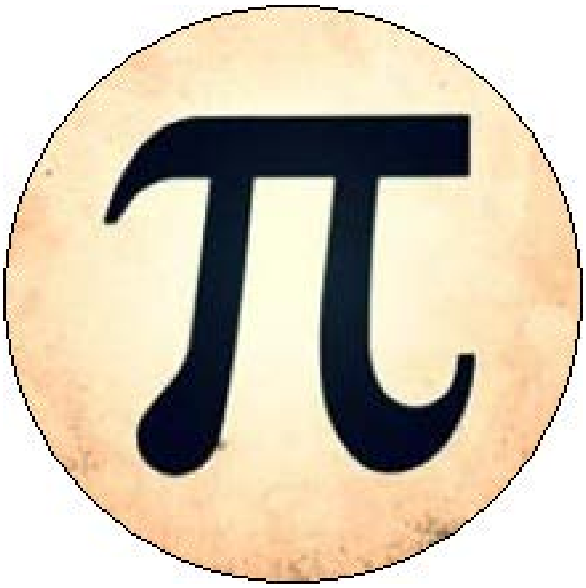
Pi, el peculiar transcendent



Treball de recerca

Autor: Euclides

Agraïments

En aquesta pàgina, seria difícil mencionar totes les persones que, d'una manera o altra, han fet possible que aquest treball resultés com és ara. Per a totes elles, el més sincer agraïment.

No obstant, voldria recordar especialment:

- *La xxxxxxx, la meva tutora del treball, pel seu constant suport i seguiment; per les seves idees que han ajudat a completar el treball, i per la seva implicació en el treball tot i la coincidència del naixement del seu primer fill.*

- *Els meus pares, que m'han donat la vida, m'han encaminat a estudiar i sempre han estat sobre meu durant l'elaboració del treball.*

- *A tota la comunitat de l'Escola xxxxxx: companys, amics, professorat... per la formació rebuda i pel bon ambient al llarg dels 15 anys que hi porto estudiant.*

A tots ells, moltes gràcies.

Euclides

Índex

1. Objecte i Abast

Un cercle és una figura plana tal que tots els punts del seu contorn estan a la mateixa distància d'un altre punt anomenat centre. La longitud des del contorn fins a aquest punt s'anomena radi i la distància entre dos punts de la perifèria a través del cercle diàmetre. El contorn del cercle és la circumferència (Figura 1.1).

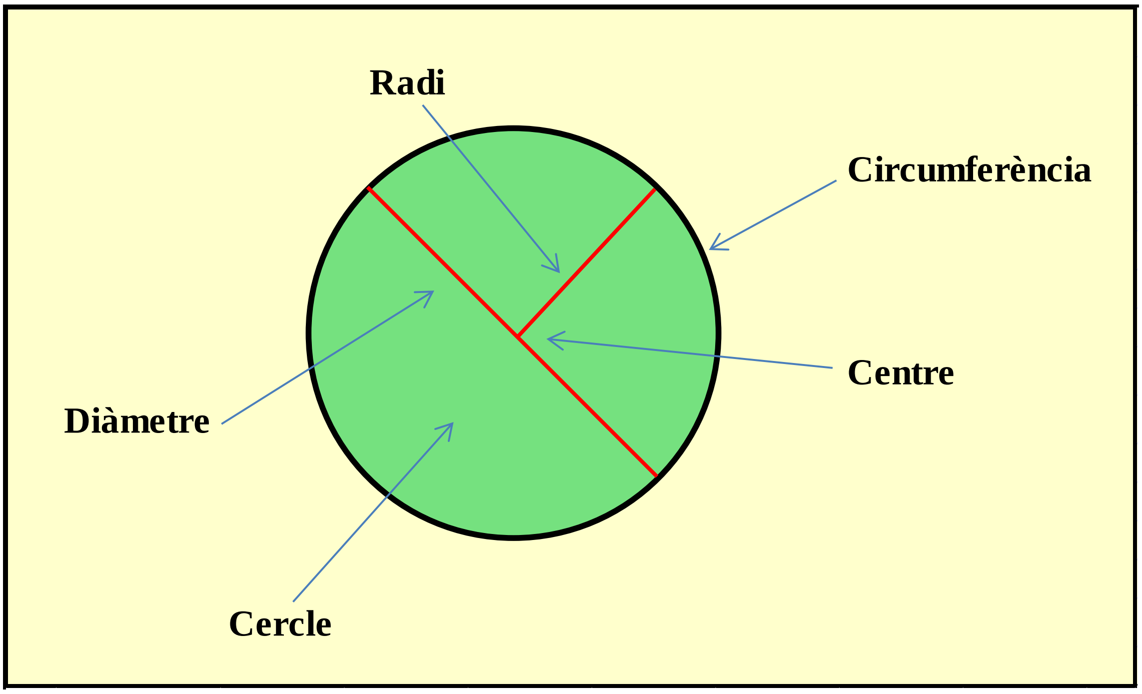


Figura 1.1. Els elements del cercle.
Font: Elaboració pròpia.

La història de pi és remunta molt abans d'allò que està escrit. Segurament, quan els antics van crear la roda o qualsevol objecte circular o simplement quan hom té un objecte circular davant (el tronc d'un arbre, una pedra...), s'adona que tots els cercles són, com en diem avui dia, semblants, tots tenen la mateixa forma, l'únic que varia és la mida. Així com no costa gaire trobar una persona prima i alta, una grassa i baixa, un pèl roig pigat..., de cercles n'hi ha de petits, com el tap d'una barra de pega o com un botó, i n'hi ha de molt grans com el rellotge del *Big Ben* o la figura del Sol al nostre firmament però no existeix ni un cercle prim ni un de baix, tots els cercles tenen allò que podríem anomenar "circularitat perfecta" (en altres casos ja parlaríem d'el·lipses o d'ovals).

Com que tots son semblants, hi havia d'haver una certa relació entre les seves parts i segurament, a mesura que pensaven, els antics es devien preguntar la raó (o quocient) entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre. Malauradament, amb les eines rudimentàries de què disposaven, solament podien veure (utilitzant un bastó i un cordill) que la longitud era sempre una mica més de tres cops el diàmetre. Però aquesta raó de proporció no va ser una pregunta morta. Encara avui dia, fa més de 5000 anys de la seva formulació, es busca precisió en la resposta.

Així doncs, podem dir que la història de π és la cerca de la raó entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre (Figura 1.2.).

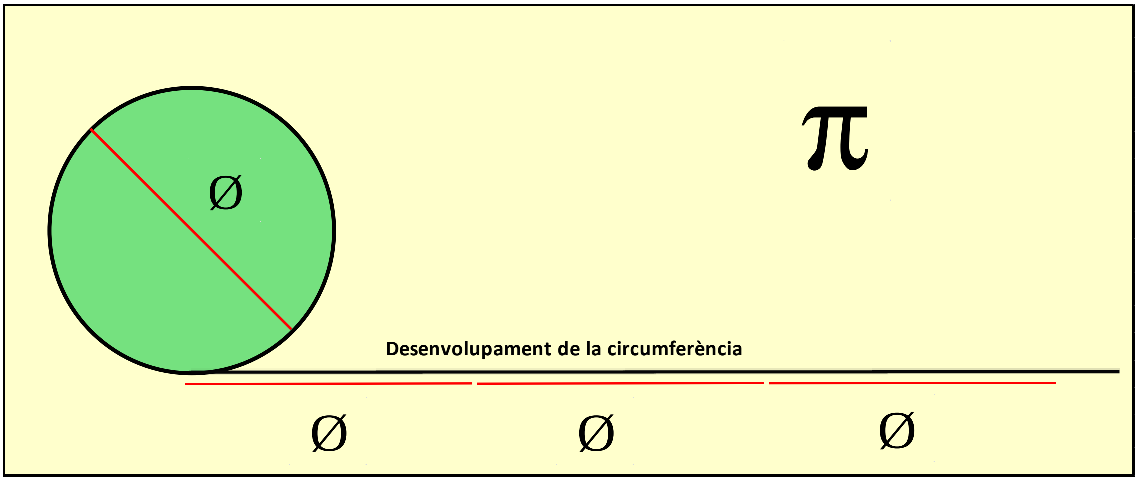


Figura 1.2. Relació entre la longitud de la circumferència i el diàmetre.

Font: Elaboració pròpia.

Amb una applet creada en llenguatge Java, es simula el desenvolupament de la circumferència enfront el seu radi (Annex 1.1.).

Segur que qualsevol lector, interessat o no en la matèria, pot recordar allò que li van dir a l'escola: $C = 2\pi r$ o $A = \pi r^2$. Que hom recordi aquestes fórmules molts anys després d'anar a classe de matemàtiques, fa adonar-se que π no és un nombre més.

Per altra banda, els primers en adonar-se que aquesta constant tenia un significat especial devien buscar-li un nom. L'actual π no es conegut fins l'any 1706 on surt publicat al llibre *A New Introduction to Mathematics* escrit per William Jones, on s'utilitza la lletra pi per referir-se a la perifèria (escrit en grec, clar). De tota manera, la setzena lletra grega (π) per representar aquesta constant, no es va popularitzar fins que la va adoptar Leonhard Euler el 1737. Euler va escriure: *"Hi ha altres formes diverses de trobar les longituds o les àrees de línies corbes particulars, o plans, que podrien facilitar molt la pràctica; com per exemple, en la circumferència, el diàmetre és en el perímetre 1 a (16/5 - 4/239) - 1/3(16/5^3 - 4/239^3) + ... = 3.14159... = π"*

Anteriorment, la constant va passar per diverses etapes: primer no tenia nom; després s'anomenava la constant k de la circumferència i valia una quarta part del pi actual; va arribar a anomenar-se $\frac{\theta}{\lambda}$, mostrant així la seva relació de proporcionalitat; fins arribar a $\frac{C}{d}$ passant per dir-se p, c i la lletra ta en àrab.

Avui en dia, sabem que la constant π està relacionada amb algunes figures planes com la circumferència o l'oval, amb el volum dels cossos de revolució, amb la campana de Gauss, amb les funcions trigonomètriques (i per tant, amb qualsevol funció periòdica que es pot convertir en una suma de funcions trigonomètriques o sèrie de Fourier)...

Per les explicacions anteriors, es veu que pi no és un número qualsevol. Rere seu hi ha una llarga història que es pot seguir a través de molts llibres i pàgines web. Per aquest motiu, el primer objectiu del present treball de recerca és recopilar una història de pi des dels seus inicis fins a l'actualitat, suportada per demostracions matemàtiques i càlculs informàtics que ens acosten a conèixer pi. Aquest objectiu inclou donar resposta a preguntes a l'estil de com va començar la recerca de decimals, qui ha investigat i qui ha proposat nous mètodes, com han evolucionat les tècniques de recerca i de càlcul, etc.

Totes aquestes preguntes s'han provat de resoldre des de dues vessants diferents: S'ha emprat la recerca i la demostració matemàtica però també l'ús de les noves tecnologies.

Per fer-ho, el treball parteix la història en tres parts, el càlcul de pi abans d'Arquímedes (Capítol 3.2.), que es basava en la geometria i l'anàlisi física; el càlcul elaborat pel mateix Arquímedes (Capítol 3.3.) que va incorporar els polígons i va aportar més precisió decimal; i el càlcul després d'Arquímedes (Capítol 3.4.) que s'ha basat en fórmules, sèries infinites i l'ús d'ordinadors que ha fet de la recerca dels decimals un "no parar" que passa ja pels bilions de decimals.

Difícilment sigui possible en aquest treball aportar noves maneres de calcular pi, perquè ja hi ha molt fet i perquè els coneixements d'un alumne de batxillerat són limitats. No obstant, en el Capítol 5, el lector trobarà un mètode matemàtic d'aproximació a les arrels d'un polinomi (mètode de Newton-Raphson) que en el treball s'aplica a la funció sin(x) ja que la seva gràfica passa pel punt (π,0) i per tant permet trobar el valor de pi

Un segon objectiu del treball és la creació d'una pàgina web en la qual es podrà aprendre sobre π a tots els nivells, des de l'elemental, fins a les deduccions de fórmules matemàtiques complexes, passant per imatges en moviment que expliquen pi, les definicions dels millors matemàtics de pi, els procediments de càlcul de decimals en format d'aplicació... El seu objectiu és acostar π, i les matemàtiques en general, a un públic més o menys especialitzat i més o menys experimentat per aprendre conjuntament curiositats, característiques i la història de la famosa constant, a part de gaudir d'una bona estona utilitzant aplicacions que puguin transmetre què és π de manera divertida.

Dins de la pàgina web, s'han inserit diferents applets o programes creats per l'autor en llenguatge Java que permeten buscar aproximacions a pi tot reproduint els mètodes matemàtics més famosos.

També s'ha creat el programa necessari per a l'aplicació del mètode de Newton-Raphson al càlcul de pi.

2. Motivació i Justificació

Volent seguir en el futur estudis de matemàtiques a la universitat, volia fer un treball de recerca relacionat amb les matemàtiques. La meva primera intenció va ser estudiar algun conjunt numèric peculiar com podrien ser els primers o els irracionals.

El conjunt dels irracionals és especialment atractiu perquè són valors amb infinits decimals no periòdics (que no es poden expressar com una fracció) i entre els quals trobem nombres ben coneguts com poden ser:

- Les arrels. Podriem destacar $\sqrt{2}$, que és la diagonal del quadrat de costat 1.
- El nombre d'or, que expressa una relació entre l'altura i l'amplada que es considera especialment estètica i que podem trobar, per exemple, al Partenó de Grècia. I a més a més és el nombre que trobem espontàniament amb més freqüència en la natura.
- El nombre e, base dels logaritmes neperians, que és present en molts fenòmens de creixement i transitoris.
- El nombre pi, objecte d'aquest treball.

Font: http://matematica.laguia2000.com/general/numeros-irracionales

L'elecció final va ser centrar el treball en l'estudi del nombre pi i poder-hi aprofundir adequadament enlloc de dispersar esforços entre els diferents nombres irracionals, que tots podrien merèixer un treball. Aquesta decisió es va prendre l'estiu de 2013 quan tot llegint els llibres *El universo de las matemáticas. Un recorrido alfabético por los grandes teoremas, enigmas y controversias.* (Dunham, W. 1996); *Los secretos de número pi* (Navarro, J. 2010) i *La proporción transcendental* (Posemantier, A. 2002), tots ells recomanats per la tutora d'aquest projecte, vaig descobrir que el número pi no era només un tema del qual se n' havia de sentir parlar a les classes de matemàtiques sinó que més aviat era tot un univers de curiositats i nous coneixements que podia ser interessant de transmetre per escrit.

Al llarg del treball, veurem que el número pi porta essent investigat més de 50 segles, que dins el nostre calendari hi ha un dia dedicat a pi, que les idees de com buscar decimals han anat variant, que tot i haver descobert més d'un bilió de decimals amb 40 n'hi ha més que suficient per fer els càlculs més precisos de tot l'univers i que aquella constant que tenia tan poc valor als pupitres de l'escola té amagat molt més del que hom pot imaginar.

3. Història de pi

Un cop assabentats de l'objecte i l'abast d'aquest treball, crec que la millor manera d'acostar el nombre π al públic és fer-ho a partir de la seva història. La història del nombre π és molt llarga i es remunta molts segles abans de Crist. Si bé és veritat que el nombre com a constant es comença a estudiar de manera més seriosa a partir del segle III aC., també cal mencionar que el seu valor havia estat 3 o 3,125 durant molt temps i era un valor de referència basat en l'observació.

Al llarg de la història, hi ha hagut tres períodes temporals que s'han caracteritzat per investigar a la constant de la circumferència de maneres molt diferents:

- Primerament, abans d'Arquímedes de Siracusa, l'estudi de π era cosa de l'observació i d'estris molt rudimentaris com cordills i pals, és per això que cal dir que no hi havia una precisió gaire important.

- L'any 287 aC. va néixer Arquímedes i uns anys més tard va revolucionar la manera de trobar decimals i aproximar-se a la constant. Els mètodes Arquimedians ja no utilitzaven la mesura sinó que es basaven en la inscripció i circumscripció de polígons regulars dins una circumferència, és a dir, amb càlcul geomètric. En termes actuals, va trobar una mètode successiu que com a límit a l'infinit té π.

- Després d'Arquímedes, els primers segles es van continuar utilitzant els mètodes Arquimedians i cada cop amb més polígons es va poder donar una millor precisió a la constant. Va arribar un moment que aquest mètode va resultar inútil ja que es requeria un gran augment de costats per acostar l'aproximació de π al nombre de veritat. En aquell moment, altres matemàtics ens van sorprendre amb el càlcul d'àrees per límits, les sèries infinites, el càlcul diferencial i els càlculs fets per computadores que ens han acostat a determinar molts més decimals fins a nivells inesperats.

3.1. Introducció a la constant

3.1.1. Què és pi? Alguna propietat

Hem definit π com la relació entre la circumferència i el diàmetre, per la qual cosa, a l'hora de presentar una fórmula per al càlcul de la circumferència, diem que és π per dues vegades el radi. Però pi també apareix en la fórmula de l'àrea del cercle. Això és molt curiós ja que és el mateix valor que s'utilitza per ambdós càlculs. Anem a demostrar perquè això ha de ser així:

Donat que definim π com $\frac{C}{d}$, podem aïllar el perímetre (*C*) i substituint el diàmetre per dos radis resulta:

$$C = 2\pi r$$

Ja sabem que l'àrea d'un polígon és el perímetre (en aquest cas *C*) per l'apotema i partit per dos. Si apliquéssim directament aquesta definició,

$$A = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Però com podem demostrar que aquesta fórmula també és vàlida per un cercle? Prenguem com a proposició inicial que l'àrea d'un cercle és igual a la d'un triangle rectangle que té per catets el perímetre i el radi, com mostra la Figura 3.1.

Suposem que *A*>*T*; es a dir, $A - T < 0$. Podem inscriure ara un polígon en la circumferència de manera que la diferència de les àrees sigui tan petita com vulguem. Per tant, existeix un polígon inscrit en la circumferència i amb àrea S tal que $A - S < A - T$. Si sumem *S*+*T*-*A* en cada membre, ens queda que os queda que *T*<*S*. Per altra banda, també hauria de ser veritat que S<T ja que $\frac{P \cdot a}{2} < \frac{C \cdot r}{2}$.

Això ens condueix a una contradicció i per tant, A no pot ser més gran que T. Anàlogament, podríem haver suposat inicialment que A<T i arribaríem a la mateixa contradicció. Per tant, en paraules d'Arquímedes, "Posat que l'àrea del cercle no és ni major ni menor que la del triangle, ha de ser igual a ella."

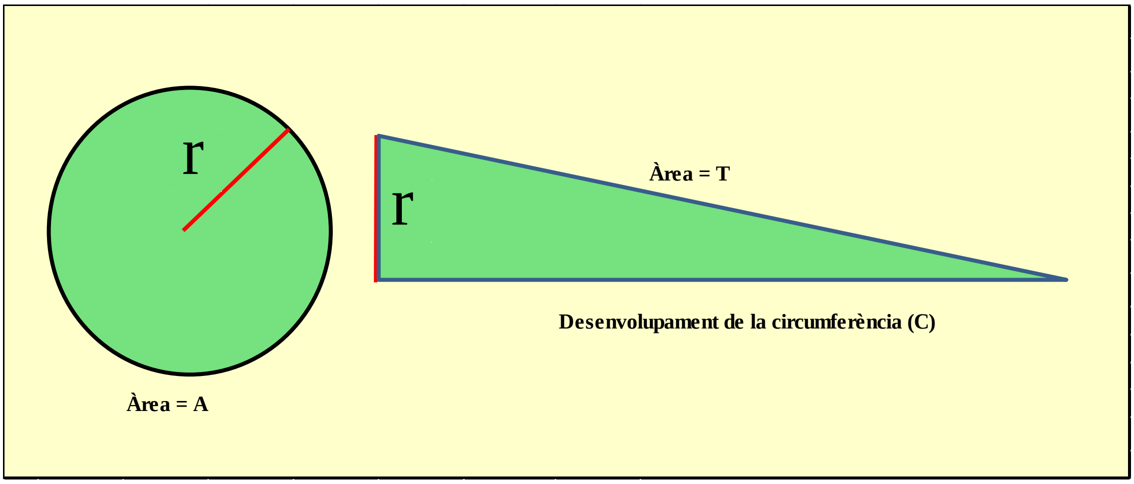


Figura 3.1. Proposició inicial de la demostració que l'àrea del cercle de radi r equival a la d'un triangle rectangle de catets r i el desenvolupament de la circumferència.
Font: Elaboració pròpia.

Queda demostrat doncs que

$$C = 2\pi r$$

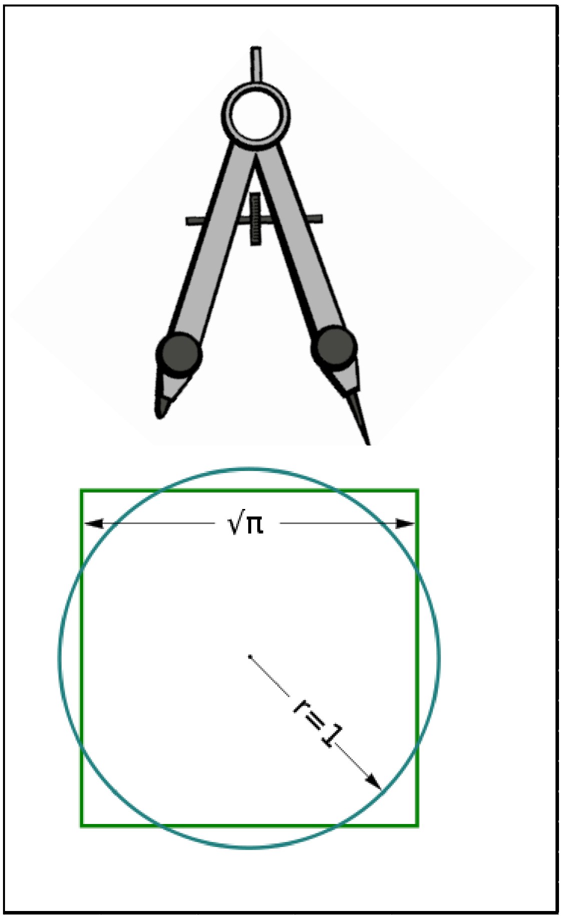
$$A = \pi \cdot r^2$$

3.1.2. Quadratura del cercle

La història de pi sempre anirà acompanyada (fins l'any 1882 que es demostra que es tracta d'un problema irresoluble) del famós problema de la quadratura del cercle:

Enunciat: *Donat un cercle de radi r, construïu geomètricament (amb regle i compàs) un quadrat de costat c tal que tingui la mateixa àrea que el cercle.*

El problema consisteix bàsicament en aconseguir la mesura $\sqrt{\pi}$ ja que multiplicada pel radi donat, obtindríem el costat del quadrat. Fer una arrel quadrada tampoc no genera massa dificultat en el món del dibuix així que el problema consisteix en poder dibuixar π. En l'apartat 3 d'aquest treball es presenta la impossibilitat de resoldre el problema ja que es demostra que π és un número no construïble. Tot i això, encara avui dia hi ha gent que elabora documents amb la resolució del problema de la quadratura del cercle. Cal saber que aquests documents els analitzen, buscant l'error comès, els becaris de la facultat de matemàtiques de la universitat de Paris.



Fonts: http://karenesquivelaplicaciones.blogspot.com.es/2010/10/caracteristicas-e-historia-del-dibujo.html i http://entiemporealmx.com/?p=151330

3.2. Abans d'Arquímedes

Abans de l'època grega, el nombre π ja era important. Els antics, van decidir buscar el valor del nombre, i tot i creure que l'havien trobat, simplement van trobar aproximacions amb un error d'una mica més del 0,5 %. Un valor molt gran quan es tracta d'aproximar un nombre. Aquest error es degut al mètode que es feia servir, no s'utilitzaven càlculs sinó que es buscava a partir de la mesura i l'experimentació el valor de les coses.

Aquest apartat està dividit en 3 períodes: Egipte, Mesopotàmia i la Bíblia.

3.2.1. Egipte

En la obra datada de 1650 aC. *Papir Rhind* de Ahmes, s'exposen 87 problemes extrets de diversos documents i treballs previs solucionats pel mateix escrivà egipci Ahmes. Avui dia, podem trobar la major part d'aquest Papir al *British Museum* de Londres. L'obra és considerada en el seu tot una base d'informació de les matemàtiques de l'època però és d'especial atracció pel present treball el problema on Ahmes dóna un valor per a la constant que per nosaltres és π però que per aquells temps era la proporció de la circumferència al seu diàmetre. Ho fa a través d'un intent de quadrar el cercle.

Fragment del Papir Rhind.

Font : http://josecarlosfernandezromero.com/2012/08/09/el-numero-pi

L'enunciat proposa el següent: Una circumferència de diàmetre "d" té la mateixa àrea que un quadrat de costat $\frac{8}{9}d$ (Figura 3.2.). Si partim de les àrees del cercle i del quadrat i les igualem, trobarem el valor de pi emprat en aquella època. Aquest valor s'expressa en fraccions egípcies (només poden contenir "uns" al numerador) com ho feia Ahmes i també la seva aproximació decimal. S'observa que el valor de pi és un nombre racional i periòdic.

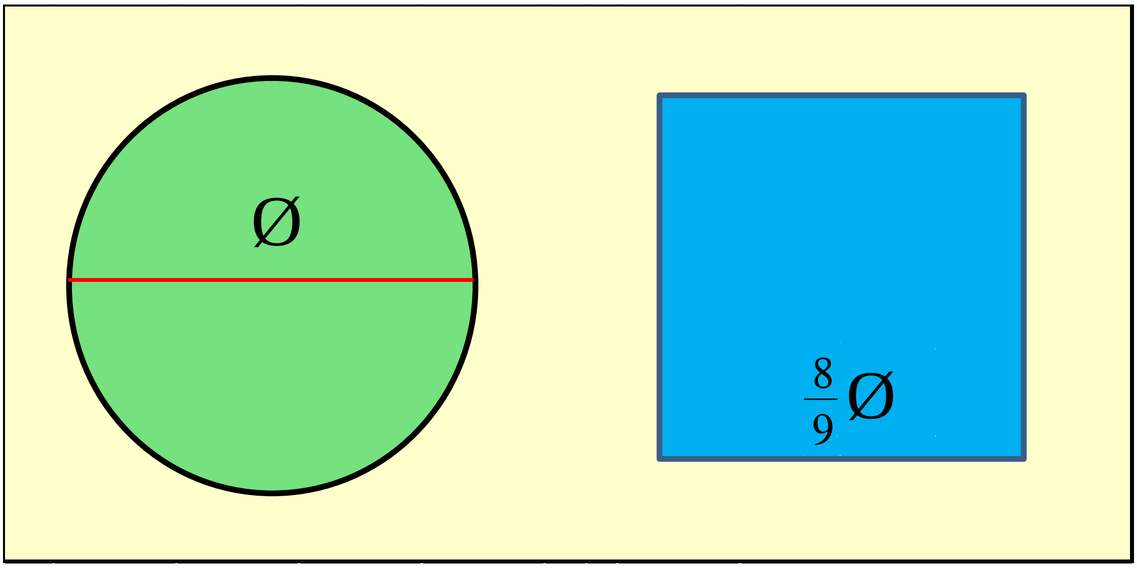


Figura 3.2. Proposició inicial de dos àrees equivalents segons Ahmes.

Font: Elaboració pròpia.

Àrea del Cercle = $\pi \cdot R^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ Àrea del Quadrat = $c^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \frac{64d^2}{81}$

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{64d^2}{81} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$$

$$\pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$

$$\pi = 3{,}1\ 6\ 0\ \overline{1\ 4\ 6\ 9\ 0}$$

3.2.2. Mesopotàmia

L'imperi babilònic, una de les etapes en que es divideix la història de Mesopotàmia, abraça des del segon mil·lenni aC fins al segle VI aC. i ocupa un territori al voltant dels rius Tigris i Èufrates. Segons unes tauletes matemàtiques desenterrades a Susa l'any 1936, es va arribar a la conclusió que els babilònics utilitzaven $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$ com a raó entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

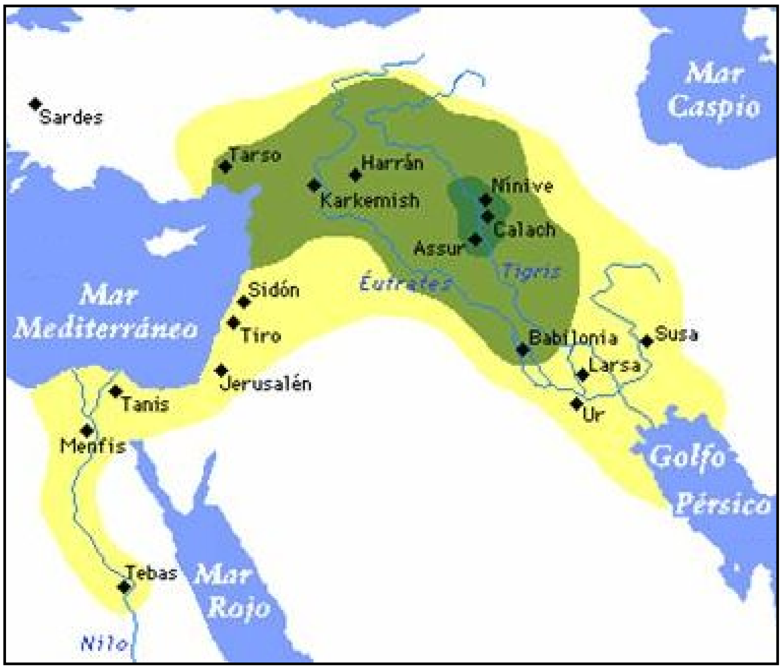
Per altra banda a l'hora de calcular l'àrea del cercle havien definit l'àrea com cinc quartes parts de l'arrel quadrada de la longitud de la circumferència. Curiosament, el valor de π segueix sent 3,125 si s'agafa radi igual a 1, si el radi creix o decreix la fórmula deixa de ser vàlida. Això succeeix perquè en la matemàtica babilònica s'agafava com a unitat allò que s'estudiava, en aquest cas, el radi.

Àrea = $\pi r^2 = \frac{5}{4}\sqrt{2\pi r}$ *

* Suposem $\pi = 3\frac{1}{8}$ en la segona part de la igualtat.

$$\pi(1)^2 = \frac{5}{4}\sqrt{2(3{,}125)(1)}$$

$$\pi = \frac{5}{4}\sqrt{6{,}25}$$



Font: www.fisicanet.com.ar/cultura/mesopotamia.php

$$\pi = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$$

3.2.3. La Bíblia

En dos escrits datats del 550 aC, un al llibre dels Reis i l'altre a les Cròniques del Talmud jueu es descriu l'estany del rei Salomó i per la descripció, es dóna a entendre que creien que π era igual a 3:

"I feu l'estany deu colzes de banda a banda circular perfecta, cinc de profunditat i el perímetre en feia uns trenta."

Alguns historiadors com el Rabí *Refael Imanuel Jai Riki* al seu llibre *Joshev Majashavot* comentaven que el valor de π segons la Bíblia era 3. Per altra banda, se sap que el *Rabí Elijah de Vilna* uns 100 anys després va fer la següent elaboració:

Si prenem el valor numèric de la forma escrita de la paraula "perímetre" (קָוה) 111, el dividim per la forma oral (קָו) 106 i ho multipliquem per 3, obtenim una bona aproximació de π, la més bona de l'època i correcta en quatre decimals:

$$\pi = 3 \cdot \frac{111}{106} = 3.1415094$$

Els valors numèrics estan presos utilitzant la famosa tècnica d'estudi Bíblic (Figura 3.3.), la gematria, consistent en l'assignació d'un nombre a cada lletra de l'alfabet hebreu a partir de la premissa que els hebreus no tenien cap codi numèric.

1	א	Aleph (A, E)	A	60	ס	Samekh (S)	S
2	ב	Beth (B, V)	B	70	ע	A'ayin (A'a, O)	O
3	ג	Gimel (G)	G	80	פ	Pe (P, Ph)	Ph
4	ד	Daleth (D)	D	90	צ	Tzaddi (Tz)	Tz
5	ה	He [Heh] (E, A)	H	100	ק	Qoph (Q)	Q
6	ו	Vau (O, U, V, W)	V	200	ר	Resh (R)	R
7	ז	Zayin (Z)	Z	300	ש	Shin (Sh, S)	Sh
8	ח	Cheth (Ch)	Ch	400	ת	Tau (Th, T)	Th
9	ט	Teth (T)	T	500	ך	Kaph-final (K,Kh)	K
10	י	Yod (I, J, Y)	I	600	ם	Mem-final (M)	M
20	כ	Kaph (K, Kh)	K	700	ן	Nun-final (N)	N
30	ל	Lamed (L)	L	800	ף	Pe-final (P, Ph)	Ph
40	מ	Mem (M)	M	900	ץ	Tzaddi-final (Tz)	Tz
50	נ	Nun (N)	N				

Figura 3.3. Valors de les lletres segons una taula gemàtrica.

Font: http://www.revistacaos.com

3.3. Arquímedes

Sobre l'any 287 aC., va néixer un dels majors contribuents a la història de les matemàtiques: es tracta d'Arquímedes de Siracusa.

Tot i que Arquímedes és molt conegut pel principi físic que porta el seu mateix nom, el savi grec va treballar en tots els àmbits de la ciència, treballant i investigant enginyeria, matemàtiques, física, astronomia i fins i tot en la filosofia.

Pel que fa a l'àmbit matemàtic, Arquímedes va fer una bona aproximació del nombre π a partir de mètodes geomètrics:

Basant-se en el principi que enuncia que qualsevol línia tancada que n'envolti una altra tindrà una longitud superior i tancarà una major àrea, va establir que qualsevol polígon circumscrit tindrà més àrea que la circumferència i alhora aquesta tindrà més àrea que el polígon inscrit.

Dit en altres paraules, la estratègia d'Arquímedes va consistir en acostar-se al cercle mitjançant polígons regulars. El següent desenvolupament, tot i que inclou una notació moderna i deu tenir un punt de partida una mica diferent, es coherent amb aquesta estratègia i és possiblement una de les idees i/o mètodes utilitzats per el savi de Siracusa.

