# Aproximació a l'univers keplerià

JACOBI

*Quan creus que coneixes totes les respostes, arriba l'Univers i et canvia totes les preguntes.*

J. F. Pinto,
mestre

# TAULA DE CONTINGUTS

# 1. INTRODUCCIÓ

L'univers és quelcom misteriós, secret, fascinant, imprevisible i meravellós. Potser és per això que Johannes Kepler va il·lustrar tota la humanitat amb les seves aportacions científiques, matemàtiques i astronòmiques completament revolucionàries, i que han marcat la concepció del món i, per tant, la vida dels humans des de llavors.

Enmig d'un món on es creia en les òrbites circulars, en el geocentrisme i en què la religió catòlica va arribar a ser preponderant, van sorgir, respectivament, les idees avantguardistes d'Aristarc de Samos i de Copèrnic. Aristarc de Samos (310 aC – 230 aC), nascut a Grècia, va ser el primer ésser humà a proposar un model heliocèntric per al Sistema Solar, és a dir, la Terra ja no ocupa el centre del nostre univers, sinó que ho fa el Sol. I, centenars d'anys més tard, Nicolau Copèrnic (1473 – 1543), un astrònom i matemàtic polonès, va creure en l'afirmació d'Aristarc de Samos, tot desenvolupant molt més aquesta idea. Un cop la societat, anys després, hagué acceptat el model heliocèntric del Sistema Solar, va aparèixer Johannes Kepler. Nascut l'any 1571, va ser un astrònom alemany cabdal en la història de la humanitat gràcies al seu descobriment basat en el moviment orbital dels planetes, obra plasmada, bàsicament, en l'*Astronomia Nova*.

Aquest llibre, de caràcter científic, conté l'explicació del perquè del moviment el·líptic dels planetes. El descobriment orbital en el seu si va esdevenir una feina costosa i difícil per a Kepler: emprà quasi tota la seva vida per resoldre aquest misteri universal, cosa que mai abans no s'havia aconseguit. La intenció inicial de Johannes Kepler era demostrar que l'univers es regia per un moviment constant i perfecte. El seu convenciment va dur-lo, molt sovint, a intentar demostrar que els seus avantpassats tenien raó, que l'univers es movia en funció del conjunt de les figures geomètriques perfectes conegudes fins al moment. Kepler, però, sempre trobava incongruències, errors i indeterminacions tant en els principis i els procediments usats com en les conclusions extretes. Per aquest motiu l'astrònom hagué de crear nous postulats, noves lleis i noves vies per tal d'explicar el moviment de les òrbites planetàries.

L'obra de Kepler es fonamenta en els estudis de Tycho Brahe, un astrònom danès, el qual va dedicar gran part de la seva vida a estudiar tant el planeta Mart com diversos planetes més. Les seves observacions entorn els distints planetes mostren un elevat grau de precisió i més, si tenim en compte, els mitjans astronòmics de què disposava. És per això que Kepler, aprofitant una quantitat ingent d'observacions marcianes molt precises, es fixà en aquest planeta al voltant del qual realitzà la major part de les seves teories i descobriments.

Tot i que mai no m'havia plantejat el meu interès per l'astronomia, de cop em sentí atreta per tot allò que fa referència a l'univers i a les estrelles i vaig decidir endinsar-m'hi.

Començar quelcom nou i desconegut sempre és difícil, dur i temorós. Però un cop es creua la frontera, el plaer és immens. Estudiar l'univers no m'ha proporcionat res més que no fos això: plaer. Plaer per descobrir on vivim, més enllà de l'àmbit terrestre; plaer per haver indagat sobre un terreny escarpat i desconegut per a mi; plaer per haver après a no rendir-me, a pensar i a seguir endavant; plaer per haver descobert en mi una nova passió; plaer per haver, en definitiva, conegut una ínfima part de l'univers que ens envolta. I tot aquest gaudi no l'hauria aconseguit si no fos gràcies a l'existència de Johannes Kepler.

La meva intenció, en aquest treball de recerca, no és altra que comprovar, demostrar i, per sobre de tot, entendre, amb els elements i eines matemàtiques estudiades durant el batxillerat, alguns dels càlculs i les deduccions de Johannes Kepler incloses dins de l'*Astronomia Nova*.

La font base que ha permès la realització d'aquest treball de recerca han estat diversos llibres i pàgines webs escrites en anglès, a partir de les quals m'he documentat i he desenvolupat el treball. També, sortosament, he pogut gaudir del manuscrit original en llatí de Johannes Kepler del qual, com veureu més endavant, apareixen alguns fragments dins el treball.

Per això ha calgut fer un viatge en el temps per tal de contextualitzar el saber matemàtic des dels prehistòrics fins als descobriments de Johannes Kepler. Seguidament, he cregut necessari un estudi dels sistemes de coordenades, l'explicació de les oposicions del planeta Mart i la duració del seu període.

Després he aprofundit en un dels temes més importants de l'obra kepleriana: la hipòtesi substituta, en què es refuta la idea de l'equant, una de les idees ptolemaiques més característiques. A continuació hi apareixen els dos grans blocs a nivell astronòmic: l'òrbita de la Terra i l'òrbita de Mart. I, en la darrera part del treball, s'hi exposen les conclusions finals.

## 2. RECORREGUT HISTÒRIC

Vist amb perspectiva, les matemàtiques van començar a desenvolupar-se molt més aviat del que ens podríem arribar a imaginar. I, amb elles, es va iniciar el coneixement i l'interès per l'astronomia.

Així com tots els éssers humans necessitem el càlcul del temps en les nostres vides, no és difícil imaginar-se que els homes primitius també el necessitaren. S'han trobat indicis que, d'una manera molt reduïda, coneixien algunes relacions matemàtiques i la manera de calcular el temps tot basant-se en els estels.

Les matemàtiques, però, quan van començar a modelar-se va ser amb els Egipcis. Encara que, en una societat com l'egípcia, la pluja, els trons, la calor i les sequeres s'atribuïssin als desitjos dels déus i les deesses, era molt important per a ells saber l'època de l'any on es trobaven i quina era l'hora del dia. Va ser per això que, al cap dels anys d'utilitzar obeliscs com a rellotges solars, van adonar-se que l'ombra varia segons l'hora del dia. A partir d'aquesta deducció tan simple, van postular que l'òrbita del Sol era regida per un moviment circular i, aprofitant el seu període, van arribar a determinar el cicle anual tal i com el coneixem actualment (365 dies).

Els egipcis van fer possible les matemàtiques tal i com les entenem avui en dia: van ser els primers a utilitzar fraccions i a intentar resoldre problemes de caire geomètric.

Posteriorment, cal destacar l'antiga Babilònia. Els babilònics varen ser, també, grans matemàtics i, per primer cop, grans astrònoms. Revolucionaren, en cert grau, el panorama matemàtic; van introduir el sistema sexagesimal tot tenint en compte la posició dels números, s'aproximaren al teorema de Pitàgores (sense conèixer-lo, van poder esbrinar certs valors de terns pitagòrics) i van inventar-se un símbol per denotar un espai buit, el 0. Crearen taules d'astronomia babilònica on introduïren una divisió de l'arc en 360º, encara vigent. Van crear el zodíac, el qual també està present en les nostres vides.

Com podem observar, tant els egipcis com els babilònics han deixat grans pinzellades en la història de les matemàtiques. L'èxtasi, però, podríem dir que va arribar quan aparegueren els grecs, tot capgirant el panorama matemàtic.

Els grecs van ser els primers éssers vius capaços de transformar el saber empíric de civilitzacions més antigues (babilònics, egipcis...) en unes matemàtiques teòriques, és a dir, en una ciència que demostra les seves bases gràcies a les deduccions a partir d'un conjunt d'axiomes, postulats i definicions.

Els matemàtics i astrònoms grecs, després d'observar i observar el cel, les estrelles, la lluna i el Sol, van adonar-se que el Sol apareixia, de bon matí, per l'orient i es ponia, al capvespre, per l'occident i que el mateix passava amb la lluna. A simple vista van poder concloure que es tractava d'un moviment circular entorn la Terra. Aquests coneixements no varen ser en va; a partir d'aquí, els grecs, van sentir la necessitat d'estudiar la geometria i les formes en què aquesta es derivava. Podríem afirmar que aquests varen ser els inicis de les seves matemàtiques. Forma part del món grec, també, l'afirmació de l'esfericitat terrestre.

Molts filòsofs, principalment, van estudiar les matemàtiques. És important veure el recorregut al qual van estar sotmeses i les idees i els continguts que van aportar-nos els grans grecs.

Milet va ser una colònia situada a Àsia Menor. D'aquell indret del món van aparèixer dos grans filòsofs i astrònoms: Tales de Milet, Anaximandre.

Del primer filòsof del qual sentim parlar és Tales. Va aconseguir mesurar l'altura d'una piràmide egípcia tot tenint en consideració l'ombra de la piràmide al moment exacte en què la seva pròpia ombra mesurava el mateix que ell (va ser possible mitjançant relacions entre angles i triangles). Tales, a part, també va ser capaç de predir un eclipsi solar l'any 585 aC i, gràcies a aquest fet va esdevenir un personatge conegut en aquella època. El pensament filosòfic de Tales, però, es basava en l'aigua com a origen de totes les coses. No és estrany, doncs, que arribés a la conclusió que la Terra era plana, que descansava sobre una gran superfície d'aigua i tenia el cel com a embolcall.

El segon filòsof de Milet, Anaximandre, pensava que el nostre món simplement forma part d'un conjunt de mons que esdevenen en alguna cosa que ell va qualificar com quelcom "indefinit". Com a conseqüència d'aquest pensament, va sorgir l'astronomia geocèntrica (la Terra era el centre de tot l'univers). Segons Anaximandre, la Terra se sostenia enmig del no-res sense cap base falsable, és així que ell era dels que creien en el sentit comú.

Al cap d'un cert temps, Anaxàgores, primer filòsof de la ciutat d'Atenes, interessat per l'astronomia, sorprengué amb un nou descobriment: quan va adonar-se que la secció il·luminada de la lluna sempre és la que està de cara al Sol, afirmà que la lluna no lluu per la seva pròpia llum sinó pel reflex de la llum solar. Va ser el primer, també, a donar una explicació correcta a les fases de la lluna: aquestes són producte dels canvis de posició respecte la Terra i el Sol. Anaxàgores opinava que tots els astres estaven formats per la mateixa matèria que la Terra. A aquesta afirmació, hi va arribar després d'haver estudiat un meteorit. A més, va ser capaç d'explicar el perquè dels eclipsis solars.

La geometria va seguir sent investigada i tractada. Aquesta vegada fou Pitàgores qui descobrí el teorema que porta el seu nom: la suma dels quadrats dels catets d'un triangle rectangle és igual al quadrat de la hipotenusa d'aquest triangle. Aquest teorema, però, era relativament conegut pels egipcis i pels babilònics, tot i que els pitagòrics[1] varen ser els primers a demostrar-lo teòricament. Anys després, un grup de pitagòrics van arribar a la descoberta dels nombres irracionals, així com que la Terra girava però l'esfera celeste es mantenia fixa.

Com tots coneixem, després aparegué una figura fonamental al món de la filosofia: Plató. Plató, a part de ser un dels grans filòsofs al llarg de la història universal, fou matemàtic. No va proporcionar-nos cap gran descobriment; el que li devem és el mètode i les idees que ens aportà. Es concentrà, sobretot, en la idea de demostració i va insistir en les definicions precises i en les hipòtesis clares. Aquestes bases, més endavant, les prengué Euclides a qui li van servir d'enfocament per a les seves matemàtiques. Pel que fa l'univers, Plató explicà la idea que la Terra és esfèrica, que va ser acceptada tot i les conviccions d'aquella època (creien que si es col·locaven a la part inferior de la terra, caurien). Plató, sobretot, es basava en l'aparença. Ell interpretava que

[1] Comunitat de pensadors liderada per Pitàgores

com que el cel està situat prop dels déus i de les deesses, estava prop de la perfecció. I, en aquest cas, la perfecció significa el moviment circular amb una velocitat constant. Això suposava que les òrbites dels planetes eren circulars i la translació es realitzava amb una velocitat constant.

A partir d'aquí les matemàtiques varen ser introduïdes de manera sistemàtica a l'astronomia.

Aristòtil, un altre gran filòsof grec, postulà una teoria amb el següent enunciat: la Terra no es mou i té forma d'esfera perquè així és la forma aparent dels altres astres i la forma que ens revela l'ombra de la pròpia Terra quan hi ha un eclipsi lunar. Per tant, per a Aristòtil, la Terra ocupa el centre de l'univers, no té rotació i és esfèrica.

Heràclit, més endavant, digué que el moviment de les estrelles fixes es deu a la rotació de la Terra en sentit contrari. També explicà, tot i que va passar totalment desapercebut, que les variacions de lluminositat de Venus i Mercuri eren degudes al fet que ambdós planetes giraven al voltant del Sol i no de la Terra.

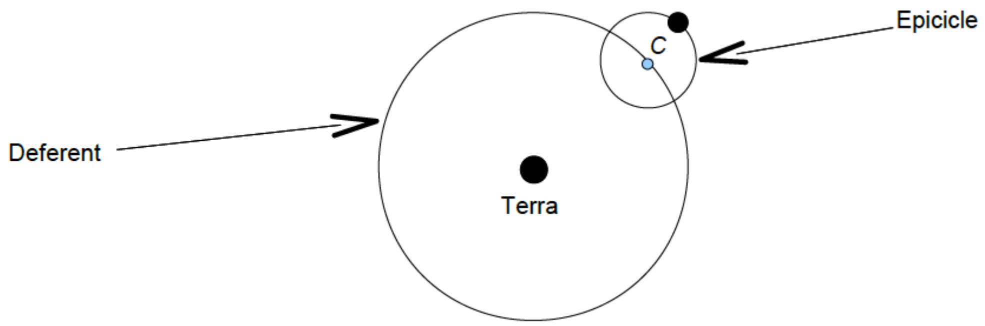
Més endavant es començà a desenvolupar la geometria de seccions còniques i, fins i tot, es va arribar a introduir les coordenades esfèriques. Durant aquest període de temps l'astronomia passà a ser una ciència matemàtica.

Euclides fou també un matemàtic important en aquesta època. Enuncià les lleis del moviment diürn. És conegut, també, per ser capaç de definir la paraula cercle tal i com la coneixem actualment i també fou qui desenvolupà la teoria de les coordenades esfèriques, mencionada anteriorment.

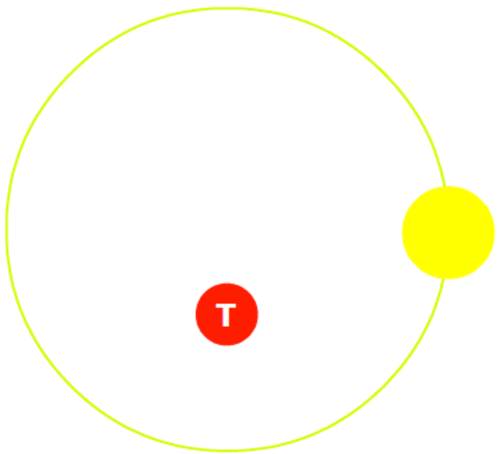
És important, també, destacar la figura d'Arquímedes, un filòsof i científic grec. Bàsicament és conegut pel principi que duu el seu nom, però pel que fa a les matemàtiques també fou un personatge important. Va ser capaç d'anticipar-se a molts descobriments moderns, com poden ser el càlcul integral; el descobrí mitjançant els seus estudis d'àrees i de volums de figures sòlides i corbes i àrees de figures planes. Va dur a terme, a més, moltes demostracions certes.

La gran revolució arribà, però, amb Aristarc de Samos i amb els seus postulats. Aristarc admet que la Terra és esfèrica i proposa, per primer cop en tota la història, una hipòtesi heliocèntrica pel nostre sistema planetari. La Terra no està situada al centre de l'univers; al centre hi ha el Sol. La Terra girava entorn el Sol en una òrbita circular. Malgrat que l'essència dels seus postulats era correcta, fou jutjat per atrevir-se a dir quelcom totalment diferent i revolucionari. Observà, també, una gran relació entre les observacions astronòmiques i els mètodes matemàtics, raó per la qual se'l considera el precursor de la trigonometria.

Al cap d'unes dècades sense cap fet rellevant, Claudi Ptolomeu va tornar a il·luminar-nos aquest cop amb una nova proposta: volia intentar explicar el canvi de lluentor dels planetes i, d'aquí, sorgí el sistema ptolemaic. En aquest model, l'univers continua sent geocèntric però amb petites variacions i complicacions: inventa el sistema epicicle – deferent (sistema il·lustrat a la figura a continuació). Les possibilitats d'aquesta invenció són enormes ja que

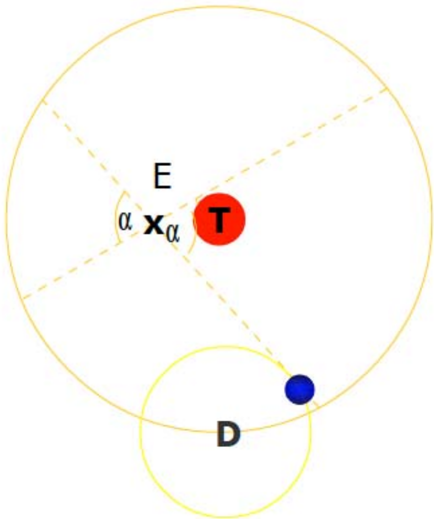



juga amb velocitats angulars, radis i sentis de gir. Se suposa que cada planeta recorre una òrbita circular, anomenada epicicle, el centre del qual recorre una circumferència centrada a la Terra anomenada deferent. Les peculiaritats del moviment de cada planeta són explicades per la combinació d'un diferent nombre d'epicicles i deferents, per les diferents dimensions relatives d'aquestes i pels diferents períodes amb què són coneguts. Per tant, podríem explicar qualsevol moviment aparent dels planetes amb aquest model. A part dels epicicles, Ptolomeu pensà també en una altra manera d'explicar els moviments aparents evitant la




L'excèntric

complicació dels epicicles: cercles imaginaris sobre els quals es mouen els planetes al voltant de la Terra, que no ocupa el centre de l'òrbita dels planetes, anomenat sistema excèntric.



