac{1}{R_{n-1}}$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \phi^2 - \phi = 1 \Rightarrow \phi \cdot (\phi - 1) = 1 \Rightarrow \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Anem a veure que la diferència entre la raó i el nombre auri tendeix a zero

$$|R_n - \phi| = \left|1 + \frac{1}{R_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{\phi}\right)\right| = \left|\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{\phi}\right| = \left|\frac{\phi - R_{n-1}}{R_{n-1} \cdot \phi}\right| = \frac{1}{\phi}\left|\frac{\phi - R_{n-1}}{R_{n-1}}\right| < \frac{1}{\phi}|R_{n-1} - \phi| = \frac{|R_{n-1} - \phi|}{\phi}$$

Repetint el procés arribaríem a:

$$|R_n - \phi| < \frac{|R_1 - \phi|}{\phi^{n-1}}$$

Com $\phi > 1$, el denominador tendeix a infinit, i per tant $|R_n - \phi|$ tendeix a zero

c.v.d.

Teorema [13.3.2]

Si una k-fibosèrie $\{f_n(a_1, \cdots, a_k)\}_n$ expressada en la base k-geomètrica té l'última component (component sobre $\left\{(\Phi_k)^n\right\}_n$) no nul·la aleshores la raó de dos termes consecutius de la k-fibosèrie tendeix al número k-auri.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(a_1, \cdots, a_k)}{f_{n-1}(a_1, \cdots, a_k)} = \Phi_k$$

En efecte:

El terme n de la k-fibosèrie s'expressarà:

$$f_n(a_1,\cdots,a_k) = A_1\cdot(g_1)^n + A_2\cdot(g_2)^n + \cdots + A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^n + A_k\cdot(\Phi_k)^n \quad \text{amb } A_k \neq 0$$

I per tant el límit de la raó de dos termes consecutius serà:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(a_1,\cdots,a_k)}{f_{n-1}(a_1,\cdots,a_k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_1\cdot(g_1)^n + A_2\cdot(g_2)^n + \cdots + A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^n + A_k\cdot(\Phi_k)^n}{A_1\cdot(g_1)^{n-1} + A_2\cdot(g_2)^{n-1} + \cdots + A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^{n-1} + A_k\cdot(\Phi_k)^{n-1}}$$

Dividint numerador i denominador entre $(\Phi_k)^{n-1}$ obtenim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{A_1\cdot(g_1)^n}{(\Phi_k)^{n-1}} + \dfrac{A_2\cdot(g_2)^n}{(\Phi_k)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^n}{(\Phi_k)^{n-1}} + \dfrac{A_k\cdot(\Phi_k)^n}{(\Phi_k)^{n-1}}}{\dfrac{A_1\cdot(g_1)^{n-1}}{(\Phi_k)^{n-1}} + \dfrac{A_2\cdot(g_2)^{n-1}}{(\Phi_k)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{A_{k-1}\cdot(g_{k-1})^{n-1}}{(\Phi_k)^{n-1}} + \dfrac{A_1\cdot(\Phi_k)^{n-1}}{(\Phi_k)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{A_1\cdot\Phi_k\left(\dfrac{g_1}{\Phi_k}\right)^n + A_1\cdot\Phi_k\left(\dfrac{g_2}{\Phi_k}\right)^n + \cdots + A_{k-1}\cdot\Phi_k\left(\dfrac{g_{k-1}}{\Phi_k}\right)^n + A_k\cdot\Phi_k}{A_1\cdot\left(\dfrac{g_1}{\Phi_k}\right)^{n-1} + A_1\cdot\left(\dfrac{g_2}{\Phi_k}\right)^{n-1} + \cdots + A_{k-1}\cdot\left(\dfrac{g_{k-1}}{\Phi_k}\right)^{n-1} + A_k}$$

Per la conjectura [10.6] els complexos $\dfrac{g_i}{\Phi_k}$ tenen mòdul més petit que 1 i per tant

$$|g_i| < |\Phi_k| \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g_i}{\Phi_k}\right)^n = 0$$

Així finalment obtenim:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{A_1\cdot\Phi_k\left(\dfrac{g_1}{\Phi_k}\right)^n + A_1\cdot\Phi_k\left(\dfrac{g_2}{\Phi_k}\right)^n + \cdots + A_{k-1}\cdot\Phi_k\left(\dfrac{g_{k-1}}{\Phi_k}\right)^n + A_k\cdot\Phi_k}{A_1\cdot\left(\dfrac{g_1}{\Phi_k}\right)^{n-1} + A_1\cdot\left(\dfrac{g_2}{\Phi_k}\right)^{n-1} + \cdots + A_{k-1}\cdot\left(\dfrac{g_{k-1}}{\Phi_k}\right)^{n-1} + A_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_k\cdot\Phi_k}{A_k} = \Phi_k$$

c.v.d.