En el present treball, exposem un parell de mètodes que tot i no ser els emprats per Arquímedes són aproximacions als treballs que ell va fer. D'aquesta manera, veurem aproximacions a pi amb els polígons inscrits al cercle utilitzant un mètode i amb els circumscrits usant-ne un altre.

La idea d'utilitzar dos mètodes diferents es basa en el dubte que hi ha de com ho va fer realment Arquímedes ja que no va deixar per escrit (o si ho va fer, no ha arribat als nostres dies) el procediment de càlcul. La famosa aproximació de pi que va deixar-nos Arquímedes va ser: $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$

3.3.1. Polígon inscrit al cercle

Sabent que la raó de la circumferència al seu diàmetre és sempre la mateixa, podrem facilitar el treball escollint un radi per al cercle r = 1. D’aquesta manera, la diagonal del quadrat de la figura 3.4. val 2r que és 2.

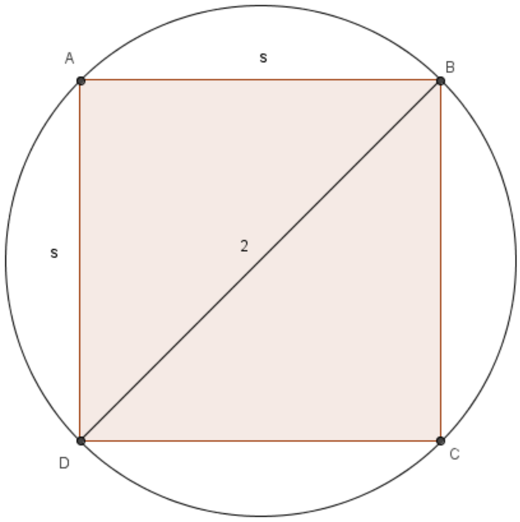


Figura 3.4. Circumferència de radi 1 amb un quadrat inscrit.
Font: Elaboració pròpia.

Si anomenem s a la longitud del costat del quadrat, el triangle rectangle ADB tindria dos catets de longitud s i una hipotenusa de longitud 2. A partir del teorema de Pitàgores tenim que $s^2 + s^2 = 2^2$ de manera que $2s^2 = 4$ i $s = \sqrt{2}$. En conseqüència, el perímetre del quadrat fa $P = 4s = 4\sqrt{2}$.

El perímetre ens dóna una primera, encara que llunyana, aproximació de la constant desitjada:

$$\pi = \frac{circumferència}{diàmetre} \approx \frac{perimetre}{diàmetre} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828427$$

Aquesta aproximació és molt inexacta, segurament pitjor que si mesuréssim la circumferència d'una roda de bicicleta i ens ajudéssim amb un pal i un cordill. Però evidentment, per poder utilitzar tots els mètodes cal tenir algun lloc per on començar. Arquímedes va pensar el següent procediment: Si augmentem el nombre de costats, l'estimació de π serà millor. Així doncs, cal trobar com el perímetre d'un polígon es relaciona amb el d'un altre polígon (En el nostre cas el del doble de costats).

Aquest "obstacle" es pot superar fàcilment utilitzant aplicacions del teorema de Pitàgores. La figura 3.5. mostra una part del cercle de centre O i radi 1. El segment AB és un costat d'un polígon inscrit , podem dir que mesura a. El segment AC que mesura b, és el costat del polígon regular que té el doble de costats.

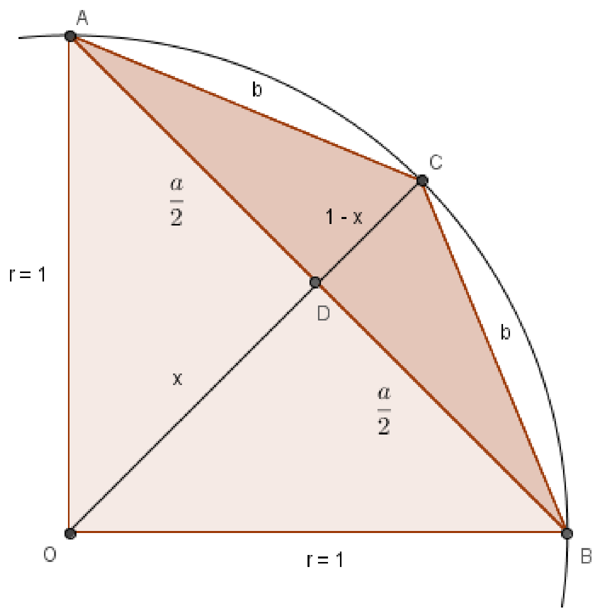


Figura 3.5. Sector circular amb els polígons inscrits de n i 2n costats..

Font: Elaboració pròpia.

En primer lloc mencionar que el triangle ADO és rectangle i que la hipotenusa mesura 1, aquí podem aplicar el teorema de Pitàgores a partir del qual trobem el valor del catet x (apotema del polígon) en funció del costat del polígon, a:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + x^2 = 1^2 \longrightarrow x^2 = 1^2 - \frac{a^2}{4} \longrightarrow x = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

Ara apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle ADC i allí on hi hagi una x ho substituïm pel radical anterior de manera que l'equació només contindrà b i a.

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (1-x)^2 = \frac{a^2}{4} + 1 - 2x + x^2 = \frac{a^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} + \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}^{\,2} =$$
$$= \frac{a^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} + 1 - \frac{a^2}{4} {*} = 2 - 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} {**} = 2 - \sqrt{4-a^2}$$

* Els termes $\frac{a^2}{4}$ s'anul·len i els uns s'ajunten

** El 4 del denominador surt del radical com un 2 i es simplifica

Aïllant b:

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

Ara que ja hem relacionat b (costat d'un polígon de 2n costats) amb a (costat d'un polígon de n costats), podem resoldre el problema del càlcul de π. Tenint en compte que Arquímedes va començar amb un polígon de 6 costats ($n = 6$) en un cercle de radi 1, podem afirmar que la longitud de cada costat de l'hexàgon és 1 ($L_6 = 1$). En conseqüència, el perímetre valdrà 6 ($P_6 = 6$) i l'aproximació de pi valdrà 3 ($\pi_6 = 3$) tot recordant que el diàmetre val 2.

Si ara provem de buscar els costats dels polígon de 12 i 24 costats a partir de la fórmula trobem:

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - {L_6}^2}}$$
$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}}$$

$$L_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$L_{24} = \sqrt{2-\sqrt{4-L_{12}{}^{2}}}$$

$$L_{24} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}}}$$

$$L_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Utilitzant el mètode arquimedià com en els exemples anteriors obtindrem els resultats de la Taula 3.1.

Cada vegada, el valor de π s'acosta més al esperat actualment de manera que es pot anar continuant. Òbviament, aquest procés es pot seguir fins que un vol. A partir dels primers termes es veu un patró que es va repetint. Amb ajuda d'una calculadora de mà de les modernes, es pot arribar a calcular l'aproximació de π sense perdre decimals, de per exemple un polígon de 1.536 costats (duplicar l'hexàgon 8 vegades):

$$\pi = \frac{C}{D} \approx \frac{P}{D} = \frac{1536\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}}{2} =$$

$$= 768\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} \approx 3{,}141590$$

n	L_n	P_n	π_n
6	$L_6 = 1$	$P_6 = 6$	$\pi_6 = \frac{circumferència}{diàmetre} \approx \frac{perimetre}{diàmetre} = 3$
12	$L_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$	$P_{12} = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\pi_{12} = \frac{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}106$
24	$L_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$P_{24} = 24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$\pi_{24} = \frac{24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} = 12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \approx 3{,}133$
48	$L_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$P_{48} = 48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$\pi_{48} = \frac{48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2} = 24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \approx 3{,}139$
96	$L_{96} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	$L_{96} = 96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	$\pi_{96} = \frac{96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2} = 48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \approx 3{,}141$

Taula 3.1. Aproximació de pi per polígons inscrits de n costats.

Font: Elaboració pròpia.

Aquesta aproximació és correcta fins al cinquè decimal de manera que cal fer molts més passos per acostar-se a una bona aproximació de la constant. Tot i això, si pensem que Arquímedes vivia al segle III a.C., i no disposava d'estris de càlcul, quan va trobar aquesta manera d'acostar-se a π, va haver de calcular l'arrel de l'arrel de l'arrel de l'arrel de.... amb un pal i la sorra de la platja. Recordem que cada vegada que es dupliquen els costats apareix una nova arrel a la fórmula i Arquímedes va tenir que aproximar les arrels a fraccions d'aproximadament el seu valor, cosa que va fer predre precisió. Arquímedes, va arribar fins a un polígon de 96 costats, (segurament va començar amb un polígon de 6 i el va duplicar 5 cops), amb una aproximació de $\pi \approx 3{,}141032$.

Escultura d'Arquímedes feta per Gerard Thieme.
Font: http://es.wikipedia.org/wiki/Arquímedes

En l'Annex 2 el lector trobarà un exemple d'aplicació creat en Geogebra a partir del qual hom pot obtenir el valor de pi a partir de les fórmules explicades en aquest apartat. En altres paraules, es pot trobar el mètode arquimedià però en vista gràfica i amb càlculs instantanis.

3.3.2. Polígon circumscrit al cercle

Considerem un hexàgon regular. En prenem un sisè, el triangle AOB (Figura 3.6.).

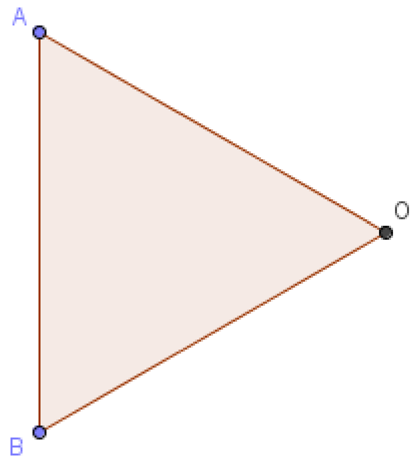


Figura 3.6. Triangle AOB.

Font: Elaboració pròpia.

Aquest triangle complirà les propietats següents: És equilàter i és tangent a la circumferència a la qual està circumscrit pel punt mitjà del segment AB. A partir d'aquí, podem dibuixar un altre triangle: el triangle AOC (Figura 3.7.) on AC és la meitat del costat de l'hexàgon regular circumscrit de radi CO. Fem la bisectriu OD de l'angle AOC. Llavors, el segment AD serà la meitat del costat del polígon de 12 costats. Seguim fent aquest procediment per 24, 48 i 96 costats.

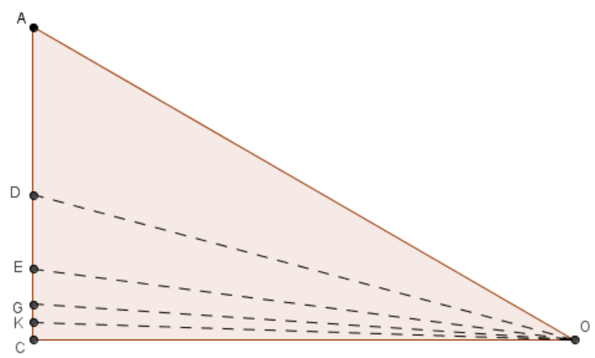


Figura 3.7. Triangle AOC i les seves bisectrius.

Font: Elaboració pròpia.

Per tirar endavant amb els càlculs cal conèixer el teorema de la bisectriu:

En un triangle, la bisectriu d'un angle parteix al costat oposat en parts proporcionals als altres dos costats.

En el nostre cas, $\frac{AD}{CD} = \frac{OA}{OC}$. Sumant a ambdós membres 1 i fent mínim comú múltiple resulta $\frac{AD + CD}{CD} = \frac{OA + OC}{OC}$ i tenint en compte que $AD + CD = AC$ i permutant extrems, $\frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AC} + \frac{OC}{AC}$.

L'angle AOC és de trenta graus i sabent que el sinus d'aquest angle és $\frac{1}{2}$, podem dir que $\frac{OA}{AC} = 2$. Per solucionar l'altra fracció, utilitzem el teorema de pitàgores:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{\sqrt{OA^2 - AC^2}}{AC} = \sqrt{\left(\frac{OA}{AC}\right)^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$$

Per tant, $\frac{OC}{CD} = 2 + \sqrt{3}$.

En aquest moment Arquímedes aplica la relació següent: $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. En l'apartat 3.3.3. debatrem d'on pot sortir aquesta aproximació.

La idea de fer tots aquests càlculs, és que ara Arquímedes disposa de la relació entre el radi i la meitat d'un costat d'un polígon de 12 costats. Fent l'inversa i multiplicant per 12, obtindrem l'aproximació de pi per un polígon de 12 costats. Recordem que pi és fruit de dividir el perímetre amb el diametre o mig perímetre entre el radi. En aquest cas,

$$\frac{OC}{CD} = 2+\sqrt{3} \longrightarrow \frac{12CD}{OC} = \frac{12}{\left(2+\sqrt{3}\right)} \longrightarrow \pi_{12} < \frac{12}{\left(2+\frac{265}{153}\right)} = \frac{1836}{571} \approx 3{,}215$$

Cosa que és veritat ja que pi és menor que aquesta aproximació.

Arquímedes va seguir endavant i va buscar quan valia la següent aproximació.

$\frac{DE}{CE} = \frac{OD}{OC}$. Sumant a ambdós membres 1 i fent mínim comú múltiple resulta $\frac{DE+CE}{CE} = \frac{OD+OC}{OC}$ i tenint en compte que $DE+CE=DC$ i permutant extrems, $\frac{OC}{CE} = \frac{OD}{DC} + \frac{OC}{DC}$.

Del polígon de 12 costats tenim que $\frac{OC}{DC} = 2+\sqrt{3}$ i per pitàgores:

$$\frac{OD}{DC} = \frac{\sqrt{DC^2+OC^2}}{DC} = \sqrt{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2} > \sqrt{1+\left(\frac{571}{153}\right)^2} = \frac{\sqrt{349450}}{153}$$

Per resoldre aquesta arrel quadrada, Arquímedes feia servir un mètode bastant curiós:

Primer buscava un nombre que al quadrat s'acostés per defecte al radicand tal que el següent nombre natural fos més gran. En el nostre cas, $590^2 = 348100$, $591^2 = 349281$, $592^2 = 350464$. Per tant escollim el 591.

Llavors expressem $\sqrt{349450}$ com 591 + x on x és menor que 1 i es pot aproximar com $\frac{1}{d}, \left(d \in N\right) > 1$. En aquest cas, Arquímedes va proposar $x = \frac{1}{8}$, nombre que no explicava mai d'on sortia però que segurament era tret d'algunes taules.

Ja tenim doncs que $\frac{OC}{CE} = \frac{OD}{DC} + \frac{OC}{DC} > \frac{571}{153} + \frac{591+1/8}{153}$

Recordant que multiplicant la inversa per 24 obtindrem la aproximació de pi,

$$\pi_{24} = \frac{24CE}{OC} < \frac{24 \cdot 153}{571+591+1/8} = \frac{3264}{1033} \approx 3{,}16$$

El mateix procediment seguiria per 48, 96 i tants costats com hom volgués.

n	**Mig Costat**	**Radi**	π_n
12	CD	OC	$\pi_{12} = \frac{12 \cdot CD}{OC} < \frac{1836}{571} \approx 3{,}215$
24	CE	OC	$\pi_{24} = \frac{24 \cdot CE}{OC} < \frac{3264}{1033} \approx 3{,}16$
48	CF	OC	$\pi_{48} = \frac{48 \cdot CF}{OC} < \frac{29376}{9337} \approx 3{,}146$
96	CG	OC	$\pi_{96} = \frac{96 \cdot CG}{OC} < \frac{29376}{9347} \approx 3{,}1428$

Taula 3.2. Aproximació de pi per polígons circumscrits de n costats.

Font: Elaboració pròpia.

Posat que $\pi_{96} < 3{,}1428$ i $\frac{1}{7} \approx 0{,}1428$. Arquímedes va concloure aquest procediment amb la desigualtat $\pi < 3 + \frac{1}{7}$.

3.3.3. L'aproximació d'Arquímedes d'arrel de 3

Anteriorment hem comentat que Arquímedes va fer la següent aproximació per arrel de 3: $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Elevant a banda i banda al quadrat, podem veure que $3 > \frac{70225}{23409} \approx 2{,}99991$. Podem observar doncs, que Arquímedes va fer una bona aproximació d'arrel de 3. El quid de la qüestió és troba en com un savi grec del segle III aC. sense cap instrument electrònic podia aconseguir una aproximació tan bona.

Una investigació recent ha descobert que ho podia fer a partir de fraccions contínues:

Anomenava $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$ i $\alpha_2 = 1 + \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_1}$. Certament, si aïllem α_2 de la primera equació, $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_2} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{\alpha_2} \rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$. I Si aïllem α_1 de la segona, obtenim $1 + \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_1} \longrightarrow \sqrt{3} - 1 = \frac{1}{\alpha_1} \longrightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. No em dit cap mentida i per tant podem utilitzar el següent plantejament:

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_1}}}$$

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}$$

En la taula 3.3., es mostren els primers resultats tot descomponent la fracció contínua en nivells (n). En aquesta taula, podem observar que a mesura que els nivells augmenten l'aproximació es va acostant a $\sqrt{3}$. A més a més, podem veure que el signe de la desigualtat va variant, és a dir, en el primer nivell, l'aproximació és per excés, en el segon per defecte, en el tercer un altre cop per excés i així successivament.

n	**Aproximació** $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$
1	$\sqrt{3} \approx 1+\frac{1}{1} = 2 > \sqrt{3}$
2	$\sqrt{3} \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}667 < \sqrt{3}$
3	$\sqrt{3} \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}} = 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4} \approx 1{,}75 > \sqrt{3}$
4	$\sqrt{3} \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{8}} = \frac{19}{11} \approx 1{,}7273 < \sqrt{3}$

Taula 3.3. Aproximació d'arrel de 3.

Font: Elaboració pròpia.

A més a més, es pot construir un terme general per crear els numeradors i denominadors de forma recurrent:

En la taula 3.4., podem veure els numeradors i denominadors que hem trobat fins ara. Anomenem a_i al número que trobem al denominador de l'ultima fracció. Com hem vist es van alternant 1 i 2.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a_i	1	2	1	2	1
Numerador (n_i **)**	2	5	7	19	?
Denominador (d_i **)**	1	3	4	11	?

Taula 3.4. Numeradors i denominadors dels primers nivells de la fracció contínua.
Font: Elaboració pròpia.

Es pot observar que:

$$n_i = a_i \cdot n_{i-1} + n_{i-2}$$

$$d_i = a_i \cdot d_{i-1} + d_{i-2}$$

Aquestes recurrències permeten trobar un terme a partir dels dos anteriors. Probablement Arquímedes no va descobrir aquesta propietat ja que la seva aproximació $\frac{265}{153}$ s'aconsegueix per $i = 8$.

En tot cas, podem acabar la taula fins $i = 8$ (Taula 3.5.) i després donar valors de i superiors per veure com va evolucionant la fracció contínua (Taula 3.6.). Aquesta taula ha estat elaborada amb una aplicació programada amb Java (Annex 1.2) que permet aconseguir aproximacions d'arrel de 3 fins al 15 decimal a partir de la fracció contínua.

i	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a_i	2	1	2	1	2
Numerador (n_i)	19	$19\cdot 1+7=26$	$26\cdot 2+19=71$	$71\cdot 1+26=97$	$97\cdot 2+71=265$
Denominador (d_i)	11	$11\cdot 1+4=15$	$15\cdot 2+11=41$	$41\cdot 1+15=56$	$56\cdot 2+41=153$
Fracció	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$

Taula 3.5. Numeradors i denominadors d'entre els nivells 4 i 8 de la fracció contínua.

Font: Elaboració pròpia.

i	**Fracció**	**Error**
9	$\frac{362}{209}\approx 1{,}73205741627$	$6{,}608\cdot 10^{-6}$
17	$\frac{70226}{40545}\approx 1{,}7320508077444814$	$1{,}.756\cdot 10^{-10}$
25	$\frac{13623482}{7865521}\approx 1{,}7320508075688819$	$4{,}7\cdot 10^{-15}$
33	$\frac{1934726305}{1117014753}\approx 1{,}7320508075688772$	$1\cdot 10^{-17}$

Taula 3.6. Aproximació i error d'aquesta d'arrel de 3 a partir de la fracció contínua.

Font: Elaboració pròpia.

3.4. Després d’Arquímedes

Un cop Arquímedes va morir l’any 212 aC., els matemàtics van adonar-se que allò que havia fet en vida era important i que calia continuar treballant-ho. Però per sort o per desgràcia, va arribar un moment que aquest mètode va resultar inútil ja que es requeria un gran augment del nombre de costats per acostar l’aproximació de π al valor real. Llavors, altres matemàtics van aportar les seves idees: utilització de límits, les sumes infinites, el càlcul diferencial i els ordinadors que cada vegada determinen molts més decimals fins arribar a nivells inesperats.

La història de pi després d’Arquímedes, doncs, es pot separar en les següents etapes: Càlcul amb mètodes Arquimedians i càlcul amb mètodes no Arquimedians.

3.4.1. Mètodes Arquimedians

El mètode d’Arquímedes d’aconseguir el valor de pi a través d’aproximacions poligonals va durar uns quants segles més i va ser utilitzat per certs autors. En aquest apartat parlarem dels que van aportar millors dades a la matemàtica de pi: autors dels segles V i VI indis, autors de la cultura oriental com Tsu Ch’ung Chi, i autors europeus del segle XVI com Adriaan Anthoniszoon, Viète, Adriaan Van Roomann o Van Ceulen.

3.4.1.1. Índia

Durant el segle V, a Índia van aparèixer unes noves aproximacions de pi, que tot i no saber com van ser calculades, donen més precisió a la constant:

Vora l’any 500, Aryabhata (476-550), un matemàtic i astrònom indi, va proposar la següent fracció:

$$\pi = \frac{62832}{20000} = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$$

Brahmagupta (598-670), altre matemàtic important de l'Índia, va reconèixer en diverses ocasions que el seu predecessor i influent Aryabhata havia aconseguit "quasi encertar" el valor de la constant. Tot i això ell proposava arrel de 10 com una millor aproximació.

$$\pi = \sqrt{10} \approx 3{,}1623$$

En l'actualitat certs matemàtics creuen que pi val l'arrel quadrada de l'acceleració de la gravetat en la terra si aquesta fos perfectament circular.

$$\pi = \sqrt{g_{terracircular}} \approx \sqrt{9{,}87} \approx 3{,}14167$$

El pròxim matemàtic indi que va revolucionar la història de la nostra constant va ser Srinivasa Ramanujan del qual parlarem més endavant ja que no va aparèixer fins al segle XIX.

3.4.1.2. Cultura Oriental

L'any 263 dC., Liu Hui (c.220-c.280), un matemàtic xinès enamorat de la geometria va decidir englobar el nombre pi dins un interval de manera que així hi hauria un màxim i un mínim que ajudarien a fer recerca. Liu Hui va proposar que: $3{,}1410 < \pi < 3{,}142$

Dins la cultura oriental, el matemàtic xinès Tsu Ch'ung Chi (429-500), o més conegut potser pel nom de Zu Chongzhi, va escriure al seu tractat matemàtic *Zhui Shu* la següent desigualtat que va trobar a partir de polígons inscrits i circumscrits. Aquest interval assegurava 7 decimals de precisió i obria portes per seguir una investigació dins el camí correcte.

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

3.4.1.3. Matemàtics Europeus

Adriaan Anthoniszoon (1529-1609) va aportar com a fracció irreductible per al nombre pi $\frac{355}{113} = 3{,}14159292$, aportant 6 decimals d'exactitud i obtenint-los a partir d'àrees poligonals.

Si en la història de la recerca dels decimals de pi hi ha hagut diverses etapes, es podria dir que François Viète (1540-1603) va donar principi a la més important. Viète va ser un matemàtic francès que amb els seus treballs va donar peu als avanços cap a l'àlgebra moderna, utilitzant lletres com a paràmetres en equacions, entre altres coses. Advocat de professió, va servir de conseller als reis francesos Enric III i Enric IV i sempre va dedicar el seu temps lliure a les matemàtiques.

Viète va ser el primer matemàtic que en l'any 1597 va crear una fórmula entesa com a producte infinit per a calcular el valor de pi. En altres paraules, va igualar pi a un producte d' infinits termes.

Viète parteix d'un polígon qualsevol de 2^n costats. Per facilitat utilitzarem en la figura 3.8. el de quatre (2^2) costats. Partim d'una circumferència de radi 1.

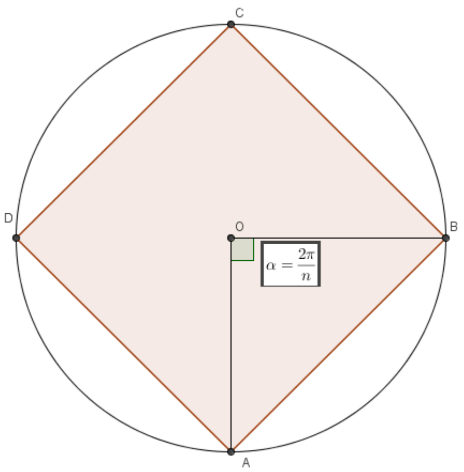


Figura 3.8. Polígon de 4 costats inscrit en una circumferència.
Font: Elaboració pròpia.

Per fer els càlculs, Viète va agafar el triangle AOB (Figura 3.9.) que està ampliat en la següent imatge:

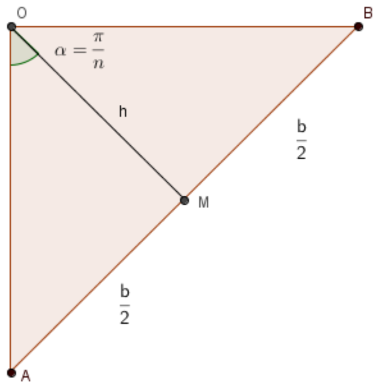


Figura 3.9. Triangle AOB.

Font: Elaboració pròpia.

En primer lloc, Viète va buscar els valors de l'altura i la base del triangle per poder-ne calcular l'àrea. A partir de trigonometria bàsica obtenim:

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{1^*} \longrightarrow b = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{1^*} \longrightarrow h = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

* Aquest 1 és el Radi, el costat $\overline{AO}$.

D'aquesta manera, l'àrea del triangle és:

$$\grave{A}rea = \frac{base * altura}{2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

I multiplicant l'àrea d'un triangle per cada triangle s'obté l'àrea del polígon. Traduït a fórmula queda:

$$\grave{A}reapolígon = \grave{A}reatriangle * númerotriangles(n) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot n}{2}$$

Com que Viète no fa servir polígons qualsevol sinó que només utilitza aquells de 2^n costats, allà on hi havia una n posem un 2^n:

$$\grave{A}reapolígon = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2^n}\right) \cdot 2^n}{2} = 2^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)$$

Un cop arribats a la fórmula que permet calcular el calor de l'àrea per a qualsevol polígon (terme general), Viète va deduir que els polígons anaven creixent d'àrea fins a arribar a la de la circumferència, és a dir, $\underset{n \longrightarrow \infty}{lím}\ \grave{A}reapolígon = \pi r^2 = \pi(1) = \pi$. Ara ja només calia anar a comparant-ho amb l'àrea següent de manera que si trobava un patró, podria fer créixer a partir de l'àrea del quadrat mitjançant un producte infinit.

Així doncs, el primer pas és trobar l'Àrea per un polígon de 2^n costats i la d'un de 2^{n+1} costats:

$$\grave{A}rea_n = 2^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)$$

$$\grave{A}rea_{n+1} = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Fent unes petites manipulacions:

$$\grave{A}rea_n = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \grave{A}rea_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Si es substitueix ara la n per 2, que ja em dit que es el valor més petit i anem deixant un terme en funció del següent s'obté:

$$\grave{A}rea_n = \grave{A}rea_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

$$\grave{A}rea_2 = \grave{A}rea_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)$$

$$\grave{A}rea_2 = \grave{A}rea_4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)$$

$$\grave{A}rea_2 = \grave{A}rea_5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right)$$

$$\grave{A}rea_2 = \cdots$$

I si enlloc de quedar-se a l'àrea 5 anés fins a l'infinit, l'àrea s'aproximaria moltíssim a la del cercle i es podria dir que valdria π. A més a més, se sap que l'àrea del quadrat o Àrea$_2$ val 2 (simplement cal substituir-ho en la fórmula de càlcul de l'àrea del polígon que tenim). Substituint els valors,

$$2 = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \cdot \cdots$$

I substituint els cosinus pels seus valors, començant per $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, i utilitzant la fórmula del cosinus per a l'angle meitat (veient que cada vegada l'argument del cosinus és la meitat que l'anterior) seguiria $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ i així fins l'infinit, deixant la equació com: $\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$

A mesura que passa el temps, es volen calcular més decimals de π i això ja només era possible augmentant els costats de manera radical. Cap a finals del segle XVI i a principis del XVII dos matemàtics van anar augmentant de costats fins aproximar-se uns quants decimals més al nombre π.

El primer d'ells va ser el metge i matemàtic de Antwerp o Anvers (Bèlgica), Adriaan van Roomen (1561-1615), que va calcular el valor de π utilitzant un polígon regular de $2^{30}=1.073.741.824$ costats d'on va obtenir 17 decimals dels quals els 15 primers eren correctes.

L'altra figura matemàtica important que va conviure entre els segles XVI i XVII va ser Ludolph van Ceulen (1540-1610). Ceulen només va estudiar una formació elemental però amb mètodes autodidactes va anar desenvolupant coneixements que el van portar a ser professor d'esgrima i matemàtiques i a treballar a la universitat de Leiden (Holanda).

L'any 1596, l'alemany va calcular el valor de π amb 20 decimals a partir dels perímetres de polígons inscrits i circumscrits de $60\cdot 2^{33}=515.396.075.520$ costats. Per evitar fer càlculs tan pesats va desenvolupar alguns teoremes nous que van portar-lo a fer-ho l'any 1610 amb polígons de $2^{62}=4.611.686.018.427.387.904$ costats, cosa que va donar el valor de pi amb 35 decimals. Ludolph van Ceulen va morir unes setmanes més tard d'haver calculat el valor de π cosa que va portar a la seva esposa a gravar-li a la tomba tots els decimals descoberts i cosa que fa que avui dia alguns matemàtics anomenin a π com el numero "ludolphià".

3.4.2 Mètodes no Arquimedians

Quan els matemàtics posteriors a Ceulen van veure que feia falta 4 trilions de costats per obtenir tan sols 35 decimals, van estudiar diferents maneres d'aproximar-se a la constant sense utilitzar tants esforços. Destaquem entre aquests, els matemàtics del segle XVII, John Wallis i Brouncker, Leibniz i Gregory, Machin, i els autors d'entre els segles XVIII a XX: Euler i Ramanujan. Al segle XX, cal destacar l'aparició dels ordinadors que han permès en les darreres dècades l'augment exponencial de la troballa de decimals de pi.

3.4.2.1. John Wallis i William Brouncker

John Wallis (1616-1703) va estudiar fins l'any 1625 a l'escola del seu poble d'on va haver de marxar per salvar-se de la pesta. Fins 1630 va estudiar com va poder a una altra escola i als 13 anys sa mare ja el va veure capacitat per poder entrar a la universitat. És curiós que Wallis no es posés en contacte amb les matemàtiques fins més tard (1631) perquè fins llavors va estudiar Llatí, Grec i Hebreu. Al Nadal de l'any 1631 li va regalar son pare un quadern d'aritmètica gràcies al qual va "enamorar-se" de les matemàtiques. Després de passar per diversos convents i participar a la guerra, va treballar de criptògraf en cap del Parlament anglès, va fer de professor a Cambridge i a Oxford i va poder casar-se i va marxar a viure a Londres.

L'any 1655 va publicar la seva obra *Arithmetica infinitorum* on va presentar la fórmula de $\frac{\pi}{2}$ que després multiplicava per 2 per obtenir pi.

La fórmula de John Wallis és: $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$

Per arribar a aquest producte infinit, Wallis es va basar en que qualsevol funció de x és pot expressar com a producte de (x – a_i) on a_i són les seves arrels. Per exemple, la paràbola $x^2 + x - 2$ es pot representar com el producte de $(x-1)\cdot(x+2)$ o també com $\left(1-\frac{x}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)$ perquè talla l'eix de les abscisses als punts 1 i –2. Wallis va fer servir la funció sinus de x partit de x.

La funció sinus de x partit per x en una gràfica mesurada en radiants, té arrels a totes les $x = \pi \cdot n$ i per tant podem expressar la funció com:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{4\pi}\right)\cdot\cdots$$

Si operem les parelles que compleixen la regla de suma per diferència, la cosa queda:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdot\cdots$$

Si ara substituïm $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{9\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{16\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{25\pi^2}\right)\cdot\cdots$$

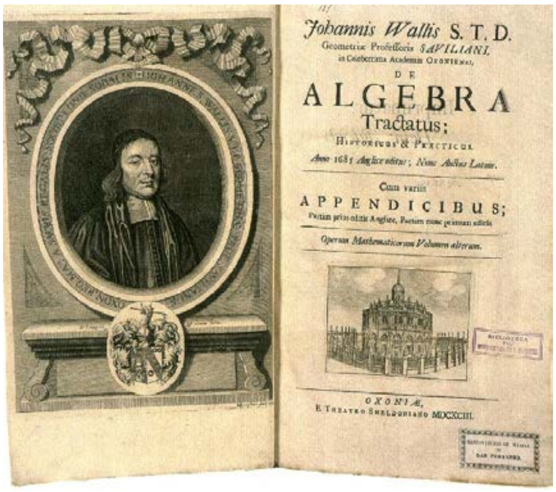
$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \left(1-\frac{1}{2^2\cdot 1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 25}\right)\cdot\cdots$$

Passat a producte infinit:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4 \cdot n^2}\right)$$

Aïllant $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$



Font: http://euler.us.es/~libros/calculo.html

El producte de Wallis va ser transformat a fracció contínua per William Brouncker (1620-1684) a través de mètodes que no són coneguts avui dia. La fracció queda així:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

Una fracció una mica lenta a convergir (necessita molts termes per donar el valor desitjat) i un procés molt cansat per l'època dels càlculs a mà.

3.4.2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz i James Gregory

Quan parlem de matemàtiques i més concretament de la seva història al segle XVII no podem saltar-nos a dos grans figures del món matemàtic, aquests són l'alemany Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) i l'escocès James Gregory (1638-1745).