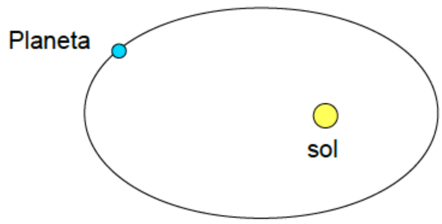
L'equant

Més endavant, Ptolomeu tingué una altra idea que es basava en el fet que la Terra continuava situada al centre del cercle deferent però amb una variació. S'hi introdueix un punt E (equant), desplaçat respecte la Terra de tal manera que el centre de l'epicicle es mou amb velocitat angular constant respecte l'equant. Això, des del punt de vista terrestre, suposa que la velocitat angular del centre de l'epicicle no sigui constant, per tant, implica la negació del principi platònic i aristotèlic. Aquesta última variació, posteriorment, influí molt en Johannes Kepler.

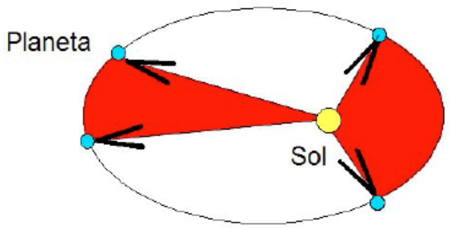
Després d'aquesta època totalment brillant respecte a les matemàtiques, s'entrà en la foscor. No va ser fins a Nicolau Copèrnic que tot el tema de l'astronomia es reprengué de cop.

Copèrnic va ser un astrònom molt important del segle XV. Va provar de construir un nou sistema astronòmic tot mantenint-hi present la idea de les òrbites circulars. Cap a 1539 redacta un escrit en el qual manifesta que el model geocèntric de Claudi Ptolomeu és erroni i que al centre del sistema planetari hi ha el Sol i no la Terra. Ordenà els planetes correctament i digué que a l'última esfera s'hi troben les estrelles fixes. Explica, a més a més, els moviments de rotació i de translació de la Terra, que circula al voltant del Sol amb velocitat angular constant, i el moviment retrògrad dels planetes coneguts fins aleshores: Mart, Júpiter, Saturn, Venus i Mercuri. Abandonà, a més, la idea de l'equant perquè violava el principi del moviment circular uniforme. També va ser capaç d'explicar la gravetat com a efecte terrestre i no com a efecte natural d'ordre còsmic. A més a més, Copèrnic, fou el primer a fer una demostració senzilla de la fórmula fonamental de la trigonometria esfèrica. El més important de tot, però, va ser que Nicolau Copèrnic presentà una teoria heliocèntrica avalada per una base matemàtica per primer cop en la història de la humanitat.

Quan les institucions cultes, l'església i tothom va haver assimilat el que Nicolau Copèrnic havia descobert, aparegué Johannes Kepler, una altra figura pilar de l'astronomia i del món de les òrbites planetàries. Kepler va ser un astrònom i matemàtic alemany, nascut l'any 1571 i mort l'any 1630. Representa una figura clau en el món científic. Així és, que fou capaç de donar una explicació correcta a tot el que té relació amb els moviments de l'univers. Per començar, cal dir que el planeta Mart va esdevenir de vital importància pels seus descobriments i per la seva vida. Per al seu estudi d'adaptació del model proposat amb les observacions va utilitzar aquest planeta, Mart. Totes les observacions que utilitzà eren propietat de Tycho Brahe que, quan aquest morí, se les apropià sense permís de la família de Brahe. En conseqüència, van produir-se grans disputes pel llegat de l'observador. Finalment, però, se les quedà Kepler. L'astrònom va determinar que el pla de l'òrbita marciana està inclinat 1,58' respecte de l'eclíptica, que és el pla geomètric que conté l'òrbita de la Terra. Va adonar-se que l'òrbita de la Terra no és circular, sinó de forma el·líptica, i la seva velocitat no era uniforme. Totes les conclusions foren publicades al llibre *Astronomia Nova*, on es poden observar els seus pensaments plens de principis d'idees newtonianes. En aquest llibre, donà a conèixer les dues primeres lleis que porten el seu nom. La primera llei ens anuncia que els planetes descriuen òrbites el·líptiques de tal manera que a un dels focus està situat el Sol, i la segona diu que el vector de posició de qualsevol planeta respecte al Sol cobreix àrees iguals de l'el·lipse en temps iguals. La tercera llei, que postula que els quadrats dels períodes de revolució són proporcionals als cubs de les distàncies mitjanes dels planetes al Sol, es publicà quinze anys més tard. A part dels seus



Descripció gràfica 1a llei de Kepler



Descripció gràfica 2a llei de Kepler

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = k$$

Fórmula que descriu la 3a llei de Kepler descobriments astronòmics, Kepler també va endinsar-se en el món de l'òptica. Durant aquesta època, va mantenir contacte amb Galileu. Kepler, després que Galileu fabriqués el telescopi i observés diversos planetes, es va convertir en un ferm defensor de les idees de Galileu, el qual, alhora, creia en Copèrnic.

La meva intenció fins aquí ha estat elaborar un petit resum on he intentat plasmar la història de les matemàtiques aplicades a l'astronomia.

# 3. SISTEMES DE COORDENADES

Els sistemes de coordenades representen un conjunt de valors que ens permeten definir inequívocament un punt en l'espai o un element geomètric respecte un sistema de referència[2].

És per això que les coordenades han resultat de vital importància a l'hora de poder identificar un objecte, tant a l'espai com a terra ferma.

## 3.1 TIPUS DE COORDENADES

L'univers està constituït per diferents tipus de plans, de situacions i de perspectives. És així, doncs, que els humans hem pogut distingir entre els sistemes de coordenades diferents tipus.

### 3.1.1 Coordenades geogràfiques

Ens indiquen totes les posicions possibles en l'àmbit terrestre. Per definir-les, hem de tenir en compte:

- Meridià: semicercles màxims situats entre els pols que passen per l'Equador. El meridià primari, el més important, és el conegut amb el nom de meridià de Greenwich.
- Latitud: angle d'elevació mesurat sobre qualsevol meridià respecte l'Equador, en direcció als pols.
- Línia equatorial: línia imaginària que dóna la volta a un planeta o a qualsevol cos celeste i es manté equidistant dels dos pols. És el cercle de màxima perpendicularitat a l'eix de rotació del planeta en qüestió i, en referència la Terra, la divideix en l'hemisferi nord i l'hemisferi sud.
- Paral·lel o línia de latitud: línies imaginàries paral·leles entre elles que donen la volta a la terra i són perpendiculars a l'eix de gir de la Terra.

[2] Sistema de de referència: conjunt d'eixos, punts o plans que conflueixen en un punt anomenat origen i a partir dels quals es calculen les coordenades

- Longitud: angle format entre el meridià on es troba el punt que és buscat i el meridià de Greenwich. Es mesura de 0º a 180º a l’est o a l’oest respecte el meridià de Greenwich.

### 3.1.2 Coordenades esfèriques

Formen un sistema de coordenades que és emprat per determinar unívocament cada punt de l’espai de tres dimensions.

A aquest punt, se li assignen tres nombres reals (coordenades):

1. Distància entre el punt escollit i l’origen fixat.
2. L’angle descrit, anomenat zenital, mesurat des del semieix positiu Z fins a la recta que passa per l’origen i el punt escollit.
3. L’angle descrit, anomenat azimutal, mesurat entre el semieix positiu X i la projecció ortogonal al pla X – Y d’aquesta mateixa recta.

Pel que fa l’astronomia, aquestes coordenades són freqüentment usades per tal d’indicar un punt en l’univers.

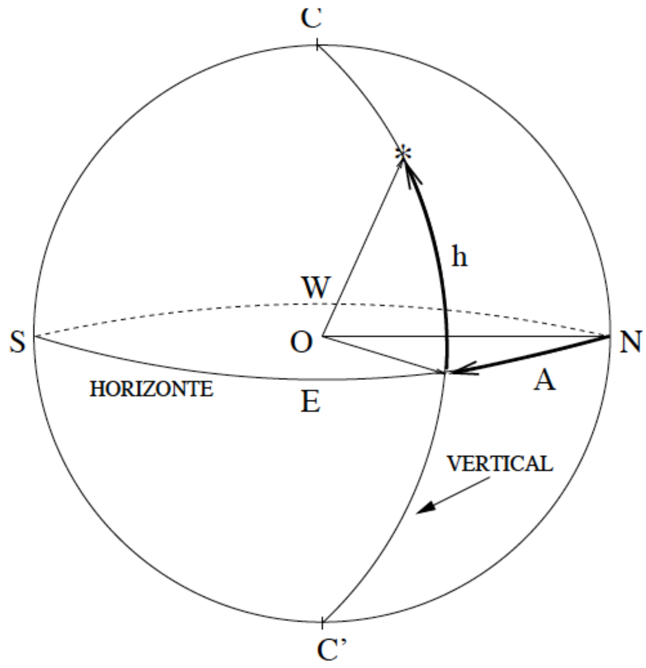
### 3.1.3 Coordenades celestes o astronòmiques

Són representades per qualsevol sistema de coordenades que s’utilitza per determinar la posició d’un cos sobre l’esfera celeste. Es tracta, doncs, de calcular la posició aparent que ocupen els astres al firmament sobre l’esfera celeste.

#### Tipus de coordenades celestes o astronòmiques

- Horitzontals: permeten ubicar la posició aparent d’un astre per un observador qualsevol situat a una latitud i longitud donades per un instant de temps concret. Aquestes tenen com a pla de referència fonamental l’horitzó local de l’observador. Això divideix el cel en un hemisferi superior (zenit) que pot ser observat i en un altre d’inferior (nadir) que resta ocult als ulls de l’observador.

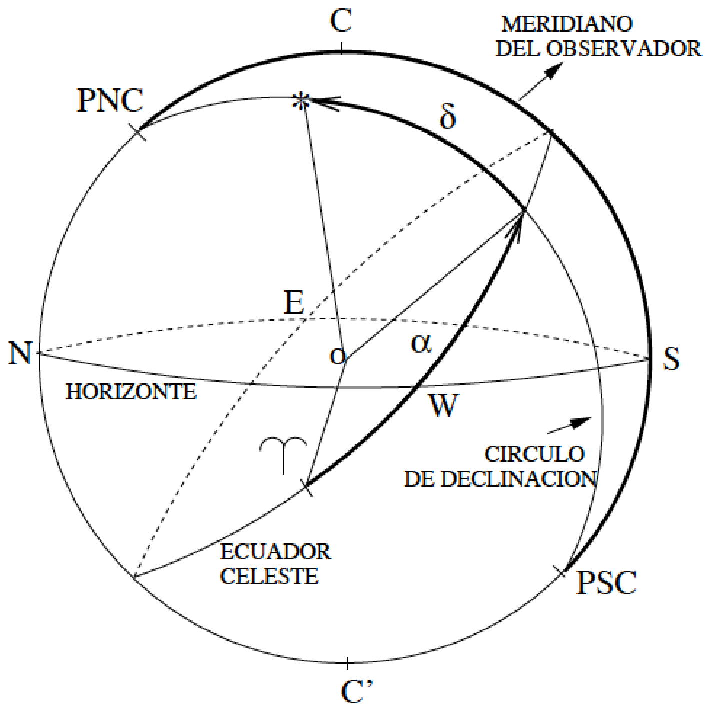
Per definir aquestes coordenades cal tenir en consideració que l'angle per sobre o per sota de l'horitzó és l'altura (h) i l'angle que forma l'objecte al voltant de l'horitzó mesurat des del nord cap a l'est, s'anomena azimut.




Ens hem d'adonar que aquestes coordenades estan fixades a la Terra, no a les estrelles. Per tant, l'altura i l'azimut d'un punt en l'espai canvien segons el temps (sembla que aquest punt es desplaci pel cel) i segons l'horitzó definit per l'observador; el mateix punt, en conclusió, no tindrà els mateixos valors vist des de diferents llocs geogràfics.

Els valors d'aquests, però, estan compresos entre uns nombres concrets. L'azimut està comprès entre 0º i 360º, ($0º < A < 360º$). Respecte l'altura, és un pèl més complex. Com he comentat abans, tot és relatiu a la posició de l'observador. Per tant, el signe de l'altura també es relatiu al criteri de visibilitat d'aquest. Podem definir, per això, que un astre situat per sobre de l'horitzó visible equival a $h > 0$. En canvi, quan l'astre està situat per sota de l'horitzó visible (no visible per a l'observador), equival a $h < 0$. Si unim aquests dos conceptes obtenim que $-90º \leq h \leq 90º$. Per ser més concrets i tenir clares les idees, definim que $h_{zenit} = 90º$, $h_{nadir} = -90º$ i $h_{horitzó} = 0º$. També vull afegir que l'angle complementari de l'altura s'anomena distància zenital (z) i s'aconsegueix mitjançant l'expressió $z = 90 – h$.

Aquestes coordenades resulten molt útils per determinar les hores en què apareix (ortus) i desapareix (ocàs) un objecte al cel. Quan un punt o un astre té una elevació de 0º és degut al fet que o bé esta apareixent (azimut < 180º) o bé està desapareixent (azimut > 180º).



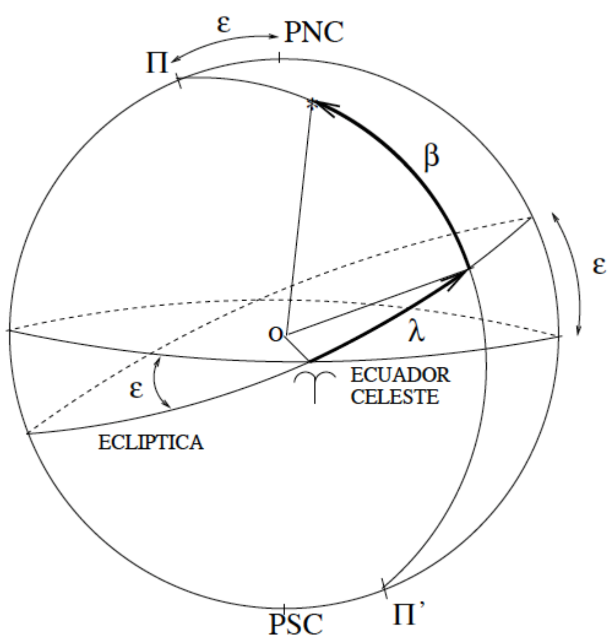

- Equatorials: El pla fonamental d'aquestes coordenades el trobem allargant l'equador terrestre fins a l'esfera celeste tot obtenint l'equador celeste. Aquest divideix el cel en dos hemisferis: l'hemisferi boreal, que correspon al nord i l'hemisferi austral, que correspon al sud. A més, també cal dibuixar línies concèntriques que tenen com a centre els pols i són paral·leles a l'equador. Aquests paral·lels celestes, com les línies de latitud terrestres, mesuren a quina distància respecte l'equador, o bé cap al nord o bé cap al sud, es troba un punt concret en l'espai. Aquí és on entra en joc el terme anomenat declinació (angle que forma l'astre en qüestió amb l'equador celeste): si, per exemple, una estrella està situada al pol nord, la seva declinació és de 90º. Si està situada a l'equador celeste, la seva declinació és de 0º. I si, en canvi, està situada entre un punt que equidista del pol nord i de l'equador celeste, la seva declinació seria de 45º. Cada grau de declinació té 60 minuts d'arc, ('), i cada minut d'arc conté 60 segons d'arc ('').

  Ara tracem línies del pol nord cap al pol sud. Aquestes són les anomenades línies d'ascensió recta. Mesuren la posició dels objectes celestes, igual que la longitud, cap a l'est o cap a l'oest. Trobem que, l'equivalent celeste del meridià de Greenwich, que té longitud 0º, és l'anomenat punt vernal o d'àries. Aquest és un punt d'intersecció entre l'equador celeste (pla equatorial) i l'eclíptica de la Terra. Es defineix com el punt de l'esfera celeste en què el Sol passa de l'hemisferi sud al nord. Aquest fet ocorre a l'equinocci de primavera (cap al 21 de març) tot iniciant, així, la primavera a l'hemisferi nord. Les línies d'ascensió recta es mesuren a partir del punt o punt Àries en hores (h), minuts i segons cap a l'est al llarg de tot l'equador celeste. Pren valors des de 0 hores fins a 24h (una hora és equivalent a 15º), i es subdivideixen en 60 minuts i, aquests, a la vegada, en 60 segons.

Aquest és el sistema de coordenades celeste més utilitzat. És, també, el que més s'assembla al sistema de coordenades geogràfiques ja que els dos empren el mateix pla fonamental i els mateixos pols. Hi ha, però, una diferència clara i considerable: el sistema de coordenades geogràfiques està fixat a la Terra i rota amb ella, però el sistema de coordenades equatorials està fixat a les estrelles de tal manera que dóna la impressió que roti al cel juntament amb les estrelles, però no passa així, la Terra gira i és el cel i les estrelles qui resten immòbils.

- Eclíptiques: aquest tipus de coordenades tenen com a pla de referència l'eclíptica, que és la trajectòria aparent del Sol al llarg d'un any. És, a més, la projecció del pla orbital de la terra en l'esfera celeste.