Corolari [13.3.3]

La 3-fibosèrie de Feinberg ($\{F_n(1,1,1)\}_n$) expressada en la base 3-geomètrica té l'ultima component no nul·la, i per tant, pel teorema [13.2.2] , la raó de dos termes consecutius tendeix cap al nombre 3-auri (Φ_3)

En efecte:

La 3-fibosèrie de Feinberg ($\{F_n(1,1,1)\}_n$) expressada en la base 3-geomètrica serà:

$$\{f_n(1,1,1)\}_n = (c_1,c_2,c_3) = c_1\cdot\left\{(g_1)^{n-1}\right\}_n + c_2\cdot\left\{(g_2)^{n-1}\right\}_n + c_3\cdot\left\{(g_3)^{n-1}\right\}_n$$

Desenvolupant els tres primers termes de la combinació lineal obtenim el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 \cdot g_1 + c_2 \cdot g_2 + c_3 \cdot g_3 = 1 \\ c_1 \cdot (g_1)^2 + c_2 \cdot (g_2)^2 + c_3 \cdot (g_3)^2 = 1 \end{cases}$$

Si expressem els complexos en forma binòmica (ANNEX6)

$$c_1 = x + y\,i \qquad c_2 = z - t\,i \qquad c_3 = u + v\,i$$

$$g_1 = -0{,}41964337761 + 0{,}6062907292\,i \qquad (g_1)^2 = -0{,}1914878853 - 0{,}5088517769\,i$$

$$g_2 = -0{,}41964337761 - 0{,}6062907292\,i \qquad (g_1)^2 = -0{,}1914878853 + 0{,}5088517769\,i$$

$$g_3 = 1{,}8392867552 \qquad (g_3)^2 = 3{,}382975768$$

operem i separem les parts reals i imaginàries del sistema, obtenim un sistema de sis equacions i sis incògnites:

$$\begin{cases} x + z + u = 1 \\ -0{,}4196433776 \cdot x - 0{,}6062907292 \cdot y - 0{,}4196433776 \cdot z + 0{,}6062907292 \cdot t + 1{,}8392867552 \cdot u = 1 \\ -0{,}1914878853 \cdot x + 0{,}5088517769 \cdot y - 0{,}1914878853 \cdot z - 0{,}5088517769 \cdot t + 3{,}382975768 \cdot u = 1 \\ y + t + v = 0 \\ 0{,}6062907292 \cdot x - 0{,}4196433776 \cdot y - 0{,}6062907292 \cdot z - 0{,}4196433776 \cdot t + 1{,}8392867552 \cdot v = 0 \\ -0{,}5088517769 \cdot x - 0{,}1914878853 \cdot y + 0{,}5088517769 \cdot z - 0{,}1914878853 \cdot t + 3{,}382975768 \cdot v = 0 \end{cases}$$

Que té per solució

$$x = 0{,}2821918054 \qquad y = -0{,}3592471142$$
$$z = 0{,}2821918054 \qquad t = 0{,}3592471142$$
$$u = 0{,}4356163892 \qquad v = 0$$

L'error comés en els càlculs no supera de molt la mil·lèsima, per tant, podem assegurar que l'ultima component c_3 de la 3-fibosèrie de Feinberg no és nul·la i pel teorema [13.2.2]obtenim que la raó de dos termes consecutius tendeix al nombre 3-auri.

c.v.d.

Teorema [13.3.4]

Donats dos nombres reals a i b existeix una única 3-fibosèrie de nombres reals $\{f_n(a,b,c)\}_n$ que expressada en la base 3-geomètrica té l'última component nul·la.