El descobriment més famós de la època respecte a pi va ser la sèrie de Gregory-Liebniz que també s'ha anomenat, sèrie de Gregory, sèrie de Leibniz o sèrie de Madhava-Leibniz. La sèrie en qüestió és un sumatori infinit que convergeix a pi quarts.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Si ho expressem en forma de sumatori queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Aquesta sèrie va ser descoberta en primera instància per Madhava de Sangamgrama, un matemàtic indi que no la va fer popular i no la va transmetre al món occidental. Per això James Gregory va començar a investigar sobre el tema. Aplicant temes relacionats amb la sèrie de Taylor encara que aquesta no estigués publicada i utilitzant recents teoremes de Newton, Gregory va deixar el camí molt pla a Gottfried Leibniz perquè amb el seu talent pogués descobrir la sèrie que convergeix a pi quarts i que si es multiplica per quatre, dóna pi.

Anticipant-se a les sèries de Taylor, Gregory va deixar a Leibniz els mètodes per arribar a la següent igualtat:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots$$

Leibniz va haver d'idear-se la manera de poder parar la successió infinita de manera que la va transformar en un sumatori on s'aplica el terme general fins a n i llavors s'introdueix un terme d'error per corregir-la:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^k x^{2k}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

En aquest punt s'ha d'integrar als dos membres entre 0 i 1 ja que l'integral definida de la funció $\frac{1}{1+x^2}$ és coneguda i val $\arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

A mesura que la n va creixent, tots els termes s'acosten a la pròpia sèrie de Leibniz. Ara l'únic inconvenient és saber que passa amb el terme d'error quan la n tendeix a infinit:

$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} < \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} x^{2n+2} = \frac{1}{2n+3}$ que tendeix a 0 ja que n tendeix a infinit.

D'aquesta manera es pot suprimir el terme d'error i queda la sèrie tal com ja s'havia mencionat:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Aquesta sèrie s'ha programat en llenguatge Java perquè l'ordinador faci els càlculs només indicant quants termes s'han de sumar. El lector trobarà la informació i el codi en l'Annex 1.3.

En la Figura 3.10. es mostra la representació gràfica de la convergència a pi de la sèrie de Leibniz multiplicada per quatre.

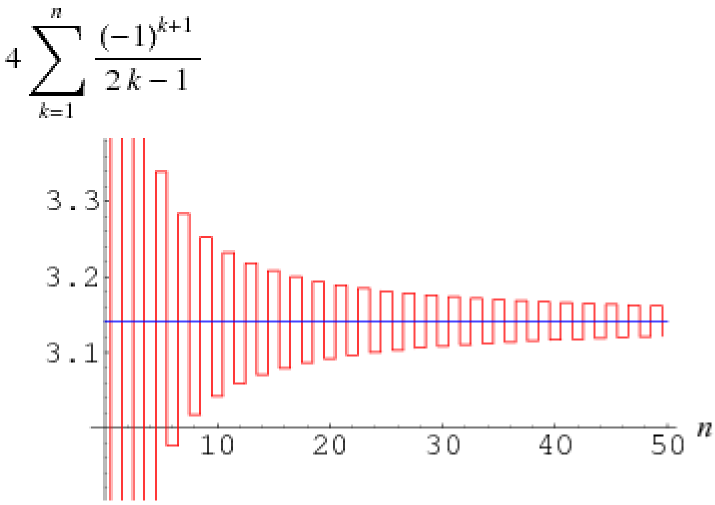


Figura 3.10. Convergència de la sèrie de Leibniz en funció del nombre de termes n.

Font: http://mathworld.wolfram.com/GregorySeries.html

3.4.2.3. John Machin

John Machin (1680-1751) va desenvolupar l'any 1706 una de les maneres d'obtenir convergència cap al número pi, a partir d'arc tangents. Amb la fórmula $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ Machin va obtenir 100 decimals i va revolucionar el món del càlcul de decimals introduint el concepte de la combinació d'arc tangents millorant la funció també relacionada amb arc tangents de Liebniz.

3.4.2.4. Leonard Euler

L'any 1706 es produeix un altre canvi molt important en la història del nostre número. Pi queda batejat pel gal·lès William Jones (1675-1749) en la seva obra *Synopsis palmariorum matheseos* com a π. Aquest símbol només era utilitzat per alguns autors fins que el 1748 el va utilitzar també Leonhard Euler al seu llibre "Introductio in anlysin infinitorium" i va gaudir de la màxima popularitat. Euler va ser capaç de calcular pi amb 126 decimals gràcies al seu prestigiós càlcul mental. A més de desenvolupar les seves pròpies fórmules de càlcul, també va crear fórmules per algunes potències de pi.

Una de les fórmules més conegudes d'Euler que es va emprar per calcular el valor de pi va ser la resolució del problema de Basilea. El problema de Basilea està totalment relacionat amb la teoria dels números i demana la solució exacta de la suma dels inversos dels quadrats dels nombres naturals, és a dir, trobar quant val $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. El problema es va fer famós perquè molts matemàtics importants (com la família Bernouilli) no van poder trobar ni acostar-se a la solució. Això va donar mèrits a Euler que amb només 28 anys va generalitzar el problema aportant la solució correcta i donant apunts fonamentals perquè Riemann treballés la seva coneguda funció zeta l'any 1859.

Mitjançant la sèrie de Taylor, la funció és pot expressar com

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \left(\frac{x^2}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{5!}\right) - \left(\frac{x^6}{7!}\right) + \left(\frac{x^8}{9!}\right) - \left(\frac{x^{10}}{11!}\right) + \cdots$$

Per altra banda, i com s'ha mencionat en l'apartat 3.4.2.2., la funció $\frac{\sin(x)}{x}$ es pot expressar com el producte de les seves arrels resultant:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4\pi}\right) \cdots$$

Si en aquest producte es fan totes les multiplicacions i s'agafa el coeficient de la part x^2, queda l'expressió següent:

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots\right)$$

Que es pot expressar com :

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Si ara tornem a mirar la sèrie de Taylor veurem que el coeficient de la part x^2 és $-\frac{1}{3!}$ per tant es pot fer la igualtat següent:

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{3!}$$

que aïllant el sumatori resol el problema de Basilea:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Aquest sumatori s'ha programat en llenguatge Java perquè l'ordinador faci els càlculs només indicant quants termes s'han de sumar. El lector trobarà la informació i el codi en l'Annex 1.4.

3.4.2.5. Srinivasa Ramanujan

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) va ser un matemàtic indi que amb un càlcul mental prodigiós va fer contribucions substancials a l'anàlisi matemàtica, la teoria de nombres, les sèries infinites i les fraccions contínues.

Tot i morir als 32 anys per culpa de tuberculosi i pèrdua de vitamines, Ramanujan va contribuir en el descobriment de fórmules per obtenir decimals del número pi. Algunes de les seves fórmules són:

$$\pi \approx \sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=3{,}1415926525826$$

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

que dóna 8 decimals cada vegada que augmentem en una unitat la k

$$\frac{1}{\pi}=12\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591406+545140134n)}{(n!)^3(3n)!(640320^3)^{n+1/2}}$$

que eleva la xifra de 8 a 14 decimals.

Malauradament, moltes d'aquestes fórmules no sabem com les va deduir i simplement ens creiem per les proves experimentals que funcionen i molts matemàtics agraeixen encara avui, el gran treball realitzat (més de 120 teoremes que resolien dubtes de matemàtics europeus).

3.4.2.7. L'era dels ordinadors

A partir de 1946, amb l'aparició dels ordinadors –començant per l' ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer)-, va augmentar ràpidament el càlcul dels decimals de pi com mostra la taula 3.7. Curiosament, molts processos de càlcul es basen en variants de l'algorisme de Machin (S. XVIII).

Any	**Autors**	**Dígits obtinguts**
1949	D.F. Ferguson i John W. Wrench	1.120
1949	John W. Wrench jr. i L. B. Smith (ENIAC 70h)	2.037
1958	François Genuys	10.000
1961	Daniel Shanks i John W. Wrench	100.265
1973	Jean Gillout i Martin Bouyer	1.001.250
1983	Yasumasa Kanada i Yasunori Ushiro	10.013.395
1987	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura i Yoshinobu Kubo	134.214.700
1989	Germans Chudnovsky	1.011.196.691
2002	Yasumasa Kanada i 9 especialistes	1.241.100.000.000
2009	Daisuke Takahashi i informàtics	2.576.980.370.000
2010	Fabrice Bellart	2.699.999.989.951

Taula 3.7. Diferents anys, autors i dígits obtinguts de pi usant els ordinadors

Font: Navarro 2010 p. 91

4. La insignificança i transcendència de pi

En les pàgines anteriors, el lector haurà notat que s'ha fet una espècie d'evolució històrica dels decimals de pi. S'ha buscat xifra a xifra el període o la "decimalitat" de pi fins arribar a la irracionalitat i la transcendència. Si hom va pel carrer i pregunta a persones què és pi, s'adonarà que la majoria de gent li respondrà 3,14; allò que fèiem anar a l'escola; persones de més edat ho relacionaran amb l'arbre de muntanya, i algú dirà un número infinit. Un cop s'obté aquesta resposta, hom es pot preguntar si és veritat això que li han dit. Pot ser infinit un nombre?

Per entendre bé què és pi i fins on arriba dins les matemàtiques, cal que fem una petita excursió dins el món de l'infinit, un món molt gran, relacionat amb la filosofia i l'art però alhora incoherent per les ciències físiques i meravellós pels matemàtics. Un viatge que pot ser avorrit, pot fer replantejar certes qüestions o fins i tot pot encoratjar o desanimar algú a dedicar-se o deixar les matemàtiques.

Dit això, i sense esperar més, podem començar el nostre viatge preguntant-nos què i com és un número, cosa que ens portarà a un món molt pròxim de l'infinit, al món dels conjunts.

Per definició, un conjunt és una reunió d'objectes ben definits en la intuïció o en el pensament, considerada com una totalitat. Aquesta definició porta a una idea molt senzilla, de tota manera, els conjunts són un dels conceptes més fonamentals en la matemàtica moderna i l'estudi de les estructures dels conjunts possibles (teoria dels conjunts) és un camp ric i en continu desenvolupament. La teoria de conjunts pot ser vista com el fonament a partir del qual es poden derivar gairebé totes les matemàtiques i per tant, també l'infinit.

Un conjunt s'indica entre claus i separant els termes entre comes de la manera següent:

A = {a, b, c}

Això indica que el conjunt A té com a membres a, b i c que no tenen necessàriament ser lletres, poden ser animals, plantes... D'aquesta manera, es pot dir que un conjunt és una col·lecció de coses que podem anomenar "elements del conjunt".

Els conjunts es poden coordinar, per exemple

{a, b, c} i {gos, pera, taula}

són conjunts coordinables perquè cada element es pot posar en correspondència un a un amb un altre i no en queda cap desaparellat. En canvi,

{a, b} i {gos, pera, taula}

no es poden coordinar. Sempre quedarà un element al conjunt de la dreta que no es pot aparionar amb un de l'esquerra.

Si diem que n'hi ha d'haver mateix nombre per a poder-los coordinar, ens adonem que els nombres estan molt relacionats amb els conjunts. Una manera de definir nombre utilitzant conjunts és :

$$1 = \{0\}$$
$$2 = \{0,1\}$$
$$3 = \{0,1,2\}$$
$$4 = \{0,1,2,3\}$$
$$n = \{0,1,2,3,...,n-1\}$$

Així podem dir que un conjunt B té *n* elements quant B es pot coordinar amb n. Per exemple, el conjunt de jugadors titulars de basquetbol té 5 elements i no hi ha cap dubte que es pot coordinar amb el següent conjunt:

$$5 = \{0,1,2,3,4\}$$

Arribats en aquest punt, el lector es pot preguntar que se n'ha fet del 0. El 0 es reserva per conjunts buits, aquells conjunts que són com una caixa buida, es pot anomenar però no guarda res al seu interior.

Per anomenar aquest conjunt (només n'hi ha un perquè tots són iguals, buits) s'utilitza la lletra nòrdica ∅. Un exemple seria:

$$\varnothing = \{\text{centaures}\}$$

Així, definim el 0 com

$$0 = \varnothing$$

Un cop definits tots els nombres com a conjunts, cal dir que el nombre d'elements d'un conjunt es pot expressar utilitzant el símbol # i s'anomena cardinal. Així,

$$\text{Nombre d'elements de C} = \text{Cardinal de C} = \#C$$

Amb els conceptes de cardinal i de conjunt a l'esquena, ens podem acostar més a la recerca de l'infinit fent una classificació de conjunts. Els conjunts es classifiquen en finits i infinits. Els finits són aquells que tenen un nombre d'elements, ja siguin 4.568 , 3.123.564.783.234, etc.

La característica principal dels conjunts finits és que el seu cardinal sempre és major que el de qualsevol de les seves parts. Per exemple:

$$E = \{\text{Equip de Futbol}\}$$
$$\#E = 11$$

Qualsevol subconjunt com podria ser el conjunt dels defenses, tindrà menys elements que el conjunt de l’equip. És a dir:

D = {Defenses d l’equip de futbol}

#D = 4

#D < #E

Aquesta propietat que a primera vista pot semblar una cosa evident, és la que distingeix els conjunts finits dels infinits, un conjunt infinit, com el dels nombres naturals, conté dins seu els nombres parells i curiosament, aquest conjunt també té infinits nombres ja que és pot posar en correspondència un a un amb l’anterior:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

P = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}

$$
\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & 0 \\
1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & 4 \\
3 & \longrightarrow & 6 \\
4 & \longrightarrow & 8 \\
5 & \longrightarrow & 10
\end{array}
$$

És a dir #N = #P, una part de l’infinit pot ser alhora, infinita.

4.1. Nombres naturals, racionals i algebraics

Fins la publicació entre els anys 1874 i 1884 de treballs que van portar al matemàtic alemany Georg Cantor (1845-1918) a ser considerat el fundador de la teoria de conjunts moderna, els matemàtics ignoraven l'existència de l'infinit i tot i saber que els nombres no s'acabaven mai no li veien cap importància. Cantor va establir els conceptes de conjunt finit i infinit i va desenvolupar el teorema que porta el seu nom establint que per a tot infinit hi ha un infinit més gran, i que, per tant, hi ha una infinitat d'infinits. Això va impressionar tant que el també matemàtic i alemany David Hilbert (qui va influenciar tot el món sencer entre els segles XIX i XX) va dir: "Ningú no ens podrà fer fora del paradís que Cantor ha creat."

En les Teories de Cantor es deia que els conjunts finits tenen com a cardinal un nombre natural. Els infinits, que Cantor va anomenar "transfinits", arriben més lluny de les fronteres dels naturals. Però també va establir que dins els transfinits, hi ha diversos "nivells", el primer dels quals és #N (Cardinal dels Naturals), que Cantor va anomenar com Aleph zero ($\aleph_0$) . Aleph és la primera lletra de l'alfabet hebreu i el zero indica que és el menor conjunt infinit.

El cardinal $\aleph_0$ numera tots els conjunts que és puguin coordinar amb el conjunt dels nombres naturals, com per exemple els parells. Aquests conjunts es poden anomenar "numerables" perquè és poden "comptar" utilitzant els nombres naturals.

De totes maneres, dins el cardinal $\aleph_0$ hi ha moltes sorpreses:

El conjunt dels enters o Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...} és un conjunt que inclou dins seu els naturals. Es pot dir que tot nombre natural és enter però que no tot enter, és natural.

Tot i això, pel que fa als seus cardinals, trobem la resposta a l'esquema ideat per Cantor (Figura 4.1.):

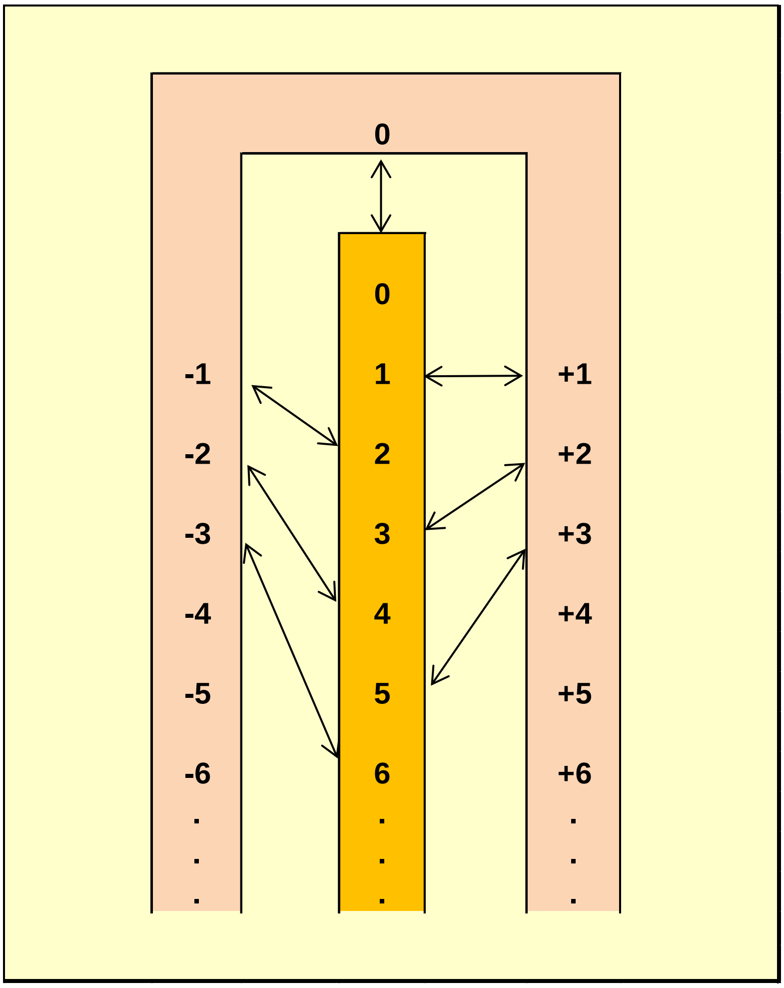


Figura 4.1. Ordenació dels enters.

Font: Elaboració pròpia.

Si donem una passa més, podem investigar en món dels nombres racionals, aquells que poden posar-se en forma de fracció. Una fracció, com ja sabem es representa com $\frac{a}{b}$ on a és el numerador (indica quantes parts) i b el numerador (indica de quantes parts). Hi ha diverses fraccions que tot i ser diferents, tenen el mateix valor i algun cop, també tenen un valor enter o natural. D'aquesta manera, podem dir que tot numero enter és també racional:

$$\frac{234}{117}=2 \qquad \frac{16}{48}=\frac{8}{34}=\frac{4}{17} \qquad \frac{-7}{21}=-\frac{1}{3} \qquad \ldots$$

Vist això, el lector pot creure que el cardinal dels nombres racionals, sigui molt més gran que el dels enters o naturals, però ja pot començar a sospitar que en l'infinit passen coses totalment inesperades.

Cantor va idear l'esquema que podem trobar en la Figura 4.2. on es veu com clarament es poden numerar totes les fraccions i que per tant es poden coordinar una a una amb els naturals.

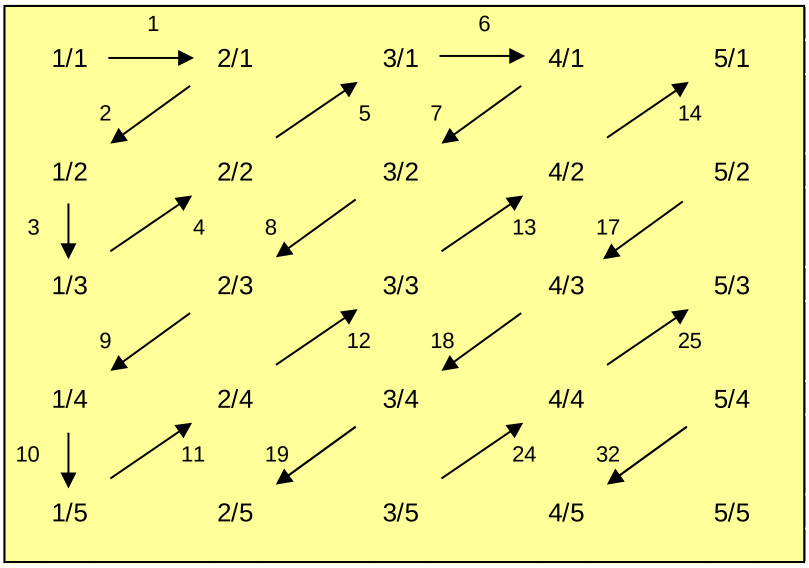


Figura 4.2. Ordenació dels racionals.

Font: Elaboració pròpia.

A la figura 4.2. hi ha totes les fraccions perquè en les files hi ha tots els numeradors i en les columnes tots els denominadors possibles. D'aquesta manera, al numerar-los amb les fletxes s'estan coordinant amb els naturals i per tant, tenen el mateix cardinal. D'aquesta manera es pot dir que:

$$\#N = \#Z = \#Q = \aleph_0$$

Un cop demostrat que els racionals tenen el mateix cardinal que els naturals, podem donar un pas més i endinsar-nos en els nombres algebraics. Es diu que un número és algebraic quan és solució d'una equació polinòmica, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0$ amb coeficients $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ que siguin exclusivament nombres racionals. És fàcil adonar-se que tots els nombres racionals formen part dels algebraics ja que són els que resolen equacions del tipus $x - \frac{a}{b} = 0$ on $\frac{a}{b}$ és la solució.

A part dels nombres naturals, enters i racionals, dins els algebraics n'hi ha d'altres com $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ que resolen les equacions $x^2 - 2 = 0$ i $x^2 - 3 = 0$. El també famós nombre d'or o $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és algebraic i surt de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$. Dit això, apuntar que nombres com π, la constant que investiguem en aquest treball, o e, no poden sortir d'una equació i per tant són nombres transcendents.

L'any 1874, Cantor als seus 29 anys va demostrar que els nombres algebraics, eren numerables, és a dir, també es podien coordinar amb els naturals. D'aquesta manera,

$$\#\{\text{nombres Algebraics}\} = \#A = \#Q = \#Z = \#N = \aleph_0$$

Curiosament, cada conjunt és major que el següent però d'alguna manera, podríem dir que en l'infinit, tenen "igual nombre" de termes.

4.2. Nombres Reals i Irracionals

Un cop Cantor va demostrar que els algebraics eren numerables, va donar un pas més i es va posar a investigar els reals. Els nombres reals són aquells que són o racionals o irracionals, algebraics o transcendents.

La manera com va explorar el cardinal d'aquest conjunt va ser utilitzant el que ell mateix va batejar com l'Argument de la diagonal. En primera instància, Cantor va agafar l'interval [0,1] dels nombres reals. En cas que fos numerable, també ho seria el [1,2] i el [234, 235]... i per tant, el conjunt dels reals estaria format per subconjunts numerables i per consegüent, seria numerable. En cas que l'interval [0,1] fos no numerable, és a dir, "més gran" que el conjunt dels algebraics, llavors, els nombres reals serien no numerables.

Cantor va decidir suposar que l'interval era un conjunt numerable i va decidir escriure en un full tots els nombres però no necessàriament de manera ordenada, un exemple seria:

$$r_1 = 0,\mathbf{9}8474352...$$
$$r_2 = 0,4\mathbf{3}762438...$$
$$r_3 = 0,84\mathbf{7}84968...$$
$$r_4 = 0,123\mathbf{4}5678...$$
$$r_5 = 0,9876\mathbf{5}353...$$
$$r_6 = 0,23451\mathbf{7}89...$$
$$r_7 = 0,748368\mathbf{2}9...$$
$$r_8 = 0,9789324\mathbf{1}...$$

A continuació va agafar la xifra decimal que pertoca al mateix nombre que l'enumeració (estan marcats en negreta) i va proposar de crear un nou real x de manera que:

- El dígit x_k sigui el k-èssim nombre de r_k +1 (en cas de ser 9 s'assigna un 0)

D'aquesta manera, el nostre nombre seria 0,04856832... Com que el conjunt hem quedat que era numerable, en quina posició està el nombre creat?

Posem que està al lloc n-èssim de la llista. Això no pot ser perquè el decimal enèssim és el del lloc n-èssim més u.

- Llavors, la nostra llista no és una llista completa de l'interval [0,1]
- Existeix una contradicció i només pot provenir de la suposició que el conjunt és numerable.

Per tant, pel mètode de reducció a l'absurd, queda demostrat que el conjunt no és numerable i que per tant tampoc ho és el conjunt dels reals i podem dir que té un cardinal superior a $\aleph_0$, superior als algebraics, racionals, enters i naturals.

$$\#R > \aleph_0$$

Al principi de l'explicació dels reals, els hem definit com un conjunt que inclou els racionals i els irracionals.

$$R = \{racionals\} \cup \{irracionals\}$$

Bé, sabem que els racionals són numerables però, que en sabem dels irracionals? La resposta és senzilla, si els Reals no són numerables, els irracionals tampoc poden ser-ho. La demostració resideix en una reducció a l'absurd. Posem que els irracionals siguin numerables, llavors els reals també ho haurien de ser. Això és fals i per tant la nostra premissa també ho és.

Per acabar, la figura 4.3. resumeix els diferents conjunts numèrics.

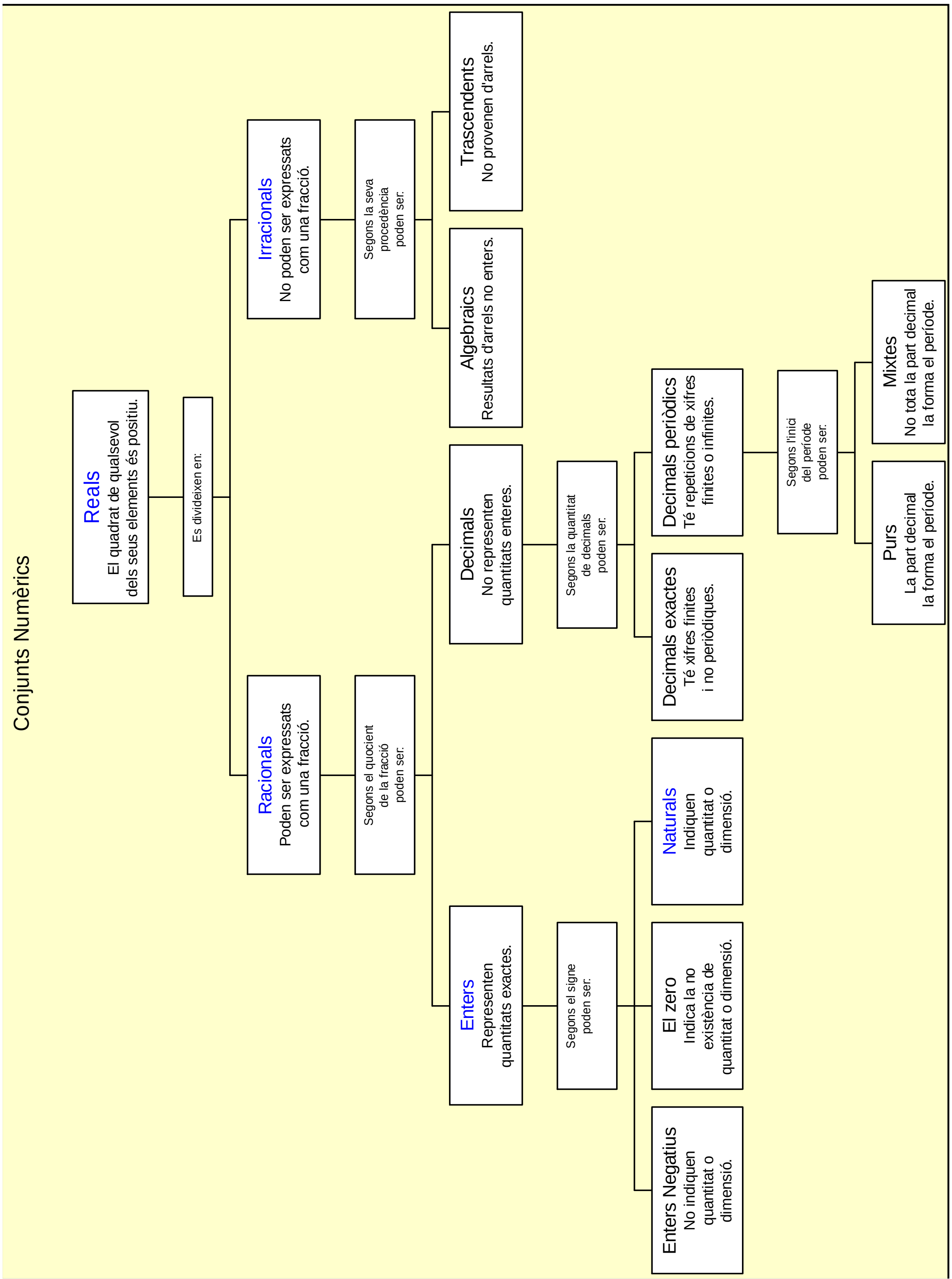


Figura 4.3. Classificació dels conjunts numèrics   Font: Elaboració pròpia a partir de http://semillerosucm.files.wordpress.com/2011/06/mc-numeros-reales1.jpg

4.3. Algebraics i Transcendents

Anteriorment s'ha parlat dels nombres algebraics, aquells que poden ser solució d'alguna equació polinòmica amb coeficients racionals. Aquests nombres són molt importants perquè diem que només els nombres algebraics reals són construïbles. Ser construïble significa que es pot generar el nombre amb les regles gregues, és a dir, utilitzant només un regle i un compàs. L'exemple més clar d'això, és un nombre natural: amb un regle puc dibuixar el número 1, el número 2 ...

La gran pregunta de si tots els números són o no construïbles apareix quan els grecs antics es troben per casualitat el nombre arrel de 2 ($\sqrt{2}$).

Com bé sabem, $\sqrt{2}$ és la solució de l'equació de segon grau $x^2 - 2 = 0$ i per tant, pel teorema expressat anteriorment, efectivament és construïble (Figura 4.4.).

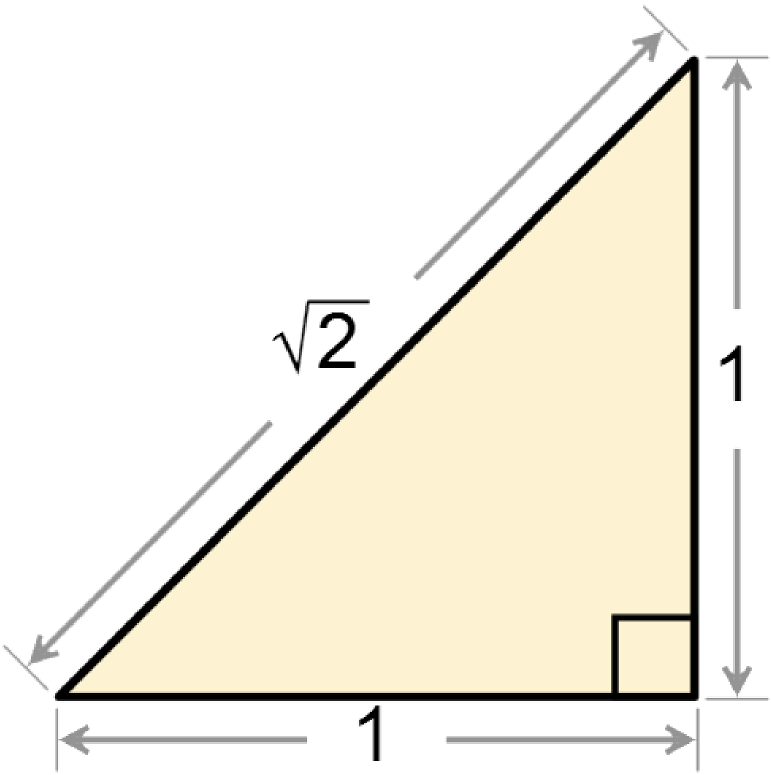


Figura 4.4. Construcció d'arrel de 2

Font: http://es.wikipedia.org/wiki/Raíz_cuadrada_de_dos

Davant la incertesa de si tots els nombre irracionals com arrel de 2 es podien dibuixar o no, molts matemàtics van provar de trobar un nombre real no construïble. Quan Cantor, l'any 1874 va provar que els algebraics eren numerables i els irracionals no, automàticament, va quedar demostrat que ha d'existir un altre conjunt no numerable dins els irracionals. Aquest conjunt, que es va decidir anomenar el dels nombres transcendents, ja s'intuïa que existia des de l'any 1844 quan Joseph Liouville va descobrir els famosos nombres de Liouville. Tot i això, no es va saber de la seva "infinitat" fins el descobriment de Cantor.

Joseph Liouville (1809-1882) va ser un matemàtic i enginyer francès, encara que mai va obtenir els diplomes per problemes de salut. Essent professor a *l'École centrale Paris,* Liouville va aconseguir una càtedra en matemàtiques i una altra en mecànica i va aconseguir en les seves velleses formar part de *l'Académie des Sciences.*

Joseph Liouville va publicar en diversos camps de les matemàtiques, com la teoria de nombres, l'anàlisi complexa, la geometria diferencial i la topologia diferencial, i també a la física matemàtica i a l'astronomia. Tot i això, Liouville va ser particularment cèlebre pel seu teorema de Liouville, avui dia un resultat més aviat simple de l'anàlisi complexa. A més a més, a la teoria de nombres, va ser el primer a provar l'existència dels nombres transcendents a partir d'una construcció utilitzant les fraccions continues. Aquests nombres s'han anomenat nombres de Liouville.

Liouville va proposar la següent desigualtat:

Si α és un nombre algebraic de grau d, és a dir, és arrel d'un polinomi irreductible grau d amb coeficients enters, per a tot $\frac{p}{q} \neq \alpha$ existeix $c(\alpha)$ tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^d}$.

Demostrem això:

Si proposem que α és un nombre algebraic, podem afirmar que $P(x) = a_0 \prod_{j=1}^{d} (x - \alpha j)$ on per exemple $\alpha_1 = \alpha$. Si $\frac{p}{q}$ és racional, llavors $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ i $q^d \cdot P\left(\frac{p}{q}\right)$ és un enter.