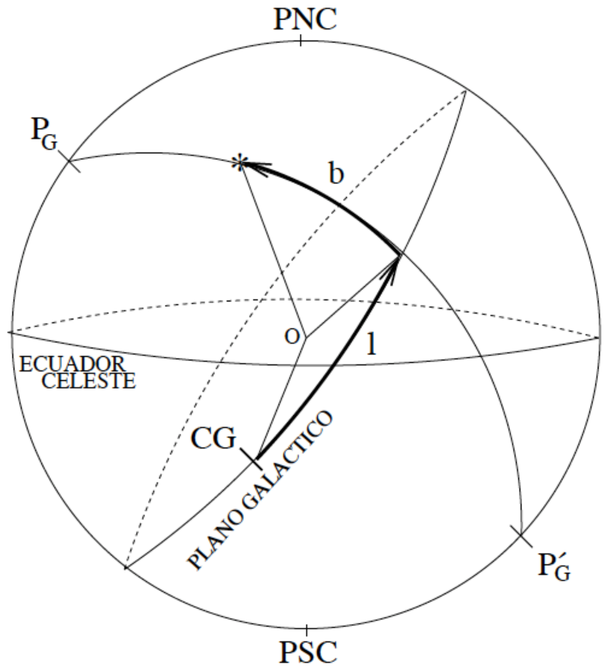
  L'angle de latitud és denominat com a latitud eclíptica. Aquest angle està mesurat sobre una semicircumferència que passa pels pols eclíptics i l'astre en qüestió i es comença a mesurar des d'on es talla amb l'eclíptica fins a l'astre que estem observant. El valor dels angles és molt senzill; $\beta_{\pi} = 90º$, $\beta_{\pi'} = -90º$ i $\beta_{eclíptica} = 0º$. L'angle de longitud és designat com a longitud eclíptica. Aquest és l'angle mesurat sobre l'eclíptica a partir del punt vernal o Àries en direcció antihorari, vist des del pol nord celeste, fins la



semicircumferència que passa pels pols eclíptics i l'astre en qüestió. Els valors que pot adoptar estan entre 0º i 360º (0º ≤ λ < 360º). El punt 0 de la longitud eclíptica és l'equinocci vernal.

Aquestes coordenades serveixen per cartografiar objectes del sistema solar.

- Coordenades galàctiques: en una nit sense núvols i si ens apartem de grans focus lluminosos com poden ser ciutats com la de Barcelona, és possible observar petites taques brillants que s'estenen per tot el cel. Aquesta acumulació de petites taques és la resultant de l'agrupació de milers de milions d'estrelles situades, la majoria, a centenars i a milers d'anys llum de distància. Com que la nostra galàxia és de tipus espiral, la seva forma, per a un observador exterior a ella, serà similar a la d'una lent molt prima. Nosaltres, en estar ubicats molt a prop del pla centrat d'aquesta lent i, a més, en estar-hi submergits, contemplem la Via Làctia com un anell lluminós que envolta l'esfera celeste. En alguns estudis de la galàxia i àdhuc d'objectes extragalàctics és freqüent designar les posicions de certs objectes utilitzant les coordenades galàctiques.




S'han de tenir clars els conceptes de longitud i latitud galàctiques. La longitud galàctica d'un astre és l'angle mesurat sobre el pla galàctic que comença a comptar-se des del punt pròxim al centre de la galàxia (CG), en la mateixa direcció que la longitud eclíptica fins a la semicircumferència que passa per l'astre i els pols galàctics. Els seus valors estan entre 0º i 360º (0º ≤ $l$ < 360º). El concepte de latitud galàctica d'un astre és l'angle mesurat sobre aquella semicircumferència que passa pels pols galàctics i l'astre que observem, que va des del pla galàctic a l'astre. Tenint en compte que PG i P'G són el pol nord i el sud respectivament, tenim que: $b_{PG}$ = 90º, $b_{P'G}$ = -90º i $b_{\text{pla galàctic}}$ = 0º.

La posició del zero de la longitud galàctica (el centre galàctic nominal) va ser acordada l'any 1959 per la Unió Astronòmica Internacional i està situat en unes coordenades concretes.

# 4. OPOSICIONS DEL PLANETA MART

La Terra és un observatori mòbil i és per aquest fet que el moviment terrestre distorsiona la nostra percepció de les diverses posicions dels planetes respecte de les estrelles fixes, infinitament llunyanes del nostre context.

Per diverses raons, els astrònoms van descobrir, fa segles, que podien eliminar una complicació a l’hora d’operar en relació als planetes tenint en compte, només, les mesures i observacions que es prenien en oposició. Les oposicions són moments en què un planeta i la Terra es troben en la mateixa línia en l’espai respecte al Sol. Això permet a l’astrònom traçar la posició d’un planeta respecte un punt fix de referència (aquest punt fix, per Kepler i Copèrnic era el Sol). Les oposicions de Mart i de la Terra es produeixen cada 780 dies.

Kepler va sorprendre’s en saber que Tycho Brahe, com Ptolomeu i Copèrnic, explicaven les oposicions mitjançant la posició del Sol mitjà, l’ús del qual suposa, entre altres coses, que la Terra o el Sol (depenent de quin representi el centre del model usat) viatgin a una òrbita perfectament circular i a una velocitat uniforme, en comptes de la posició real que ocupa en l’espai el Sol real.

Segons el punt de vista de Kepler, hi havia un error en la utilització de la posició del Sol. L’ús del Sol mitjà comportava que la terra recorria cada dia el mateix desplaçament ja que anava en velocitat constant; Kepler refusà aquesta idea totalment en adonar-se que la Terra, quan està més a prop del Sol, va més ràpida, i quan se n’allunya, disminueix la velocitat. Quan va ser conscient d’aquest fet, gràcies a les observacions de Tycho Brahe, va observar que calculant les posicions dels planetes quan estaven en oposició d’una manera correcta, la posició i utilització del Sol mitjà implicaven l’admissió d’afirmacions crítiques sobre la forma i la naturalesa de l’òrbita del Sol i/o la Terra, tot depenent del model que utilitzessis. És a dir, va ser conscient que quelcom s’estava fent malament i que el procés de càlcul de les oposicions mitjançant el Sol mitjà no era correcte.

Cap a l’any 1600, els astrònoms ja eren capaços de determinar quan el Sol, Mart i la Terra estaven a la mateixa línia per un d’aquests dos mètodes: tot calculant les oposicions amb el Sol mitjà (teoria refusada per Kepler) o identificant dies concrets a la taula d'observacions quan Mart s'eleva exactament quan el son es pon (o a l'inrevés), fet que col·loca en la mateixa línia a Mart, a la Terra i al So en l'espai.

Kepler va ser partidari d'aquest segon mètode en el qual la utilització del Sol mitjà no n'era la base.

## 5. DURACIÓ DEL PERÍODE DE MART

Tots coneixem el període de la Terra: 365 dies és el que tarda a donar una volta completa al Sol. Podem mesurar-ho a través de les estacions, o tenint present que la Terra ha tornat a passar pel mateix lloc de la seva òrbita exactament (podem trobar petites variacions a l'hora de concloure el període exacte). La facilitat per aconseguir calcular-ho, en el cas de la Terra, és bastant considerable. Quan volem calcular el període de Mart tot canvia: es presenta un camí ple de pedres.

Kepler basà molta part de la seva obra astronòmica en el planeta Mart. Molt abans dels seus descobriments va adonar-se que li era necessari saber quan durava un any a Mart, és a dir, quan tardava Mart a donar una volta sencera al Sol. És per això que el període de Mart va ser una dada molt recurrent en la seva obra.

El període orbital de Mart no va ser descobert per Kepler, sinó per Claudi Ptolomeu. Primer de tot, va decidir fixar-se en el món del Zodíac. Quan el planeta Mart tornava a situar-se en la mateixa constel·lació, després d'haver creuat tot el cel, volia dir que havia fet una volta sencera al Sol. Però hi apareixia molt error; el temps que tardava Mart a tornar a la mateixa constel·lació, any rere any, era molt variable, massa per treure'n una conclusió segura. Deixà, doncs, aquest mètode de banda.

Era conscient que tenia altres opcions per explorar. Un d'elles era les oposicions. Encara que el temps que tardaven a repetir-se les oposicions no estava dividit en parts iguals a les òrbites, sí que era molt similar quan ens fixàvem en el temps exacte que tardaven en repetir-se. Prenent una mitjana de les observacions de les oposicions, establí que aquestes es produïen cada 780 dies.

La clau del problema ja estava resolta. Si Mart i la Terra es troben en la mateixa línia cada 780 dies no va ser difícil, doncs, descobrir quants n'emprava Mart per fer una volta al Sol. Sabia que en 780 dies la Terra gira dos cops i poc més al voltant del Sol, que és el mateix que 730 dies i 50 dies sobrants. En aquests 50 dies restants, la Terra recorre 50/365 parts de la seva òrbita. Des que Mart i la Terra s'han trobat, per tant, el planeta Mart ha d'haver donat una volta i poc més al voltant del sol. En efecte, quan els dos planetes es troben al mateix lloc, Mart ha recorregut 1 volta al sol a part de 50/365 parts de l'òrbita de la Terra. En conclusió tenim que:

$$\frac{780}{1+\frac{50}{365}} = 686{,}02 \text{ dies}$$

El planeta Mart tarda 686 dies, aproximadament, a realitzar una volta completa al Sol.

# 6. ÒRBITA DE LA TERRA

Kepler, durant molts anys, pensà que la Terra era un planeta que es regia amb moviment uniforme, com tots els seus avantpassats havien postulat, i mai fins aquell moment s'havia trobat amb la necessitat d'estudiar l'òrbita terrestre. Finalment, però, com a conseqüència de les investigacions que duia a terme va veure que li era vital conèixer el moviment orbital de la Terra; el moviment de l'òrbita de l'esfera terrestre no podia ser excessivament diferenciat del dels altres planetes del sistema solar. Així doncs, va canviar el seu parer i decidí investigar acuradament tot el que feia referència a l'òrbita del planeta on vivim, la Terra.

Primer de tot, Kepler va adonar-se que totes les teories, des de les d'Hiparc fins a Brahe, es basaven solament en les observacions del moviment aparent del Sol, és a dir, del Sol mitjà. Per tant, encara que aquestes observacions eren prou exactes en relació les posicions angulars, probablement Kepler va pensar que l'error estava en les distàncies de la Terra al Sol. Però, com es podien mesurar, llavors, aquestes distàncies?

## 6.1 OBSERVANT LA TERRA DES DE MART

L'enginyosa solució de Kepler al problema proposat incloïa, doncs, l'observació del moviment de la Terra des del planeta Mart. Si Mart s'aturés enmig del cel, en una posició concreta, podria ser utilitzat per molta gent per trobar la posició exacta de la Terra, tot realitzant triangulacions des del Sol i des de Mart. Com tots sabem, però, Mart no s'atura mai, sempre està en moviment. Això sí, Kepler era conscient que Mart cada 687 dies es troba en la mateixa posició exactament. Aquesta va ser la clau perquè l'astrònom pogués estudiar d'una manera exhaustiva l'òrbita terrestre: es fixà en aquelles observacions marcianes que es diferenciaven en 687 dies, 23 hores i 31 minuts i, a partir de les posicions, dels càlculs dels angles i de raons trigonomètriques va arribar a definir les distàncies de la Terra al seu pertinent centre orbital.

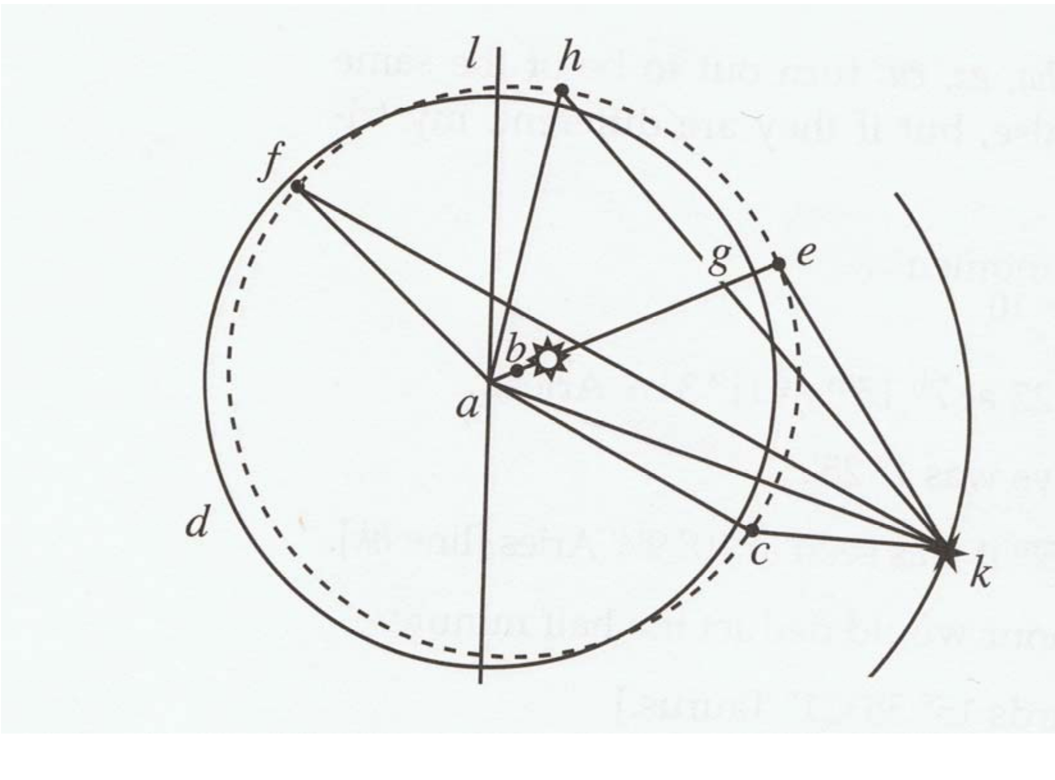
Abans de començar a indagar en els càlculs de l'astrònom, cal tenir present que els astrònoms de la seva època utilitzaven la nomenclatura dels signes del zodíac per tal de localitzar els angles i les posicions dels planetes. Els 0º partien des del punt d'Àries, l'equinocci de primavera, que representava 0º de longitud respecte l'eclíptica de la Terra i, en aquest cas, l'òrbita de Mart (és el punt on es tallen les dues òrbites). Per tant, moltes anotacions de Kepler segueixen aquest patró i s'ha de tenir present a l'hora de realitzar les triangulacions corresponents.

Les posicions que trià Kepler són les següents, representades a la figura a peu de pàgina:

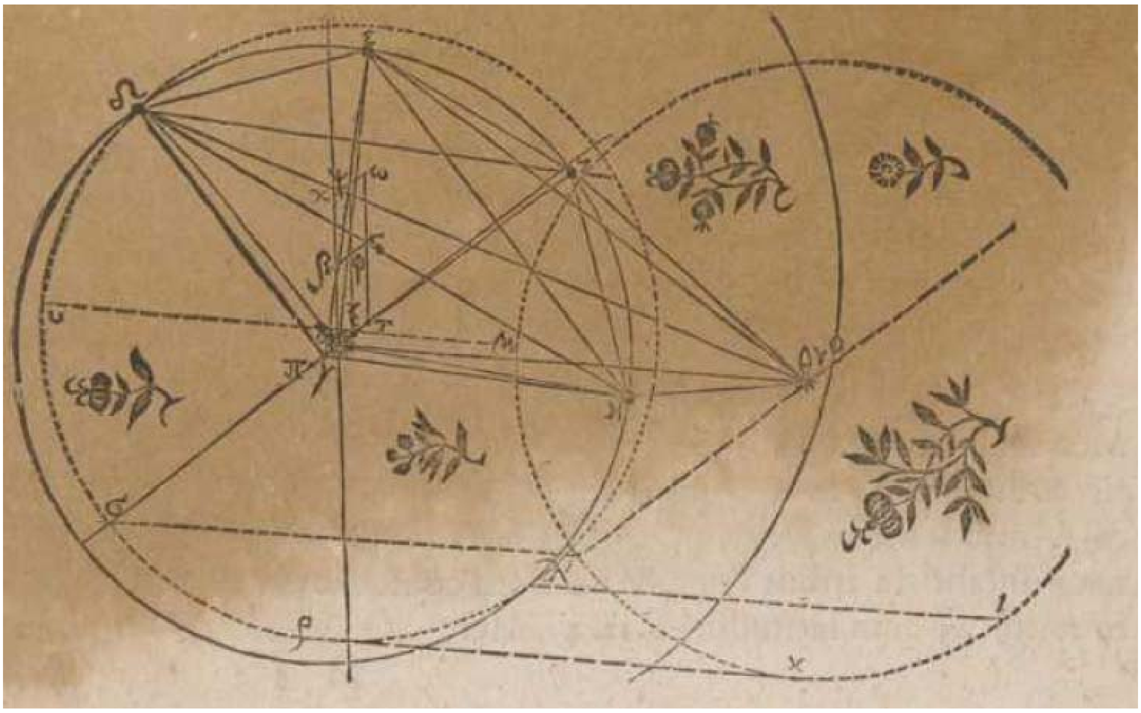
- F: 1590, 5 de març a les 7 hores i 10 minuts del vespre
- H: 1592, 21 de gener a les 6 hores i 41 minuts
- E: 1593, 8 de desembre a les 6 hores i 12 minuts
- C: 1595, 26 d'octubre a les 5 hores i 44 minuts.