En efecte:

Siguin $(x, y, 0)$ les components de $\{f_n(a,b,c)\}_n$ en la fase 3-geomètrica:

$$\{f_n(a,b,c)\}_n = x \cdot \left\{(g_1)^{n-1}\right\}_n + y \cdot \left\{(g_2)^{n-1}\right\}_n + 0 \cdot \left\{(g_3)^{n-1}\right\}_n \qquad \text{on } g_2 = \overline{g_1} \text{ i } g_3 = \Phi_3$$

Desenvolupant els dos primers termes de la combinació lineal obtenim el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot 1 + y \cdot 1 = a \\ x \cdot g_1 + y \cdot g_2 = b \end{cases}$$

Si expressem el complexos en forma binòmica:

$$x = x_1 + x_2 \cdot i \quad , \quad y = y_1 + y_2 \cdot i \quad , \quad g_1 = r + s \cdot i \quad , \quad g_2 = r - s \cdot i$$

Obtenim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \cdot i + y_1 + y_2 \cdot i = \text{real} \\ (x_1 + x_2 \cdot i)\cdot(r + s\cdot i) + (y_1 + y_2 \cdot i)\cdot(r - s\cdot i) = \text{real} \end{cases} \Rightarrow \quad y_2 = -x_2$$

Substituint a la segona expressió i operant obtenim:

$$(x_1 + x_2 \cdot i)\cdot(r + s\cdot i) + (y_1 - x_2 \cdot i)\cdot(r - s\cdot i) = \text{real}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 \cdot r - x_2 \cdot s + y_1 \cdot r - x_2 \cdot s) + (x_1 \cdot s + x_2 \cdot r - y_1 \cdot s - x_2 \cdot r)\cdot i = \text{real}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 \cdot r + y_1 \cdot r - 2x_2 \cdot s) + (x_1 \cdot s - y_1 \cdot s)\cdot i = \text{real} \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot s - y_1 \cdot s = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = y_1$$

Per tant hem obtingut que y és el conjugat de x

Si utilitzem notació polar

$$x = p_\alpha \quad , \quad y = p_{-\alpha} \quad , \quad g_1 = q_\beta \quad , \quad g_2 = q_{-\beta}$$

I desenvolupem una equació qualsevol de la combinació lineal tenim

$$x\cdot(r_1)^n + y\cdot(r_2)^n = f_{n+1}(a,b,c) \quad \Rightarrow \quad p_\alpha\cdot(q_\beta)^n + p_{-\alpha}\cdot(q_{-\beta})^n = f_{n+1}(a,b,c) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (p\cdot q^n)_{\alpha+n\beta} + (p\cdot q^n)_{-\alpha-n\beta} = f_{n+1}(a,b,c) \quad \text{real} \quad \Rightarrow \quad f_{n+1}(a,b,c) = 2\cdot p\cdot q^n\cdot\cos(\alpha+n\beta)$$

Si fem n = 2 obtenim la unicitat i el valor de c

$$c = f_3(a,b,c) = 2\cdot p\cdot q^2\cdot\cos(\alpha+2\beta)$$

c.v.d.

Teorema [13.3.5]

Si una 3-fibosèrie de nombres reals $\{f_n(a,b,c)\}_n$ expressada en la base 3-geomètrica té l'última component nul·la aleshores el límit del quocient de dos termes consecutius no existeix.

En efecte:

Si apliquem el resultat de teorema anterior $f_{n+1}(a,b,c) = 2\cdot p\cdot q^n\cdot\cos(\alpha+n\beta)$ al quocient de dos termes consecutius d'una 3-fibosèrie obtenim:

$$\frac{f_{n+1}(a,b,c)}{f_n(a,b,c)} = \frac{2\cdot p\cdot q^n\cdot\cos(\alpha+n\cdot\beta)}{2\cdot p\cdot q^{n-1}\cdot\cos(\alpha+(n-1)\cdot\beta)} = q\cdot\frac{\cos(\alpha+(n-1)\cdot\beta+\beta)}{\cos(\alpha+(n-1)\cdot\beta)}$$

$$\| \quad \text{cosinus de la suma d'angles}$$

$$q\cdot\frac{\cos(\alpha+(n-1)\cdot\beta)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha+(n-1)\cdot\beta)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha+(n-1)\beta)}$$

$$\|$$

$$q\cdot\left(\cos(\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta)\cdot\sin\beta\right)$$

Per tant una manera d'expressar el quocient de dos termes consecutius és:

$$\left\{\frac{f_{n+1}(a,b,c)}{f_n(a,b,c)}\right\}_n = \left\{\, q\cdot\left(\cos(\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta)\cdot\sin\beta\right)\,\right\}_n$$