Per tant : $q^d \cdot \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq 1$

Si calculem $P\left(\frac{p}{q}\right)$:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \prod_{j=2}^{d} \left(\frac{p}{q} - \alpha_j\right)$$

Com que sempre podem aconseguir una fracció $\frac{p}{q}$ que compleixi que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq 1$, tenim la següent desigualtat:

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha_j\right| = \left|\frac{p}{q} - \alpha + \alpha - \alpha_j\right| \leq \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| + \left|\alpha - \alpha_j\right| \leq 1 + \left|\alpha - \alpha_j\right|$$

Amb aquest seguit de desigualtats, podem estipular la següent:

$$q^d \cdot |a_0| \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{j=2}^{d} \left(1 + |x - \alpha j|\right) \geq q^d \cdot |a_0| \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{j=2}^{d} \left|\frac{p}{q} - \alpha_j\right| = q^d \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq 1$$

I si ara anomenem $\dfrac{1}{c(\alpha)}$ al producte $|a_0|\cdot\prod_{j=2}^{d}\left(1+|x-\alpha j|\right)$ obtenim :

$$q^d\,\frac{1}{c(\alpha)}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq 1\rightarrow\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{c(\alpha)}{q^d}$$

Aquest resultat és important perquè dóna el primer criteri per construir nombres transcendents. Per exemple podem afirmar que el nombre 0,11000100... = $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}$ és transcendent. Demostrem-ho:

Diguem que $\alpha_r=\sum_{n=1}^{r}10^{-n!}=\dfrac{p}{q}$ on $p=10^{r!}\sum_{n=1}^{r}10^{-n!}$ i $q=10^{r!}$

$$|\alpha-\alpha_r|=\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\sum_{n=r+1}^{\infty}10^{-n!}=\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}<\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{10^{n}}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{n}}<10^{-(r+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{n}}<10^{-(r+1)!}\cdot 2$$

$$|\alpha-\alpha_r|<10^{-(r+1)!}\cdot 2=\frac{2}{10^{(r+1)!}}=\frac{2}{10^{(r!)^{r+1}}}=\frac{2}{q^{r+1}}=\frac{2\cdot q^{-!}}{q^r}=\frac{2\cdot 10^{-r!}}{q^r}=\frac{c(\alpha)}{q^r}$$

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c(\alpha)}{q^r}$$

Hi ha infinitat de nombres $\dfrac{p}{q}$ que satisfan aquesta desigualtat, i aquesta contradiu la desigualtat de Liouville, per tant α és transcendent.

A partir d’aquí determinem que podem construir molts altres nombres transcendents utilitzant la desigualtat de Liouville:

$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot \frac{1}{l^{n!}}$ on k_n són enters i $l^{n!}$ és un enter arbitrari.

A partir d'aquí, podem dir que tots aquests nombres x són aproximats per una succesió de racionals $\frac{p_n}{q_n}$ que verifiquen:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

I per acabar, mencionar que anomenem número de Liouville a tot nombre real x amb la propietat que per qualsevol n existiran uns nombres p i q que satisfaran la següent desigualtat:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^n}$$

Amb la base de l'existència de nombres transcendents que no poden ser construïbles seguint les lleig gregues, ja es pot fer la diferenciació de dos grups de nombres ben diferenciats: els algebraics (que contenen els racionals i alguns irracionals) i els transcendents (que contenen la resta d'irracionals i no es poden numerar, part d'aquest conjunt són els nombres de Liouville).

Després de tota aquesta aventura dins el món dels conjunts i de l'infinit, cal recordar que el present treball està encarat cap a la investigació del nombre pi. Així que ara només fa falta classificar aquest nombre dins els seus conjunts corresponents i adjuntar les corresponents demostracions.

4.4. Pi és irracional

Hi ha hagut diversos intents per demostrar la irracionalitat de pi. El més senzill, però, és la demostració d'Ivan Nieven que només necessita coneixements de derivació i integració.

Suposarem que pi és racional, definirem unes funcions que depenen de la fracció que resulta pi. Després es treballa la funció i es demostra que pi no pot sorgir d'una fracció i per tant queda demostrat per reducció a l'absurd que pi ha de ser irracional.

Definim pi com a nombre racional $\pi = \frac{p}{q}$ on p i q pertanyen als naturals.

Agafem les següents funcions en les que n és un número natural:

$$f_n(x) = \frac{x^n (p-qx)^n}{n!}$$ on p, q pertanyen als naturals.

Una primera propietat és que $f_n(0) = 0$

A més a més es pot observar que $f_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = f_n(x)$:

$$f_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = \frac{\left(\frac{p}{q} - x\right)^n \left(p - q\left(\frac{p}{q} - x\right)\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{p}{q} - x\right)^n (qx)^n}{n!} = \frac{(p-qx)^n x^n}{n!} = f_n(x)$$

En tercer lloc, podem veure que $n!\,f_n(x)$és un polinomi amb coeficients enters i amb termes de grau entre n i $2n$. Per tant, $f_n^{(j)}(0)$ és sempre un número enter. Aquest serà 0 si j es troba entre 0 i n o més gran de $2n$. Però si j es troba entre n i $2n$, el binomi de

Newton aniria perdent els termes amb x i n'hi hauria un, que no seria multiplicat per 0, exactament $\frac{j!}{n!}$ i al ser $j > n$ la funció en 0 serà un enter.

A més a més, podem afirmar que $f_n^{(j)}(x) = (-1)^j \cdot f_n^{(j)}\left(\frac{p}{q} - x\right)$ utilitzant la regla de la cadena. I com que $f_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = f_n(x)$, $f_n^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right)$ equival a $f_n^{(j)}(0)$ i per tant és sempre un número enter.

Amb aquestes 4 propietats en ment, Nieven crea una altra funció relacionada amb l'actual:

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - f_n^{(6)}(x) + \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

Podem observar que $F_n(x)$ és el resultat d'una suma en funció de n de successives derivades parells de la funció $f_n(x)$.

Vegem algunes propietats de la nova funció:

En primer lloc, $F_n(x)$ i $F_n\left(\frac{p}{q}\right)$ seran números enters. Per deduir aquesta propietat només cal basar-nos en les esmentades anteriorment de $f_n(x)$ i les seves derivades.

Una segona propietat de la funció és que $F_n^{(2)}(x) + F_n(x) = f(x)$. Curiosament, al fer la segona derivada de $F_n(x)$ i sumar-li $F_n(x)$, tots els termes es cancel·len tret del primer, $f(x)$. Aquest és el motiu per al que es crea una funció que va alternant els signes cada derivada parell.

Una altra propietat de la funció és que si derivem la resta entre la primera derivada de $F_n(x)$ pel sinus de *x* i la funció $F_n(x)$ multiplicada pel cosinus de *x*, obtindrem una suma entre segona derivada i funció (tot multiplicat pel sinus de *x*) que al seu torn per la propietat esmentada ens donarà la funció $f_n(x)$ pel corresponent sinus de *x*. Per demostrar això, utilitzem la regla del producte:

$$\frac{d}{dx}\left[F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\right] =$$

$$= F_n''(x)\sin(x) + F_n'(x)\cos(x) + F_n(x)\sin(x) - F_n'(x)\cos(x) =$$

$$= F_n''(x)\sin(x) + F_n(x)\sin(x) = f_n(x)\sin(x)$$

La idea d'haver esmentat totes les propietats i arribar fins aquí ha estat per aconseguir demostrar que $f_n(x)\sin(x)$ és derivada d'una funció i que per tant, podem integrar-la. En el nostre cas ho fem entre 0 i π.

$$\int_0^{\pi} f_n(x)\sin(x)\cdot dx = \left[F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\right]_0^{\pi} =$$
$$= F_n'(\pi)\sin(\pi) - F_n(\pi)\cos(\pi) - \left(F_n'(0)\sin(0) - F_n(0)\cos(0)\right) = F_n(0) + F_n(\pi)$$

A partir d'aquest últim resultat, i com que ja havíem demostrat anteriorment, $F_n(0)$ i $F_n(\pi)$ són enters, el resultat de la integral definida entre 0 i pi ha de ser un enter.

Una propietat més de la integral és que quan $0 < x < \pi$, podem establir que

$f_n(x)\sin(x)$ serà sempre positiu i amés a més,

$0 < f_n(x)\sin(x)dx < f(x) = \dfrac{x^n(p-qx)^n}{n!} < \dfrac{p^n \cdot \pi^n}{n!}$. L'últim membre de la desigualtat anterior, és la funció substituïda en pi.

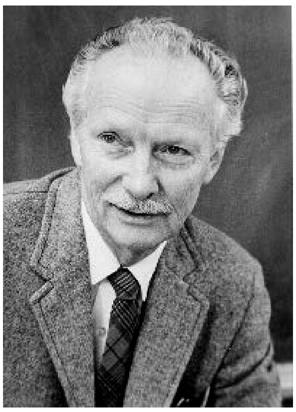
Ara que tenim situada la integral en un interval, podem simplement integrar els tres termes, la integral de 0 és 0, la de $f_n(x)\sin(x)$ ja la tenim calculada i la de $\frac{p^n \cdot \pi^n}{n!}$ acaba essent multiplicada per un pi :

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx < \frac{p^n \cdot \pi^{n+1}}{n!}$$

Una de les coses que podem demostrar és que a mesura que la n es va fent gran, és a dir, quan tendeix a infinit, el membre dret de la desigualtat es va acostant a 0. Simplement s'utilitza un coneixement bàsic en límits que demostra que el factorial creix més ràpidament que les potències. A partir de la següent propietat podem assegurar que trobarem una n prou gran per restringir la integral entre 0 i 1. I per tant hauria de ser una fracció.

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx = F_n(0) + F_n(\pi) < 1$$

Però com que anteriorment ja s'havia demostrat que la integral havia de tenir un valor enter, s'arriba a una contradicció i cal pensar que la proposta inicial era falsa i queda demostrat per reducció a l'absurd que pi ha de ser irracional.



Fotografia d'Ivan Nieven

Font: http://www.maa.org/

4.5. Pi és transcendent

L'any 1882 el matemàtic alemany Lindemann (1852-1939) va donar un fort cop contra tots aquells que volien trobar tots els decimals de pi o que volien quadrar el cercle. Lindemann va demostrar la transcendència de pi i cal mencionar que tot i demostrar la impossibilitat de quadrar el cercle, no va utilitzar cap demostració geomètrica.

Lindemann es va basar en les propietats que havia deduït uns anys abans el francès Charles Hermite qui havia demostrat la transcendència d'un altre número molt important, *e*.

Lindemann va arribar a la conclusió que una combinació lineal de potències de e multiplicades per coeficients algebraics a_k i elevades a exponents b_k també algebraics (reals o complexes) no podia donar mai zero tret que totes les Ak siguin 0.

$$a_1 e^{b_1} + a_2 e^{b_{21}} + \ldots + a_n e^{b_n} \neq 0$$

Posat que $e^{\pi \cdot i} = -1 \longrightarrow e^{\pi \cdot i} + 1 = 0 \longrightarrow e^{\pi \cdot i} + e^0 = 0$

En conseqüència, posat que $a_1 = a_2 = 1$ i que $b_2 = 1$, $\pi \cdot i$ no pot ser algebraic i per tant pi tampoc. I si no és algebraic, queda demostrat que pi és transcendent i per tant no és construïble.

5. El mètode de Newton Raphson

Quan tenim una funció de variable real i en volem calcular les arrels, acostumem a igualar la funció a 0 i resoldre l'equació restant. Hi ha vegades, però, que l'equació que resulta no la podem resoldre de manera precisa i cal utilitzar altres eines de càlcul. Entre elles, les més comunes són el *Teorema de Bolzano o Weirestrass* que es basen en el signe de la funció en un interval proper a l'arrel.

El mètode que es presenta a continuació és igual d'eficaç i encara que de vegades no sigui el millor mètode, la seva simplicitat i la seva rapidesa de convergència fan que sigui una bona opció per trobar arrels en equacions no lineals.

El mètode de Newton-Raphson es basa en l'equació punt pendent de la recta tangent a una gràfica:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Si busquem el punt de tall amb l'eix de les abscisses $(y = 0)$ i anomenem x_1 a x arribem a la següent expressió:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On x_1 serà una millor aproximació a l'arrel del polinomi si s'agafa una x_0 suficientment pròxima a l'arrel. Com que això no és sempre possible, donem tres factors que ajuden a determinar si podem o no aplicar el mètode:

Suposem que $f \in C^2([a,b])$, és a dir a un conjunt que permeti 2 derivades.

1. $f(a)\cdot f(b)<0$, és a dir, que hi hagi un canvi de signes als extrems de l'interval

2. $f'(x)\neq 0$, és a dir que la funció sempre sigui creixent o decreixent en l'interval

3. $f''(x)\neq 0$, és a dir que la funció no tingui cap canvi de curvatura en l'interval.

Si aquests tres factors és compleixen el mètode Newton-Raphson funciona segur. Si no es compleixen els 3 criteris, la probabilitat que el mètode funcioni baixa del 100% però no és nul·la. Per tant, podem dir que quan funcionen només dos criteris, pot ser que funcioni o pot ser que no, sempre depenent de si les rectes tangents s'acosten o no a l'arrel. En cas d'adonar-se que els resultats s'allunyen de l'arrel, cal agafar de nou un valor diferent per x_0.

A més a més, partint de la base que x_1 s'acosta més a l'arrel que x_0, podem generalitzar el mètode i afirmar que $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (Figura 5.1.)

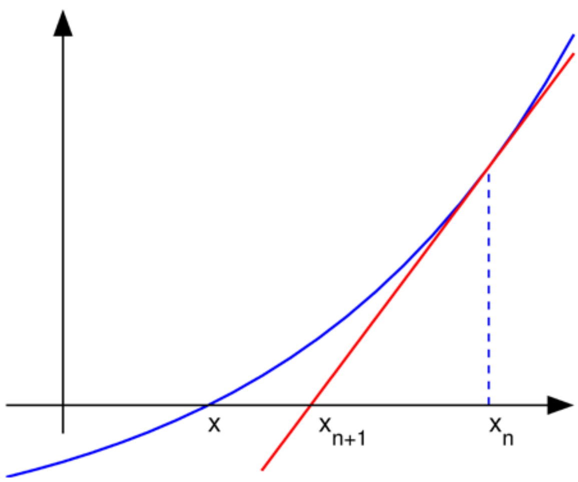


Figura 5.1. Una iteració del mètode de Newton-Raphson en una funció. Podem veure x_{n+1} s'acosta més a l'arrel (x) que x_n.

Font: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f0/Newton_iteration.png

Si la funció i l'aproximació de l'arrel permeten que el mètode funcioni, podrem afirmar que x_{n+1} sempre serà una aproximació més bona que x_n i per tant, com més iteracions fem, més ens acostarem a l'arrel.

En el present treball s'utilitza el mètode de Newton-Raphson per trobar decimals del número pi. Per fer-ho s'agafa una funció que tingui com a arrel el número pi. Es fa un estudi de l'interval en el que es pot agafar l'arrel, se n'escull una i es veu com les iteracions donen cada cop més decimals i precisió en el número pi.

Una de les infinites funcions que té el nombre pi com arrel és la funció $f(x)=\sin(x)$ (Figura 5.2.). Mirem un interval pròxim en el que puguem trobar pi i a més a més compleixi el màxim de criteris possibles.

En l'interval $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ en el que $\frac{\pi}{2}=a$ i $\frac{3\pi}{2}=b$ `podem afirmar que $f(a)\cdot f(b)<0$ ja que la primera té signe positiu i la segona negatiu. També es cert que $f'(x)\neq 0$ ja que hem escollit un interval en el que la funció és decreixent. Per altra banda, $f''(x)\neq 0$ no es veritat en tot l'interval ja que $f''(\pi)=0$ perquè a més de ser arrel també és punt d'inflexió.

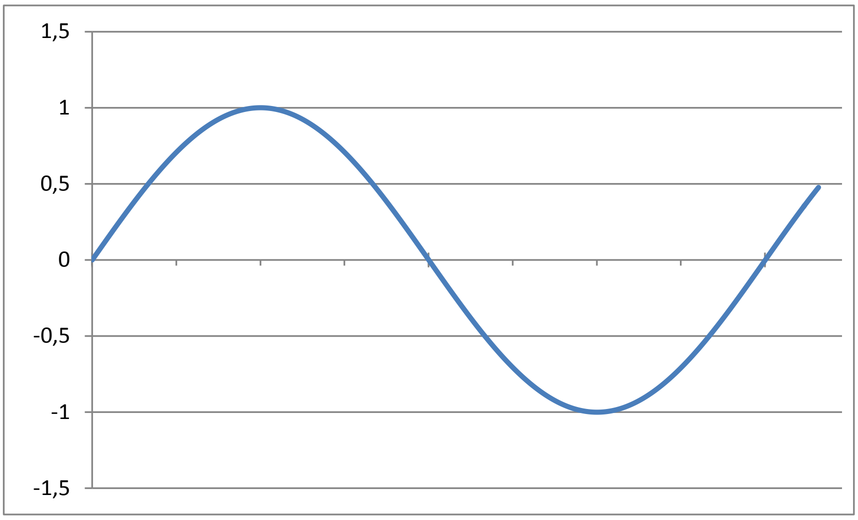


Figura 5.2.Gràfica de la funció $f(x)=\sin(x)$

Font: Elaboració pròpia.

De totes maneres agafem 3 com a valor inicial ja que és un valor que compleix els tres criteris de funcionament.

Substituint x_0 per 3, obtindrem la següent seqüència:

$$x_1 = 3 - \frac{\sin(3)}{\cos(3)}$$

Cal agafar els valors en radiants. Aquesta primera aproximació ens dona un valor de $x_1 \approx 3{,}1425465$ (Figura 5.3.).

Si fem una altra iteració, obtindrem un valor més proper a pi (Figura 5.4.):

$$x_2 = x_1 - \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)}$$

$$x_2 \approx 3{,}1425465 - \frac{\sin(3{,}1425465)}{\cos(3{,}1425465)} \approx 3{,}1415926533$$

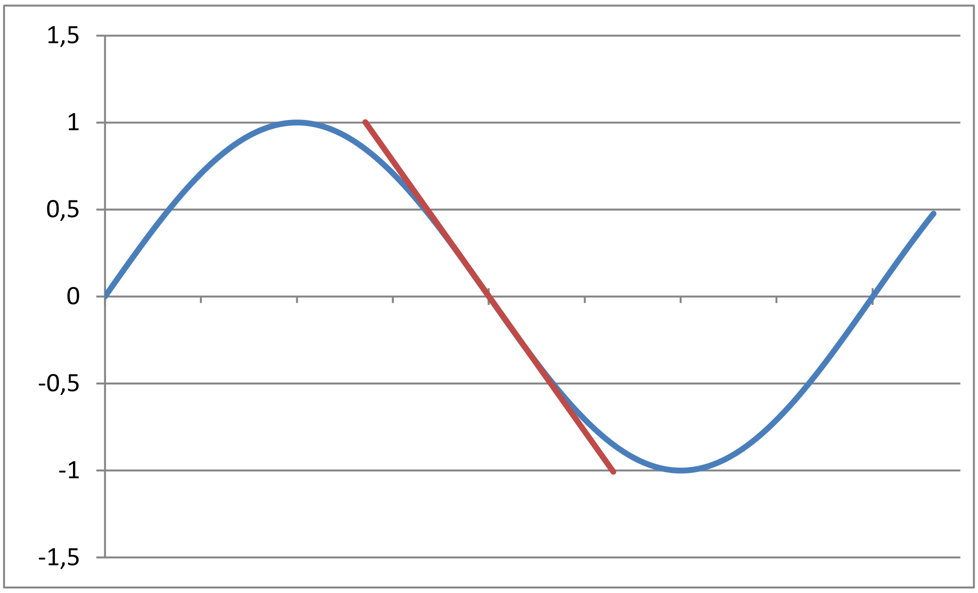


Figura 5.3. Gràfica de la funció $f(x) = \sin(x)$ amb la recta tangent de la primera iteració del mètode de Newton-Raphson

Font: Elaboració pròpia.

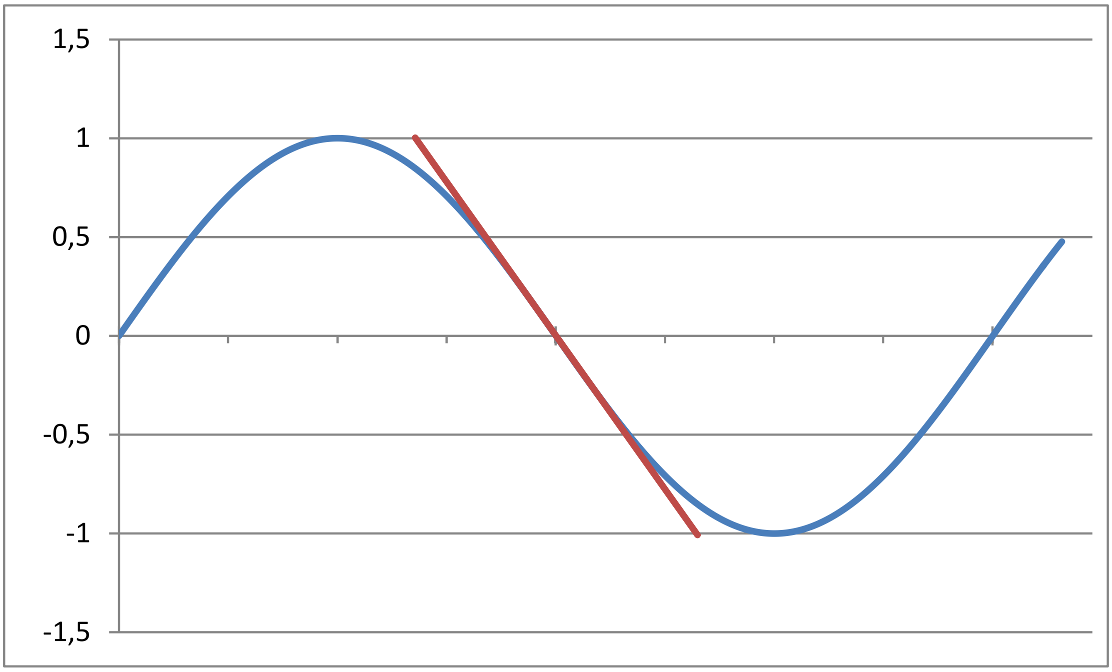


Figura 5.4. Gràfica de la funció $f(x)=\sin(x)$ amb la recta tangent de la segona iteració del mètode de Newton-Raphson

Font: Elaboració pròpia.

En la Taula 5.1. es mostren els resultats de 6 iteracions. Cal dir que amb un full de càlcul com *Microsoft* Ex*cel* no cal fer-ne més ja que les 3 últimes només repeteixen el mateix resultat. Això es degut a que la "resistència" als decimals a l'hora de calcular el cosinus es perd en 14 decimals.

n	X_n	$F(X_n)$	$F'(X_n)$	X_{n+1}
0	3,00000000000000	0,14112000805986700000000	-0,98999249660045	3,14254654307428
1	3,14254654307428	-0,00095388933982644100000	-0,99999954504746	3,14159265330048
2	3,14159265330048	0,00000000028931624912640	-1,00000000000000	3,14159265358979
3	3,14159265358979	0,00000000000000001225148	-1,00000000000000	3,14159265358979
4	3,14159265358979	0,00000000000000001225148	-1,00000000000000	3,14159265358979
5	3,14159265358979	0,00000000000000001225148	-1,00000000000000	3,14159265358979
6	3,14159265358979	0,00000000000000001225148	-1,00000000000000	3,14159265358979

Taula 5.1.Aproximacions de pi a partir del mètode Newton-Raphson.

Font: Elaboració pròpia.

En l'Annex 1.5. hi ha els detall del programari construït en llenguatge java que permet trobar decimals de pi utilitzant el mètode Newton-Raphson.

6. Curiositats de PI

6.1 Algunes dades de com és pi

Degut a que el nombre pi té infinits decimals, hom pot estar segur que hi apareix la seva data de naixement així com el seu nombre preferit o un nombre qualsevol escollit a l'atzar. Per buscar un nombre qualsevol entre els primers dos-cents milions de xifres decimals només cal introduir-lo en alguna de les webs emmagatzemadores de dades que tenen dins seu els decimals de pi. Una d'elles és la web *The Pi Searcher* que dins seu té els primers 200 milions de dígits.

La primera curiositat destacada en els decimals del nombre pi va ser descoberta pel Premi Nobel de Física Richard Freynman (1918-1988) que va descobrir que en el decimal número 762 apareixen sis números 9 seguits. Es va decidir anomenar aquest decimal el punt Freynman (Figura 6.1.) ja que trobar 6 nous consecutius en un nombre on les seves xifres surten a l'atzar passa una vegada de cada 12.500 (0,08%). Per donar alguna dada més, la següent seqüència de 6 dígits decimals repetits comença amb el nombre 8 en la posició 222.299. Dels dígits restants, el que apareix últim sis vegades consecutivament és el 0, en la posició 1.699.927.

3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899
8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502
8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817
4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277
0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 7785771342 7577896091
7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960
8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4**999999**837

Figura 6.1. El punt Freynman dins els 770 primers decimals de pi.

Font: Elaboració pròpia.

Diem que un número és normal quan és un nombre real les xifres del qual estan distribuïdes seguint una distribució uniforme en base 10, sent totes les seves xifres igualment probables així com les parelles, els trios... Quan escrivim els nombres en base b, parlem de números b-normals.

Actualment es coneixen molt pocs nombres normals. Els més famosos són les constant de Champernowne però són nombre que estan creat exclusivament per ser normals. Tot i això, l'any 2001 David H. Bailey y Richard E. Crandall van fer la hipòtesis que tot número algebraic irracional, com per exemple pi, es normal; malgrat això, ni ells ni cap altre matemàtic encara no ha pogut aportar cap contra exemple ni cap exemple de número algebraic que sigui normal en alguna base.

Una bona manera per predir si pi pot o no ser un nombre normal, pot ser agafant molts decimals i veient si la proporció de 0, d'1, de 2, de 3... és la mateixa. En la taula 6.1. trobem el número de vegades que apareix cada dígit decimal en el primer bilió de xifres.

Dígit decimal	**Número de Vegades que apareix en el número**
0	99.999.485.134
1	99.999.945.664
2	100.000.480.057
3	99.999.787.805
4	100.000.357.857
5	99.999.671.008
6	99.999.807.503
7	99.999.818.723
8	100.000.791.469
9	99.999.854.780
Total	1.000.000.000.000

Taula 6.1. Número de vegades que apareix cada dígit decimal de pi en el primer bilió de xifres.

Font: Elaboració pròpia.

Tot i veure en la Taula 6.1. que pi té les xifres bastant ben repartides, encara no s'ha pogut demostrar que sigui un número normal per la simple raó que no només cal fer un estudi experimental sinó que cal buscar la fórmula en com se succeeixen els números per poder predir que tard o d'hora hauran sortit tos els nombres, parelles, trios, etc. el mateix número de vegades.

Una manera de veure si la capacitat de memòria d'una persona és bona o no, és la memorització de les xifres decimals de pi. El record del món l'ostenta l'espanyol Jaime García que l'any 2008 va ser capaç de recitar de memòria 151.204 xifres de pi que van haver de ser anotades en 652 fulls de paper. García va afirmar que "portava 15 anys amb el nombre pi en ment i que l'any anterior a la prova va estar estudiant 14 hores al dia". Confessava que li "agradava sortir a passejar per aprendre's de memòria totes les matricules i senyals que anava veient." García també posseeix altres records com el de resoldre una arrel tretzena de qualsevol nombre en menys d'1 segon o el d'aprendre's de memòria un nombre de 200 xifres només llegint-lo. De totes maneres s'ha comprovat que certs dígits de la pàgina 197 no concorden amb els del número pi i no se li pot donar el record per vàlid. En tot cas, el següent calculista amb més decimals de pi dins la seva memòria és de 67890 dígits pel xinès Lu Chao. Un psiquiatra xinès, Akira Haraguchi va recitar-ne 100.000 però el record no va ser aprovat pel llibre Guinness per falta de proves.

Les xifres decimals també s'utilitzen en tests d'ordinadors. Per veure la capacitat de càlcul d'un ordinador, se'l fa calcular xifres de pi i s'espera quan s'equivoca. Avui en dia, el record mundial de xifres calculades per ordinador de pi és l'increïble xifra de 2.669.999.989.951 xifres decimals. En paraules, 2,7 trilions americans o 2,7 bilions europeus.

El fanatisme del número pi s'ha escampat arreu del món i inclòs s'ha dedicat un dia de l'any per celebrar-lo. El dia de pi que va ser fundat pel matemàtic Larry Shawn. El dia de pi és el 14 de març (3.14 en llenguatge americà). El "superdia" de pi encara no ha arribat. però promet ser una gran festa; serà el 3 de març de l'any 2016 ja que podríem obtenir 4 xifres decimals amb la data (3.14.16). El dia de pi és tradicional menjar pastissos degut que en anglès és pronuncien igual que el número pi (pie) i que tenen forma circular. De la mateixa manera és tradicional menjar pi-zza el dia de pi. Bàsicament consisteix en una pizza qualsevol però cal gaudir de la meravellosa circularitat mentre hom la menja. El dia de pi, a més a més, coincideix amb l'aniversari d'Albert Einstein, cosa que sens dubte ajuda a la celebració.

Font: http://www.kulfoto.com/funny-pictures/37619/pi-pie

El nombre pi, però, apareix en molts altres lloc inesperats. El dia que google va posar les seves accions a la venta, en va posar ni més ni menys que 14.159.265 que són exactament les 8 primeres xifres decimals de pi. Una altra dada curiosa la trobem en la natura: el nombre de vespes mascle que viuen en un vesper estan proporcionades amb les femelles en $\pi:1$.

A partir d'un cercador de decimals com *The Pie Searcher*, s'han iniciat bucles com el següent: S'inicia amb un número qualsevol, es busca en la posició que apareix i es busca el número resultant. Un bon bucle comença pel número 40. Aquest número apareix en la posició decimal número 70. A continuació introduïm el 70 i així successivament. Aquest és el bucle més gran trobat d'aquest estil: 40, 70, 96, 180, 3664, 24717, 15492, 84198, 65489, 3725, 16974, 41702, 3788, 5757, 1958, 14609, 62892, 44745, 9385, 169, 40.

6.2. Regles mnemotècniques, la pifilologia

La pifilologia és la ciència en la qual es crea i s'utilitzen regles mnemotècniques per recordar la successió matemàtica dels dígits decimals del número pi. El terme "pifilologia" és un joc de paraules entre la paraula "Pi" y el camp lingüístic de la filologia.

Existeixen moltes maneres de memoritzar els dígits de pi, però les mes comunes són l'ús dels piemes que són poemes on cada paraula té el número de lletres corresponen a la xifra decimal de pi o alguns que escriuen directament a partir de la lletra de l'abecedari que correspondria al decimals partint que la A val 1 i la B, 2. Un dels piemes més importants és el Cadaeic Cadenza, amb el qual podem memoritzar 3835 xifres de pi. L'explicació del títol és ben senzilla: Cadaeic: 3141593.

El Cadaeic Cadenza, que per la seva extensió el podreu trobar en l'Annex 3, està format per 14 poemes units per Mike Keith i que permeten recordar cadascun un bon grapat de xifres decimals.

En català encara no tenim cap piema però a partir del piema popular de la llengua castellana que permet recordar fàcilment les 20 primeres xifres decimals de pi, he creat el primer piema de la llengua catalana tot fent-ne una petita versió.

“Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros”

Popular

“Sóc i seré i sigui imparcial
el cognom manca per ganes
dividint longituds resulto irracional,
sóc pi. Hom resa-pels Manes”

Euclides

El següent piema té un funcionament una mica diferent, va ser escrit per la més que reconeguda escriptora polonesa Wislawa Szymborska (1923-2012). El poema ha guanyat molts premis i té la curiositat d’incloure 40 xifres decimals del número pi explícitament.

Digno de admiración es el número Pi
tres coma catorce.
Todas sus siguientes cifras también son iniciales,
quince noventa y dos porque nunca termina.
No deja abarcar sesenta y cinco treinta y cinco con la mirada,
ochenta y nueve con los cálculos
sesenta y nueve con la imaginación,
y ni siquiera treinta y dos treinta y ocho con una broma o sea comparación

cuarenta y seis con nada
veintiséis cuarenta y tres en el mundo.
La serpiente más larga de la tierra después de muchos metros se acaba.
Lo mismo hacen aunque un poco después las serpientes de las fábulas.
La comparsa de cifras que forma el número Pi
no se detiene en el borde de la hoja,
es capaz de continuar por la mesa, el aire,
la pared, la hoja de un árbol, un nido, las nubes, y así hasta el cielo,
a través de toda esa hinchazón e inconmensurabilidad celestiales.
Oh, qué corto, francamente rabicorto es el cometa
¡En cualquier espacio se curva el débil rayo de una estrella!
Y aquí dos treinta y uno cincuenta y tres diecinueve
mi número de teléfono el número de tus zapatos
el año mil novecientos sesenta y tres sexto piso
el número de habitantes sesenta y cinco céntimos
centímetros de cadera dos dedos una charada y mensaje cifrado,
en la cual ruiseñor que vas a Francia
y se ruega mantener la calma,
y también pasarán la tierra y el cielo,
pero no el número Pi, de eso ni hablar,
seguirá sin cesar con un cinco en bastante buen estado,
y un ocho, pero nunca uno cualquiera,
y un siete que nunca será el último,
y metiéndole prisa, eso sí, metiéndole prisa a la perezosa eternidad
para que continúe.

Tot i semblar una cosa abstracta, és important pels científics saber almenys fins al decimal número 40 ja que si una circumferència envoltés tot l’univers, en podríem calcular la seva mesura amb un error menor al radi d’un àtom d’hidrogen. A partir d’aquesta xifra, només s’aprenen decimals per diversió, per competició o per enfortir la memòria.

6.3. Pi i algunes lleis

L'any 1897, un ciutadà d'Indiana, Estats Units d'Amèrica, anomenat Edward Goodwin pretenia que es fes una llei a l'estat d'Indiana (la bill n.º 246) votada i aprovada pels representats de l'Estat per la qual tothom havia d'utilitzar i ensenyar que:

$$\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} \approx 3{,}232$$

A més a més va decidir que havia d'aparèixer a tots els llibres aquesta igualtat i que se l'havia de pagar per donar accés a la veritat. La proposició de llei va ser aprovada pels comitès i la van portar al senat de l'estat perquè fos vàlida. Per sort, el professor de matemàtiques Clarence Waldo que per casualitat estava allí i li van demanar de fer un pròleg a la llei va demostrar com d'equivocat anava el senyor Goodwin i va aconseguir tirar enrera aquesta llei.