El punt L, que es troba a la mateixa figura, representa la línia d'àpside unida amb el punt de moviment uniforme, que és el centre del cercle al llarg del qual la Terra es mou a velocitat constant en una òrbita suposadament circular.

És important tenir present que quan el planeta Mart no té latitud se situa al mateix pla que l'òrbita terrestre. El punt K, que representa Mart i està present al diagrama a continuació, està localitzat al pla de l'òrbita, ni per sobre ni per sota i, per tant, no pot existir cap mena d'error causat per la diferència de plans de les òrbites dels dos planetes en qüestió.



A continuació es mostra, per tal de contrastar l’esquema anterior tan aclaridor, el dibuix original trobat a dins l’*Astronomia Nova* dissenyat per Kepler, que ens ajuda a entendre la situació dels dos planetes en relació a les seves òrbites i posicions:



Pàgina 138, *Astronomia Nova*

### 6.1.1 Primera posició, 1590

L’angle FAK mesura 127º 5’ 1’’. És l’angle format entre la posició de la terra i la de Mart mesurades al voltant del centre de l’òrbita terrestre. Aquesta mesura la trobem a les observacions de Tycho Brahe.

Kepler es trobà amb un problema: el dia exacte en què Mart complia el seu any, l’observació pertinent no formava part de les taules de Tycho Brahe. El que va haver de fer per resoldre aquest problema va ser calcular el que suposadament hauria recorregut el planeta Mart en l’espai de temps des de l’última observació fins al dia concret usat per fer els càlculs. Aquí és on arriba a conèixer el moviment diürn del planeta Mart. Així doncs, tenim que just el dia anterior Mart va ser observat a 24º 22’ Àries. Per tant, és deduïble mitjançant una altra observació que el seu moviment diürn va ser de 44'. Trobem, llavors, que aquell 5 de març de 1590 es va veure a 25º 6’ Àries, que correspon a la posició de la línia FK. Sabem que la línia AK va dirigida 15º 53' 45'' Taure. Per tant, l'angle FKA és de 20º 47' 45' que s'obté mitjançant la resta de la posició de Mart el 5 de març de la posició de la línia AK.

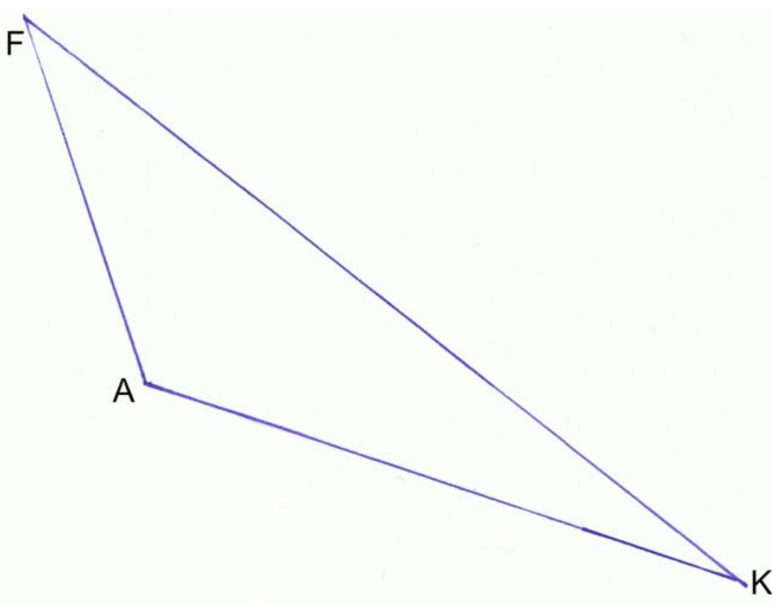
I, finalment, deduïm que l'angle AFK és de 32º 7' 14'

Obtenció dels angles restants:

$\widehat{FKA}$ = 15º 53' 45'' Taure – 25º 6' Àries = 20º 47' 45''

$\widehat{AKF}$ = 180 – (20º 47' 45'' + 127º 5' 1'' ) = 32º 7' 14''

Ara, tenim aquest triangle per resoldre:




1. $\widehat{FAK}$ = 127º 5' 1''
2. $\widehat{FKA}$ = 20º 47' 45''
3. $\widehat{AFK}$ = 32º 7' 14''

Posem, per exemple, que el segment AK té una distància de 100.000 unitats (aquest valor, utilitzat per Kepler en la seva obra original, també s'aplica a les altres tres posicions restants i a altres càlculs que Kepler realitzà i que apareixen posteriorment). Ara, cal aplicar la llei del sinus per tal de trobar la mesura del segment FA.

$$\frac{AK}{\sin \widehat{AFK}} = \frac{FA}{\sin \widehat{FKA}}$$

$$\frac{100.000}{\sin 32º\ 7'14''} = \frac{FA}{\sin 20º\ 47'45''}$$

$$FA = \frac{100.000 \times \sin 20º\, 47'45''}{\sin 32º\, 7'14'} = 66.773{,}99$$

Hem obtingut, doncs, que la mesura del segment FA és de 66.774 aproximadament.

Abans de passar a la segona observació, cal esmentar que si en calcular-les trobem que HA, EA i CA són de la mateixa longitud que FA, allò que Kepler s’imaginava i intentava demostrar seria fals. Si, per contra, totes resulten ser de diferent mesura, els pensaments de Kepler podien arribar a ser certs.

### 6.1.2 Segona posició, 1592

L’angle HAK és de 84º 10’ 34’’, un altre cop obtingut a través de les observacions de Tycho Brahe.

Dos dies després que Mart hagués complert un any més, concretament el 23 de gener de 1592, va ser observat en la posició 11º 34,5’ Àries. El moviment diürn de Mart durant aquests dos dies posteriors a l’observació escollida va ser d’1º 25’. Per tant, el 21 de gener de l’any en qüestió a les 6 hores 41 minuts, va ser vist a 10º 9,5’ Àries (de les parts restants d’una hora en deduïm aquest mig minut), que representa la línia HK. Sabem, també, que la línia AK va dirigida 15º 55’ 21’’ Taure. Així doncs, tenim que l’angle HKA és de 35º 45’ 51’’, obtingut gràcies a la resta de la posició de la línia AK respecte la posició exacta de Mart el 21 de gener de 1952.

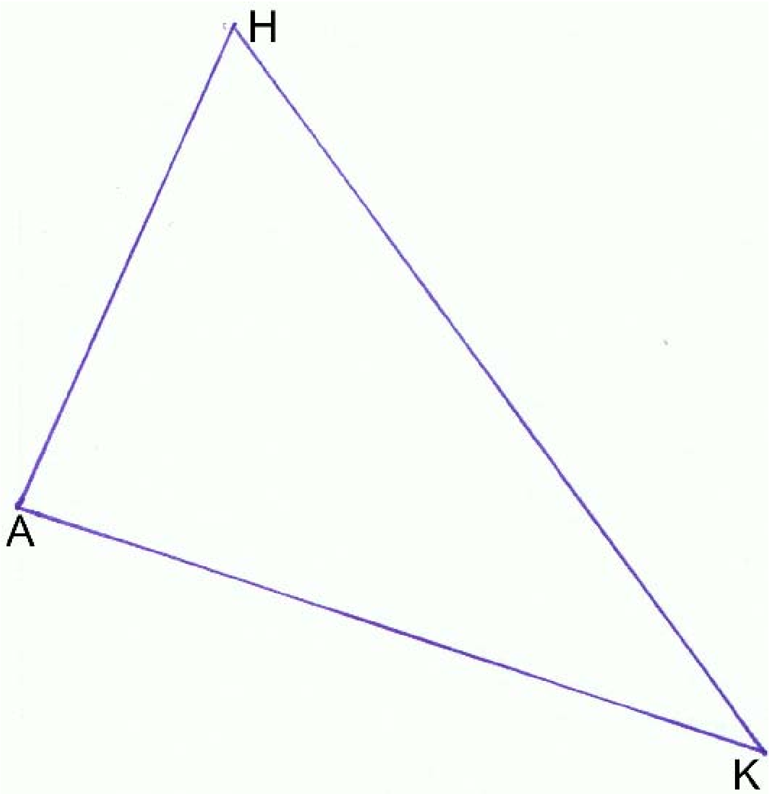
I, finalment, és deduïble que l’angle AHK és de 60º 3’ 35’’

Obtenció dels angles restants:

$\widehat{HKA}$ = 15º 55’ 21’’ Taure – 10º 9,5’ Àries = 35º 45’ 51’’

$\widehat{AHK}$ = 180º - (84º 10’ 34’’ + 35º 45’ 51’’) = 60º 3’ 35’’

El triangle a continuació exemplifica el nostre cas:




1. $\widehat{HAK}$ = 84º 10' 34''
2. $\widehat{HKA}$ = 35º 45' 51''
3. $\widehat{AHK}$ = 60º 3' 35''

Un cop tenim clares les mesures dels angles, passem a les matemàtiques per trobar la llargada del segment AH. El procés serà sempre el mateix.

$$\frac{AK}{\sin A\widehat{H}K} = \frac{AH}{\sin \widehat{HKA}}$$

$$\frac{100.000}{\sin 60º\ 3'\ 35''} = \frac{AH}{\sin 35º\ 45'\ 51'}$$

$$AH = \frac{100.000 \times \sin 35º\ 45'\ 51'}{\sin 60º\ 3'\ 35''} = 67.446$$

Observem, doncs, que el segment AH mesura 67.467 aproximadament i que no té la mateixa longitud que l’FA. Aquest resultat és del tot correcte perquè el Sol ha descendit en direcció al perigeu, i la Terra s’ha mogut des de la posició F a la H; per tant, durant aquest camí recorregut per la Terra, el Sol es troba més enllà de la posició B, en un punt més pròxim. En altres paraules, allò que Kepler volia expressar era que si la Terra no s’està movent en el cercle DG al voltant d’A, era senyal que es movia en un altre cercle (línies discontínues), el centre del qual és més proper al Sol. A mesura que la Terra s’apropa al periheli (punt més proper del Sol de l’òrbita d’un planeta) o el Sol al perigeu (punt més llunyà del Sol de l’òrbita d’un planeta) la distància AH anirà augmentant.

### 6.1.3 Tercera posició, 1953

El 8 de desembre de l’any 1953, l’angle EAK, format per la posició de la Terra, el centre de llur òrbita i Mart, era de 41º 16’ 16’’. Aquest angle també fou extret de les observacions de Brahe.

Dos dies després d’aquest dia concret, el 10 de desembre del mateix any, Mart va ser observat des de la Terra a 4º 45’ Àries. En aquests dos dies, la Terra s’havia mogut 1º 8’, que representa el seu moviment diürn. Tornant al dia de l’observació, el 8 de desembre a les 7 hores i 20 minuts, Mart va ser vist a una posició de 3º 37,5’ Àries, mentre que a l’hora que ens interessa a nosaltres, a les 6 hores i 20 minuts, va ser vist a 3º 35,5’ Àries, que correspon al segment EK. 15º 56’ 57’’ Taure. Sabem, també, que la línia AK va dirigida 15º 56’ 57’’ Taure. Per tant, tenim que l’angle EKA és de 42º 21’ 27’’, obtingut gràcies a la resta de la posició de la línia AK respecte la posició exacta de Mart el 8 de desembre de 1953.

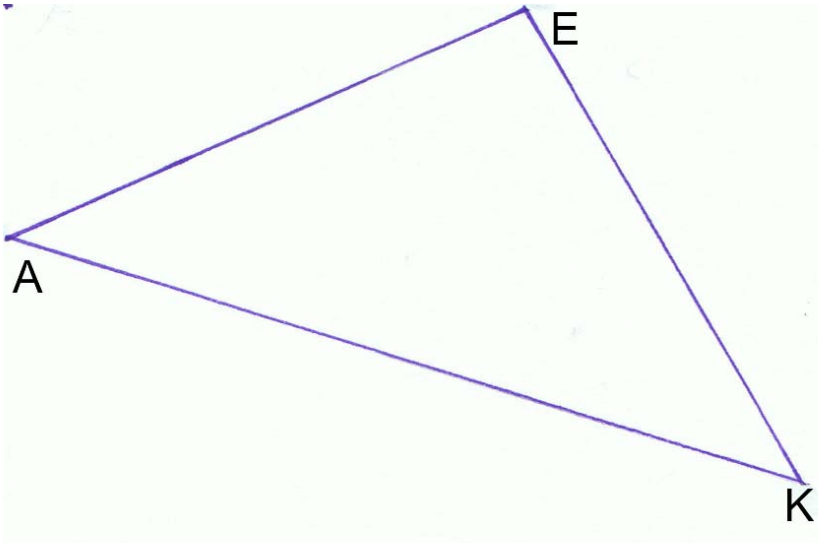
I, finalment, trobem que l’angle AEK és de 96º 22’ 17’’.

Obtenció dels angles restants:

$\widehat{EKA}$ = 15º 56’ 57’’ Taure – 3º 35,5’ Àries = 42º 21’ 27’’

$\widehat{AEK}$ = 180º - (42º 21’ 27’’ + 41º 16’ 16’’) = 96º 22’ 17’’

El triangle que representa la 3a observació és el següent:




1. $\widehat{EAK}$ = 41º 16' 16''
2. $\widehat{EKA}$ = 42º 21' 27''
3. $\widehat{AEK}$ = 96º 22' 17''

Un cop tenim clares les mesures dels angles, passem a les matemàtiques per trobar la llargada del segment EA. El procés serà sempre el mateix.

$$\frac{AE}{\sin \widehat{AEK}} = \frac{AE}{\sin \widehat{EKA}}$$

$$\frac{100.000}{\sin 96º\ 22'\ 17'''} = \frac{AE}{\sin 42º\ 21'\ 27''}$$

$$AE = \frac{100.000 \times \sin 42º\ 21'\ 27''}{\sin 96º\ 22'\ 17''} = 67.794$$

Un altre cop, obtenim que la línia EA és més llarga que les dues anteriors; per això, deduïm que està situada més a prop del perigeu del Sol.

### 6.1.4 Quarta posició, 1595

De les observacions de Tycho Brahe obtenim que l'angle que formen els punts KAC és 1º 38,5'.

El 27 d'octubre a les 12 hores i 20 minuts va ser observat a 10º 52' 15'' Taure. Mart, llavors, es movia en un moviment retrògrad. Aquest moviment ocorre quan Mart o qualsevol altre planeta extern esdevé acrònim (paraula ideada per Ptolomeu que significa, literalment, "la nit s'aixeca". Quan diem que un planeta és acrònim ens referim al fet que la posició del planeta en qüestió justament està apareixent al mateix temps quan el Sol es pon; això passa quan el planeta està en oposició amb el Sol). Després de passar el punt d'oposició amb el Sol, el planeta atura el seu moviment tot quedant-se aturat. Seguidament es mou cap enrere i es dirigeix al punt d'oposició, es torna a quedar quiet, i, finalment, emprèn el seu camí cap endavant tot tornant a passar per davant del punt d'oposició, aquest cop sense aturar-se de nou.

El moviment diürn de la Terra va ser de 23'. El 26 d'octubre, doncs, la posició terrestre era de 19º 21' 35'' Taure, angle que correspon a la línia CK. Sabem, també, que la línia AK estava dirigida a 15º 58' 33'' Taure per tant, per obtenir l'angle CKA hem de restar la línia CK a la línia AK, i ens dóna que l'angle és de 3º 23' 20''.

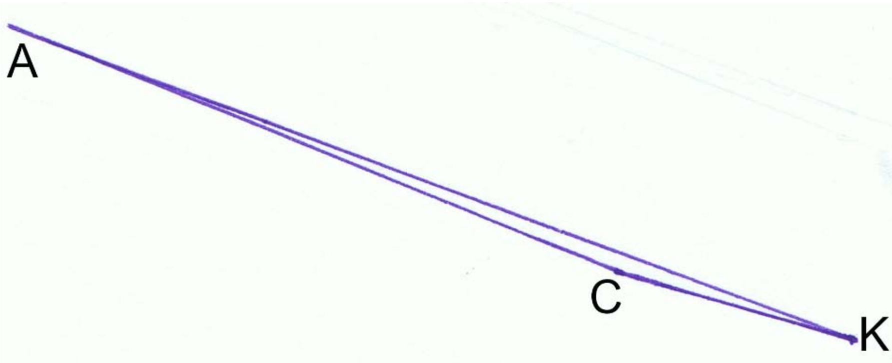
I, finalment, tenim que l'angle ACK és de 174º 58' 35''.