Per demostrar que no convergeix anem a veure que el valor absolut de la diferència entre dos termes consecutius d'aquesta successió està acotada inferiorment per un nombre positiu:

$$\left| \left[q\cdot\left(\cos(\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta)\cdot\sin\beta\right) \right] - \left[q\cdot\left(\cos(\beta) - tg(\alpha+n\cdot\beta)\cdot\sin\beta\right) \right] \right|$$

$$||$$

$$\left| (q\cdot\sin\beta)\cdot\left(tg(\alpha+n\cdot\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta) \right) \right| = \left| q\cdot\sin\beta \right| \cdot \left| tg(\alpha+n\cdot\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta) \right|$$

Aquesta última expressió segons la propietat [13.1.3] es pot acotar inferiorment de la següent manera:

$$\left| q\cdot\sin\beta \right| \cdot \left| tg(\alpha+n\cdot\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta) \right| \geq \left| (q\cdot\sin\beta) \right| \cdot \left| (\alpha+n\cdot\beta)_\pi - (\alpha+(n-1)\cdot\beta)_\pi \right|$$

i per la propietat [13.1.2] obtenim l'acotació que volíem demostrar:

$$\left| (q\cdot\sin\beta) \right| \cdot \left| (\alpha+n\cdot\beta)_\pi - (\alpha+(n-1)\cdot\beta)_\pi \right| \geq \left| (q\cdot\sin\beta) \right| \cdot K \quad \text{amb } K > 0$$

c.v.d.

Teorema de Ranchal [13.3.6]

Per tot k > 2 existeixen k-fibosèries de nombres reals $\{f_n(a_1,\cdots,a_k)\}_n$ que el límit del quocient de dos termes consecutius no existeix.

En efecte:

Considerem una k-fibosèriede nombres reals que en la base k-geomètrica s'expressi:

$$\{f_n(a_1,\cdots,a_k)\}_n = (0,\cdots,0,z,\bar{z},0,\cdots,0) = z\cdot\left\{(g_{i-1})^n\right\}_n + \bar{z}\cdot\left\{(g_i)^n\right\}_n$$

On g_{i-1} sigui el conjugat de g_i

Si anomenem:

$$z = x_1 + x_2\cdot i = p_\alpha \quad , \quad \bar{z} = x_1 - x_2\cdot i = p_{-\alpha} \quad , \quad g_1 = r + s\cdot i = q_\beta \quad , \quad g_2 = r - s\cdot i = q_{-\beta}$$

I fem els mateixos passos que en els teoremes [13.2.4] i [13.2.5] obtindrem

$$f_{n+1}(a_1,\cdots,a_k) = 2\cdot p\cdot q^n\cdot\cos(\alpha+n\cdot\beta)$$

$$\frac{f_{n+1}(a_1,\cdots,a_k)}{f_n(a_1,\cdots,a_k)} = q\cdot\left(\cos(\beta) - tg(\alpha+(n-1)\cdot\beta)\cdot\sin\beta\right)$$

Que tal i com s'ha raonat en el mateix teorema [13.2.5] no convergeix.

c.v.d.

14. CONCLUSIONS

El teorema de Ranchal és potser on culmina aquest treball en quant a innovació, si realment no s'havia descobert amb anterioritat. Si aquest fos el cas, es demana disculpes altra vegada i es retira el nom que se li ha posat, donat que no es tindria la potestat d'anomenar-lo en aquest TR.

El interès real d'aquest teorema és sobretot el demostrar la necessitat de anar amb compte a l'hora de fer demostracions i a l'hora de creure-se-les. Sempre s'ha de intentar comprovar les demostracions, fins i tot quan veus la mateixa propietat i demostració a molts llocs. El teorema, com s'ha vist en el treball, diu que per k>2 existeixen k-fibosèries on no existeix el límit d'un terme entre l'anterior, i per tant anul·lala demostració que els atorga a totes un límit concret, però quan el tenen és realment aquell que es deia, que és gairebé sempre.

Una altra curiositat sobre ell és que no és el que es pretenia demostrar, doncs es creia que tindria sempre límit (i la demostració era correcta si el límit existia, doncs l'error estava en pressuposar-ne l'existència), però al mirar les casuístiques es van veure aquestes en que no en tenien pas.

De totes maneres, val a dir, que tant en la de Fibonacci com en la de Tribonacci, el límit existeix, i per tant, tant la demostració de Feinberg comla de Keplersón correctes.