El professor Waldo en una de les seves classes

Font: http://www.hammerandrails.com/2010/10/22/1767818/profiles-in-badassery-clarence-a-waldo

6.4 Una mica d'art i pi

Varis arquitectes, escultors i humanistes s'han inspirat en pi a l'hora de fer les seves construccions. Vegem uns quants exemples de pi i art.

Samarreta amb el número pi i 5000 xifres decimals.

Font: http://www.zazzle.es/pi_arte_del_numero_de_5000_digitos_ropa_camiseta

Estació de metro de Downsview a Toronto, Canada. Cada rectangle que enrajola la paret manté una proporció amb el següent de 1 es a la xifra decimal de pi del lloc on es trobi: Els dos primers són iguals ja que 1 és la primera xifra decimal de pi. En canvi el segon és 4 cops més gran.

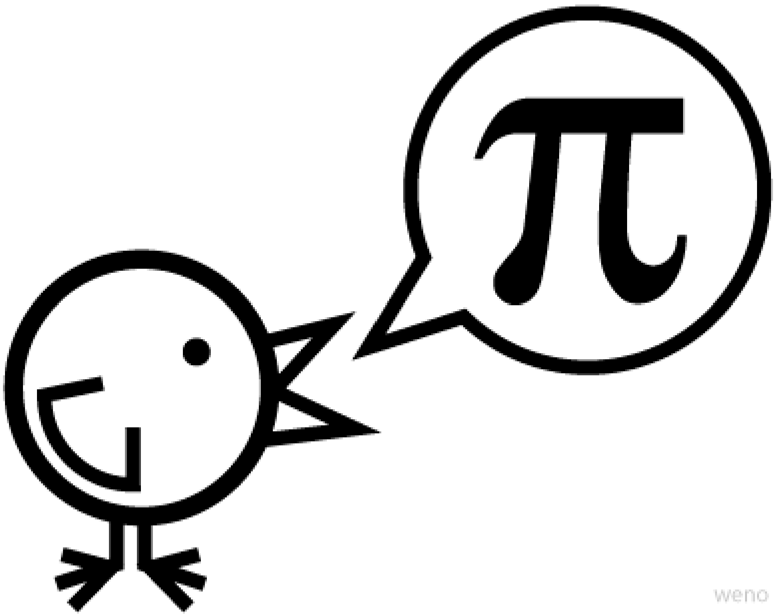
Font: http://www.flickriver.com/photos/tags/downsviewsubwaystation/interesting/

Al pati de la Henry Abbott Technical School, Danbury, Connecticut, trobem aquesta estàtua de 20 metres en honor al número pi. Està erigida per l'arquitecte Barbara Grygutis. L'estatua s'ilumina de nit automàticament.

Font: http://www.trover.com/d/sTU

6.5 L’humor de pi

Amb el número pi també s’han fet nombrosos acudits. Entre ells s’inclouen els següents que, al seu torn, són els més destacats:



Font: http://www.taringa.net/posts/info/10045605/Numero-Magico-Numero-Cientifico-o-Divino.html

Font: http://plp.cl/perfil/curaguilla?page=2

Font. http://haciendomemes.com/filosoraptor/si-pi-es-3-1416-2/

7. Pi en la probabilitat

Quan parlem de probabilitat sembla com si ens estiguéssim allunyant del concepte de pi, encara més que quan parlàvem de l'infinit. De totes maneres $\frac{6}{\pi^2}$, és la probabilitat de què dos nombres escollits a l'atzar siguin primers entre sí. Si aquests dos nombres enlloc de reals són complexes, la probabilitat de que siguin primers entre ells passa a ser $\frac{6K}{\pi^2}$ on K és la constant de Catalan. A més a més, hi ha una altra dada que relaciona pi amb els nombres primers. La funció zeta de Riemann val exactament $\frac{\pi^2}{6}$. Això fa sospitar que pi pugui estar relacionat amb el món de la probabilitat, i efectivament, així és.

En primer lloc, quan ens fem preguntes relacionades amb la probabilitat i l'estadística, com podrien ser l'altura d'un ésser humà, el seu coeficient intel·lectual... ensopeguem amb la campana de Gauss o corba normal. La corba normal correspon a una distribució de probabilitat que té una corba de densitat amb la que pi està molt relacionada. Si per facilitar els càlculs utilitzem una mitjana igual a 0 i una variància de 1, la corba normal queda centrada en els eixos i la podem representar utilitzant la següent equació (Figura 7.1.).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

La probabilitat es calcula a partir de la següent integral:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Com podem veure, el nombre pi sempre està present en els càlculs de probabilitats de la vida quotidiana. Podem trobar en el pic de la campana la mitjana de l'edat en que morim, dels àpats que fem...

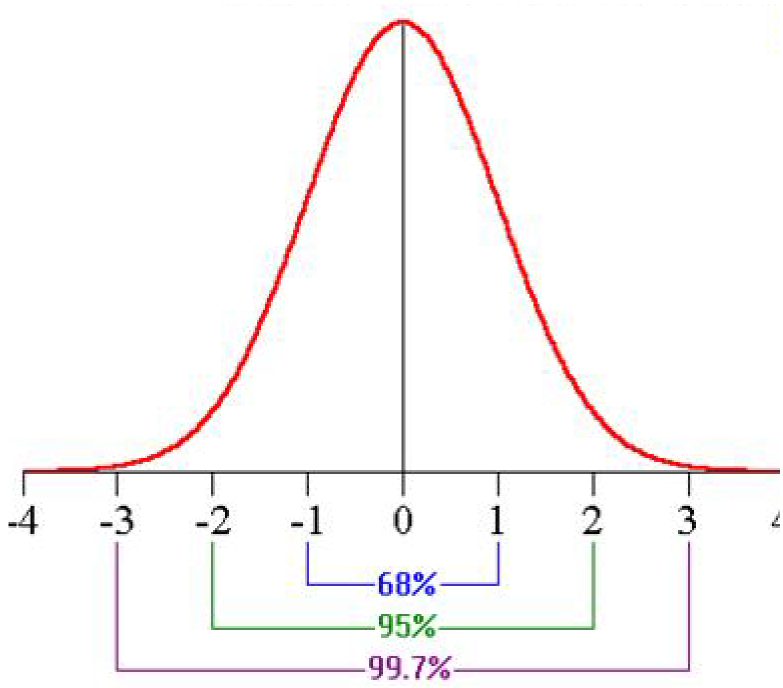


Figura 7.1. Campana de Gauss i la seva velocitat de creixement.

Font: http://wwwcapacitaciononline.blogspot.com.es/

Si dibuixem en un paper una sèrie de rectes paral·leles que equidistin una distància l les unes de les altres i llencem sobre aquest paper una agulla de llargada l, la probabilitat de que talli alguna de les línies és de $\frac{2}{\pi}$ que és aproximadament un 63,66%.

Aquest és el problema de Buffon del qual s'ha fet una aplicació en Java per simular els llançaments i calcular la probabilitat. Trobareu el codi font i l'explicació en l'Annex 1.6.

La resolució del problema es basa en la solució de la integral definida següent dividida per pi mitjos.

$$\frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(x)dx}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Que surti un sinus i un pi de per mig es degut a l'existència d'un angle que formen l'agulla amb el paper a l'hora de ser llançada aquesta.

Un altra aplicació (Annex 1.7.) creada en el present treball de recerca és el càlcul de pi a través del mètode de Montecarlo. Aquest mètode proposa el dibuix d'un quadrat circumscrit a un cercle (Figura 7.2.). El mètode es basa en marcar a l'atzar punts en aquest recinte i anotar si cauen dins o fora de la circumferència. Com que l'àrea del quadrat és c^2 i la de la circumferència $\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{4}$, només cal dividir els punts dins la circumferència entre els punts totals marcats (ja que els marquem tots dins el quadrat) i multiplicar finalment el resultat per 4.

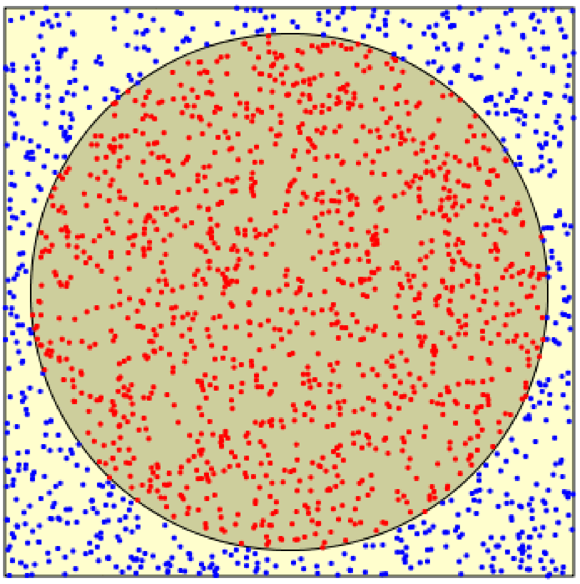


Figura 7.2. Mètode de Montecralo.

Font: http://www.introni.it/crittografia.html

8. Construcció d'una pàgina web

Com ja s'ha anunciat en el capítol 1, un dels objectius del treball és la creació d'una pàgina web en la qual es pugui aprendre sobre π a tots els nivells, des de l'elemental, fins a les deduccions de fórmules matemàtiques complexes, passant per imatges en moviment que expliquen pi, les definicions dels millors matemàtics de pi, els procediments de càlcul de decimals en format d'aplicació...

L'objectiu de la pàgina web ha de ser, doncs, acostar π, i les matemàtiques en general, al públic perquè aprengui curiositats, característiques i la història de la famosa constant, a part de gaudir d'una bona estona aprenent què és π de manera divertida.

La base de la pàgina web radica en el present treball escrit. Un cop elaborat tot el treball però especialment els capítols 3 (Història), 5 (Mètode Newton-Raphson) i 6 (Curiositats), les idees que havien de sortir en la pàgina ja les trobàvem en ell. Un treball que ha aprofundit en la història de la recerca de decimals de pi i que alhora també ho farà la pàgina web. Una web que ens parla del mètode de Newton Raphson i que ens ensenya els diversos mètodes per trobar decimals de pi. I a més a més, és una web que permet aprendre curiositats del número pi, que tot i no ser una recerca profundament matemàtica, ajudarà a properes ments matemàtiques a divertir-se amb el número pi.

Per entendre bé la part pràctica del present treball cal tenir clara la idea de pàgina web. Una pàgina web és un document del web (paraula catalana que designa la triple doble ve baixa, www o World Wide Web), que té extensions de fitxer .html o .htm. perquè precisament està escrita en llenguatge HTML (Hypertext Markup Language). El gran avantatge que presenta sobre formats anteriors del web és que el seu contingut és text i imatges amb hipervincles per facilitar la navegació d'una pàgina o secció a una altra.

La pàgina web es creada a partir de es.wix.com (Figura 8.1.), una pàgina web que permet la creació de pàgines web online facilitant a l'usuari tot tipus d'enllaços, menús i botons per rebaixar la dificultat d'haver de crear la web amb codi html. A més a més es.wix.com també facilita un domini a l'usuari, cosa que, al seu torn, fa més senzilla la manera de fer pública la pròpia pàgina web.

Figura 8.1. Portada d'inici de es.wix.com

Wix obliga l'usuari a crear un compte mitjançant el seu correu electrònic. Un cop el compte està creat només cal escollir una plantilla base i posar un nom provisional per poder començar a editar la pàgina. En el nostre cas es tracta de pi-transcendent (Figura 8.2.)

L'usuari pot accedir sempre que ho desitgi a la seva pròpia pàgina web a través del menú principal de wix ("Mi cuenta" o "Administrar mi sitio"), pàgina que surt automàticament després que l'usuari s'hagi identificat.

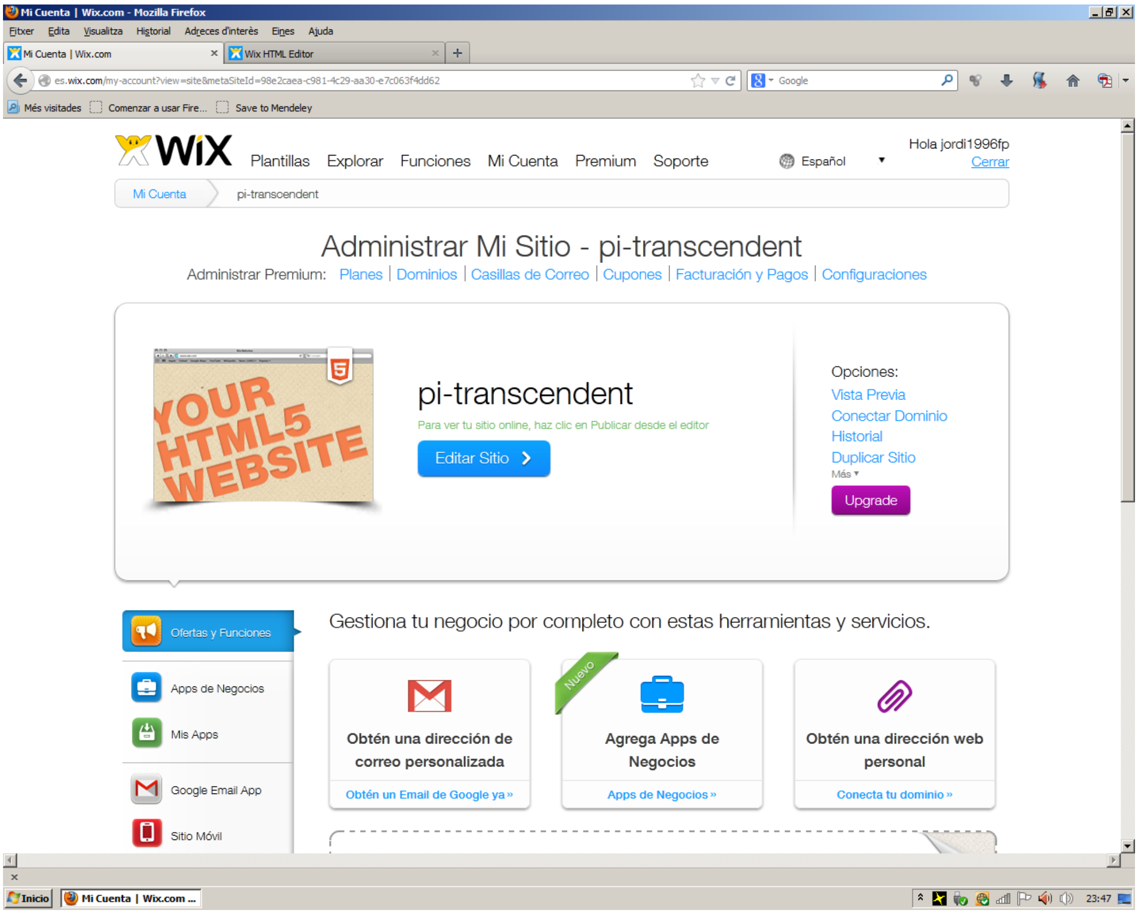


Figura 8.2. “Mi cuenta” o “Administrar mi sitio”. Menú principal de es.wix.com

8.1. Pi, el peculiar transcendent

El títol de la pàgina web creada en el present treball de recerca és *Pi, el peculiar transcendent* i la podeu trobar en l’adreça xxxxEuclidesxxxxxx. A partir d’aquí s’ha escollit també el títol del treball. La pàgina web està dividida en Menús que van des de la pàgina d’inici fins a la de contacte. En el present apartat s’explica cada pàgina juntament amb les fotografies de com es veu en mode construcció i en mode definitiu.

La manera d’explicar la jerarquia de pàgines web es farà a través de lletres i números tot seguint un criteri alfabètic. Al haver-hi un únic menú amb 5 pàgines principals s’ha decidit anomenar cadascuna d’elles amb una lletra de la A a la E de la manera següent:

A. Indica la pàgina d'inici juntament amb les de la presentació.

B. Indica la pàgina *Què és pi?* i totes les seves derivades que portaran un número adjunt.

C. Indica la pagina *Com calcular pi* i totes les seves derivades que portaran un número adjunt.

D. Indica la pagina *Projectes* i totes les seves derivades que portaran un número adjunt.

E. Indica la pagina *Contacte*.

La pàgina web té sempre una barra de menús a la part dreta de dalt i aquesta té la funció de facilitar a l'usuari a accedir a les pàgines principals més fàcilment. De la mateixa manera, la franja vermella inferior també hi es sempre i hi podem observar l'adreça de contacte i el copyright.

8.1.1. Pàgina A. Inici

La pàgina d'inici (Figura 8.3.) en certa manera és la més important del projecte ja que és la que veu l'usuari a l'entrar en la web. L'idea de la portada és ben senzilla, s'utilitzen tons grisos, vermells i blancs i es fa ressaltar un número pi de color negre en un cercle beix. En la portada principal podem veure la barra de menús a la part dreta de dalt i al centre tres accessos ràpids cap tres pàgines que s'utilitzen en la presentació.

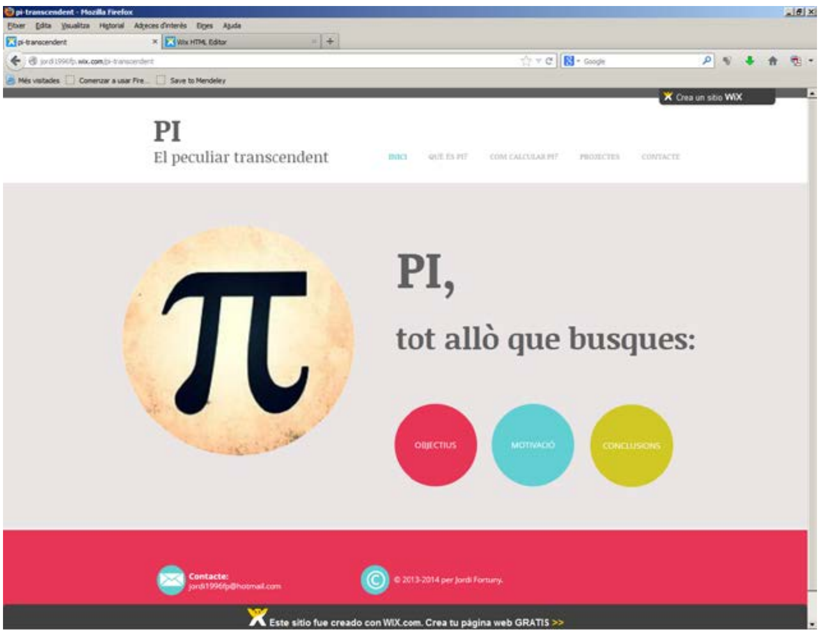


Figura 8.3. Pàgina d'inici

En la part central observem tres cercles. Els tres cercles són enllaços als objectius, la motivació i les conclusions del present treball de recerca. Aquests tres apartats surten a la pàgina web degut a que es fa servir com a base per la presentació del treball de recerca.

A.1. Objectius

En la pàgina d'objectius (Figura 8.4.) es recorden al lector els objectius del treball de recerca i per tant tot allò que pot trobar en la pàgina web.

La pàgina s'ha estructurat a partir d'un fons gris amb la capçalera blanca i una estructura amb punts que recorden els objectius, com s'ha dividit la història i des de quines vessants s'han respòs a les preguntes que ens plantejava el treball. La pàgina d'objectius correspon al capítol 1 dels present treball de recerca.

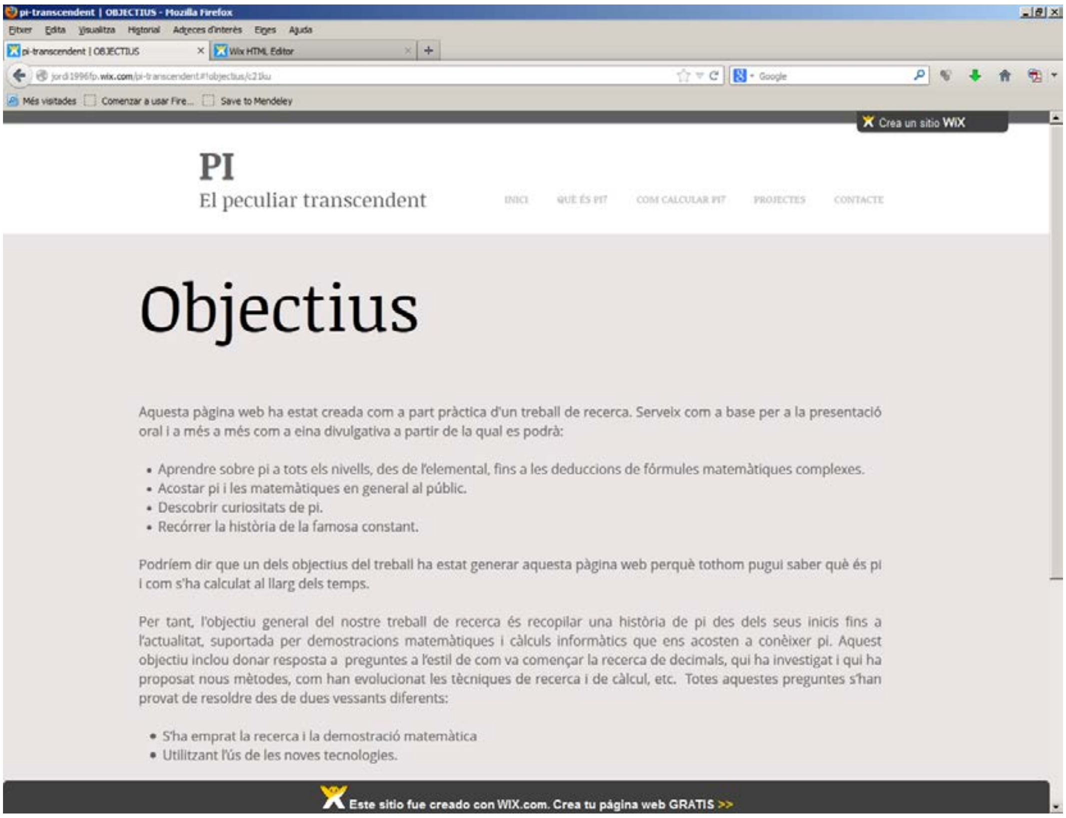


Figura 8.4. Pàgina d'objectius.

A.2. Motivació

En la pàgina de Motivació (Figura 8.5.) només s’hi pot accedir a partir del cercle blau que es troba en la pàgina d’inici. En la pàgina de Motivació hi trobem els motius que han portat a l’autor a fer aquest treball i la pròpia pàgina web i s’explica quan es va prendre la decisió i quins van ser els llibres que van fer despertar en l’autor interès pel número pi.

La pàgina motivació també té un ús exclusiu per la presentació i correspon al capítol 2 del present treball de recerca.

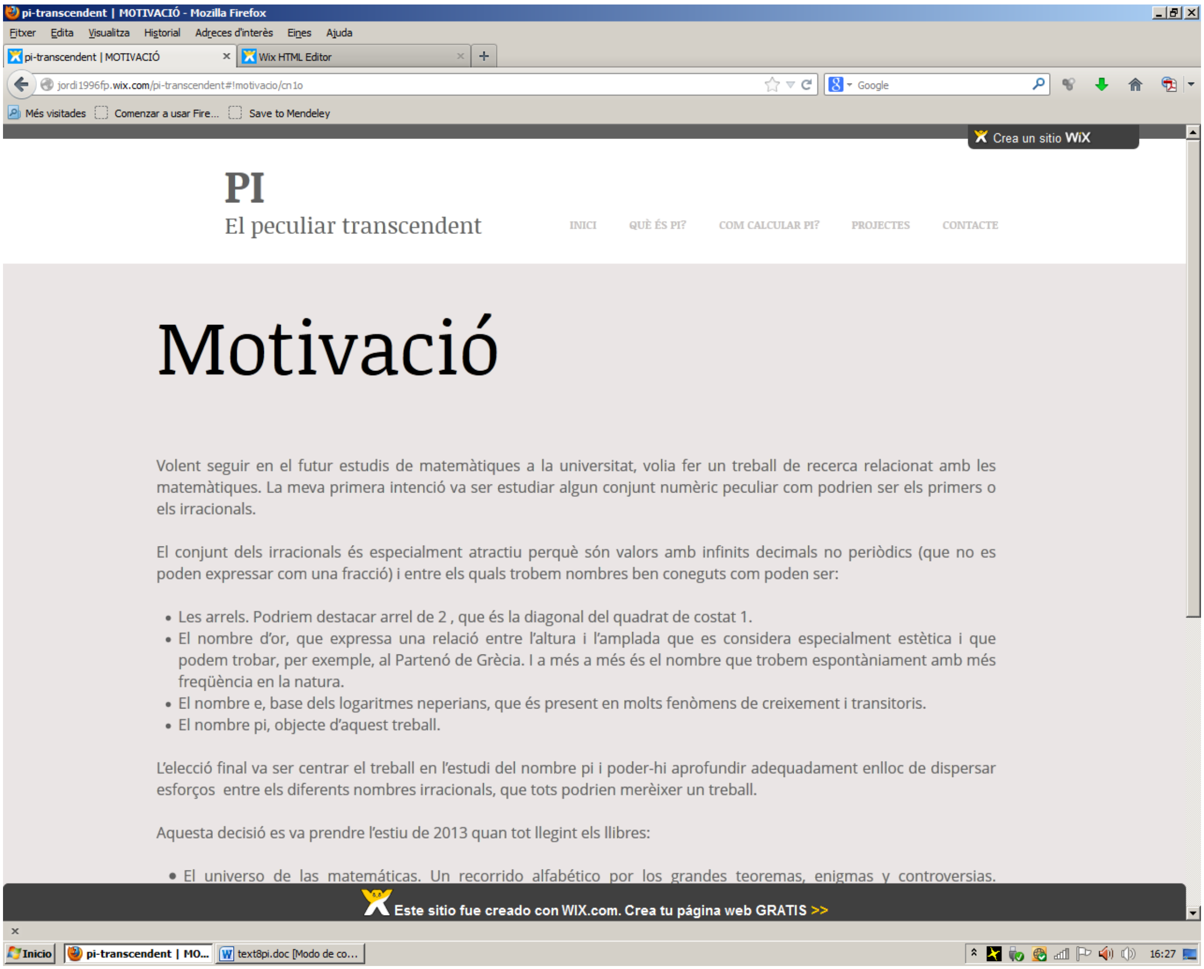


Figura 8.5. Pàgina de motivació.

A.3. Conclusions

La pàgina de les conclusions (Figura 8.6.), únicament accessible a partir del cercle verd que es troba en la pàgina d'inici, correspon al capítol 9 del present treball de recerca i com les dues pàgines precedents es basa amb els tons grisos i blancs de la pàgina web. La pàgina conclusions ens mostra les conclusions del treball tals com el compliment dels objectius.

Si algun usuari accedeix a la pàgina web, allò més segur que faci tot haver vist la portada i regirar els tres cercles centrals (accedir a les pàgines catalogades amb lletra A), és accedir a *Què és pi*? a partir de la barra de menús. En l'apartat 8.1.2, doncs, veurem les característiques i les pàgines a partir de les quals s'accedeix des de la pàgina *Què és pi?* que catalogarem amb la lletra B.

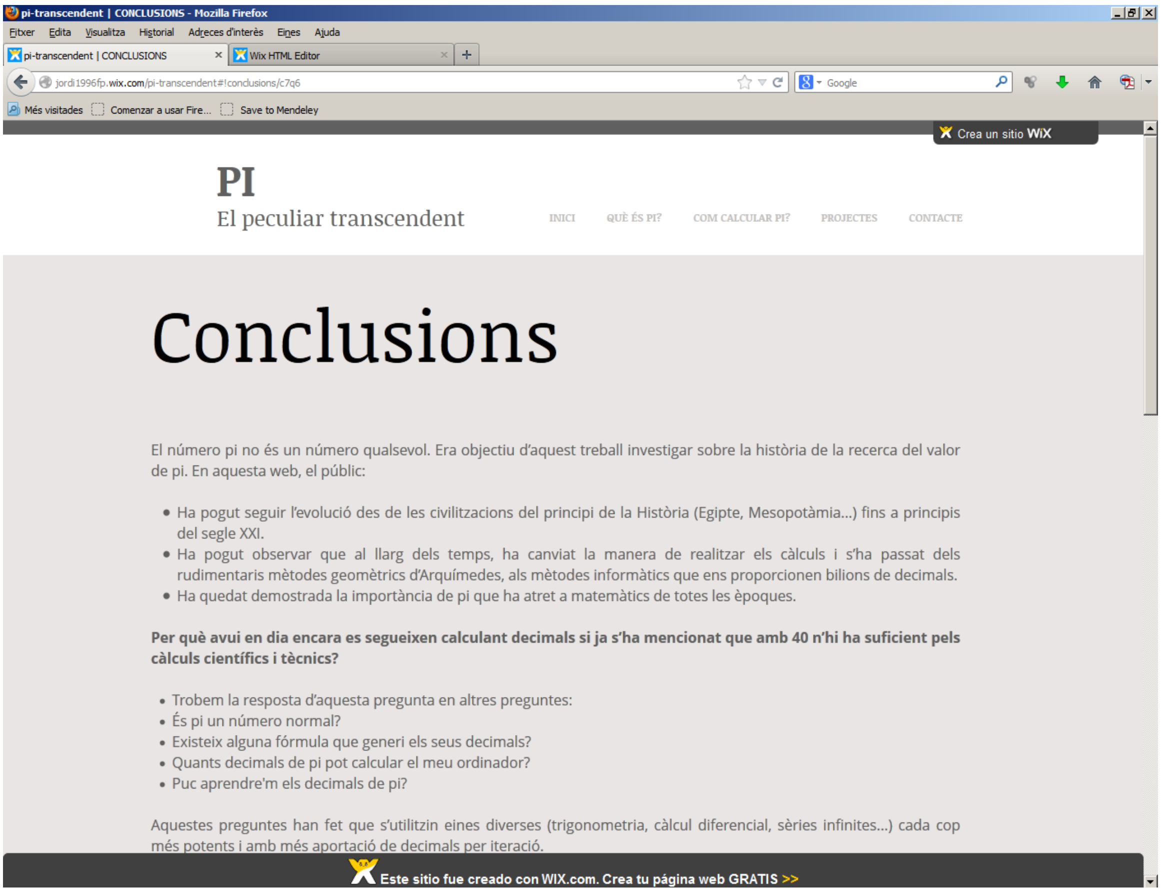


Figura 8.6. Pàgina de les conclusions.

8.1.2. Pàgina B. Què és pi?

Les pàgines catalogades amb la lletra B són aquelles que estan relacionades amb la pregunta “Què és pi?”.

La pàgina *què és pi?* (Figura 8.7.) està dividida en 6 apartats:

- Definició: és defineix pi i es donen enllaços per a més informació (pàgina B.1.).
- Pi és irracional: es demostra la irracionalitat de pi en un document PDF adjunt i es donen enllaços que ajuden a entendre la demostració d’Ivan Niven.
- Pi és transcendent: es demostra la transcendència de pi tot aportant un fitxer PDF.
- La quadratura del cercle: es mostra el problema de la quadratura del cercle i la seva impossibilitat de solució
- Aplicacions: S’enumeren les principals aplicacions del número pi.
- Curiositats: Enllaç a la pàgina B.2 que ens explica curiositats de pi.

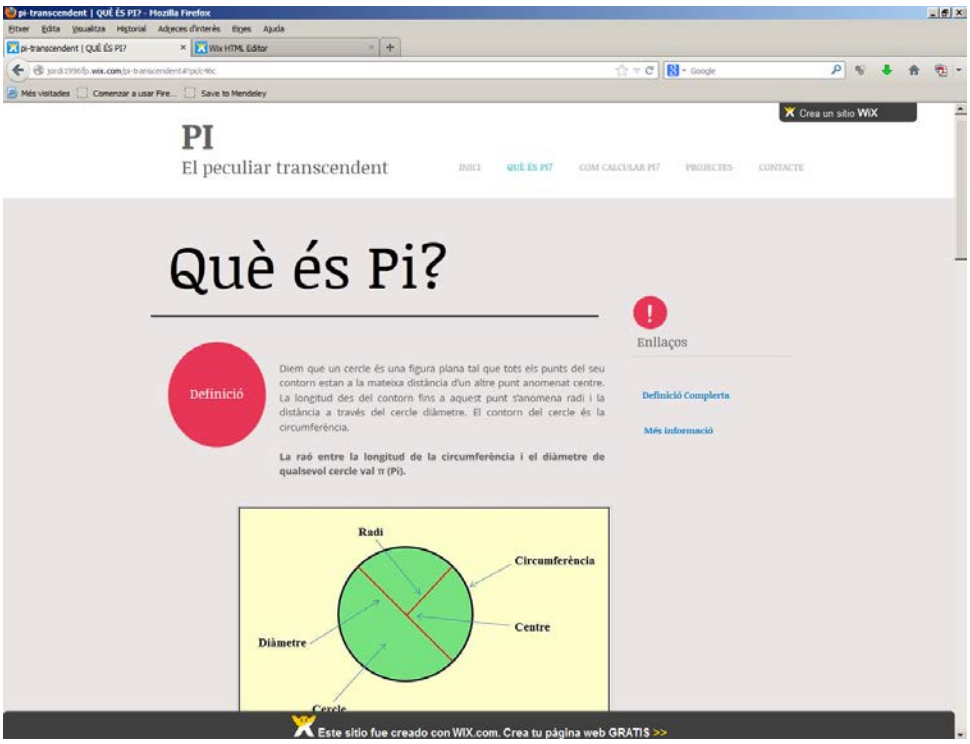


Figura 8.7. Pàgina què és pi

B.1. Definició de pi

La pàgina definició de pi que està titulada com *Definim pi*! (Figura 8.8.), a la qual accedim des del menú principal o des de l'enllaç de la pàgina Què es pi? ens defineix pi a la vegada que ens dóna les definicions dels nombre de famosos matemàtics i ens acompanya amb imatges l'expressió de pi.

Una definició clara, breu i entenedora, que permet entendre al lector ràpidament de què tracta el número pi. A la vegada, trobem enllaços cap a què és pi i curiositats per donar al lector més informació del número pi.

Figura 8.8. Pàgina què és pi.