Obtenció dels angles restants:

$\widehat{CKA}$ = 19º 21' 53'' Taure – 15º 58' 33'' Taure = 3º 23' 20''

$\widehat{ACK}$ = 180º - (3º 23' 20'' + 1º 38' 5'') = 174º 58' 35''

La 4a observació es veu representada per aquest triangle:




1. $\widehat{CAK}$ = 1º 38' 5''
2. $\widehat{CKA}$ = 3º 23' 20''
3. $\widehat{ACK}$ = 174º 58' 35''

Un cop tenim clares les mesures dels angles, passem a les matemàtiques per trobar la llargada del segment CA. El procés serà sempre el mateix.

$$\frac{AK}{\sin\widehat{ACK}} = \frac{AC}{\sin\widehat{CKA}}$$

$$\frac{100.000}{\sin 174º\ 58'\ 35''} = \frac{FA}{\sin 3º\ 23'\ 20'''}$$

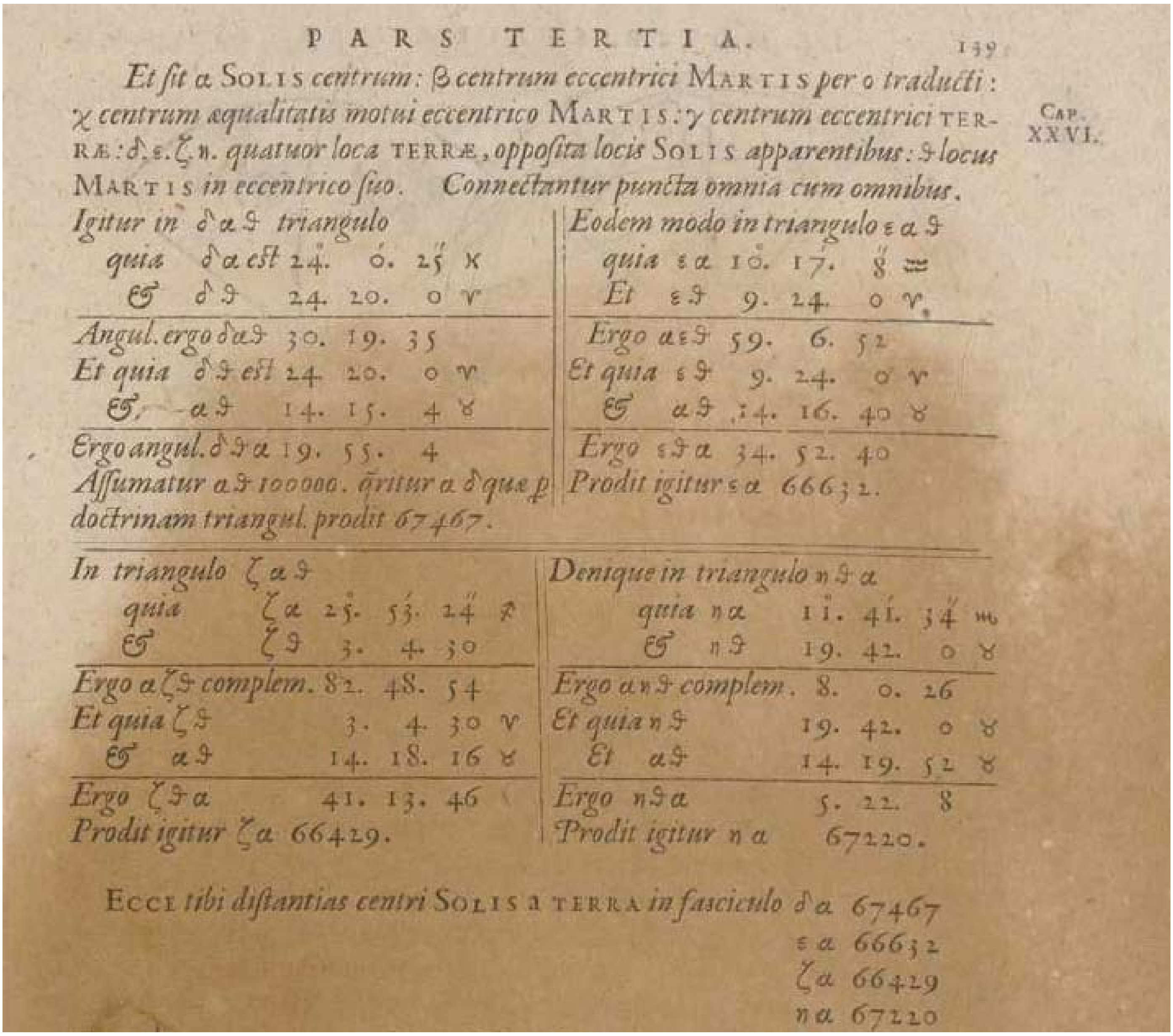
$$FA = \frac{100.000 \times \sin 3º\ 23'\ 20''}{\sin 174º\ 58'\ 35''} = 67.506$$

Les quatre longituds que hem obtingut són les següents:

- AF: 66.774, situada a 22º 59' Pisces
- AH: 67.446, situada a 10º 6' Aquari
- AE: 67.794, situada a 27º 13' Sagitari
- AC: 67.506, situada a 14º 20' Escorpí

Cal remarcar que, tot i que els resultats no són exactament idèntics als que Johannes Kepler va obtenir quan realitzà els mateixos càlculs, difereixen en relativament poques unitats. Aquesta diferència podria ser causada per diverses raons: petites correccions de les observacions dins els càlculs keplerians, procés de càlcul i valors numèrics distints... Tot i així, són vàlids per poder afirmar amb prou seguretat que l'òrbita terrestre no era circular.

Els resultats obtinguts per Kepler els trobem exposats en aquesta pàgina extreta de l'*Astronomia Nova*.



PARS TERTIA. 139

*Et sit* α SOLIS *centrum:* β *centrum eccentrici* MARTIS *per* ο *traducti:* χ *centrum aequalitatis motui eccentrico* MARTIS: γ *centrum eccentrici* TERRAE: δ. ε. ζ. η. *quatuor loca* TERRAE, *opposita locis* SOLIS *apparentibus:* ϑ *locus* MARTIS *in eccentrico suo. Connectantur puncta omnia cum omnibus.* CAP. XXVI.

*Igitur in* δαϑ *triangulo*
*quia* δα *est* 24. 0. 25 ♓
& δϑ 24. 20. 0 ♈
*Angul. ergo* δαϑ 30. 19. 35
*Et quia* δϑ *est* 24. 20. 0 ♈
& αϑ 14. 15. 4 ♉
*Ergo angul.* δϑα 19. 55. 4
*Assumatur* αϑ 100000. *quaeritur* αδ *quae per doctrinam triangul. prodit* 67467.

*Eodem modo in triangulo* εαϑ
*quia* εα 10. 17. 8 ♒
*Et* εϑ 9. 24. 0 ♈
*Ergo* αεϑ 59. 6. 52
*Et quia* εϑ 9. 24. 0 ♈
& αϑ 14. 16. 40 ♉
*Ergo* εϑα 34. 52. 40
*Prodit igitur* εα 66632.

*In triangulo* ζαϑ
*quia* ζα 25. 53. 24 ♐
& ζϑ 3. 4. 30
*Ergo* αζϑ *complem.* 82. 48. 54
*Et quia* ζϑ 3. 4. 30 ♈
& αϑ 14. 18. 16 ♉
*Ergo* ζϑα 41. 13. 46
*Prodit igitur* ζα 66429.

*Denique in triangulo* ηϑα
*quia* ηα 11. 41. 34 ♏
& ηϑ 19. 42. 0 ♉
*Ergo* αηϑ *complem.* 8. 0. 26
*Et quia* ηϑ 19. 42. 0 ♉
*Et* αϑ 14. 19. 52 ♉
*Ergo* ηϑα 5. 22. 8
*Prodit igitur* ηα 67220.

ECCE *tibi distantias centri* SOLIS *a* TERRA *in fasciculo* δα 67467
εα 66632
ζα 66429
ηα 67220

Pàgina 139, *Astronomia Nova*

Observem, doncs, que les distàncies no són iguals. La línia més llarga és el segment AE, el que està més a prop del perigeu del Sol; el més curt és AF, el que està situat més allunyat del perigeu del Sol; AC i AH són bastant similars perquè tenen gairebé la mateixa distància respecte el perigeu del Sol. Cal destacar que el fet que el segment AC sigui un pèl més llarg que AH, que està situat més a prop del perigeu, és degut als petits angles que trobem al punt C, amb els quals fàcilment s'hi podria haver introduït un petit error en les mesures. Kepler explicà, gràcies a aquestes mesures, que la Terra es movia més ràpidament quan estava prop del Sol i més lentament quan se n'allunyava.

En definitiva, concloem que el resultat de les observacions dugué a Kepler a poder afirmar amb un grau de seguretat considerable que el cercle DG, descrit sobre el punt on el moviment era uniforme, A per Copèrnic, no representava en absolut l'òrbita de la Terra. Trobem, per tat, un nou cercle format per les posicions FHEC que realment indica el camí per on es mou la Terra. El centre d'aquest cercle, B, es troba en la mateixa direcció que el Sol.

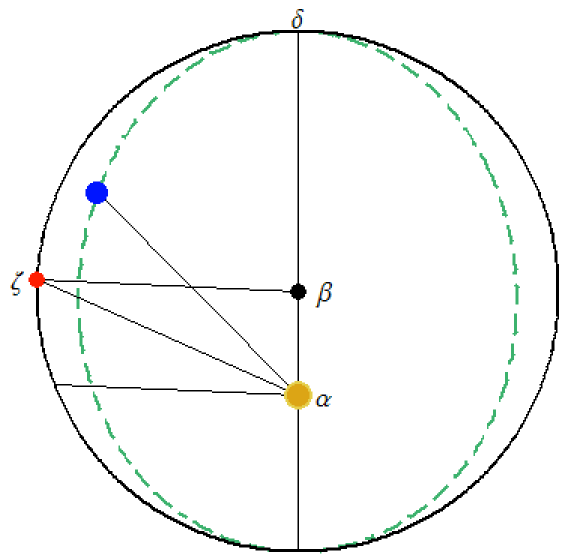
Quan Kepler va haver descartat la idea que la Terra girava en torn el Sol mitjà, investigà les mateixes posicions però respecte el Sol real, el Sol que realment és observat pels astrònoms des de la Terra. Utilitzà el mateix mètode que per al Sol mitjà, però amb angles centrals trets a partir del Sol real. Les posicions de la Terra respecte el Sol les prengué de la teoria solar de Thyco Brahe, en què l'astrònom exposa la seva manera d'explicar l'univers i el moviment dels planetes, teoria que no contenia gaires errors a l'hora de prendre longituds.

## 6.2 VISUALITZACIÓ KEPLERIANA DE L'ÒRBITA

A partir de moltes observacions, longituds i dies i dies de treballar-hi, Kepler establí una primera formulació de com podria ser l'òrbita de la Terra (no circular).

Per trobar aquesta òrbita, el que Kepler va concebre el següent: primerament, va tenir clar que la distància αζ corresponia a la del Sol a la Terra si aquesta es mogués en un cercle. Per tant, el que va fer va ser associar αζ amb un nou angle. Observà, després, que el planeta no estava a la distància del Sol que marcava l'angle δαζ, sinó a un angle que fos molt més petit que aquest, com el que hi ha entre l'angle δαζ i δβζ. Per tant, va arribar a aquesta conclusió: δαζ – angle nou = δβζ – δαζ.

Quan va obtenir el resultat de l'angle, el que va fer va ser construir-lo al paper: des del punt α recreà l'angle δβζ tot dibuixant una paral·lela del segment βζ. Tot seguit, només li calgué fer una nova línia des de α tot duplicant la diferència dels angles δβζ i δαζ. Situà, després, el planeta dins aquesta recta, a una distància exactament igual que el segment αζ. Així és l'òrbita que Kepler proposà:




En la imatge, l'òrbita imaginada per Kepler està dibuixada en verd, el Sol és α i de color groc, β és el centre del cercle, la línia negra és el cercle, el punt vermell és el planeta situat al cercle i, el sobre blau, situat l'òrbita de Kepler.

Així doncs, Kepler, amb tots aquests càlculs va revolucionar el panorama astronòmic del moment. Va desbancar Copèrnic i Ptolomeu per complet, tot fent que el món cregués en les seves idees i reconegués que Kepler tenia raó.

# 7. ÒRBITA DE MART

Johannes Kepler, un cop hagué descrit l'òrbita terrestre, va decidir estudiar l'òrbita de Mart. La seva intenció era aplicar la física i els seus coneixements matemàtics i astronòmics per tal d'arribar a descriure el moviment marcià.

## 7.1 INICIS DE LA RECERCA MARCIANA

L'astrònom començà la seva investigació tot explicant i raonant que quan intentava construir l'òrbita de Mart a partir de tres punts, observava una incorrecció constant; depenent en els punts que escollís, el resultat final de l'òrbita era diferent a l'anterior. Això li indicà que l'òrbita en què es movia Mart probablement no era un cercle. M'explico: la circumferència és una figura geomètrica que pot ser determinada a partir de tres punts. Kepler, conscient d'aquesta propietat, va triar diferents observacions preses cada 687 dies per tal de poder observar Mart des del planeta Terra. Així va poder determinar la direcció en què Mart es veia des de la Terra i la seva distància des del Sol. I, llavors, mitjançant la llei de les tangents, ser capaç de saber l'excentricitat i la direcció de la línia dels àpsides. Va trobar-se que els resultats eren notablement diferents als altres trobats quan defineix l'òrbita de la Terra.

Kepler, llavors, per tal d'obtenir uns resultats realment fiables i segurs sobre l'òrbita marciana, va realitzar dues comprovacions: primer de tot, va calcular les distàncies de Sol a Mart mitjançant triangulacions trigonomètriques i, en segon lloc, va intentar aplicar la llei de les àrees a una suposada òrbita circular. Si els resultats encaixaven, significava que l'òrbita, en efecte, era circular; si no ho feien, s'intuïa que s'estava produint un error en la concepció de la forma orbital.

## 7.2 MÈTODES DE NEGACIÓ DE L'ÒRBITA CIRCULAR

Així doncs, Johannes Kepler va veure clar mitjançant aquests dos mètodes que es presenten a continuació, l'òrbita marciana no podia ser un cercle: els resultats no quadraven entre si de cap de les maneres.

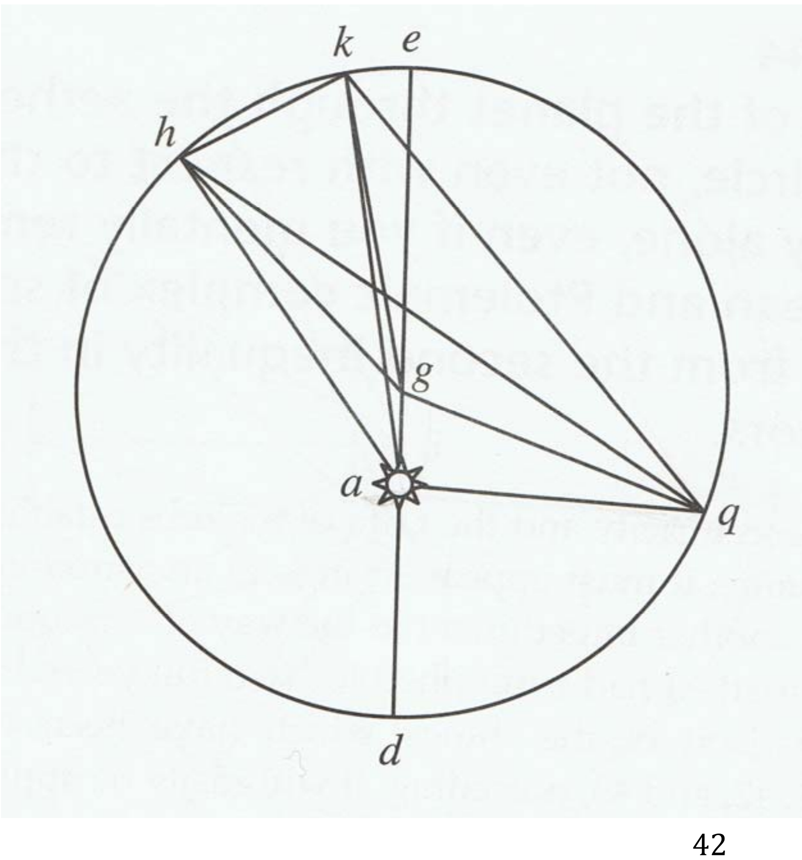
### 7.2.1 Distàncies del Sol a Mart

Un cop hagué pres per vertaderes l'excentricitat i la línia dels àpsides anteriors, va realitzar un procés similar en indagar sobre l'òrbita de la Terra. El que volia era comparar dos resultats: les distàncies preses del Sol a Mart (obtingudes quan realitzà el treball de l'òrbita terrestre) i les distàncies que es troben si es té en compte una òrbita marciana circular, i, en el cas que hi sorgís una diferència, arribar a esbrinar-ne el perquè.

Quan Kepler estudià l'òrbita terrestre, el que va fer va ser observar Mart des de diferents punts de l'òrbita de la Terra utilitzant observacions preses cada 686 dies. D'aquesta manera, va poder determinar de manera bastant precisa la direcció de Mart vist des de la Terra i la seva distància al Sol. Kepler va resumir tota aquesta informació:

| | **Distància** | **Posició** |
|---|---|---|
| ak | 166.255 | 8º 19' 4'' Virgo |
| ah | 163.100 | 5º 24' 21'' Libra |
| aq | 147.750 | 14º 16' 52'' Taure |

L'astrònom, per calcular la distància suposada que hi hauria si l'òrbita fos circular, va aplicar el mètode de triangulació presentat anteriorment (òrbita terrestre) enginyosament invertit de tal manera que permetia identificar els segments ak, ah i aq.



Com Kepler va ser capaç de calcular les distàncies de l'òrbita marciana circular?

Hi ha una sèrie de valors invariables aplicables a les tres observacions:

- ae, posició longitudinal de l'afeli: 28º 41' 40'' Lleó
- ag, excentricitat: 14.140
- gq/gk/gh, diàmetre del cercle amb centre g: 152.640

Cal afegir que tant l'excentricitat com el diàmetre del cercle amb centre g, trobats gràcies a mesures preses quan Mart estava situat prop de E i de D, són valors calculats tenint en compte que el radi de l'òrbita terrestre és 100.000.

**Segment aq**

L'astrònom descobrí, gràcies, en part, a l'atzar, que el valor que millor concordava per a la longitud heliocèntrica de Mart era 14º 21' 7'' Taure, que representa la direcció de la línia AQ.