L'apartat de fibonumeració i nims, si bé no és tan complex com el de les k-fibosèries, i precisament per això, és molt més assequible i distès, així que en pot gaudir gent amb menys habilitats i coneixements matemàtics. A més a més té un caràcter anecdòtic adequat per a divertiments matemàtics.En aquest apartat s'ha demostrat com s'intentava, que l'estratègia guanyadora d'aquests nims té a veure amb Fibonacci i més concretament amb el sistema de numeració inventat que s'hi basa, en Fibonacci.

En canvi, en l'apartat de Hopper, a pesar de que a molts llocs es diu que s'han de fer amb nombres de Fibonacci,s'ha demostrat que són més convenients que no pas necessaris. S'ha arribat a la conclusió que els nombres de Fibonacci es necessiten per a algunes de les creades, però que la trampa es pot fer sempre amb 2 conjunts de 2 nombres primers entre ells que compleixin una certa propietat.

De totes maneres aquest TR ha deixat camins oberts a futures investigacions:

- Faltaria una manera per a trobar o reconèixer l'enèsim fiboparell i fibosenar mitjançant una fórmula en comptes de necessitar una taula. Sense això, la tècnica guanyadora del nim de Wythoff és poc eficient.
- També cal fer un estudi complert de la convergència de les raons de termes consecutius de k-fibosèries.
- També s'han observat algunes pautes que no han quedat demostrades, però desgraciadament no s'ha pogut invertir el temps i l'esforç per a que deixés de ser així, perquè el TR no es podia allargar més. De totes maneres, animo a qualsevol possible lector a intentar demostrar-les. Entre elles tenim:
  - Si $n = FP_m$, aleshores $FP_n = FS_m - 1$
  - Si $n = FS_m$, aleshores $FP_n = FP_m + n$
  - Si k és parell, sembla que l'arrel real negativa del k-fibopolinomitendeix a -1 en créixer la k.
  - No s'ha aconseguit demostrar que les altres arrels del k-fibopolinomi són menors en mòdul que la real, però sembla que mai tenen mòdul major a 1. Encara que aquest últim punt matemàtics de la UPC l'han comprovat empíricament amb l'ordinador i han dit que sembla cert, però han recomanat deixar-lo sense demostrar per la seva complexitat.
  - I algunes d'altres.

15. BIBLIOGRAFIA.

15.1. Llibres.

MARTIN GARDNER. "*Mathematics, Magic and Mystery*". DovePublications, Nova York 1956

MARTIN GARDNER."*Carnaval Matemático*". Alianza Editorial, 1995. El libro de bolsillo 778.

MARTIN GARDNER."*Circo Matemático*" . Alianza Editorial, 1983. El libro de bolsillo 937.

ESTEBAN RODRIGUEZ SERRANO."*Fibonacci y los números mágicos*". El Rompecabezas, 2010.

CARL B. BOYER. "*Historia de las matemáticas*". Alianza Editorial,2007.

N. N. VOROBIOV."*Números de Fibonacci*". Editorial Mir, 1974.ColecciónLecciones Populares de Matemáticas.

A. I. MARKUSHEVICH."*Sucesionesrecurrentes*". Editorial Mir,1981.ColecciónLecciones Populares de Matemáticas.

RICARDO MORENO CASTILLO. "*Fibonacci*". Editorial Nivola, 2004.

GEORGE POLYA. "*Matemática y razonamiento plausible*". Editorial Tecnos, 1966.

JOSEPH D. AGNESE. "*Fibonacci, el soñador de números*". Juventud, 2011

15.2. Articles de revistes.

MARTIN GARDNER . "*Juegos Matemáticos*". Scientific American, abril de 1973

MARTIN GARDNER . "*Juegos Matemáticos*". Scientific American, mayo de 1977

15.3. Webs.

CURTIS COOPER. "*The Fibonacci Quarterly*". http://www.fq.math.ca/

KARL DILCHER. "*The Fibonacci Association*". http://www.mscs.dal.ca/fibonacci/

RON KNOTT'S. "*Fibonacci Numbers and the Golden Section*". http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/

DONALD E. SIMANEK. "*Fibonacci Flim-Flam*". http://www.lhup.edu/~dsimanek/pseudo/fibonacc.htm

DHEERA VENKATRAMAN. "*Fooplot*". http://fooplot.com "*Calculadora on line de raices de polinomios*".http://xrjunque.nom.es/precis/rootfinder.aspx