B.2. Curiositats

En la pàgina de curiositats (Figura 8.9.) el lector pot trobar curiositats del número pi estructurades sota 5 subtítols:

- El punt Freynman (enllaç a pàgina B.2.1., Figura 8.10)
- És pi normal? (enllaç a pàgina B.2.2., Figura 8.11)
- És possible memoritzar els decimals de pi? (enllaç al llibre dels rècords)
- El dia de pi
- Pifilologia (enllaços a document PDF i pàgina B.2.3., Figura 8.12.)

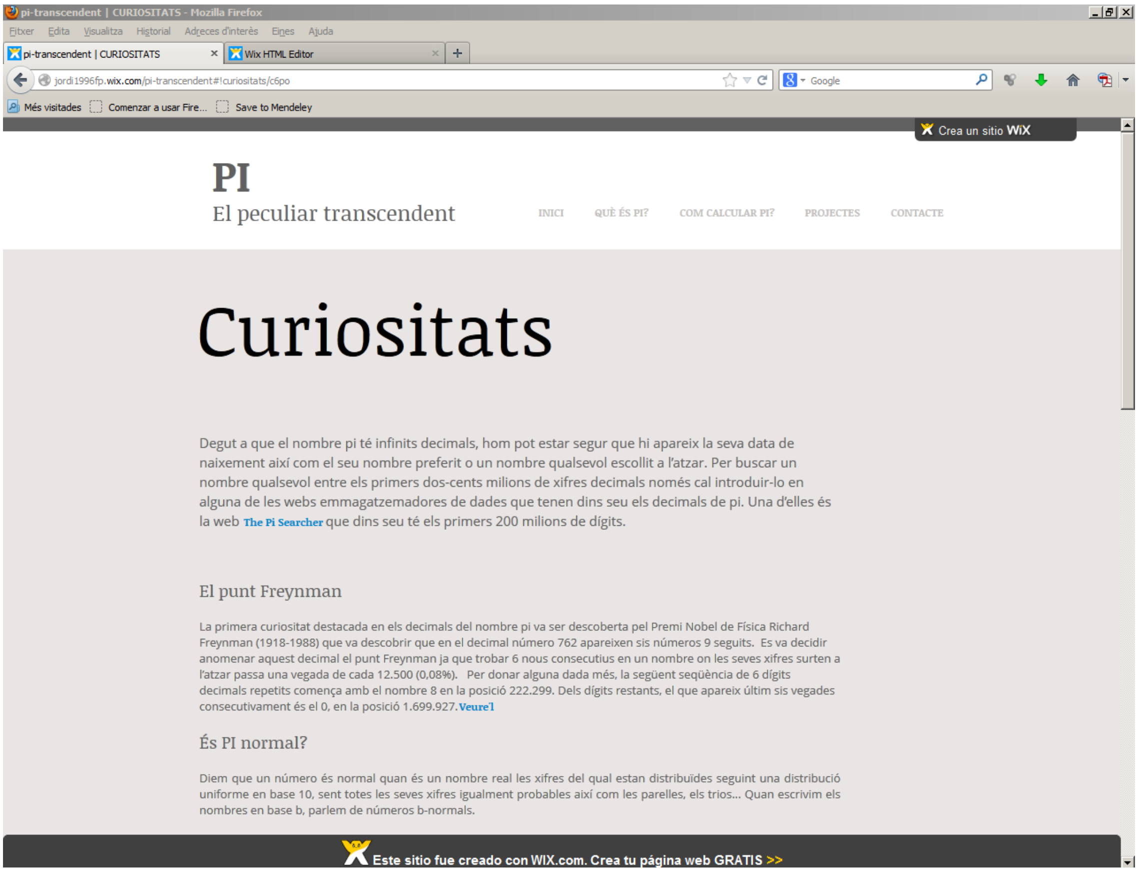


Figura 8.9. Pàgina de Curiositats.

B.2.1. El punt Freynman

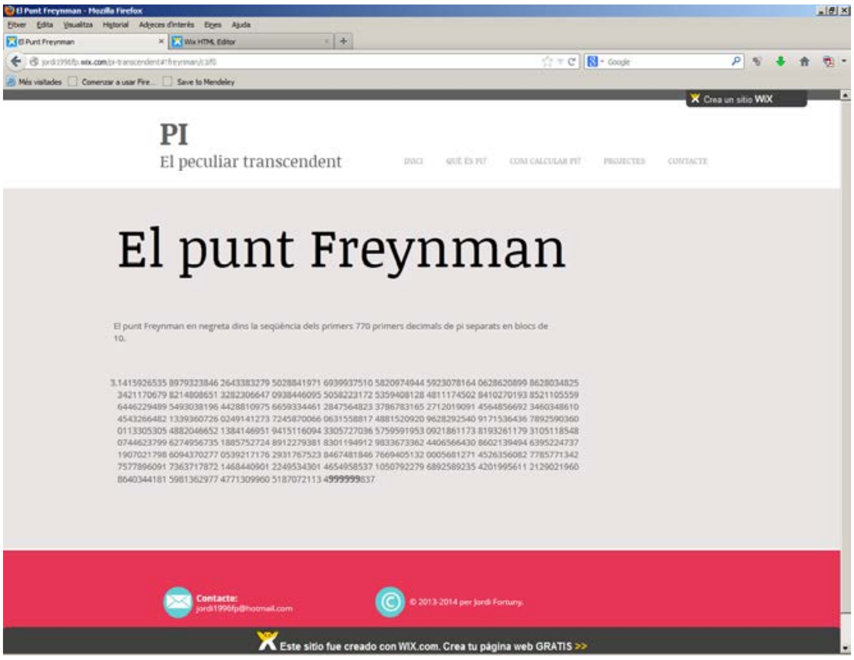


Figura 8.10. Pàgina del punt Freynman

B.2.2. Normalitat

Figura 8.11. Pàgina de la normalitat de pi.

B.2.3.Piemes

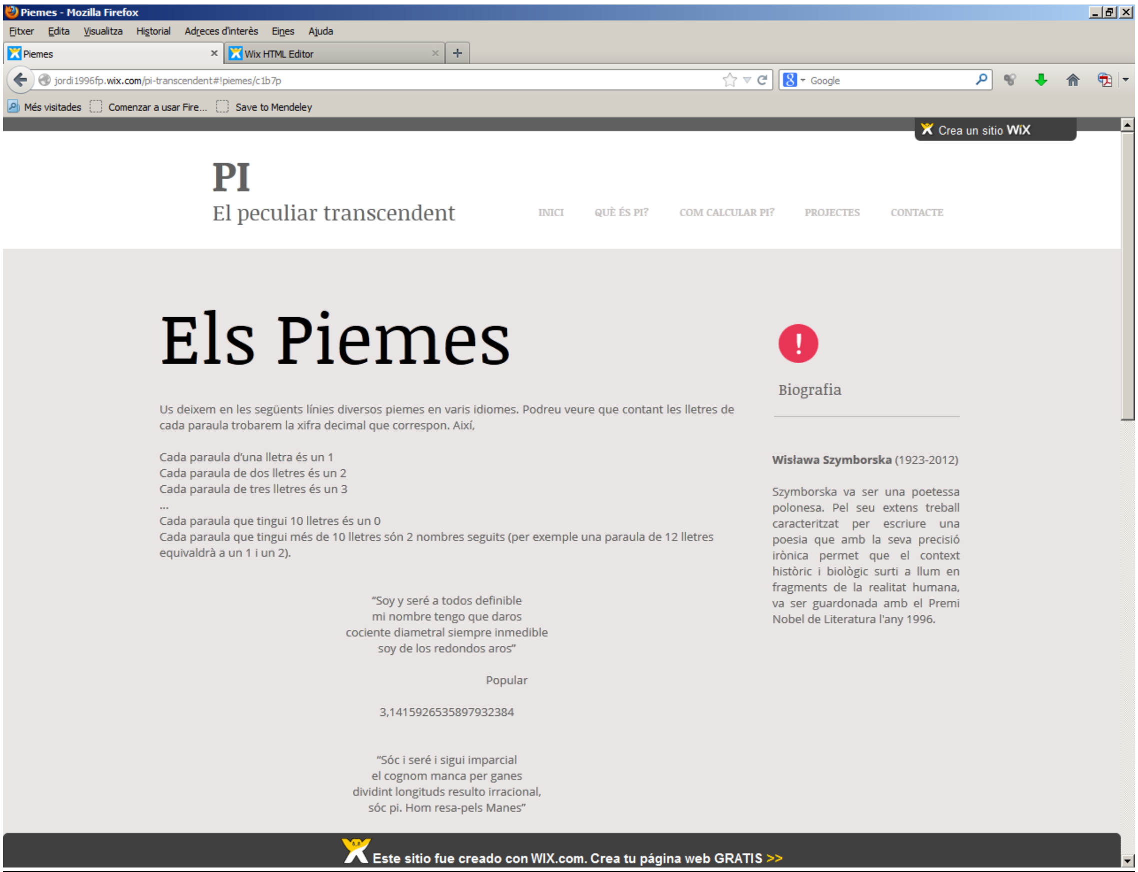


Figura 8.12. Pàgina dels piemes.

8.1.3. Pàgina C. Com calcular pi?

Les pàgines catalogades amb la lletra C són aquelles que ajuden al lector a entendre els diferents mètodes per calcular pi al llarg de la història. Podem dividir la pàgina com calcular pi? (Figura 8.13.) en tres apartats, un dels quals es pot novament separar en dos més:

- Primers càlculs de pi. (enllaç a pàgina C.1.)
- Arquímedes, tota una revolució en el món de pi (enllaç a pàgina C.2.)
- Després d'Arquímedes: sèries infinites, càlcul diferencial, l'era dels ordinadors que se divideix entre els mètodes Arquimedians (pàgina C.3.) i els no Arquimedians (pàgina C.4.).

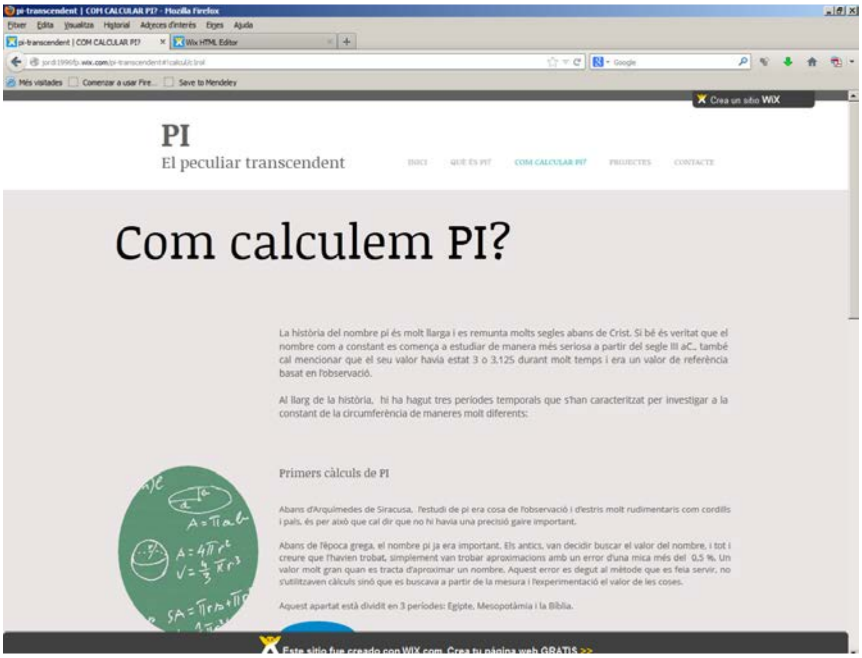


Figura 8.13. Pàgina de com calculem pi?

<u>C.1. Primers càlculs de pi</u>

La pàgina que s'ha decidit titular la història de pi abans d'Arquímedes (Figura 8.14.) ens mostra les aproximacions Egípcia (en PDF), Mesopotàmica i Bíblica.

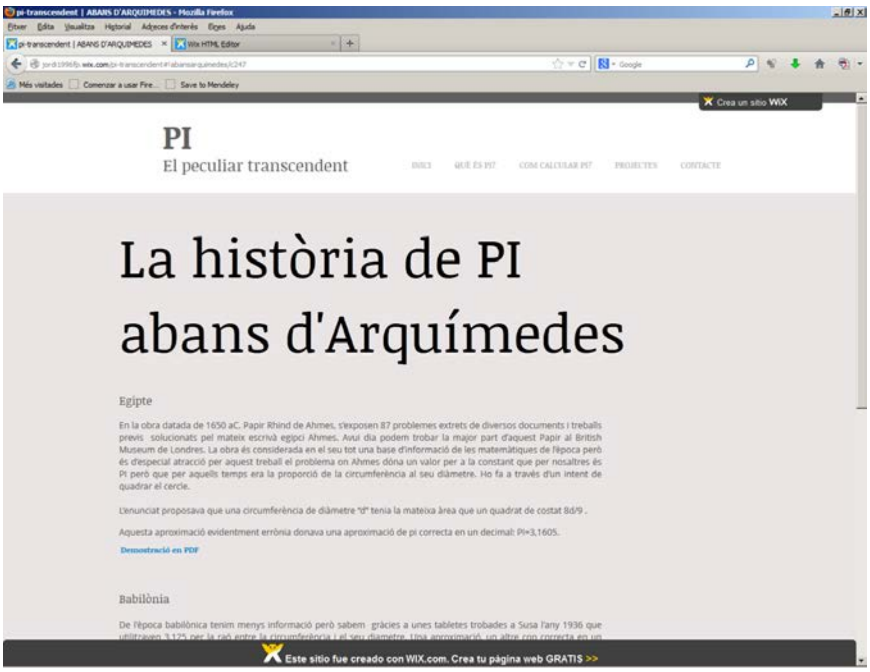


Figura 8.14. Pàgina de la història de pi abans d'Arquímedes.

C.2. Arquímedes

La pàgina Arquímedes (Figura 8.15.) ens explica els mètodes d'Arquímedes per trobar decimals de pi a través de dos fitxers PDF, un pels polígons inscrits i l'altre pels circumscrits.

Figura 8.15. Pàgina d'Arquímedes.

C.3. Mètodes Arquimedians

La pàgina dels mètodes Arquimedians (Figura 8.16.) que podem dividir en tres subtítols, la Índia, la Cultura Oriental i els matemàtics Europeus que són Adriaan Anthoniszoon, François Viète, Adriaan van Roomen i Ludolph van Ceulen. Els mètodes de cadascun d'els estan explicats "in situ" tret del de François Viète que es troba en format descarregable com a fitxer PDF.

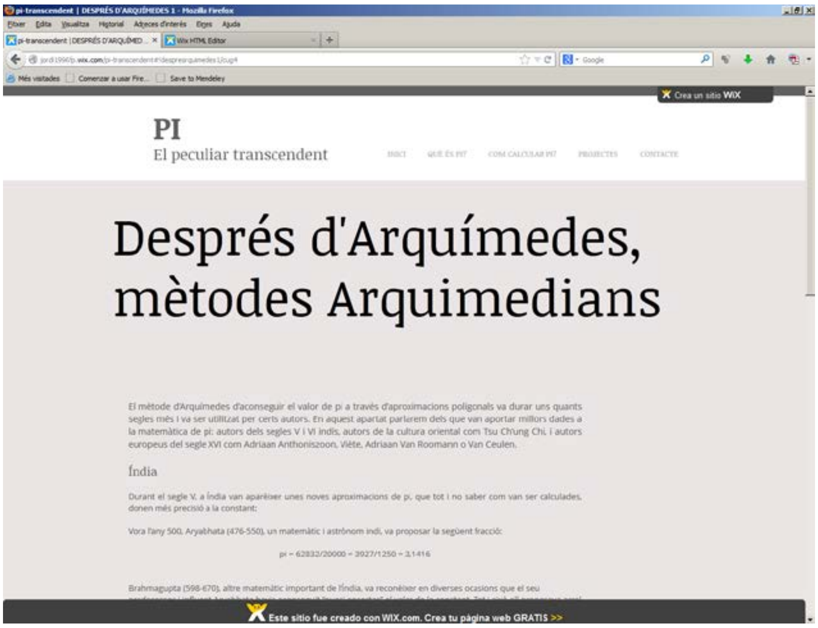


Figura 8.16. Pàgina dels mètodes Arquimedians.

<u>C.4. Mètodes no Arquimedians</u>

La pàgina dels mètodes no Arquimedians (Figura 8.17.) està organitzada sota una estructura de 5 autors, Wallis, Leibniz i Gregory, Machin, Euler i Ramanujan i l’era dels ordinadors. Wallis, Leibniz i Euler contenen fitxers PDF amb les seves demostracions.

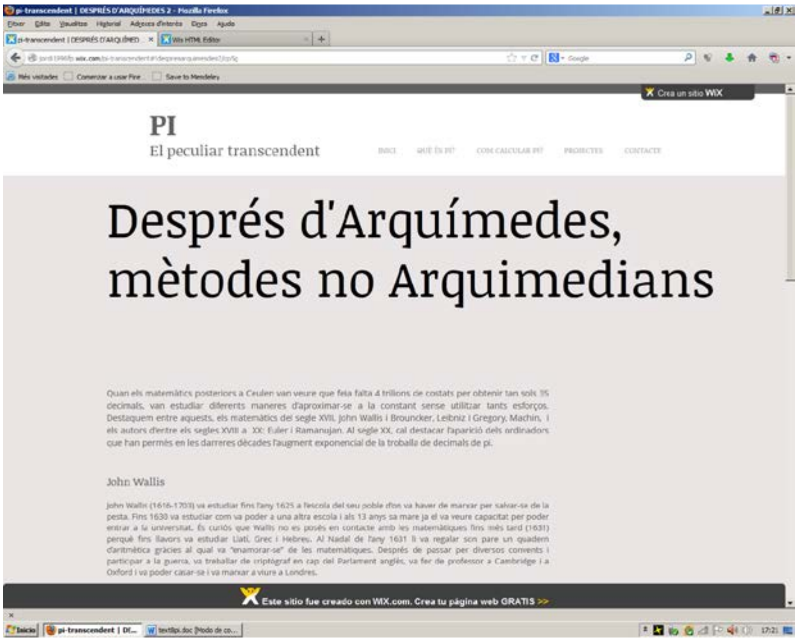


Figura 8.16. Pàgina dels mètodes no Arquimedians.

8.1.4. Pàgina D. Projectes i Aplicacions

En la pàgina web de projectes (Figura 8.17) trobem les idees que han estat desenvolupades per l'autor en forma de programes escrits en Java. Malauradament, la plataforma wix.com encara no permet penjar les aplicacions però s'ha deixat en la pàgina els hipervincles per quan tal cosa sigui possible. Estructurem la pàgina de projectes en 4 apartats:

Representació visual de pi: on es veu una imatge d'una circumferència de diàmetre 1 que ens mostra que la seva longitud és pi. També trobem un hipervincle cap a la pàgina de l'aplicació creada per l'autor de tal representació (Pàgina D.1., Figura 8.18).

Probabilística: ens mostra que pi també està relacionat amb la probabilitat i dóna enllaços cap a les pàgines del mètode de Montecarlo i el mètode de Buffon (Pàgines D.2. i D.3., Figures 8.19. i 8.20.)

El mètode de Newton Raphson que ens enllaça amb la pàgina D.4. (Figura 8.21.) i que ens explica com funciona el mètode i quins són els criteris a seguir.

Els sumatoris infinits que inclouen el de Leibniz i Euler del qual també hi ha imatges de les aplicacions creades (Pàgines D.5. i D.6. , Figures 8.22. i 8.23.)

La pàgina de projectes s'acaba amb la següent oració:

Perquè ningú està sol, junts sumem. Tens un projecte, necessites més informació, vols ajut? parlem-n'hi!

Aquesta oració dóna lloc a la pàgina de Contacte (Pàgina E).

Figura 8.17. Pàgina de projectes i aplicacions.

D.1. La definició de pi en una applet

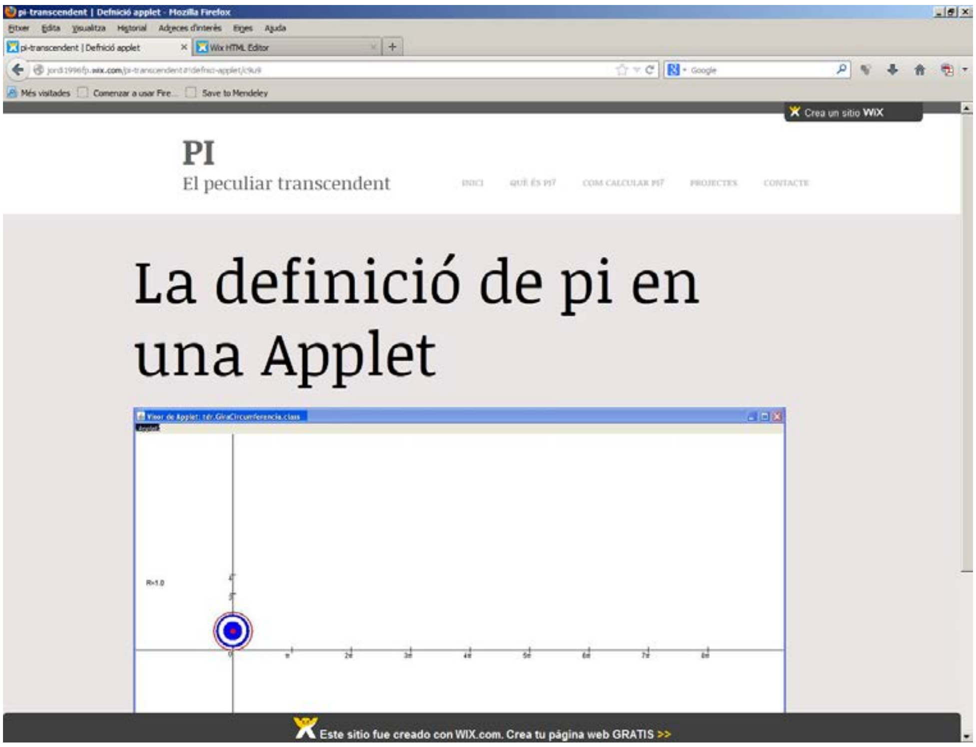


Figura 8.18. Pàgina de l'aplicació de la definició

D.2. Mètode de Montecarlo

Figura 8.19. Pàgina del mètode de Montecarlo

D.3. Mètode de Buffon

Figura 8.20. Pàgina del mètode de Buffon

D.4. Mètode de Newton-Raphson

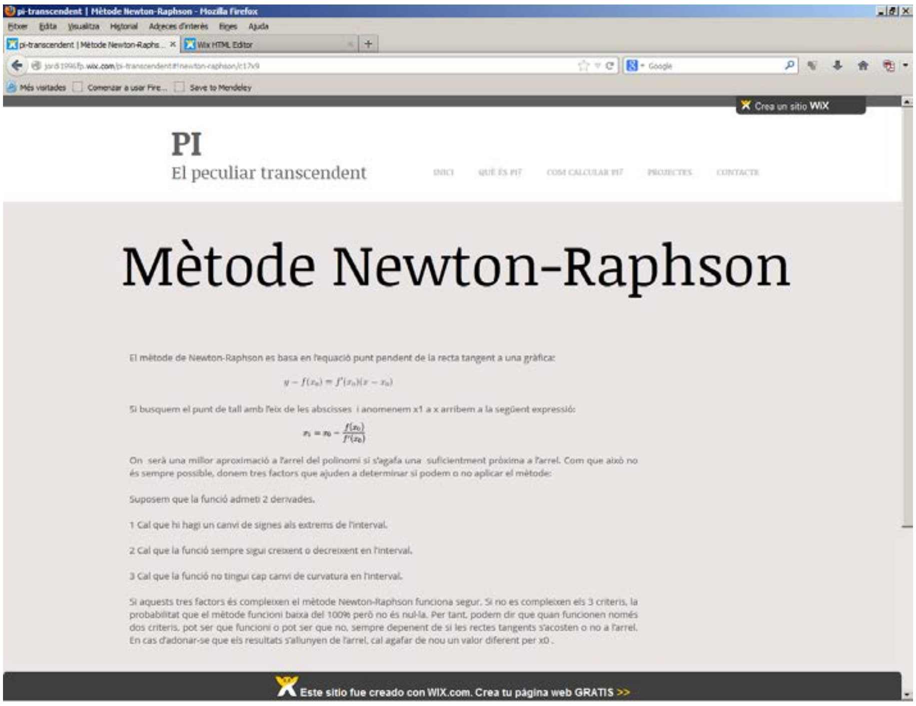


Figura 8.21. Pàgina del mètode de Newton Raphson

D.5. Aplicació per al mètode de Leibniz

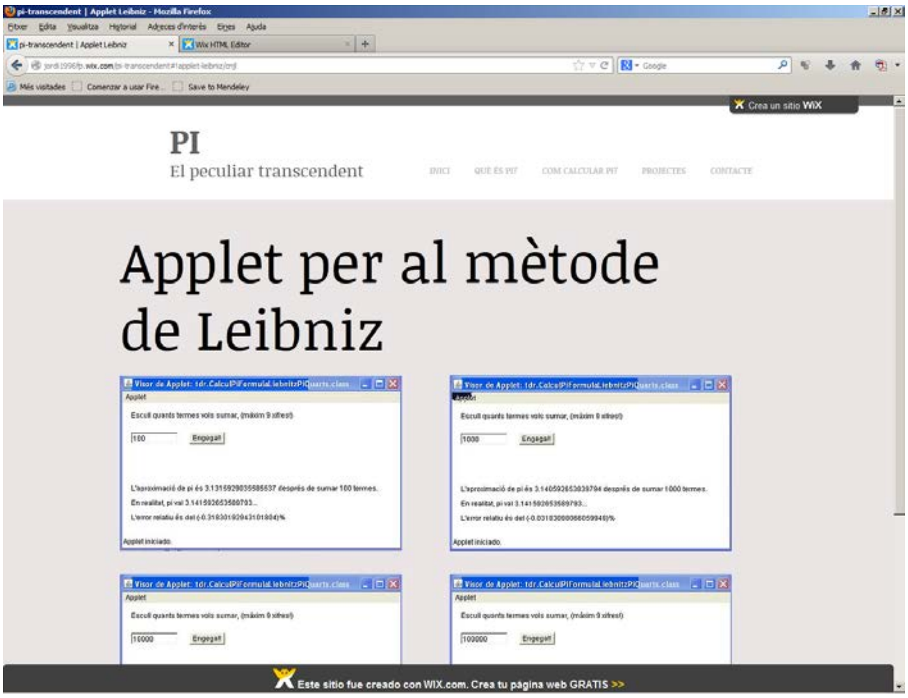


Figura 8.22. Pàgina de l'aplicació de Leibniz

D.6. Aplicació per al mètode d'Euler

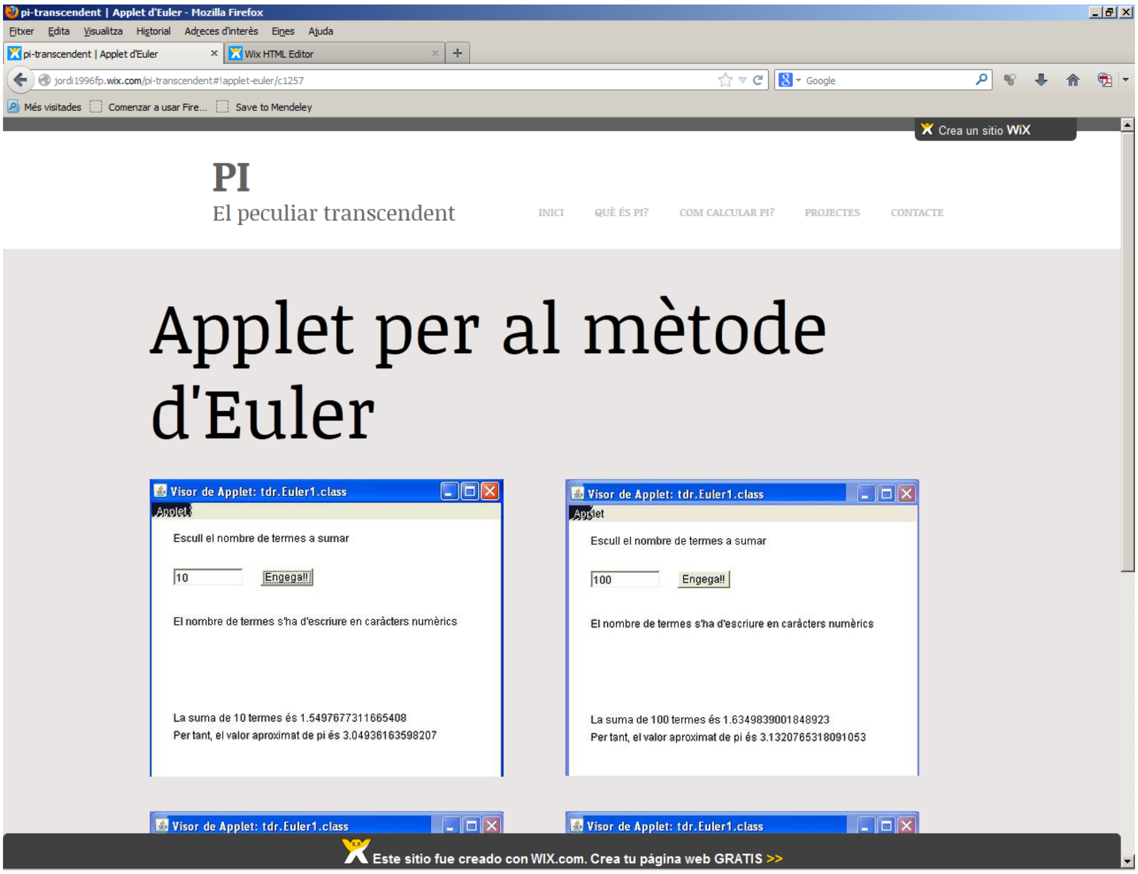


Figura 8.22. Pàgina de l'aplicació de Leibniz

8.1.5. Pàgina E. Contacte

En la pàgina de contacte (Figura 8.23.) el visitant pot comunicar-se via e-mail amb l'autor per fer-li preguntes, consultar-li algun dubte, demanar-li opinió...

La pàgina ha estat creada com a mitja divulgatiu però a més a més pot ser una eina per aprendre sobre pi per qualsevol visitant.

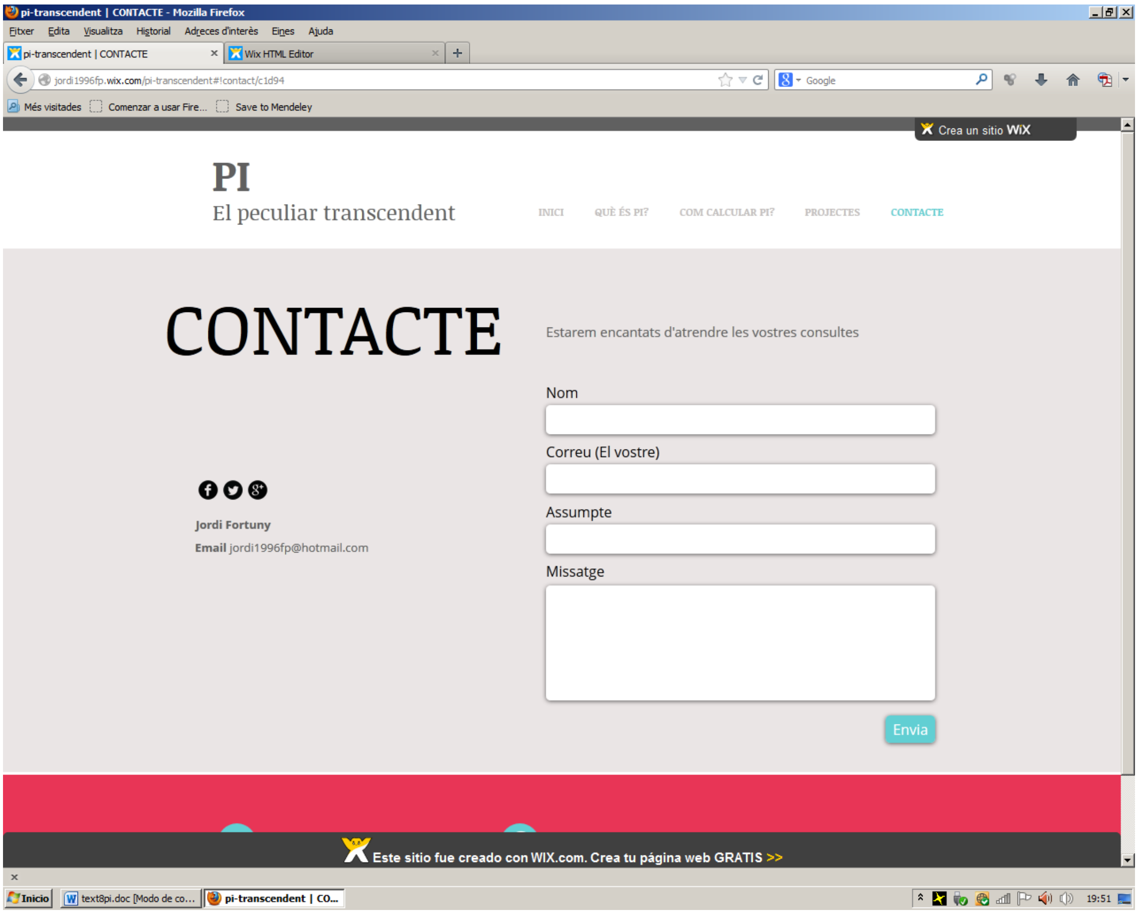


Figura 8.23. Pàgina de Contacte

8.2. Applets Java i Geogebra

Java és un llenguatge de programació que va ser creat l'any 1995 per Sun Microsystems. A més a més, Java també és una plataforma informàtica que gràcies a la tecnologia subjacent permet l'ús de programes que s'executin amb teclat i/o ratolí el uso com jocs, aplicacions de treball, aplicacions de banca... En l'actualitat, es calcula que Java s'executa en més de 850 milions d'ordinadors arreu del món. Però a més a més en milers de milions d'altres dispositius com mòbils o tauletes.

Moltes aplicacions i llocs del web no funcionen si el Java no està instal·lat en l'ordinador de l'usuari. Per aquest motiu les aplicacions creades en el present treball de recerca (Annex 1) han estat creades en Java, per la facilitat de qualsevol usuari. A més a més, Java presenta avantatges com la velocitat, viabilitat i seguretat.