A partir d'aquí, mitjançant la llei dels sinus, trobem aquesta igualtat:

$$\frac{\sin \widehat{agq}}{ag} = \frac{\sin \widehat{gaq}}{gq} = \frac{\sin \widehat{agq}\ /\ \sin \widehat{egq}}{aq}$$

Obtenció dels angles:

$$\widehat{gaq} = \widehat{ae} - \widehat{aq}$$

$$\widehat{gaq} = 28º\ 41'40''\ Lleó - 14º\ 21'7''Taurus = 104º\ 20'33''$$

$$\sin \widehat{aqg} = \frac{\sin \widehat{gaq}\ \times\ ag}{gq} = \frac{\sin 104º\ 20'33''\ \times\ 14.140}{152.640} = 0{,}08975$$

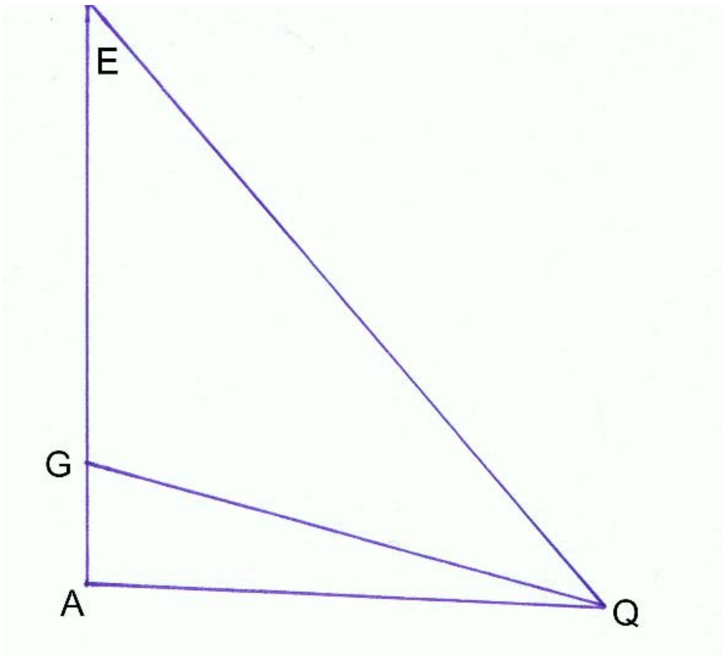
$$\widehat{aqg} = \sin^{-1} 0{,}0875 = 5º\ 8'57''$$

Gràcies a Euclides, podem aplicar que:

$$\widehat{egq} = \widehat{gaq} + \widehat{aqg}$$

$$\widehat{egq} = 104º\ 20'33'' + 5º\ 8'57'' = 109º\ 29'30''$$

Així doncs, ja sabem els angles necessaris per calcular el segment aq. Aquest és el triangle en el qual queden representades les mesures angulars:




$$\widehat{gaq} = 104º\ 20'33''$$

$$\widehat{aqg} = 5º\ 8'57''$$

$$\widehat{egq} = 109º\ 29'30''$$

Per realitzar el càlcul del segment aq, hem de tornar la igualtat inicial:

$$aq = \frac{\sin \widehat{egq}\ \times\ gq}{\sin \widehat{gaq}} = \frac{\sin 109º\ 29'30''\ \times\ 152.640}{\sin 104º\ 20'33''} = 148.521$$

El segment aq pren un valor de 148.521 unitats. Un valor molt aproximat a 148.539 unitats, al qual Kepler havia arribat mitjançant les seves triangulacions.

**Segment ak**

Kepler, a la línia ak, li dóna un valor angular de 8º 19' 4'' Verge.

El procediment a seguir és el mateix que per la posició anterior.

Mitjançant la llei dels sinus, tenim la igualtat següent:

$$\frac{\sin \widehat{agk}}{ag} = \frac{\sin \widehat{gak}}{gk} = \frac{\sin \widehat{agk}\ /\ \sin \widehat{egk}}{ak}$$

Obtenció dels angles:

$$\widehat{gak} = \widehat{ak} - \widehat{ae}$$

$$\widehat{gak} = 8º\ 19'4''Verge - \ 28º\ 41'40''\ Lleó = \ 9º\ 37'24''$$

$$\sin \widehat{akg} = \frac{\sin \widehat{gak}\ \times\ ag}{gk} = \frac{\sin 9º\ 37'24'' \times\ 14.140}{152.640} = 0{,}01549$$

$$\widehat{akg} = \sin^{-1} 0{,}01549 = 53'14{,}35''$$

Gràcies a Euclides, podem aplicar que:

$$\widehat{egk} = \widehat{gak} + \widehat{akg}$$

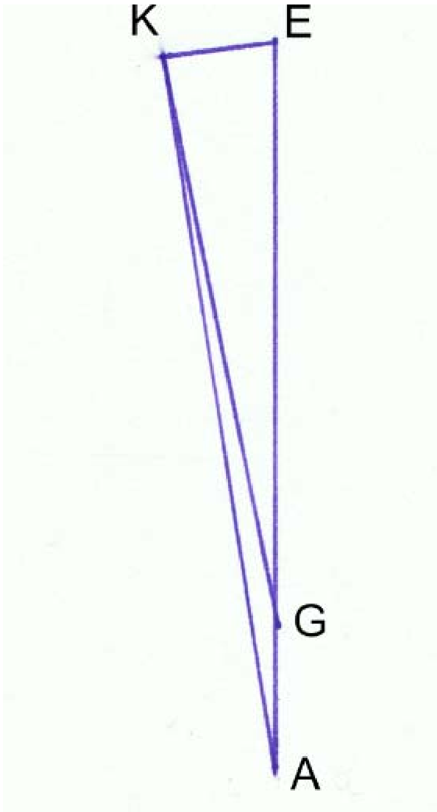
$$\widehat{egk} = 9º\ 37'24'' + 53'14{,}35' = 10º\ 30'38{,}35''$$

Així doncs, ja sabem els angles necessaris per calcular el segment ak, on es poden apreciar a la figura a continuació:

$$\widehat{gak} = 9º\ 37'24''$$

$$\widehat{akg} = 53'14{,}35''$$

$$\widehat{egk} = 10º\ 30'38{,}35''$$




Cal tornar a la igualtat inicial per trobar el valor del segment ak:

$$ak = \frac{\sin \widehat{egk}\ \times\ gk}{\sin \widehat{gak}} = \frac{\sin 10º\ 30'38{,}35'' \times\ 152.640}{\sin 9º\ 37'24''} = 166.652$$

El segment ak pren un valor de 166.652 unitats. Un valor molt aproximat a 166.605 unitats al qual Kepler havia arribat mitjançant les seves triangulacions.

**Segment ah**

Kepler descobreix que la línia ah es troba en una direcció de 5º 24' 21'' Balança.

El procediment a seguir, altre cop, és el mateix els altres dos anteriors.

Trobem la igualtat següent, a partir de la llei dels sinus:

$$\frac{\sin \widehat{agh}}{ag} = \frac{\sin \widehat{gah}}{gh} = \frac{\sin \widehat{agh} \,/\, \sin \widehat{egh}}{ah}$$

Obtenció dels angles:

$$\widehat{gah} = \widehat{ah} - \widehat{ae}$$

$$\widehat{gah} = 5º\ 24'\ 21'' Balança - \ 28º\ 41'40''\ Lleó = 36º\ 42'41''$$

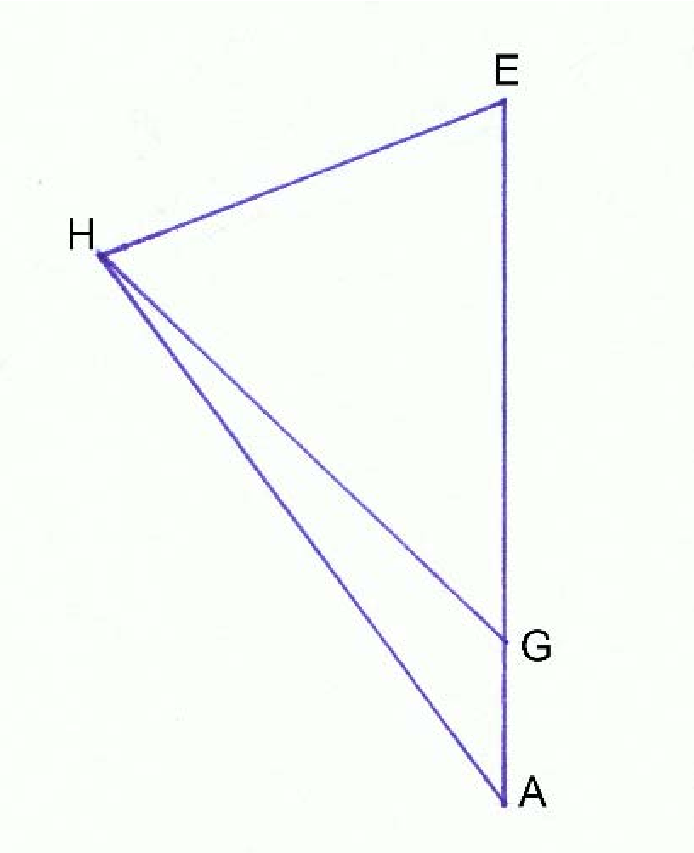
$$\sin \widehat{ahg} = \frac{\sin \widehat{gah}\ \times\ ag}{gh} = \frac{\sin 36º\ 42'41''\ \times\ 14.140}{152.640} = 0{,}05538$$

$$\widehat{ahg} = \sin^{-1} 0{,}05538 = 3º\ 10'28{,}07''$$

Gràcies a Euclides, podem aplicar que:

$$\widehat{egh} = \widehat{gah} + \widehat{ahg}$$

$$\widehat{egh} = 36º\ 42'41'' + 3º\ 10'28{,}07'' = 39º\ 53'\ 9{,}07''$$




Així doncs, ja sabem els angles necessaris per calcular el segment ah:

$$\widehat{gah} = 36º\ 42'41''$$

$$\widehat{ahg} = 3º\ 10'28{,}07''$$

$$\widehat{egh} = 39º\ 53'\ 9{,}07''$$

Cal tornar a la igualtat inicial per trobar el segment ah:

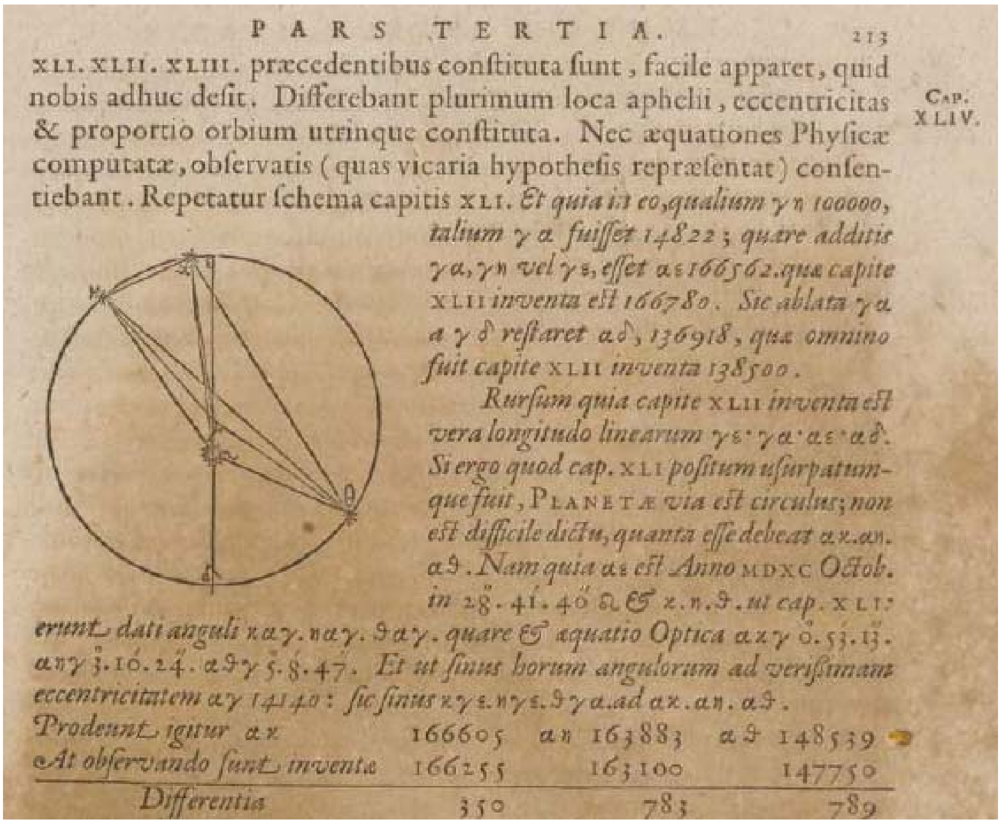
$$ah = \frac{\sin \widehat{egh} \times gh}{\sin \widehat{gah}} = \frac{\sin 39º\, 53'\, 9{,}07'' \times 152.640}{\sin 36º\, 42'41''} = 163.741$$

El segment ah pren un valor de 163.741 unitats. Un valor molt aproximat a 163.883 unitats a què Kepler havia arribat mitjançant les seves triangulacions.

Com es pot comprovar, aquí hi queden plasmats els valors que Kepler establí per aquests tres segments, lleugerament distints als que hem trobat mitjançant els càlculs anteriors.

- $aq = 148.539$
- $ak = 166.605$
- $ah = 163.883$

Fou així que Kepler indicà tots els valors i la diferència corresponent aquesta taula a continuació, extreta de *l'Astronomia Nova*, juntament amb l'esquema de les posicions marcianes i els càlculs i explicació:



PARS TERTIA. 213

XLI. XLII. XLIII. præcedentibus conſtituta ſunt, facile apparet, quid nobis adhuc deſit. Differebant plurimum loca aphelii, eccentricitas & proportio orbium utrinque conſtituta. Nec æquationes Phyſicæ computatæ, obſervatis (quas vicaria hypotheſis repræſentat) conſentiebant. Repetatur ſchema capitis XLI. *Et quia in eo, qualium γη 100000, talium γα fuiſſet 14822; quare additis γα, γη vel γε, eſſet αε 166562. quæ capite* XLII *inventa eſt 166780. Sic ablata γα a γδ reſtaret αδ, 136918, quæ omnino fuit capite* XLII *inventa 138500.* — CAP. XLIV.

*Rurſum quia capite* XLII *inventa eſt vera longitudo linearum γε · γα · αε · αδ. Si ergo quod cap.* XLI *poſitum uſurpatumque fuit,* PLANETÆ *via eſt circulus; non eſt difficile dictu, quanta eſſe debeat ακ. αη. αθ. Nam quia αε eſt Anno* MDXC *Octob. in 28. 41. 40 ♌ & κ. η. θ. ut cap.* XLI*: erunt dati anguli καγ. ηαγ. θαγ. quare & æquatio Optica ακγ 0. 53. 13. αηγ 3. 16. 24. αθγ 5. 8. 47. Et ut ſinus horum angulorum ad veriſſimam eccentricitatem αγ 14140: ſic ſinus κγε. ηγε. θγα. ad ακ. αη. αθ.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prodeunt igitur ακ* | 166605 | *αη* 163883 | *αθ* 148539 |
| *At obſervando ſunt inventæ* | 166255 | 163100 | 147750 |
| *Differentia* | 350 | 783 | 789 |

Pàgina 213, *Astronomia Nova*

En aquesta taula hi apareix una distinció entre les distàncies que publicà Kepler a l'*Astronomia Nova* i les que s'han trobat mitjançant les triangulacions pròpies. Aquesta diferència podria ser causada per petites correccions, errors o simplificacions que potser Kepler devia realitzar i que no han quedat escrites ni marcades enlloc. Tot i aquesta petita distinció, la conclusió extreta a partir de la taula, en els dos casos, és exactament la mateixa.

| **Distàncies** | | **aq** | **ak** | **ah** |
|---|---|---|---|---|
| Calculades a partir del cercle | pròpies | 148.521 | 166.652 | 163.741 |
| | per Kepler | 148.539 | 166.605 | 163.883 |
| Extretes de les observacions | | 147.750 | 166.255 | 163.100 |
| Diferència entre ambdues distàncies respecte càlculs | propis | 771 | 397 | 641 |
| | keplerians | 789 | 350 | 783 |

Què podia originar, va preguntar-se Kepler, aquestes diferències entre les observacions? Va tenir clar des del primer moment que no podien ser a causa de les observacions preses per Tycho Brahe. I si la incorrecció es trobava en l'ús del Sol real en comptes del Sol mitjà? Fet, també, incapaç d'explicar la diferència perquè hagués fet que Mart estigués situat més a prop d'un costat i més lluny de l'altre respecte del Sol, però Mart realment està massa a prop als dos costats de l'òrbita. Kepler, després de rumiar-hi molt, arribà a la conclusió que la distància real de Mart al Sol no es podia esbrinar a partir del coneixement d'altres distàncies, sinó que cada punt s'havia de tractar individualment. Fou així que l'astrònom es concentrà a trobar la mesura correcta de l'excentricitat i va descobrir una excentricitat molt aproximada a l'esbrinada en un altre apartat de la seva investigació no present al treball, de 9.264 unitats.

### 7.2.2 Àrees iguals per a temps iguals

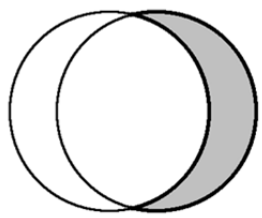
Kepler, per molt que el seu dubte sobre l'existència d'una òrbita circular fos cada vegada més evident, no va voler basar-se només en el càlcul de les posicions de Mart just acabat de realitzar; volia arribar més enllà. És per això que Kepler va aplicar el seu mètode d'àrees iguals per temps iguals a l'òrbita marciana.

Per tal de dur a terme aquesta nova i última prova de confirmació o de falsació sobre l'òrbita circular marciana, Kepler utilitzà una hipòtesi que ell anomenà substituta com a guia per a les longituds del planeta, però que no és objecte d'aquest treball. Gràcies a aquestes longituds, li fou possible el càlcul de la posició de Mart respecte les àrees i els temps, i comparà els resultats amb la hipòtesi substituta ja obtinguts.

L'astrònom va calcular les diferents anomalies als punts on l'òrbita de Mart recorreguda forma 90º, 45º, 135º i 180º respecte la posició del planeta i amb la intenció de comprovar les diferències amb els resultats de la hipòtesi substituta. Aquestes diferències van ser d'uns 8', donant com a resultat que el mètode de les àrees i els temps situava a Mart massa lluny de la seva òrbita real i que, per tant, no concordava amb una òrbita circular.

## 7.3 PROCÉS DE CONSTRUCCIÓ DE L'ÒRBITA

Kepler es dedicà a sobre posicionar els cercles definits pels dos arguments anteriors en funció de les posicions per tal d'aproximar-se a la idea de l'òrbita. Això comportà la creació de lúnules degudes al creuament dels cercles, les quals fan difícils tots els càlculs que es pretenguin fer sobre aquesta nova òrbita. Aquest fet el portà a concloure que l'òrbita de Mart no podia ser de cap manera circular i, seguidament, proposà una forma ovalada (no circular) com a òrbita d'aquest planeta. És important tenir clar que un oval no és una figura definida matemàticament, hi ha diverses corbes que són

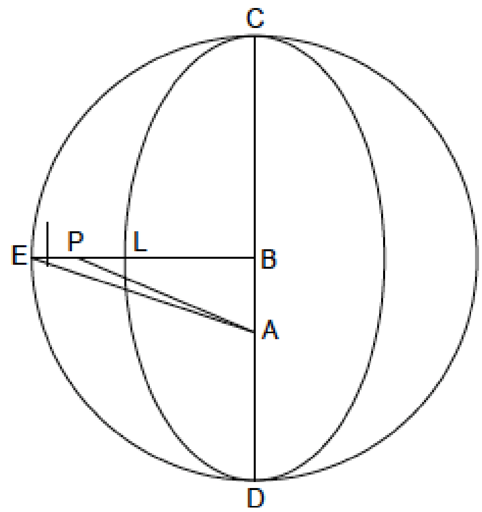


Representació gràfica d'una lúnula (part gris) anomenades així; l'oval és una corba tancada plana que s'assembla a una forma ovoide o el·líptica.

Un cop tingué clara la forma, va haver de comprovar si realment tot el que havia estat pensant, elucubrant i intentant era correcte i si quadrava entre sí. Fou així que desenvolupà un mètode amb la intenció de mesurar l'àrea d'aquesta forma oval per aplicar-hi la llei de les àrees en relació el temps. Quan ho hagué realitzat, es trobà amb errors de 6', i probablement deduí que aquests errors podien ser deguts a la manera amb què havia calculat l'àrea. Llavors, Kepler, decidí utilitzar 360 distàncies concretes, és a dir, a cada grau de la circumferència adjuntar-hi una posició per tal que els càlculs resultessin molt més acurats. Aquesta feina, com us podeu imaginar, esdevingué feixuga, difícil i cansada; tot i això, Kepler es degué sentir satisfet en trobar que els errors produïts per aquest nou mètode només li resultaven ser de 3' i així realment pensà que l'òrbita de Mart descrivia un oval.

L'astrònom, un cop es pensava que tenia el problema solucionat, va adonar-se que era del tot impossible esbrinar quina porció exacta de l'oval corresponia a un temps concret ja que no tenia eines suficients per fer aquest càlcul a causa del desconeixement del perímetre exacte de l'òrbita, perímetre que no es podia trobar sense saber l'amplada de les lúnules. Llavors va preguntar-se si realment amb una òrbita ovalada s'obtindrien les distàncies correctes. Tot utilitzant totes les dades que desenvolupà i trobà quan va confirmar la direcció de l'afeli, constatà i afirmà que el Sol real és el centre de l'univers. Tot seguit, Kepler reproduí i esbrinà més distàncies Sol – Terra – Mart i les utilitzà per trobar amb la màxima precisió possible el radi de les òrbites de la Terra i de Mart i l'excentricitat d'aquest últim planeta. Tot comparant aquestes distàncies tan exactes amb les distàncies trobades abans creades pel cercle i per l'oval, Kepler conclogué que el cercle era massa gran i la forma ovalada creava longituds d'arc massa curtes. Per tant, no és difícil deduir que l'òrbita de Mart havia de prendre un camí intermedi entre el cercle i l'oval. En definitiva, una figura ovalada no responia exactament a la representació geomètrica de l'òrbita de Mart; l'aventura kepleriana havia de seguir.

Kepler, llavors, començà a intentar trobar alguna pista per tal de determinar un procés, una regla, una rutina per saber quant exactament havia de modificar de l'òrbita circular per trobar la distància i la posició exactes. L'astrònom, després d'haver rumiat i pensat durant un cert període de temps, trobà la manera d'esbrinar i construir totes les distàncies solars correctament per al planeta Mart. Aquest pas fou crucial, ja que li permeté definir la veritable òrbita com el lloc geomètric de tots els punts que segueixen una mateixa construcció, i reduí així el problema de la forma de l'òrbita a una qüestió purament geomètrica.




Kepler s'imaginà aquest dibuix geomètric (dreta), que l'ajudà notablement pel procés que havia de dur a terme. I, a continuació, hi ha descrit de forma breu el que l'astrònom realitzà.

Tenim que CD és la línia dels àpsides; B és el punt central de l'òrbita suposadament circular de Mart; CED és el cercle similar a l'òrbita marciana, diàmetre del qual és CD; A és el Sol; EP és la diferència entre l'òrbita circular de Mart i la seva posició real; CLD és la suposada òrbita de forma ovalada.

Kepler es plantejà quina era la distància correcta del Sol a Mart. L'astrònom veia que el segment AE era massa llarg com per poder ubicar correctament E al llarg la línia BE. Llavors es plantejà: i si Mart, en comptes de ser a E, és a P, quina estratègia matemàtica puc seguir per tal de poder determinar el segment AP? L'astrònom estigué molt interessat en aquest cas en particular perquè, bàsicament, en aquest interval (P, E) és on es produeix la major diferència entre l'òrbita circular i l'òrbita real.

La deducció inicial de Kepler fou la següent: a l'atzar, diem que BD té un valor de 100.000 unitats, fet que ens porta a afirmar que l'amplada de la lúnula és EL=858. Però aquesta mesura és massa gran i ens duria a dir que Mart està situat a L, quan realment l'òrbita de Mart creua el segment EB al punt P, on la distància EP és 429 (més exhaustivament i estricta, tenim que és 432). Aquesta distància resulta ser la meitat de l'amplada inicial de les lúnules; Kepler, doncs, per un seguit de raons que ell considerà justificables, dugué a terme aquesta rectificació i afirmà que la distància EP = 432. La jugada, com s'ha comprovat, li va sortir rodona.

De quina manera Kepler va calcular aquest valor de 432?

Sabem que:

EB = 153.350 (valor que obté Kepler a partir de triangulacions)

Per tant, AB = 14.140 (Kepler ens ho diu al capítol 42 de *l'Astronomia Nova*, a l'hora de calcular l'excentricitat)

Si aproximem el valor de EB a 100.000, AB ens queda modificat al valor de 9.281.

AP = EB = 100.000

Angle BEA = 5º 18' = 5,3º

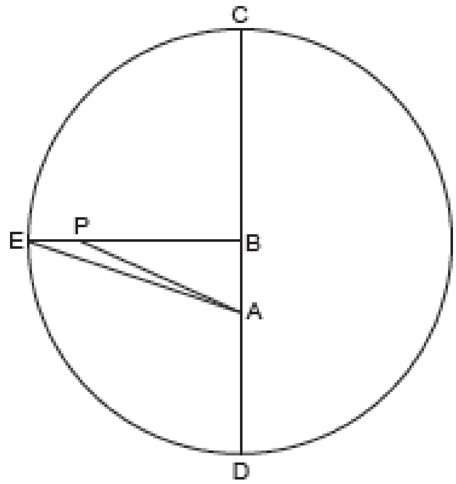
Llavors,

EA = $\sqrt{AB^2 + EB^2} = \sqrt{9.281^2 + 100.000^2}$ = 100.429

BP = $\sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{100.000^2 - 9.281^2}$ = 99.568

EP = EB – BP = 100.000 – 99.568 = 432

Com Kepler afirma, EP = 432




L'òrbita circular i l'òrbita descrita per la forma ovalada que Kepler havia provat, queden totalment refutades. Kepler, doncs, es proposà trobar la manera de construir i calcular, a partir de l'òrbita circular, l'òrbita marciana correcta duent a terme petits ajustaments.

Quan provava, intentava, pensava i calculava com podia fer-s'ho per trobar el segment AP, va creuar-se, per pura casualitat, amb una dada que li va interessar molt: la secant de 5º 18, que és l'angle BEA, és 100.429.

$$\cos AEB = \frac{EB}{EA}$$

$$\sec AEB = \frac{EA}{EB}$$

Si EB = 1, llavors EA = $\sec AEB = 1{,}00429$

Els darrers tres dígits i l'angle van ser ràpidament identificats per Kepler que, senzillament, pensà que aquest fet no podia ser fruit de la casualitat; 5º 18' era la mesura de l'equació òptica i 429 és la meitat de l'amplada correcta de les lúnules (de fet, com s'ha escrit abans, la correcta és 432, però 429 era una xifra prou aproximada).

L'angle BPA és el que Kepler anomena "part òptica de l'equació", quan un dels seus costats es creua amb la nostra línia de visió a Mart, és a dir, quan es produeix una oposició i la Terra es troba al llarg de la línia AP.

Kepler ja havia determinat anteriorment el valor de EP quan és perpendicular a CD. També s'havia adonat que EA és secant de la major equació òptica. Llavors, 100.429 – 429 = 100.000

Si realment fos així, tots els valors es trobarien en una línia recta sense formar cap triangle. Però EP, com s'ha esmentat abans, no és exactament 429, sinó 432. Per tant, fins i tot si PA fos 100.000 exactament, PE, PA i EA no formarien cap línia recta, sinó un triangle molt pla. EP seria 432, EA seria la secant de 5,3º i, llavors, AP tindria un valor aproximat de 100.000. Podríem considerar-ho, doncs, com una norma aplicable en general per trobar el punt P?

En efecte, Kepler desenvolupà aquest nou mètode per trobar exactament les distàncies correctes del Sol a Mart. Aquestes, un cop calculades, resulten ser correctes ja que són mínimament diferents a les que Kepler trobà capítols anteriors calculades a base de triangulacions a partir d'observacions. Kepler aquest cop havia triomfat: el mètode emprat i les distàncies eren correctes, tot encaixava, finalment.

## 7.4 EQUACIÓ DE L'EL·LIPSE

El procés de la descoberta de l'òrbita marciana no havia acabat encara: quedava la determinació de la figura geomètrica que descrivia l'òrbita. L'única figura geomètrica ovalada coneguda matemàticament fins al moment era l'el·lipse, descrita per Arquímedes. Així doncs, Kepler intentà aplicar l'equació de l’el·lipse i els paràmetres que requereix a l’òrbita marciana i comprovar si encaixava o no.

Kepler, a base de la seva experimentació amb les observacions i els valors, va trobar que la distància correcta del Sol a Mart, $\rho$ en l’esquema a continuació, era de $\rho = 1 + e\cos\beta$, on e=distància entre el Sol i el centre d’una suposada òrbita circular.

Com es pot observar al dibuix de la dreta, Mart està situat al punt W; el punt P és la projecció perpendicular de Mart en una òrbita circular; $\beta$ és l’angle entre el centre de l’òrbita circular i el punt P; $\upsilon$ és l’angle entre la posició del Sol i la del planeta; la a, que té el valor d’1 unitat (valor pres com a referència, a l’atzar, no va ser calculat), és un paràmetre que forma part de l’equació de l’el·lipse, igual que b, que té un valor de $b = 1 - 0{,}5e^2$, valor trobat pel mètode prova-error i que encaixa amb els altres càlculs de Kepler ; x i y representen les coordenades on està situat Mart.

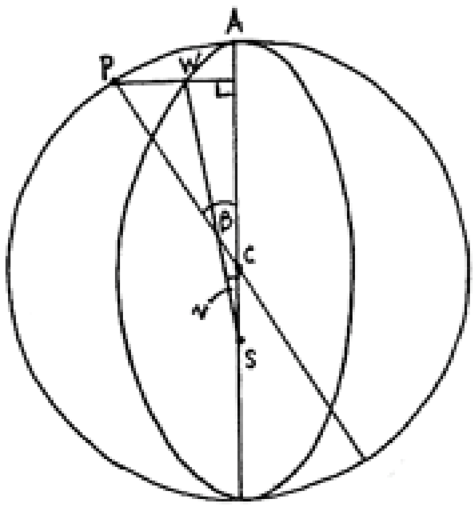


Figure F

A partir d’aquí, i tenint en consideració el dibuix, l’astrònom va iniciar els seus càlculs:

Sabent que $x = \cos\beta$ i que $a = 1$, podem aplicar l’equació de l’el·lipse per trobar la distància y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = b^2 - b^2x^2$$

$$y^2 = b^2 - b^2\cos^2\beta$$

$$y^2 = b^2(1 - \cos^2\beta)$$

$$y^2 = b^2\sin^2\beta$$

$$y = b\sin\beta$$

Un cop queden calculades la y i la x, s'ha de procedir a la creació de les equacions que ens marquin la distància del Sol a Mart.

$$\rho \cos \upsilon = e + \cos \beta$$

$$\rho \sin \upsilon = b \sin \beta$$

Kepler, un cop les tingué, va veure que era necessari ajuntar-les, sumar-les i elevar-les al quadrat i així, obtenia la distància que havia extrapolat experimentalment:

$$\rho^2 \cos^2 \upsilon + \rho^2 \sin^2 \upsilon = (e + \cos \beta)^2 + b^2 \sin^2 \beta$$

$$\rho^2 \cos^2 \upsilon + \rho^2 \sin^2 \upsilon = e^2 + 2e \cos \beta + \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta$$

$$\rho^2 (\cos^2 \upsilon + \sin^2 \upsilon) = e^2 + 2e \cos \beta + \cos^2 \beta + (1 - 0{,}5e^2)^2 \sin^2 \beta$$

$$\rho^2 = e^2 + 2e \cos \beta + \cos^2 \beta + (1 - e^2 + \frac{e^4}{4}) \sin^2 \beta$$

$$\rho^2 = e^2 + 2e \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \beta - e^2 \sin^2 \beta + \frac{e^4}{4} \sin^2 \beta$$

El terme $+\frac{e^4}{4} \sin^2 \beta$ és tan enormement petit que es considera nul. Per tant:

$$\rho^2 = e^2 + 2e \cos \beta + 1 - e^2 \sin^2 \beta$$

$$\rho^2 = 1 + 2e \cos \beta + e^2 (1 - \sin^2 \beta)$$

$$\rho^2 = 1 + 2e \cos \beta + e^2 \cos^2 \beta$$

$$\rho^2 = (1 + e \cos \beta)^2$$

$$\rho = 1 + e \cos \beta$$

Després de tants anys d'investigació, de pensaments, d'errors i de petites victòries, va assolir la seva conclusió final i més rellevant de totes: l'òrbita de Mart, definitivament, es regia per un moviment el·líptic.

Kepler, a més, va trobar la confirmació de la distància, trobada anteriorment, del Sol a Mart:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 1 - (1 - 0{,}5e^2)^2$$

$$c^2 = 1 - 1 - e^2 + \frac{e^4}{4}$$

$$c^2 = e^2$$

$$c = e$$

On $c = e$ és la distància del Sol al centre de l'el·lipse, la qual Kepler ja havia trobat, i la confirmació que l'òrbita del planeta Mart era el·líptica.

# 8. EXPERIMENTACIÓ AMB L'ÒRBITA EL·LÍPTICA

En aquest últim apartat, he decidit incloure-hi quelcom més experimental: el meu propòsit inicial ha estat dibuixar un esquema a mà de l'orbita de la Terra i la de Mart a partir de les posicions i dels valors angulars i, després, amb l'equació polar de l'el·lipse, arribar a comprovar que les distàncies són aproximadament iguals i que realment l'òrbita és el·líptica. Aquí, el treball difereix una mica de l'estratègia que s'havia dut fins ara perquè no intento entendre, comprovar i analitzar càlculs de Johannes Kepler, ans el contrari. Com he comentat abans, intento trobar unes distàncies mínimament correctes i que s'aproximin a les que Kepler trobà, sense basar-me en procediments ideats per l'astrònom.

L'el·lipse és una figura geomètrica que també pot ser determinada a partir de coordenades polars, un tipus de sistema de coordenades de dues dimensions en el qual cada punt d'un pla en concret està determinat per un angle i una distància. Després, tot aprofitant aquest esquema, mitjançant la conversió de les distàncies mesurades en centímetres, he obtingut valors significatius del planeta i de l'òrbita de Mart.