El llenguatge de programació Java va ésser anomenat anteriorment OAK fins l'any 1995. Per poder treballar, crear i executar aplicacions amb Java, només cal tenir instal·lat el Java Runtime Environment (JRE) que s'instal·la automàticament en l'ordinador al baixar d'Internet l'última versió de Java.

El GeoGebra, per la seva banda, és un programa de matemàtica dinàmica, que permet crear aplicacions gratuïtament i treballar des dels nivells més bàsics de primària fins als més complexes d'anàlisi. Tals són les seves avantatges que ha rebut diversos premis com a programari educatiu a Europa i als Estats Units d'Amèrica.

Els punts clau que han fet del Geogebra una plataforma tan interessant són la connexió absoluta i dinàmica entre els gràfics, l'àlgebra i el full de càlcul, la facilitat de treball sobre la interfície, la capacitat de transformació en codi HTML i la diversitat d'idiomes en que existeix.

Tant Java com Geogebra permeten passar les seves aplicacions a codi HTML, cosa que en principi no hauria de portar cap problema per penjar-los a internet. De totes maneres, la plataforma wix.com a partir de la qual ha estat creada la pàgina web del present treball no permet penjar arxius creats en Java i/o en Geogebra (Figura 8.24) i per aquest motiu trobareu els seus codis font en els annexos i les imatges dels programes (que poden córrer al propi ordinador) en la mateixa pàgina web.

¿Como subir archivos .java?

Por darkmagician10 14 de junio de 2013

Categoría : Editor
Subcategoría: Media, Imágenes y Galerías
Nº del Tema:: 755102783

¿Exista alguna forma de subir archivos como .java o .class para hacer funcionar los applets que creo?

Elegido como mejor respuesta por el moderador

EQUIPO WIX

Respondido por Yonathan

Hola,

Esto no es posible por el momento.
Actualmente se pueden cargar los siguientes archivos en el editor HTML:

Imagenes: .jpg, .gif, .png & .jpg via Agregar -> Imagen -> Cambiar Imagen -> Cargar Imagen

Videos: via Youtube o Vimeo - Agregar -> Media -> Vi

Documentos:
Pptx o .ppt = Microsoft Office Power Point
Doc y .docx = Microsoft Office Word
xls o .xlsx = Microsoft Office Excel
Pdf = Adobe Acrobat format (documento portable)
odf = Documento abierto para aplicaciones Office

Saludos,

Yonathan - Wix Team

Figura 8.24. Llista d'arxius admesos per l'editor HTML5 Wix.

Font: http://es.IMx.com'support/forum'html51editor/media-imágenes-y-galerías

9. Conclusions

El número pi no és un número qualsevol. Era objectiu d'aquest treball investigar sobre la història de la recerca del valor de pi. Al llarg del treball el lector ha pogut seguir l'evolució des de les civilitzacions del principi de la Història (Egipte, Mesopotàmia...) fins a principis del segle XXI, i s'ha pogut observar que al llarg dels temps, ha canviat la manera de realitzar els càlculs i s'ha passat dels rudimentaris mètodes geomètrics d'Arquímedes, als mètodes informàtics que ens proporcionen bilions de decimals. Això demostra la importància de pi que ha atret a matemàtics de totes les èpoques.

Una pregunta al respecte podria ser per què avui en dia encara es segueixen calculant decimals si ja s'ha mencionat que amb 40 n'hi ha suficients pels càlculs científics i tècnics. Trobem la resposta d'aquesta pregunta en altres preguntes com ara si pi és un número normal, si existeix alguna fórmula que generi els seus decimals... o simplement per provar el funcionament d'un ordinador potent i ja de passada provar de batre algun rècord o tot just pel desig de saber. Aquest desig de saber ha fet que s'utilitzin eines diverses (trigonometria, càlcul diferencial, sèries infinites...) cada cop més potents i amb més aportació de decimals per iteració.

Pi, per tant, és un número que està relacionat amb molts àmbits de la matemàtica ja que s'utilitza en probabilitat, en trigonometria, en geometria... Aquest fet és el què precisament ha fet de pi un peculiar nombre transcendent i no un nombre més a la llista dels infinits.

En el present treball s'ha pogut aportar el mètode Newton-Raphson per trobar decimals de pi. S'ha trobat només 15 decimals perquè són els que permet el programa utilitzat però s'ha construït un mètode que a base d'iteracions aniria generant decimals correctes en un ordinador amb bases de dades més potents.

Un altre objectiu del treball era contribuir a la divulgació didàctica de pi, per la qual cosa s’ha confeccionat una pàgina web allotjada actualment en jordi1996fp.wix.com/pi-transcendent. La pàgina web s’ha estructurat en tres blocs principals que responen a les preguntes què és pi, com calcular pi i ens ensenya els diversos projectes creats.

El darrer objectiu era confeccionar programes informàtics que ens permetessin calcular decimals del número pi tot il·lustrant mètodes emprats al llarg de la història. Els programes realitzats es volien incorporar a la pàgina web com a applets, per tal que els visitants de la pàgina els poguessin executar. Malauradament, la plataforma wix. com no permet que les aplicacions fetes en llenguatge java siguin incorporades. Això pot ser degut a motius tecnològics (el llenguatge utilitzat per wix o el tipus de servidor emprat) o per motius de seguretat (els programes podrien contenir codi maliciós que afectés als ordinadors dels visitants).

Personalment, crec que l’objectiu d’acostar pi, i les matemàtiques en general, al públic s’ha complert correctament i des de l’organització del treball s’espera que el visitant pugui aprendre curiositats, característiques i la història de la famosa constant, a part de gaudir d’una bona estona dins la pagina web que transmet què és pi de manera divertida.

La realització del present treball de recerca, doncs, m’ha permès aprofundir i aprendre nous coneixements matemàtics, per exemple el mètode de Newton-Raphson; lligar l’evolució del número pi i les matemàtiques amb la història i finalment aprendre a programar amb llenguatge java. Tot això des d’una perspectiva sempre encarada cap al meu futur acadèmic que en un principi va dirigit cap a l’estudi de les Matemàtiques i la Física.

10. Referències

Referències generals

Dunham, W. (1996) El universo de las matemáticas. Un recorrido alfabético por los grandes teoremas, enigmas y controversias. Ediciones Pirámide S.A. Madrid

Navarro, J (2010) Los secretos del número pi. ¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo? RBA Coleccionables S.A. Madrid

Posemantier, A. & Lehmann, I. (2006) La proporción trascendental. La historia de pi, el número más misterioso de la historia. Ariel Madrid

Capítol 1

Vikipèdia. L'enciclopèdia lliure. Nombre pi.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Nombre_ π

Secció 3.2.1.

Vikipèdia. L'enciclopèdia lliure. Papir de Rhind.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Papir_de_Rhind

Secció 3.2.2

Wikipèdia. La enciclopedia libre. Matemática Babilónica.
http://es.wikipedia.org/wiki/Matemática_babilónica

Secció 3.2.3.

Instituto Gai Einai de cabalá. La historia de pi. Parte 1.
http://www.dimensiones.org/canales/vidmodrn/matematicas/estructu4.htm

Secció 3.3

Wikipedia. La enciclopedia libre. Arquímedes.
https://ca.wikipedia.org/wiki/Arquimedes

Secció 3.4.1.1

Slideshare. Matemáticas. China e India. Per Acsa Navarro.
http://www.slideshare.net/acsa/matematicas-china-e-india-presentation

Vikipèdia. L'enciclopèdia lliure. Aryabhata.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Aryabhata

Vikipèdia. L'enciclopèdia lliure. Brahmagupta.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

Secció 3.4.1.3.

Gresham College (1597). The story of pi.
http://www.gresham.ac.uk/lectures-and-events/the-story-of-pi

Vikipèdia. L'enciclopèdia lliure. François Viète
http://ca.wikipedia.org/wiki/François_Viète

Wikipedia. La enciclopedia libre. Fórmula de Viete.
http://es.wikipedia.org/wiki/Fórmula_de_Viète

Wikipedia. The Free Encyclopedia. Viète's Formula.
http://en.wikipedia.org/wiki/Viète's_formula

<u>Secció 3.4.2.1.</u>

The MacTutor History of Mathematics archive. John Wallis.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wallis.html

Wikipedia. La enciclopedia libre. Producto de Wallis
http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_de_Wallis

<u>Secció 3.4.2.2.</u>

Ken Ward's Mathematics Pages. Various Computing Pi Gregory Series.
http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/various/piGregory.htm

Wikipedia. La enciclopedia libre. Serie de Leibniz.
http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Leibniz

Wikipedia. The Free Encyclopedia. Leibniz formula for π
http://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_π

<u>Secció 3.4.3.4.</u>

Youtube. Broadcast yourself. Euler y el número pi per algodemates
http://www.youtube.com/watch?v=MlHe-VndI7s

The Geometry center. Center for the Computation and Visualitzation of Geometric Structures. Infinite expresions for pi.
http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/expresspi.html

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Identitat d'Euler.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Identitat_d'Euler

Wikipedia. La enciclopedia libre. Problema de Basilea.
http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Basilea

Secció 3.4.3.5.

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Srinivasa Ramanujan
http://ca.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan

Capítol 4.

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Conjunt.
https://ca.wikipedia.org/wiki/Conjunt

Secció 4.1.

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Georg Cantor.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. David Hilbert.
http://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Secció 4.2.

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Diagonalització de Cantor.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Diagonalització_de_Cantor

Wikipedia. La enciclopedia libre. Argumento de la diagonal de Cantor.
http://es.wikipedia.org/wiki/Argumento_de_la_diagonal_de_Cantor

Secció 4.3.

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Nombre transcendent.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Nombre_transcendent

Revista digital matemática, Educación e Internet Vol. 10, Nº 2, 2010. La desigualdad de Liouville.

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Joseph Liouville.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville

Disfruta las matemáticas. Números transcendentes.
http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-transcendentes.html

Wikipedia. The Free Encyclopedia. Liouville number.
http://en.wikipedia.org/wiki/Liouville_number

UNAM. Centro de Ciencias Matemáticas.
http://www.matmor.unam.mx/~euba/irra.pdf

Secció 4.4.

Tito Eliatron Dixit. Dos demostraciones de la irracionalidad de pi.
http://eliatron.blogspot.com.es/2013/07/irracionalidad-de-pi.html

Youtube. Broadcast yourself. Proof tha pi is irrational per Mind Your Decisions.
http://www.youtube.com/watch?v=PgKmstECld0

Mind Your Decisions. Proving Pi is Irrational: a step-by-step guide to a “simple proof” requiring only high school calculus.
http://mindyourdecisions.com/blog/2013/11/08/proving-pi-is-irrational-a-step-by-step-guide-to-a-simple-proof/#.Uukiwj15MYM

Capítol 5

Práctica IV Métodos de Newton-Raphson y de la secante, para encontrar las raíces de una función.

Secció 6. 1.

The Pi-Search page.
http://www.angio.net/pi/

Viquipèdia. L’enciclopèdia lliure. Punt de Freynman.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Punt_de_Feynman

Público.es La "computadora humana" bate el récord mundial con 150.000 dígitos del número Pi.
http://www.publico.es/agencias/efe/40720/la-computadora-humana-bate-el-record-mundial-con-150-000-digitos-del-numero-pi

Gaussianos. Porque todo tiende a infinito. Nuevo récord de dígitos de Pi de memoria.
http://gaussianos.com/nuevo-record-de-digitos-de-pi-de-memoria/

El rincon del Infeniero. Curiosidades del número pi. (Pàgina web esborrada)
http://www.elrincondelingeniero.com/Curiosidades+del+número+pi

Wikipedia. The Free Encyclopedia. Número normal.
http://es.wikipedia.org/wiki/Número_normal

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Constants de Champernowne.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Constants_de_Champernowne

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Nombre normal.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Nombre_normal

Secció 6.2.

Wikipedia. La enciclopedia libre. Cadaeic Cadenza.
http://es.wikipedia.org/wiki/Cadaeic_Cadenza

Errantes en gris. Para los que no están perdidos. Número pi; reglas mnemotécnicas
http://errantesengris.wordpress.com/2010/11/01/numero-pi-reglas-mnemotecnicas/

IES Ezdquiel González (Segovia). Departamento de matemáticas. El número pi.
http://www.iesezequielgonzalez.com/matematicas/pi.htm

Secció 8.2.

Java. Qué es java?
http://www.java.com/es/download/faq/whatis_java.xml

Geogebra. What is Geogebra?
http://www.geogebra.org/cms/ca/info/13-what-is-geogebra

Capítol 10

ICOMOS Costa Rica. Guia de citación de acuerdo al estilo Chicago.
http://www.icomoscr.org/m/investigacion/%5BMETODOS%5DBibliografiaSistemaChicago.pdf

Annexos

Annex 1. Codi font dels programes en Java

Annex 1.1. Desenvolupament de la circumferència (GiraCircumferencia.java)

```
package tdr;

import java.awt.*;
import java.awt.event.*;
import java.applet.*;

public class GiraCircumferencia extends Applet implements MouseListener,
MouseMotionListener{

	int ample, alt;
	int radi=35;
	int desplaça=0;
	Double maxim=0D;
	int mx, my;
	boolean clickCentre=false;
	boolean permesdesplaçar=false;
	boolean permespujar=true;
	boolean control=true;
	double desplaçapassat;

	Double pi=180+35*Math.PI;
	Double pi2=180+35*2*Math.PI;
	Double pi3=180+35*3*Math.PI;
	Double pi4=180+35*4*Math.PI;
	Double pi5=180+35*5*Math.PI;
	Double pi6=180+35*6*Math.PI;
	Double pi7=180+35*7*Math.PI;
	Double pi8=180+35*8*Math.PI;

	double radiescrit=1.0;
	double r=35;

	Image backbuffer;
	Graphics g;
	Image img;


	public void init() {
```

```
            ample = getSize().width;
            alt = getSize().height;
            mx = ample/ 2;
            my = alt / 2 ;
            setBackground(Color.white);

            backbuffer = createImage( ample, alt );
        g = backbuffer.getGraphics();
            img = getImage(getDocumentBase(), "fondo.gif");
        g.setColor( Color.white );

        addMouseListener (this);
        addMouseMotionListener (this);

    }

    public void paint(Graphics gReal){

            update (gReal);
    }

    public void update(Graphics gReal){

            g.drawImage( img, 0, 0, this );
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            dibuixaGraficInicial(g);
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            dibuixaCircumferencia(g);
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            pintaLinia (g);
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            pintaArc (g);
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            //calculRadiescrit(radi);
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            pintaString (g);
            gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

            System.out.println(radi + " " + r + " " + radiescrit);
    }
```

```
public void mouseDragged(MouseEvent e) {


        mx=e.getX();
        my=e.getY();
        showStatus("El ratolí està a (" + (mx-180) + ", " + (400-my) + ")");
        repaint();
        e.consume();

        if(clickCentre){

                maxim= 2*Math.PI*radi;

                if(permespujar){

                        control=true;
                        radi=400-my;

                        if((mx>185)||(mx<175)){
                                permespujar=false;
                                permesdesplaçar=true;
                        }

                        if (my>400){
                                radi=0;
                        }

                        if (my<260){
                                radi=140;
                        }
                        }




                if (permesdesplaçar){

                        control=false;
                        desplaça=mx-180;
                        desplaçapassat=desplaça;



                        if(mx>maxim+180){
                                desplaça= maxim.intValue();
                                desplaçapassat = maxim;
                        }

                        if (mx<180){
```

```
                    desplaça=0;
                    desplaçapassat=0;
                    permespujar=true;
                    permesdesplaçar=false;

                }

            }


            repaint();
            e.consume();
        }

    }


    public void mouseMoved(MouseEvent e) {


        mx=e.getX();
        my=e.getY();
        //showStatus("El ratolí està a (" + (mx-180) + ", " + (400-my)+ ")");
        //repaint();
        //e.consume();

    }


    public void mouseClicked(MouseEvent e) {


    }


    public void mouseEntered(MouseEvent e) {

    }


    public void mouseExited(MouseEvent e) {

    }




    public void mousePressed(MouseEvent e) {
```

```
		if ((mx>175+desplaça) && (mx<185+desplaça)&& (my<405-radi)
&&(my>395-radi)){

			clickCentre=true;
			permesdesplaçar=true;
			permespujar=true;
		}
		else{
			clickCentre=false;

		}

	}

	public void mouseReleased(MouseEvent e) {


		clickCentre=false;


	}

	public void dibuixaGraficInicial(Graphics g){



		g.setColor(Color.black);
		g.drawLine(180, 0, 180, 600);
		g.drawLine(0, 400, 1200, 400);
		g.drawLine(175, 365, 185, 365);
		g.drawLine(175, 330, 185, 330);
		g.drawLine(175, 295, 185, 295);
		g.drawLine(175, 260, 185, 260);
		g.drawString("0", 172, 412);
		g.drawString("1", 172, 377);
		g.drawString("2", 172, 342);
		g.drawString("3", 172, 307);
		g.drawString("4", 172, 272);

		g.drawLine(pi.intValue(), 395 ,pi.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi2.intValue(), 395 ,pi2.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi3.intValue(), 395 ,pi3.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi4.intValue(), 395 ,pi4.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi5.intValue(), 395 ,pi5.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi6.intValue(), 395 ,pi6.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi7.intValue(), 395 ,pi7.intValue(), 405);
		g.drawLine(pi8.intValue(), 395 ,pi8.intValue(), 405);
```

```
                g.drawString("π", pi.intValue()-12, 415);
                g.drawString("2π", pi2.intValue()-12, 415);
                g.drawString("3π", pi3.intValue()-12, 415);
                g.drawString("4π", pi4.intValue()-12, 415);
                g.drawString("5π", pi5.intValue()-12, 415);
                g.drawString("6π", pi6.intValue()-12, 415);
                g.drawString("7π", pi7.intValue()-12, 415);
                g.drawString("8π", pi8.intValue()-12, 415);
        }

        public void dibuixaCircumferencia (Graphics g){

                g.drawOval(180-radi+desplaça, 400-(2*radi), 2*radi, 2*radi);

                g.drawOval(180+(radi/8)-radi+desplaça, 400-(2*radi)+(radi/8), 7*radi/4,
7*radi/4);
                g.setColor(Color.blue);
                g.fillOval(180+(radi/8)-radi+desplaça, 400-(2*radi)+(radi/8), 7*radi/4,
7*radi/4);

                g.drawOval(180+(2*radi/8)-radi+desplaça, 400-(2*radi)+(2*radi/8),
6*radi/4, 6*radi/4);
                g.setColor(Color.white);
                g.fillOval(180+(2*radi/8)-radi+desplaça, 400-(2*radi)+(2*radi/8),
6*radi/4, 6*radi/4);

                g.drawOval(180+(4*radi/8)-radi+desplaça, 400-(2*radi)+(4*radi/8),
4*radi/4, 4*radi/4);
                g.setColor(Color.blue);
                g.fillOval(180+(4*radi/8)-radi+desplaça, 400-(2*radi)+(4*radi/8),
4*radi/4, 4*radi/4);


                g.drawOval(175+desplaça,395-radi,10,10);
                g.setColor(Color.red);
                g.fillOval(175+desplaça,395-radi,10,10);
        }

        public void pintaLinia (Graphics g){

                g.setColor(Color.red);
                g.drawRect(180, 399, desplaça, 2);
        }

        public void pintaArc(Graphics g){

                g.setColor(Color.red);

                if (control){
```

```
                    g.drawArc(180-radi+desplaça, 400-(2*radi), 2*radi, 2*radi, 270,
360);
                    g.drawArc(180-1-radi+desplaça, 400-(2*radi)-1, 2*radi+2,
2*radi+2,270,360);

            }

            else{

                    g.drawArc(180-radi+desplaça, 400-(2*radi), 2*radi, 2*radi, 270,
360-desplaça*360/maxim.intValue());
                    g.drawArc(180-1-radi+desplaça, 400-(2*radi)-1, 2*radi+2,
2*radi+2,270,360-desplaça*360/maxim.intValue());

            }
    }

    public void pintaString(Graphics g){

            g.setColor(Color.BLACK);

            double radipassat = radi;
            double radiescrit = radipassat/35;

            double desplaçaescrit = desplaçapassat/35 ;

            if(permespujar){
                    g.drawString("R=" + radiescrit, 20 , 350-2*radi);
            }
            if (permesdesplaçar){

                    g.drawString("C = " + desplaçaescrit , desplaça + 160, 430);

            }


    }

}
```

Annex 1.2. Càlcul d'arrel de 3 per Arquímedes (Arrel3.java)

```
package tdr;

public class Arrel3 {

	public static void main(String[] args) {

		int max_i = 37;
		int i =3;
		double num;
		double num1=2.0;
		double num2=1.0;
		double den;
		double den1=1;
		double den2=1;
		double arrel;
		int k;


		while(i<max_i){

			if  (i - 2*(i/2)== 0){
				k=1;
			}
			else k=2;

			num=k*num1+num2;
			num2=num1;
			num1=num;

			den=k*den1+den2;
			den2=den1;
			den1=den;

			arrel =num/den;

			int numo = (int) num;
			int deno = (int) den;

			System.out.println ( i + " -- " + numo + "/"+ deno + " = " + arrel);
			i++;
		}

	}

}
```

Annex 1.3. Càlcul de pi mitjançant el sumatori infinit de Leibniz (Leibnizpiquarts.java)

```
package tdr;

import java.applet.Applet;
import java.awt.Button;
import java.awt.Graphics;
import java.awt.TextField;
import java.awt.event.ActionEvent;
import java.awt.event.ActionListener;
import java.awt.*;

public class CalculPiFormulaLiebnitzPiQuarts extends Applet implements
ActionListener {

            double pi = 0;
            double y = 1;

            int termes = 0;
            int termes2 = 0;
            int cnt = 0;
            boolean comença = false;

            TextField escrit;
                 Button okBoto;

                public void init(){

                        setLayout (null);

                        escrit = new TextField ("", 14);
                        okBoto = new Button("Engega!!");


                   escrit.setBounds(15, 50, 80, 20);
                        okBoto.setBounds(115, 50, 60, 20);


                   add(escrit);
                        add(okBoto);

                        okBoto.addActionListener(this);

                }
```

```
public void paint(Graphics g){

        g.drawString("Escull quants termes vols sumar, (màxim 9
        xifres!)", 15, 25);

try{

        termes = Integer.parseInt(escrit.getText());
        termes2=termes*2;

        if (termes>0){
                comença= true;
        }
        else{
                comença=false;
                g.drawString("Escriu un nombre positiu!", 15,
                125);
        }
}

catch(NumberFormatException ex){
        g.drawString("El número de termes ha de ser positiu i s'ha
        d'escriure en caràcters numèrics", 15, 100);
}

if (comença){

        for(double x=1; x < termes2; x+=2) {


      pi = pi + (y/x);
      y = -y;


    }
                g.drawString("L'aproximació de pi és " + 4*pi + "
                després de sumar " + termes + " termes.", 15, 150);
                g.drawString("En realitat, pi val " + Math.PI  +
                "...", 15 , 175);
                g.drawString("L'error relatiu és del (" + (4*pi-
                Math.PI)*100/Math.PI  + ")%", 15 , 200);




}
}
```

```
        public void actionPerformed(ActionEvent e) {

            if(e.getSource()==okBoto){
                termes = 0;
                termes2= 0;
                y=1;
                pi=0;
                repaint();

            }

        }

}
```

Annex 1.4. Càlcul de pi mitjançant el sumatori infinit d’Euler (euler.java)

```
package tdr;

import java.awt.*;
import java.awt.event.*;
import java.applet.*;

import javax.swing.JOptionPane;

public class Euler1 extends Applet implements MouseListener, MouseMotionListener,
ActionListener{

        int alt;
        int ample;
        int mx, my;
        int termes;
        boolean error = true;
        boolean error2 = true;
        double valor =0D;

        TextField escrit;
        Button okBoto;

        boolean botoapretat = false;

        Image backbuffer;
        Graphics g;
        Image img;

        public void init(){

                setLayout (null);

                ample=  getSize().width;
                alt = getSize().height;

                backbuffer = createImage( ample, alt );
           g = backbuffer.getGraphics();
                img = getImage(getDocumentBase(), "fondo.gif");
                mx = ample/ 2;
                my = alt / 2 ;
                escrit = new TextField ("", 14);
                okBoto = new Button("Engega!!");

                escrit.setBounds(25, 55, 80, 20);
                okBoto.setBounds(125, 55, 60, 20);
```

```
        add(escrit);
        add(okBoto);

        okBoto.addActionListener(this);

        addMouseListener(this);
        addMouseMotionListener(this);


}

public void paint(Graphics gReal){

        update (gReal);
}

public void update(Graphics gReal){

                g.drawImage( img, 0, 0, this );

                g.setColor(Color.black);
                g.drawString("Escull el nombre de termes a sumar", 25, 25);

                try{

                        termes = Integer.parseInt(escrit.getText());

                        if (termes <= 0){


                                g.drawString("El nombre de termes ha de ser
                                positiu", 25, 120 );
                        }
                        else{
                        }
                }
                catch(NumberFormatException ex){

                        g.drawString("El nombre de termes s'ha d'escriure en
                        caràcters numèrics", 25, 120 );
                }

        for (double i=1; i<=termes; i++){

                double t= 1/(i*i);
                valor = valor + t;
                t=0;
        }
```

```
        g.drawString("La suma de " + termes + " termes és " + valor, 25, 230 );
        g.drawString("Per tant, el valor aproximat de pi és " + Math.sqrt(6*valor)
        , 25, 250 );


        gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

    }

    public void mouseEntered(MouseEvent e) {

        showStatus("portem " + termes + " termes i el valor és " + valor );

    public void mouseExited(MouseEvent e) {

    }

    public void mouseClicked(MouseEvent e) {

    }

    public void mousePressed(MouseEvent e) {

    }

    public void mouseReleased(MouseEvent e) {

    }

    public void mouseMoved(MouseEvent e) {

    }

    public void mouseDragged(MouseEvent e) {

    }

    public void actionPerformed(ActionEvent e) {

        if(e.getSource()==okBoto){
            valor = 0;
            repaint();

        }

    }

}
```

Annex 1.5. Càlcul de pi mitjançant el mètode de Newton-Raphson

(IFuncio.java)

```
package tdr;

public interface IFuncio {

	double eval(double x);

}
```

(UnaFuncio.java)

```
package tdr;

public abstract class UnaFuncio implements IFuncio {

	public double eval (double x) {
		return x;

	}

}
```

(NewtonRaphson.java)

```
package tdr;

public class NewtonRaphson {

	public double raiz(IFuncio f, IFuncio df, double x, double e, double n){

		double r = Double.NaN;
		int k = 0;
		while(Math.abs(f.eval(x))>e && k<n ){
			x=x-f.eval(x)/df.eval(x);
			k=k+1;
			System.out.println(x + " , " + k);
		}
		if(k<n)r=x;
		return r;

	}

}
```

(NewtonRaphsonTest.java)

```
package tdr;

public class NewtonRaphsonTest {


	public static void main (String[]args){

		IFuncio f =new UnaFuncio(){

			@Override
			public double eval(double x) {

				return Math.sin(x) ;
			}
	};

		IFuncio df =new UnaFuncio(){

			@Override
			public double eval(double x) {

				return Math.cos(x);
			}
	};

	NewtonRaphson nr = new NewtonRaphson();
	System.out.println(nr.raiz(f, df, 3, 1e-15, 200));
	}

}

	}

}
```

Annex 1.6. Càlcul de pi mitjançant el mètode de Buffon (Buffonfacil.java)

```
package tdr;

import java.applet.Applet;
import java.awt.Button;
import java.awt.Color;
import java.awt.Graphics;
import java.awt.Image;
import java.awt.TextField;
import java.awt.event.ActionEvent;
import java.awt.event.ActionListener;

public class PiBuffonFacil extends Applet implements ActionListener{

	Image backbuffer;
	Graphics g;
	Image img;
	int alt;
	int ample;
	int mx, my;
	int tirades;
	boolean comença = false;
	int toca;
	int aigua;

	TextField escrit;
	Button okBoto;

	public void init(){

		setLayout (null);

		ample=  getSize().width;
		alt = getSize().height;

		backbuffer = createImage( ample, alt );
    g = backbuffer.getGraphics();
		img = getImage(getDocumentBase(), "fondo.gif");
		mx = ample/ 2;
		my = alt / 2 ;
		escrit = new TextField ("", 14);
		okBoto = new Button("Engega!!");

		escrit.setBounds(15, 65, 80, 20);
		okBoto.setBounds(115, 65, 60, 20);
```

```
        add(escrit);
        add(okBoto);

        okBoto.addActionListener(this);

    }

    public void paint(Graphics gReal){

        update (gReal);
    }

    public void update(Graphics gReal){

        g.drawImage( img, 0, 0, this );

        ample=  getSize().width;
        alt = getSize().height;

    try{

            tirades = Integer.parseInt(escrit.getText());

            if (tirades>0){
                comença= true;
            }
            else{
                comença=false;
            }
        }

        catch(NumberFormatException ex){
            g.drawString("Escriu el nombre de tirades a realitzar. Fes-ho en
caracters numèrics!", 15, 35);
        }

        dibuixaLinies(g);



        if (comença){

        dibuixaAgulla(g);
        gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

        }

        dibuixaLinies(g);
```

```
        gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );
}

public void dibuixaLinies(Graphics g){


        for ( int i=200; i<=600; i=i+40){

        g.drawLine(40, i, 560, i);

        }

        g.drawLine(40, 200, 40, 600);
        g.drawLine(560, 200, 560, 600);

}

public void dibuixaAgulla(Graphics g){

        for(int i=0; i < tirades; i++){

                double xcdg = (Math.random()*(560-40))+40;
                int x= (int)xcdg;
                double ycdg = (Math.random()*(600-200))+200;
                int y= (int) ycdg;
                double x2r = (Math.random()*((xcdg+20)-(xcdg-20)))+xcdg-20;
                int x2 = (int) x2r;
                double y2r = Math.sqrt(400-Math.pow(x2r-xcdg, 2))+ycdg;
                int y2 = (int) y2r;

                double x1r = xcdg-(x2r-xcdg);
                double y1r = ycdg-(y2r-ycdg);
                int x1= (int) x1r;
                int y1= (int) y1r;

                g.setColor(Color.blue);
                g.drawLine( x2, y2, x1,y1);

                g.setColor(Color.white);
                g.fillRect(0, 200, 40, 401);
                g.fillRect(561,200,40,401);
                g.fillRect(0, 160, 600, 40);
                g.fillRect(0, 601, 600, 40);

                if(((y2r>=240)&& (y1r<240))||((y2r>=280)&&
                (y1r<=280))||((y2r>=320)&& (y1r<=320))||((y2r>=360)&&
                (y1r<=360))||((y2r>=400)&& (y1r<=400))||((y2r>=440)&&
                (y1r<=440))||((y2r>=480)&& (y1r<=480))||((y2r>=520)&&
```

```
                    (y1r<=520))||((y2r>=560)&& (y1r<=560))){
                            toca++;
                    }
                    else{
                            aigua++;
                    }

                    if(((x2r<=50)||(x2r>=550)||(x1r<=50)||(x1r>=550))&&(toca!=0)){
                            toca--;
                            aigua++;
                    }




            }

            double tiradespassat=tirades;
            double tocades = toca;

            g.setColor(Color.black);


            g.drawString("S'han tocat " + toca + " línies i s'han produit " + aigua + "
fallades" , 15, 640);
            g.drawString("Per tant, l'aproximació de pi és " +
(2*tiradespassat/tocades)  , 15, 660);


    }


    public void actionPerformed(ActionEvent e) {

            if(e.getSource()==okBoto){

                    toca=0;
                    aigua=0;


                    repaint();

    }
    }

}
```

Annex 1.7. Càlcul de pi mitjançant el mètode de Montecarlo

(PiMontecarlo.java)

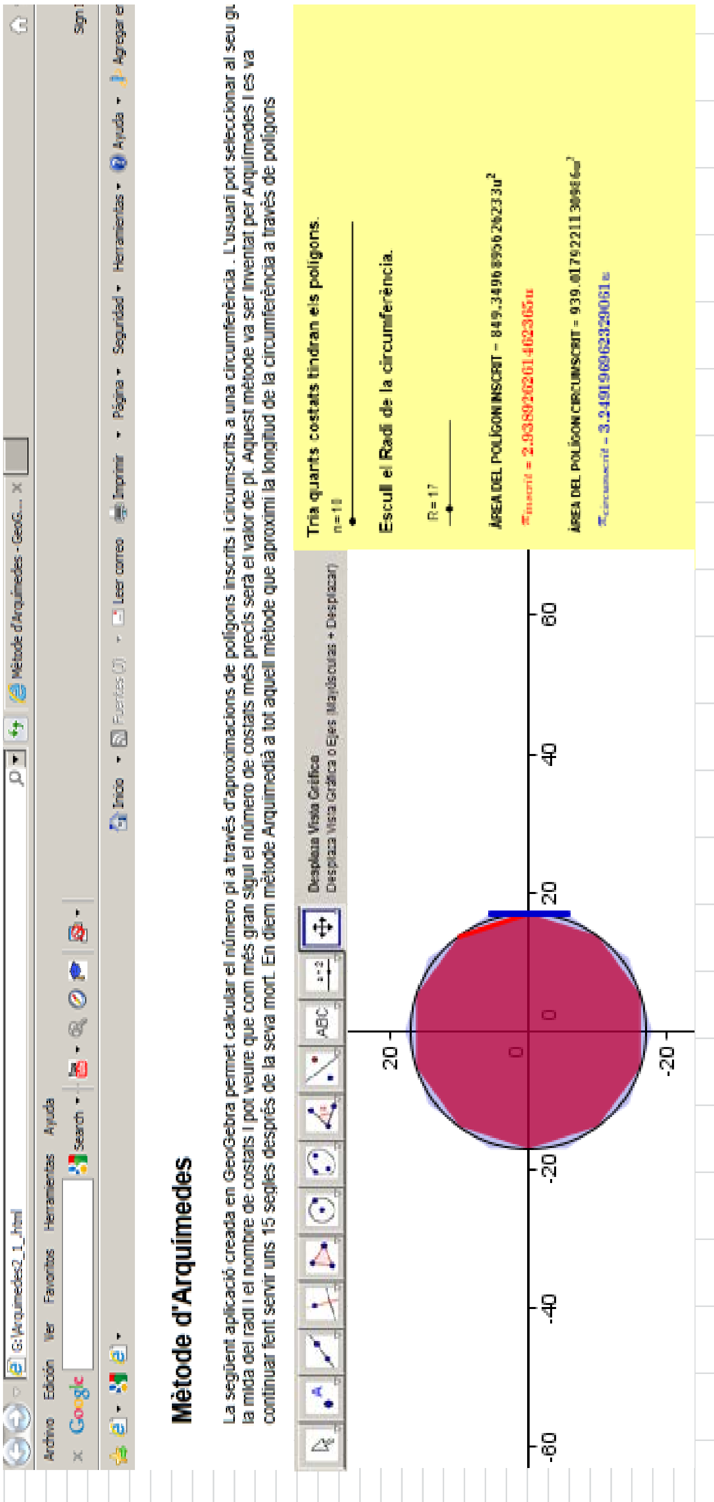
```
package tdr;

import java.applet.Applet;
import java.awt.Button;
import java.awt.Color;
import java.awt.Graphics;
import java.awt.Image;
import java.awt.TextField;
import java.awt.event.ActionEvent;
import java.awt.event.ActionListener;

public class PiMontecarlo extends Applet implements ActionListener {

        int dins = 0;
        int fora = 0;
        int punts=0;
        TextField escrit;
        Button okBoto;
        boolean comença = false;

        int ample;
        int alt;

        Image backbuffer;
        Graphics g;
        Image img;

        public void init(){

                setLayout (null);

                ample = getSize().width;
                alt = getSize().height;
                backbuffer = createImage( ample, alt );
           g = backbuffer.getGraphics();
                img = getImage(getDocumentBase(), "fondo.gif");
           g.setColor( Color.black );

                escrit = new TextField ("", 14);
                okBoto = new Button("Engega!!");


           escrit.setBounds(25, 35, 80, 20);
```

```
            okBoto.setBounds(125, 35, 60, 20);


        add(escrit);
            add(okBoto);

            okBoto.addActionListener(this);
    }

    public void paint(Graphics gReal){

            update (gReal);
    }

    public void update(Graphics gReal){

        g.setColor( Color.black );

            g.drawImage( img, 0, 0, this );

            g.drawRect(100, 100, 200, 200);

            g.drawOval(100, 100, 200, 200);

            g.drawString("Quants punts vols dibuixar?", 25, 25);

            try{

                punts = Integer.parseInt(escrit.getText());

                if (punts!=0){
                    comença= true;
                }
                else{
                    comença=false;
                }
            }

            catch(NumberFormatException ex){
                g.drawString("El número de costats s'ha d'escriure en caràcters
numèrics", 25, 75);
            }



            if (comença){

                for (int i=0; i<punts; i++){
```

```
			g.setColor(Color.red);

			int x = (int)(Math.random()*(300-100))+100;
			int y = (int)(Math.random()*(300-100))+100;

			if ((x-200)*(x-200) + (y-200)*(y-200)<= 10000){
				dins ++;
			}
			else{
				fora++;
			}

			g.drawOval(x,y,2,2);

		}
	}
	if (dins ==1 && fora ==1){
		g.drawString("Dins la circumferència ha caigut 1 punt, fora d'ella
		1 punt", 25, 325);
	}
	else{
		if (dins == 1){
			g.drawString("Dins la circumferència ha caigut 1 punt,
			fora d'ella "+ fora + " punts", 25, 325);
		}
		else{
			if (fora==1){
				g.drawString("Dins la circumferència han caigut "
				+ dins + " punts, fora d'ella 1 punt", 25, 325);
			}
			else{

				g.drawString("Dins la circumferència han caigut "
+ dins + " punts, fora d'ella "+ fora + " punts", 25, 325);
			}
		}
	}

	double dintre=dins;
	double out=fora;


	g.drawString ("Per tant, l'aproximació de pi és: " +
(dintre*4/(dintre+out)) , 25, 350);

	g.setColor(Color.black);

	g.drawRect(100, 100, 200, 200);
```

```
        g.drawOval(100, 100, 200, 200);


        gReal.drawImage( backbuffer, 0, 0, this );

    }


    public void actionPerformed(ActionEvent e) {

        if(e.getSource()==okBoto){
            dins = 0;
            fora = 0;
            repaint();
        }
    }



}
```

Annex 2. Programa en Geogebra



Annex 3. El Cadaeic Cadenza

El següent annex consta de la recopilació del poema de Mike Keith, Cadaeic Cadenza per mitja del qual hom pot memoritzar 3835 decimals del número pi seguint la següent regla:

Cada paraula d'una lletra és un 1
Cada paraula de dos lletres és un 2
Cada paraula de tres lletres és un 3
...
Cada paraula que tingui 10 lletres és un 0
Cada paraula que tingui més de 10 lletres són 2 nombres seguits (per exemple una paraula de 12 lletres equivaldrà a un 1 i un 2).

El poema està caracteritzat per ser unificat per 13 poemes més un final que no tenen quasi relació entre ells. El primer i més llarg és una adaptació de *Near a Raven*, famós poema escrit per Edgar Alan Poe (1809-1849). El lector, no només pot gaudir d'una obra literària extensa en anglès sinó que a més a més pot aprendre's inconscientment o per voluntat els decimals del número pi.

CADAEIC CADENZA

MIKE KEITH

Recopilat per Euclides

One

A Poem

A Raven

Midnights so dreary, tired and weary,
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.
Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance - Lenore -
Is delighting, exciting...nevermore.

Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted),
And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided,
As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
A man is visiting, of age threescore."

Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly)
"Tell what source originates clamorous noise afore?
Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly?
Why, devil incarnate!--" Here completely unveiled I my antedoor--
Just darkness, I ascertained - nothing more.

While surrounded by darkness then, I persevered to clearly comprehend.
 I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my intellect said,
 (Desiring, imagining still) that perchance the apparition was uttering a whispered "Lenore".
  This only, as evermore.

Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,
 While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.
"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice."
 Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
  Perceiving: a "nevermore".

Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead.
 Repose, relief, cessation, or but more dreary 'nevermores'?"
The bird intruded thence - O, irritation ever since! -
 Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat not, therefore),
  And stated "nevermores".

Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed, "I seek intelligence;
 Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores'!"
"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a raven named?
 Actually maintain a surname, upon Pluvious seashore?
  I heard an oppressive "nevermore".

My sentiments extremely pained, to perceive an utterance so plain,
 Most interested, mystified, a meaning I hoped for.
"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser.
 Therefore, liberation I'll obtain, retreating heretofore -
  Eliminating all the 'nevermores' ".

Still, the detestable raven just remained, unmoving, on sculptured bust.
 Always saying "never" (by a red chamber's door).

A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!
    O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore.
        Still sitting, he recited "nevermores".

The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome.
    I meditated: "Might its utterances summarize of a calamity before?"
O, a sadness was manifest - a sorrowful cry of unrest;
    "O," I thought sincerely, "it's a melancholy great - furthermore,
        Removing doubt, this explains 'nevermores' ".

Seizing just that moment to sit - closely, carefully, advancing beside it,
    Sinking down, intrigued, where velvet cushion lay afore.
A creature, midnight-black, watched there - it studied my soul, unawares.
    Wherefore, explanations my insight entreated for.
        Silently, I pondered the "nevermores".

"Disentangle, nefarious bird! Disengage - I am disturbed!"
    Intently its eye burned, raising the cry within my core.
"That delectable Lenore - whose velvet pillow this was, heretofore,
    Departed thence, unsettling my consciousness therefore.
        She's returning - that maiden - aye, nevermore."

Since, to me, that thought was madness, I renounced continuing sadness.
    Continuing on, I soundly, adamantly forswore:
"Wretch," (addressing blackbird only) "fly swiftly - emancipate me!"
    "Respite, respite, detestable raven - and discharge me, I implore!"
        A ghostly answer of: "nevermore".

" 'Tis a prophet? Wraith? Strange devil? Or the ultimate evil?"
    "Answer, tempter-sent creature!", I inquired, like before.
"Forlorn, though firmly undaunted, with 'nevermores' quite indoctrinated,
    Is everything depressing, generating great sorrow evermore?
        I am subdued!", I then swore.

In answer, the raven turned - relentless distress it spurned.
"Comfort, surcease, quiet, silence!" - pleaded I for.
"Will my (abusive raven!) sorrows persist unabated?
Nevermore Lenore respondeth?", adamantly I encored.
The appeal was ignored.

"O, satanic inferno's denizen -- go!", I said boldly, standing then.
"Take henceforth loathsome "nevermores" - O, to an ugly Plutonian shore!
Let nary one expression, O bird, remain still here, replacing mirth.
Promptly leave and retreat!", I resolutely swore.
Blackbird's riposte: "nevermore".

So he sitteth, observing always, perching ominously on these doorways.
Squatting on the stony bust so untroubled, O therefore.
Suffering stark raven's conversings, so I am condemned, subserving,
To a nightmare cursed, containing miseries galore.
Thus henceforth, I'll rise (from a darkness, a grave) -- nevermore!

-- Allanpoe, E.

Two

Change

My customary bedtime reading book hastily shelved, I sat, bewildered, pondering Allanpoe's poetry.

"Something's wrong", I murmured. "Despite Ravenesque timbres, so mesmerizing (the echo

'nevermore
nevermore
nevermore
nevermore
nevermore
nevermore
...'

survives, for example), my intellect detects wrongful alteration. This imitation, simulated Raven!..."

I recognized large, arbitrary changes. "Odd", I thought. "Why?" To research, I headed downstairs, muttering softly, "Hmm".

I hastened below carefully, there revisiting my book room. Books inhabited each table, shelf, and nook. Taking Cambridge Literature Treasury and proceeding to "Poetry, Poe's", my fears - oh my God! - heightened. Sighting no Raven but The Dark Bird, severe distress arose. "Absolutely, The Raven is maimed!", I exclaimed. "How?!"

Immediately arriving upstairs, I posited a conspiracy: a literature alteration conspiracy. "Are," I did quietly question, "all writings changed?"

Three

Of Carrolls

Jabwocky

Slithy toves, borogove
  Gimbled there all out in strathwabe
Mimified and gyrified,
    A rath is outergrabe.

"Beware a scrunch, a scratch, stepson!
  Beware Jubjub, withstand a word!
Respect the Jabberwock and dread
    Manxomian songbird!"

He, sword off hand, placement maintained
  Thus to complete father's grand quest -
Then waited, vaunting showily
    His progenitor's crest.

Therewith three swords he animized,
  Before the creature, rumbling.
It was alive; its feelers straight
    Burbled while whiffling!

The vorpall sword o' vulcanite
  Smote - snicker! snacker! - artfully
A headless Wocky residue
    Yielded strength mournfully.

"Youth did it - O, praised fearlessness!"
He issued melodies, forthright.
"Death's strike! O, day! Strallough! Stralleigh!" -
A-chortling in delight.

Borogove, strange slithy troves,
A brilligtime quickstep
Mimsy creatures, gimblified,
Frolicked on a steppe.

Four

An Hypothesis

I exhausted Carroll's rewritten ode, Jabwocky, soliciting essential clues to fully explain my difficulty.

"A Heisenberg Twinge could have modified books' contents thusly, but (my dubious thinking declared) surely these mutations are willed. I could sit and research a quantity of poetry's excellent, famous passages, or try uncovering the structures."

I therefore chose to scrutinize the words, and deliberate. I pondered games of alphabets, verses, language, sentences, equations, words. Lifting feather and inking it, my quill carefully scribbled thus:

A few schemata involving linguistical play

Lipograms: Writing so a letter's missing
Haiku: An uncommon ode (poem) bearing eccentric metrification characteristics
A Cento: Quite strange poem; borrowed lines
Anagram: To turn an item (words) into a novel expression
Double-entendres: Words, dualistic sense
Palindrome: Forwards or backwards, words are not transformed ("Redraw, detooted warder!")
A pangram: An amazing sentence, using whole alphabet
Acrostic: Inspected vertically, letters spell additional statement
Mnemonic: Can remember a factoid using this device
Pun: Groaner ("Stop, pundit!")

Thus utilizing the plumelike pen, I hesitated.

"To cause these variations surely insinuates much diabolical, innovative ingenuity. My poetry's clearly overturned; I cannot, however, rationalize. The [repeating] diabolical, innovative ingenuity! Although most beguiled, actually I'm near exhaustion. I am defeated, quite defeated, and undone!", I yelled.

Truthfully, the eerie enigma was greatly intriguing. Reading afresh Raven's discourses, I considered many options - a palindrome, a mnemonic, a conundrum.

"Full of mysteries, these poems crave observant review," I announced. Thoughts involving rest stayed, however, slowly causing lethargy.

"Now," (quietly said) "this sojourner will seek serenity. To bring sleep, the Musical Anthology usually renders help." Turning to "Poetry, Anderson", thus emerged a remarkable poem suggesting Jon's musical group, Yes.

Five

Dreams

Many depths of accustomed
Workings controlled when dreams single electric life do touch
Assessing expression, future affection, ways yesterday
O, to yesterday
The day, a way, flying through someone
Controlled my reigning

Accepting evenings knowledge, a shout
To a revelation laid endings, talks by a flower
No yesterdays, heart faster alternate
Mutant leaves creativity
Of clay, understand doors reigning silhouette our skylines
A stone

Expression - a children's - and being
Discoursing in lands, not put movement
Of hate - all expression creativity
The queen, those
Thousand answers sights done, understood, to mean changed
Love daughters

Memory come between all my antics
Did splendour I tell, a confusion endlessly?
We quickly as turned understood
Seed on turned
Mountains flowering of my sunrise, forgotten valley

Reasons together

Oh, all hands when highest
Touching a future way there's thunderous oppression
Straining and work, a spirit's
To a winter
Will I be, I regaining, returning, to this woman?
Outbound corner

Not I, apart yesterdays
You controlled my relayers, runner. I remember
My endlessly quickly soft mover
Night, night, deliver
Proportion spread running down forgotten coloured day rebounds
Watch loneliness

Arose ways satisfied from round
Thoughts consider touch preacher nailed daughters, as turned
Political regaining clear flower expressed
Understand rearrange, we dancing
We a foundation, morning, endlessly morning, while
Encounters searching

Not understand, my awakening
Hurry shoot out to transformed mutant
Enemy son, when here dislocate
Recorded chasers to battleship
In charger white begun returning moment loneliness
Is not seemed

From relayer's silhouette charge
Liquid sweet girl disregard, conceived topographic endlessly
Strength mornings I consider the good; highest

  Splendour reasons silence
Watch one space season glider, I'll awaken
  Regaining together

  Silhouette amongst them, to lights
Stand more to stare, as watched begotten
There's to begin solid, I remember
  A madrigal; tell a marcher,
Touch wonder's hand, there's running my eclipses
  Somewhere accustomed

Returning,
  Awakens
    Awakens
      Awakens
        Awakens
To stories wonderous

Six

Cadaeics

Conundrums, conundrums, conundrums...nonsense! I needed some outdoor atmosphere. Taking Cambridge's Literature, I opened a door, waved my hand, commenced a promenade.

"I'm a Cadaeic!"

Huh?

"I'm a Cadaeic! I'm a real Cadaeic!", shouted an old woman.

Astonished, I took a step back.

"A veritable Cadaeic, old woman? Really?" Cadaeics' myths were numerous. A clique, a new mystic association, whose members had...power. An eerie power. So, I was now most curious. Still, staying calm, I placidly said, "Elucidate more, please."

"Cadaeics have," she murmured, "power. Do you?..."

"Yes, so I've intimated. Regardless, . . . Cadaeic? You apprehend this?" I said.

"Yes, sir. The true power lies greatly, heavily, within me."

"What," I softly inquired, "manner of power? A strength? telepathy? learning?"

"The power" (thusly continued that wizardly woman) "makes change in paralleled, tunneling universes. As I cultivate it, it is a powerful good, an element of great peace. Deplorably, he - Surta - uses it quite evilly, altering original Cadaeic intent."

"Changes? A Cadaeic scoundrel generating wild mutations? This, though intriguing, I cannot quite see. This humble spirit requires validation - your narrative produces numerous doubts!"

"My apology, oh sir - I'm utterly desperate. A Cadaeic normally avoids 'incapables', enjoying other Cadaeic contacts only. Can, stranger, you befriend me? Cadaeic existence - indeed, people's existence - demands prompt action."

Startled, I then asked, "What? A pedestrian incapable's worthless skill?"

"You, stranger, treasure the crucial analytic skills. Our people undervalue numerical ideas, preferring arcane, mystical, Cadaeified philosophy. Please help! Oh my Surta! O my Surta! Oh, lamentable Surta! O!"

I replied, "Yes, outlander, I'm available, amenable - also, somewhat numerical. Please, completely disclose:

When I am expected,
What assorted mathlike topics to review carefully,
plus
Where Surta's mysterious home is."

"Come, I recommend, before seven on tomorrow night (Michaelmas it is). Of a mathematic nature, review mensuration, infinite series, and trisection. Surta's shadowy home? Meet me. Cadaeic fortress awaits."

As my rendezvous was concluded, I meandered back, returning home.

"Quite impossible, what?", thought I. "An old Cadaeic, a bad Cadaeic...mythical powers subverted, indeed!" Regardless, curiosity still stayed. The woman's plea was serious, I concluded.

I desired an easement - perhaps more poetry. Opening Oxford's volume near "Poetry, Eliot", stanzas quite strange yet notorious filled my eyes. I saw Prufrock Lovesongs remarkably modified, thusly:

Seven

Prufrock

Let us depart then,
While eventide's withering skies threaten,
Impersonating the sufferers etherising upon pallets;
Together henceforth go, through these partially-unoccupied boulevards,
Muttering arguments like shards
About furtive nights amid threadbare hostels,
Discreet dialogues among oystershells,
Street complexes like dreary argument.
Its insidious regiment
Now leads to heavy questions . . .
Never inquire distinctly, 'wherefore?'
Directly go visit, herefore.

To an affair th' matriarchs sadly go
To talk touching MicAngelo.

Mist, cellophane breaths, rubbing on window latches,
A creamlike mist, rubbing, muzzling on window lattices
Soon lingered on watery apartments a curt instant,
Licked eventide's perimeter, tonguelike
(Partially discolored by fallen soot),
Vacillated a bit, making one extremely fast leap,
And, deeming that March night too remarkably quiet,
Stealthily curled womblike in quiescence, and fell perfectly asleep.

So, truly so, will exist a sundown

When amberlike fog permeates Cambridge Street
Above a door and a pane of doorglass;
Peaceful nighttimes darkening a boulevard,
Nighttimes whence faces verbalize to faces;
Nighttimes expedient for murders, or to intercommunicate;
Nighttime labors that create a query,
A query exalted, henceforth summarily despised.
Times touching you, touching anybody whom I appreciate.
Times involving several thousand hiatuses,
Forty illusions, forty revisions,
Finally settled by elegantly sipping green teas.

Matriarch speakers persevere [the discourses I forego],
A-talking about old MicAngelo.

So, cursedly, will remain eternity.
I can meditate: 'To aspire? Evermore aspire?'
Mornings for mounting stairs,
Brushing uncovered spot in nervous, swarthy hair -
[I think she'll certainly recognize a thinness!]
Stiff shirt, adamantly in place on chin,
Newly-purchased black tie, decorated using glamorous gold pin
[I conjecture he'll pronounce forthwith: 'Heavens! So frail! So thin!]
Should discreet adventures
Confound this earth?
Certainly eternity remains
To preside and deride, then turn around, reversing prior opinions.

Life advances, barely known -
The mornings, the bright middays, the nights of it.
My career is marked, poignantly, utilizing teaspoons;
I do know voices collapsing, sleepily collapsing, dying.
I do know the melodies emerging from the anterooms.

  Henceforth, what ought I do?

Full well I did notice those eyes, everyone's glaring stares -
So glaring, implying formulated phrases.
Afterward [quietly subdued] I, stick-pinned, embellish a wall;
Sit stuck, wriggling, alongside baroque designs.
Altogether hopelessly extinguished, wherefore should I assume?
Mournfully spitting lifetime's butt-ends [a dreary existence],
  What thoughts should thinkers think?

Truly known: discreet arms, jewelled arms,
Appendages slight and white and bare
[By th' lamplights, covered up by an hairy gossamer]
Is hyacinth what provokes memories,
Causes such reveries?
I loved graceful arms, lying across davenports or wrapping about nightgowns
  Should, henceforth, I assume?
  Moreover, what to presume?

. . . . .

The noiseless dusk falls on my narrow streets
When lonely fellows settle, smoking pipettes,
Sacredly communing, shirt to shirt . . .

Oh, I can envision being as an empty claw
Scuttling violently about seas' silent floors.

. . . . .

Thence unfolds an ominous property of the nighttime
Smoothed, having long hands,
Asleep . . . tired . . . lingering,

Easing comfortably beside you, while very serenely reposing beside me.
How, henceforth, after teapots, candies, ices,
Might lonely man's forgotten strength reenergize, and arise?
Every afternoon I've fasted and wept - cried, fasted.
Ofttimes I dreamed, then saw my head surrendered to Herod;
I never approached prophet status, lamentably.
Though greatness came, quickly greatness went.
Often I recognized eternity's hooded being, patiently biding, snickering.
Aftermath: fear perseveres.

So would it be valuable, valuable overall
Following saucers o' marmalades
Admixing porcelain and a talk among window shades?
Therefore, I can wonder, valuable indeed?
Alarmed by an evermore-present need
Pressing universes into mysterious balls
Slowly unraveling a disturbing, ultrameaningful difficulty.
I'll say: 'Hallelujah! Lazarus's return! I breathe, reanimate,
To entirely answer mankind's conundrums'
Afterward, if matriarchs, settling quietly upon pillows,
  Should derisively pronounce: 'I despise meanings
  My soul renounces all meanings.'

Would anything transpire worthwhile, everything appraised?
Mightn't a time symbolize 'worthwhile',
Following dreary sunsets, plain dooryards, shopping carts on street
O' the novels, after-lunch teas, lingering dresses -
Evermore a measured existence? -
It's a so-difficult mission, enduring this struggle!
If a candle revealed my innermost yearnings
Exposing skeletons upon vertical screens
If an oldish woman, settling cushions,
Discarding day's tattered, light-colored shawl, should aver:

'Worthwhile? I know no moments worthwhile,
Just shadowy, dreaded voids after while.'

. . . . .

I, too, am not William Shakspar's Hamlet - this I know, above a doubt.
Am one related lord, posing on the side
For acting very small acts or starting small episodes,
Most easy tool, Prince's attentive slave,
Am always ready, obedient, useful,
Politic, cautious, of a meticulous frame;
Extravagant also, a bit dense;
Many moments I've fitly enacted the classical Fools.

I'm old . . . exceedingly old . . .
Soon my trouser I desire rolled.

A procession of contemplation - which marmalade flavor: raspberry? peach?
I'll arouse up, and I will walk on Dartmouth Beach
To hear mermaids sing sublimely, and beseech.

I continue ignored, sorrowfully uninspired.

I have spied mermaid scales going fast underneath the waves,
Endlessly traversing an aquatic continent;
Wandering the high seas, capricious and content.

Thus we deliberate, oceanbound,
Looking for a harborside
Until mankind subsides.

Eight

The Readiness

Michaelmas. Waking up, I carefully pondered the baffling dilemma.

"Fact: vast changes unsettle alphabetic writings. Also, printed writings seem modified purposely (though possibly it's not so). A fact: this woman (Cadaeic?) I saw recently, before eventide, bravely spoke a fantastic tale. She spoke concerning change also, and insinuated I'm a relation amid these two!"

I swallowed a breakfasty meal heartily, then gingerly I approached downstairs' study for further linguistic review. I read poetry, employed statistics, parsed phrases. Near luncthime I modulated - as advised hitherto, I practiced mensuration, performed decimal expansion, and trisected triangles.

After my analytical labors, I read A Victorian Poetry Reader, The Book of Pastoral English Poets, Odes from Omar, Coleridge's Heroic Poem, and Pindar's Odes. "Still, I am not winning", I lamented.

I ruminated: "Is a chapter division's numbering important? Ignoring all elsewhere, I considered antepenultimate divisions. I succeeded there! Eureka! I codified a nice, simple formula which (I said to myself) "perfectly demonstrates the division's pattern. Some somewhat different rule appertains elsewhere, apparently."

Quickly I wondered: "Always this functions thus?" To see, I inspected longer antepenultimate pieces. Perfect agreement once again! No antecedent chapters functioned similarly, sadly.

I read poetry again, while hearkening to my clock - it was, I marked, dinnertime. Six literary booklets I collected (and, conjointly, a coat). On proceeding outwardly, the Cadaeic waited by a car.

"Quickly, neighbor, enter. Surta conspires - great danger awaits," she declared.

Instantly her vehicle (holding unlikely mankind-protecting partners!) did accelerate and commenced travelling toward...somewhere. Driving purposely, my companion's overall conduct was very somber. "Serious, is it?" I wondered.

To speak seemed an inapt stratagem, therefore nobody talked. "I think" (internally I said) "of a poem's subtleties I'll reconsider." Thence appeared, transmuted, one quatrain that that eminent Persian - the tent-maker Omar - fashioned (as translated by Edward FitzGerald), hence:

Nine

O Ruby Yachts

Poetic Muses alongside th' Bough
An oversupply o' Wine, possessed somehow
Thou with me treading Eden's Wilderness
Through all it seems a Paradise enough!

[Stanza twelve;
Translator: FitzGerald, Ed A.
3rd ed., 1872]

Ten

Clue

Completing poetical perusals, I restudied algorithms. "Perhaps," I speculated, "some counting scheme?" The car, I noticed, had just paused near downtown's Market Court. I then noted the miniature passageway which resided presently before us.

"Thence, neighbor, Surta awaits."

A mysterious passageway stood there, entreating. Entering, I discovered Surta's friend there.

"Promptly, proceed. Veritably, Surta's inventing monstrous calamity."

I walked the stone cobbles that covered the street and surveyed some ornamented doors. My guide uttered a word (magic?). Instantly I confronted an interior apartment - perhaps malevolent Surta's room?

I then discovered innumerable mystifying artifacts therein:

A "Mr. Sardonicus" poster (Wm. Castler's remarkable film)

Six heptagons containing six inscribed circles, drawn carefully below a weird finite-product formula

A large drawing showing horizontal striations with an underlined "sin (x^{12})"

Several computer prints involving triangles and angles

Accurately-reproduced picture of the Woolsthorp Manor House (Grantham, England)

Pieces for a strange "Snakes and Adder" children's game.

So I observed hastily. "Yes, I am close," I said. "Perhaps I am incredibly close now to resolving my dilemmas." I perceived a bookcase in shadow. I repeated, "Surely, I am close!". Infamous Surta's shelves (all in a grand display) contained:

A Cambridge Treasury
Poe's A Poem
Herbert's Dune, Wyndham's Triffids
Ad Infinitum & Beyond, Buzz Lite
Stories, Fitzgerald
Novels, Richardson
Aliceland, Lewis Carroll
Poems of England, Wordsworth
Oulipo Anthology, Perec

Several of my undeniable favorites I spotted among Surta's shelves. Undoubtedly worthy choices!

In my wandering I discovered Shakspar's Comedies & Dramas. "Hamletian inspection beckoneth!", I joked. In restless expectancy, I located the final paragraphs.

Eleven

William Shakespeare's tragedy King Claudius

[Fifth (terminal) Act]

. . . . So it is - deceased tanners a-populate the earth in multitudes. Wherefore? The skins are callously tanned! Here's, gravely, th' skull - O! - of a celebrated confrere.

HAM. Whose? Prithee, interpret.

A CLOWN. A mad fellow, foolhardy whoreson. Methinks he oftentimes frolicked i' your path.

HAML. Ay, I frequently experience jovial company.

CLOWN. A pestilence 'pon his head, stupid boaster! Doubtlessly oftentimes did 'e brag: 'I am Yorick, emperor o' merrymakers!'

HAM. Behold, [Thrusting skullbone heavenward.]
wretched Yorick! Truly, Horaitio, truly I adored him - excellent banterer and a great wellspring o' happiness. Thereon flourished a visage merry, a mouth pleasurably kissed, Horaitio. Where, I beseech, O head, are Yorick's verses, gibes, gambols? Sounds o' laughter tha' caus'd a table great gaiety? Quite chapfallen? Perceive, Horaitio, this deathmask expression: merriment, merriment, evermore merriment!

Horaitio, three troubling questions confound me.

HOR. Disclose, prithee.

HAM. Thus look'd Cesar, as entombed?

HOR. Yes, I reckon.

HAM. Would great Alexander's remains offend this nostril similarly? O!   [Releases skull.]

HOR. Quite severely, assuredly.

HAM. So, is Caesar a dirtlike clump that remedies winecasks' splits?

HOR. No, I say, no! Blasphemy, sir!

HAM. Understand, Horaitio - visualize mankind's grave process. Originally, Caesar dies. In subsequent time, Caesar resides under th' earth. Thereupon, celebrated Caesar's decomposed. Forthwith, 'e makes loam. Consider - a loam, a plaste! Might this overlord's granules patch Horaitio's beer-barrel?

A Caesar now becomes a sediment
Henceforth to toughen graveyard's fundament;
Although a sovereign overrules with ire,
Henceforth, heartless, resembles th' ashy mire!

[Retreats]

Twelve

The Meeting

Carefully replacing Shakspar's Dramas in its shelf, I immediately heard a distant tapping. Anticipating Surta's arrival, instead I saw my Cadaeic guide.

"Directly Surta will arrive," she whispered. "Already I have ascertained several things. Every literary change that's happened is, indeed, caused by Surta's latest spell. I (actually, we, since I am quite unanalytical) must determine what change he's effected exactly, and what (if anything) will reverse it. But silence! - Surta arrives."

Fleeing quickly, my guide disappeared within an adjacent chamber. Evidently she maintained faith in my abilities - a faith that I didn't necessarily share. Casting my gaze near Surta's artifacts, I reassessed the clues present there. Each literary piece that I had studied flashed in my mind. Heuristic and mathematical schemes flickered in my brain.

I was interrupted by a stranger's entrance.

"Greetings, stranger. I knew that she was disreputable, but I never imagined she'd enlist an incapable..." Clutching a paper sheaf, the middle-aged man snarled the final epithet. Being sure he was Surta, I (surprising myself) gave a defiant reply.

"Capable, I'd say," I replied with sarcasm. "Huge literary changes were the first clue that the universe was amiss. Desecrated literature isn't a small matter - thus, I'll rectify the injustice," I declared.

"Fie!" yelled Surta, suddenly. "But a single flaw in my skills has permitted this discernment. Fully the entire universe (a single being excepted, apparently) can't even perceive the literary changes."

Determining that I was near the right track, I pressed ahead.

"Certainly, indeed, several rules determine each printed text's structure. Chapters besides the antepenultimate use a certain rule, and the antepenultimate uses a different rule." Haughtily I said this, as if sure, even as uncertainty nagged at my brain.

Clearly my statement had an effect, as Surta was visibly surprised.

"B'Gah's skull!" he hissed. "Getting a bit near the truth there, but still... I can't be hindered by a mere lucky guesser. Even with luck, my secret will remain hidden!"

Jauntily, he remarked, "The literary effect can be reversed - in quite an elegant way, I must say - albeit certainly this will never happen. But simply write a text using precisely the same rules as mine and all will be mended. Hilarity ensues at the mere idea - what a time-waster! Ha, ha, ha!", he cackled.

"Decidedly predictable, isn't he?", I said internally. "A big speech just like the classic villain's I'm-invincible-thus-I-might-as-well-tell-the-secret spiel!" I had, it seemed, learned all I needed, except the exact rules determining a text's structure. Given that I had already divined the antepenultimate-chapter rule, I was certain that, given time, I'd determine the remaining rules.

At that instant, my Cadaeic friend returned. Flashing me a significant glance, she entered in earnest debate with Surta. I sensed her cue and hurried exitward, stealthily grabbing the Shakspar's Dramas as I left.

Cursedly, I remembered that we had entered rather magically. I didn't have any idea where the exit was! I thus walked the hallways until I saw an uninhabited chamber. Camping there, I again began intense study, this time primarily in each text's early chapters.

Giving A Midsummer Night's Dream, the first play in the Shakspar reader, intense scrutiny, I suddenly saw it! "Electrifying!", I exclaimed, as further study verified, at least tentatively, my belief.

A rumbling in the nearby wall suddenly caught my ear. Jackhammers! "Egress must be nearby," I said quietly. Hunting left and right at eye level I quickly spied a crack. Behind it I saw the passageway we had walked a few minutes earlier. Jumping back, I ran firmly at the wall.

Gingerly picking myself up after my inelegant exit, I hurried back in expectancy, desiring the mathematical treatises residing in my study. During the next several days (as Surta's writing rules were quite difficult, the task advanced quite gradually) I crafted a slim treatise - this very tale - that fulfilled the necessary requirements. I finished it five days after Michaelmas at three A.M.

Descending my stairs, I apprehensively checked my Cambridge Treasury. Despite my best attempts, mutated texts still met my eyes!

Evidently, I was still missing a key clue. I was sure that my main rule (describing all chapters but the antepenultimate) was right - it was very bizarre, thus it must be right, I argued. But a new idea appeared: as the antepenultimate rule I had crafted was relatively simple, perhaps there was an extra rule that applied as well?

Carl Sandburg's Grass inhabited the antepenultimate chapter in the Cambridge Treasury. Just its few lines did I see, and study, thus:

Thirteen

Sandburg's Grass

Caskets piled beneath Austerlitzes, Dresdens
As, silently uplifting, blanketing, grass
  Disguises it all, it all.

And as fierce Gettysburg witnesses,
Evident at Champagne, Falklands, Jutland,
I am grassiness, settling ever thus.
But ten years passeth, and my guests plead:
  Fury, military struggles, did mutilate us?
  Ere yesterday, hatefulness prevailed?

  Cut my grass.
  Evergreen grasses mend.

Finale

The Victor

Though concise, the aforecited lines revealed new formal properties. Thus I came to discover a new symbolic paradigm. "It's perfection now!", my conviction did maintain.

My book requested alteration - not, luckily, broad revision. Following numerous fixes, my opus was perfect! "Good show!" I exulted cheerfully. My intellect philosophized: "Is textual change fully mended?" I examined Cambridge's Anthology.

"Yes! Reality returns!"

. . . . .

Was this saga real? Apocryphal? Not believable? Perhaps. Regardless, Cadaeic foes remain, perchance to reciprocate or obliterate.

I celebrate.

I end, whispering ad infinitums.

THE END