Per trobar l'equació polar de d'una el·lipse:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

On a l'equació general de l'el·lipse s'hi afegeix C per fer-hi una translació.

$$b^2(x-c)^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2cx+c^2)+a^2y^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2cx+b^2c^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Per continuar, cal tenir en compte que $x^2+y^2=r^2$, relació trobada a partir del teorema de Pitàgores, on x i y són dos punts i r el vector que els uneix, i

$a^2 - b^2 = c^2$, relació matemàtica pròpia d'una el·lipse. Considerant aquestes dues equacions, trobem que:

$$(a^2 - c^2)x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$a^2(x^2 + y^2) - c^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 = a^2b^2$$

$$a^2(x^2 + y^2) - c^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 = (b^2 + c^2)b^2$$

$$a^2r^2 - c^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 = b^4 + b^2c^2$$

$$a^2r^2 = c^2x^2 + 2b^2cx + b^4$$

$$a^2r^2 = (cx + b^2)^2$$

$$ar = cx + b^2$$

La incògnita X, en una equació polar, és reemplaçada per $r\cos\beta$.

$$ar = cr\cos\beta + b^2$$

$$r(a - \cos\beta) = b^2$$

$$r = \frac{b^2}{a - c\cos\beta}$$

Aquesta igualtat final resulta ser l'equació polar de l'el·lipse.

Ara, però, si dividim la segona part de l'equació per a, tenim que:

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a - c\cos\beta}{a}} = \frac{p}{1 - e\cos\beta}$$

on $p = \frac{b^2}{a}$ és el paràmetre i $e = \frac{c}{a}$ és l'excentricitat de l'el·lipse.

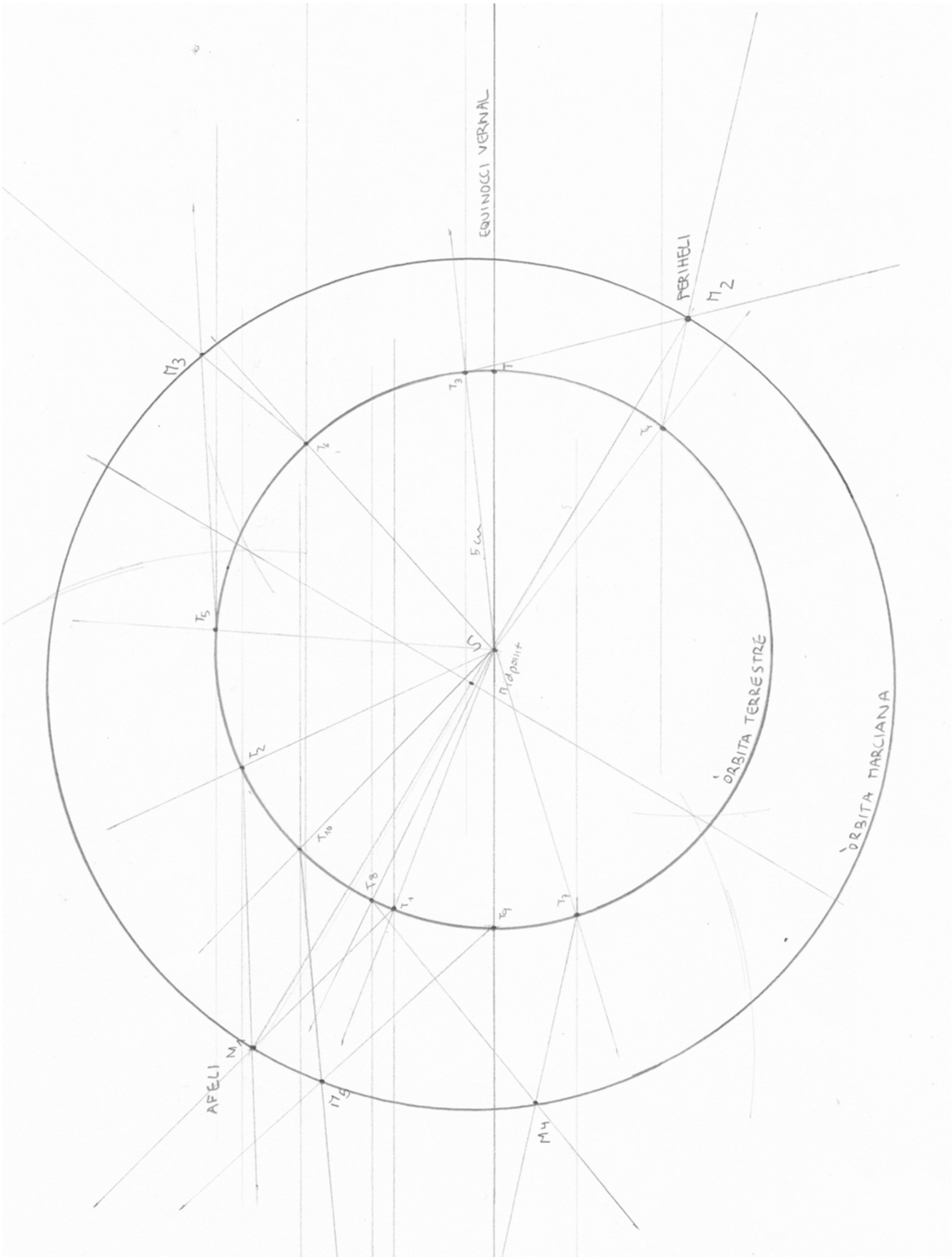
El paràmetre també el podem entendre d'una manera diferent però equivalent:

$$p = \frac{b^2}{a} = a\frac{b^2}{a^2} = a\frac{a^2 - c^2}{a^2} = a(1 - e^2)$$

I, finalment, per acabar d'arrodonir del tot l'equació polar el·líptica, hi afegim aquest petit canvi:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\beta}$$

Si gaudíssim d'un gràfic prou precís tindríem, com he comentat abans, l'oportunitat de treballar i experimentar amb l'equació polar de l'el·lipse amb la intenció final de comprovar que r és igual (o aproximada) a la distància representada al dibuix de l'òrbita. La qüestió és que el gràfic, fet a mà de la manera més acurada possible, no ens serveix per comprovar-ho. Tot i així, a continuació hi apareixen les dades experimentals que he pogut trobar a partir del gràfic.


EQUINOCCI VERNAL
PERIHELI
M2
M3
S
5 cm
ÒRBITA TERRESTRE
ÒRBITA MARCIANA
AFELI
M1
M5
M4

Per dibuixar aquest gràfic, he utilitzat les posicions de la taula següent:

| Data | Longitud heliocèntrica de la Terra | Longitud heliocèntrica de Mart |
|---|---|---|
| 1587, 5 gener | 115º | 182º |
| 1587, 17 febrer | 159º | 135º |
| 1591, 19 setembre | 6º | 28º |
| 1593, 6 agost | 323º | 347º |
| 1593, 7 desembre | 86º | 3º |
| 1595, 25 octubre | 42º | 50º |
| 1587, 28 març | 197º | 168º |
| 1589, 12 febrer | 154º | 219º |
| 1585, 10 març | 180º | 132º |
| 1587, 26 gener | 136º | 185º |

Dibuixar l'esquema ha estat més fàcil del que semblava en un principi. Per fer-lo he seguit un procediment senzill i simple: un cop es té posicionat el Sol sobre una línia, es tracta d'ubicar les posicions de la Terra en la seva suposada òrbita circular amb els seus angles corresponents i, seguidament, des de cada posició terrestre, trobar la línia on es troba Mart. Per cada dues observacions de la Terra i de Mart respecte de la Terra, s'obté una posició de Mart (aquest queda situat just on se'n tallen dues). És a dir, en total he trobat, gràcies al coneixement dels angles, a línies paral·leles, al compàs i al transportador d'angles, cinc posicions del planeta.

Per tal que quedi més clar com han quedat plasmades les distintes posicions al gràfic, penso que seria interessant explicar com he dibuixat la primera posició de Mart, per exemple. Primerament vaig situar el paper horitzontalment i vaig col·locar-hi un punt a l'atzar: el Sol. Amb un regle, vaig dibuixar una línia horitzontal que passava pel Sol tot representant l'equinocci vernal, que suposa els 0º i tots els angles a posteriori vénen mesurats en relació aquesta línia en sentit antihorari. Seguidament vaig mesurar 5 centímetres des del Sol i, amb el compàs, vaig dibuixar la circumferència que representa l'òrbita de la Terra. Després, amb el transportador d'angles i utilitzant el Sol com a centre, vaig situar els 159º (longitud heliocèntrica de la Terra) de la primera posició terrestre. Quan vaig tenir situat primera posició de la Terra en la seva òrbita, era hora de representar la posició geocèntrica de Mart: prenent la Terra com a centre, amb el transportador d'angles es mesuren els 135º de la posició de Mart, i queda representada una línia. Fem exactament el mateix procediment per a la segona posició, tant de la Terra com de Mart. Finalment, les posicions geocèntriques de Mart s'acaben tallant en un punt: la primera posició del planeta Mart. I, aquest procés, el repetim vuit vegades més, de manera que, com he comentat abans, queden un total de 10 posicions per al planeta Terra i 5 per a Mart.

El Sol està representat per la S. L'òrbita més externa és la marciana, amb els seus punts marcats, i la interior és la terrestre. La posició 1 i la 2 de Mart representen l'afeli i el periheli respectivament. Per dibuixar l'òrbita de Mart he hagut de cercar el punt mig entre aquestes i dibuixar un cercle. Aquí podem observar que aquesta és, a ulls humans i amb aquesta precisió mínima, quasi circular (alguns punts difereixen de l'òrbita per una distància que no es pot arribar a percebre).

L'escala utilitzada al gràfic ens transmet que 5 cm equivalen a 1 AU, unitat astronòmica[3], que, alhora, 1 AU equival a 149 597 871 kilòmetres (quasi cent cinquanta milions de kilòmetres).

Sabent totes aquestes equivalències, podem deduir els següents valors de Mart i de l'el·lipse de la seva òrbita:

- Eix major: diàmetre més llarg, una recta que passa pel centre i els dos focus, mentre els seus extrems estan als punts més allunyats de l'el·lipse.

[3] Unitat de distància, aproximadament igual a la distància mitjana entre el Sol i la Terra.

$$\frac{15{,}25\ cm}{5\ {}^{cm}/_{AU}} = 3{,}05\ AU$$

$$3{,}05AU\ \times\ 149.597.871\ {}^{km}/_{AU} = 456.273.506{,}6\ km$$

Resultat acceptable i bastant precís, ja que el real és de 455.878.300 km.

- Semieix major: una meitat de l'eix major, des del centre passa per un dels focus i va fins al costat de l'el·lipse.

$$\frac{7{,}6\ cm}{5\ {}^{cm}/_{AU}} = 1{,}52\ AU$$

$$1{,}52AU\ \times\ 149.597.871\ km = 227.388.763{,}9\ km$$

Resultat que també es diferencia en poques unitats de la distància real de 227.939.100 km.

- Periheli: mínima distància en què es troba un cos del Sistema Solar que gira al voltant de Sol.

$$\frac{6{,}9\ cm}{5\ {}^{cm}/_{AU}} = 1{,}378\ AU$$

$$1{,}378AU\ \times\ 149.597.871\ km = 206.145.866{,}2\ km$$

Resultat, també, bastant precís respecte del correcte, de 206.669.000 km.

- Afeli: punt de l'òrbita d'un objecte al voltant del Sol, en què aquest es troba a la màxima distància del Sol.

$$\frac{8{,}35\ cm}{5\ {}^{cm}/_{AU}} = 1{,}67\ AU$$

$$1{,}67AU\ \times\ 149.597.871\ km = 249.828.444{,}6\ km$$

Resultat que noc es diferencia en excés del resultat correcte, que és de 249.209.300 km.

- Excentricitat: mesura del grau en què la figura es desvia d'una circumferència.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{distància\ del\ Sol\ al\ punt\ mig}{semieix\ major} = \frac{0{,}75\ cm}{7{,}6\ cm} = 0{,}098$$

L'excentricitat real de Mart és de 0,093, la qual sí que es diferencia una mica més aquest cop.

# 9. CONCLUSIONS

L'estudi sobre allò que Kepler ha aportat al nostre món i els mètodes que va utilitzar no ha estat una tasca gens fàcil. Entendre tots els mecanismes i els càlculs ha estat dur, costós i entretingut; malgrat aquests petits inconvenients, haver entès una part de les aportacions keplerianes, m'ha omplert de satisfacció, i puc dir que en referència al propòsit inicial del treball, crec que s'han complert els objectius m'havia proposat.

Johannes Kepler arribà a comprendre el moviment orbital dels planetes gràcies a les observacions preses per Tycho Brahe, com he pogut comprovar al llarg del treball, i més concretament als apartats de la hipòtesi substituta, l'òrbita de la Terra i l'òrbita de Mart.

En l'apartat en el qual he treballat l'òrbita de la Terra, he pogut comprovar que la Terra es mou més ràpidament quan està prop del Sol i més lentament quan se n'allunya i que és possible l'afirmació que un cercle amb un moviment orbital uniforme no representa en absolut el camí que recorre la Terra en l'espai. Malgrat que totes aquestes deduccions fossin correctes, Kepler, en aquell moment, no va ser capaç de deduir exactament quin era el camí que recorria l'òrbita, però sí de fer-ne un esbós i imaginar-se com podria ser.

Quant a l'òrbita marciana, puc assegurar que ha estat el bloc més gratificant del treball: per fi, després de tot, he arribat a entendre, a partir de la demostració matemàtica de l'òrbita el·líptica de Mart, que tots els planetes, sense excepcions, es mouen en relació a una el·lipse.

Després d'intentar explicar, de la millor manera possible, els procediments fets per Johannes Kepler, em va ser necessari capir tot el que feia referència a les el·lipses en general. És per això que vaig pensar que la relació entre l'equació cartesiana i l'equació polar de l'el·lipse n'ampliaria la meva visió.

Haver realitzat un esquema gràfic amb el dibuix de les dues òrbites, la terrestre i la marciana, també m'ha ajudat a entendre com Kepler podia traslladar el que veia quan el Sol desapareixia, és a dir, les estrelles i els planetes, a quelcom més físic: un dibuix representant les posicions de la Terra i de Mart i llurs òrbites.

Crec que cal tornar a remarcar que hi ha diferències entre els resultats de Johannes Kepler i els que he obtingut per mètode propi en aquest treball. Aquestes diferències poden ser degudes als canvis que Kepler va realitzar en les observacions tenint en compte l’aberració astronòmica, diferència entre la posició observada d'una estrella i la seva posició real, a causa de la combinació de la velocitat de l'observador i la velocitat finita de la llum. També podrien ser causades a petits errors en les mesures preses (tot i que he intentat indicar sempre i elogiar la precisió amb la qual va treballar Kepler i Tycho Brahe, és inevitable aquest grau mínim d’error causat, potser, pels instruments astronòmics), a canvis que Johannes Kepler afegí a les observacions, a part de l’aberració astronòmica, i que no han quedat registrats en l’*Astronomia Nova*... Per tant, es pot afirmar que, malgrat aquestes petites distincions entre els resultats keplerians i els meus, les conclusions que se n’extreuen són exactament les mateixes.

Penso que també ha estat molt gratificant poder gaudir de l’exemplar original de Johannes Kepler, la qual cosa m’ha permès contrastar i comprovar que els resultats eren aproximadament iguals, malgrat que els procediments no fossin els mateixos.

# REGRACIAMENTS

És important tenir clar que sense l'ajuda de moltes persones que ens envolten, molts de nosaltres no seríem els mateixos, ni faríem les mateixes coses, ni creuríem en el que creiem ni en el que som. I aquest treball de recerca, sense tu, Jordi, no hagués estat possible. Les meves més sinceres gràcies per tot el teu interès, per la teva enorme ajuda, per la teva il·lusió, per les teves ganes, per les teves crítiques i correccions i per haver cregut sempre, malgrat les dificultats que s'han presentat al llarg del camí, en aquest projecte de recerca.

Gràcies Felicià, per haver-me guiat i ajudat en el que ha calgut sempre que ho he necessitat.

Gràcies a vosaltres, estimada família, pel suport rebut en tot moment, per creure sempre en mi i animar-me a seguir endavant. La confiança que m'heu transmès ha esperonat les meves ganes de seguir aprenent en els distints àmbits escolars.

I, finalment, gràcies a Johannes Kepler per haver-me il·luminat a mi, al meu món, al meu univers. Espero que, algun dia, aquest univers personal i íntim pugui aproximar-se al màxim al vostre, al real, al que regeix les nostres vides, i les de tothom.

# FONTS

## BIBLIOGRAFIA

[1] H. DONHAUE, William, *Selections from Kepler's Astronomia Nova*, Green Lion Press, 2004.

[2] MARTENS, Rhonda, *Kepler's Philosophy and the New Astronomy*, Princeton University Press, 2000.

[3] STEPHENSON, Bruce, *Kepler's physical astronomy*, Princeton Paperbacks, 1994.

## WEBGRAFIA

[4] LAROUCHE YOUTH MOVEMENT. *Johannes Kepler's New Astronomy* [en línia]. [Consultat: 2/12/2013]. <http://science.larouchepac.com/kepler/newastronomy/>

[5] JOHANNES KEPLER AND THE DOOR TO SCIENCE (2007). *Kepler's discovery* [en línia]. [Consultat: 18/11/2013]. <http://www.keplersdiscovery.com>

[6] UNIVERSITY OF CALIFORNIA BERKELEY MATH DEPARTMENT (1998). *Kepler and the First Law of Planetary Motion* [en línia]. [Consultat: 14/12/2013]. <http://math.berkeley.edu/~robin/Kepler/>

[7] PAFKO, W. (2000). *Visualizing Tycho Brahe's Mars Data* [en línia]. [Consultat: 5/10/2013]. <http://www.pafko.com/tycho/index.html>

[8] PRINCETON UNIVERSITY PRESS. *The composition of Kepler's Astronomia Nova, James R. Voelkel* [en línia]. [Consultat: 27/11/2013]. <http://books.google.es/books/princeton?id=_NZsb6B8ATkC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>

[9] ETH – BIBLIOTHEK. *e – rara* [en línia]. [Consultat: 21/10/2013]. <http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/162514>