Cinema i matemàtiques

Llums, càmera, acció! Com la ficció fa reals les matemàtiques

Euclides

"Amb el cinema veiem les matemàtiques relacionades amb l'aventura, la intriga, l'amor, el riure, tot allò que no s'espera de les matemàtiques"

José María Sorando Muzás

AGRAÏMENTS

Voldria començar aquest Treball de Recerca agraint la col·laboració de totes aquelles persones que m'han ajudat a fer possible la seva elaboració, començant per la meva tutora guia Virgínia Sanagustín, per tot el temps que ha dedicat a ajudar-me i guiar-me.

Voldria agrair a Raül Vallès Pardell per haver-me ajudat a l'hora d'obtenir alguns dels films que apareixen en el Treball; aquesta ajuda ha estat indispensable per poder realitzar la recerca.

Vull agrair també a Carles Ezquerra García per facilitar-me recursos bibliogràfics de gran ajuda per orientar-me en la investigació.

Donar les gràcies a José María Sorando per la seva disponibilitat al llarg de tot el procés de redacció del treball, la seva accessibilitat a l'hora d'entrevistar-nos i els múltiples recursos bibliogràfics i webgràfics, que han estat de gran ajuda.

Finalment, agrair a la meva família pel seu suport incondicional.

RESUMEN

Partiendo de un interés previo por las matemáticas, el objetivo principal de este trabajo es estudiar si el cine puede ser usado como elemento didáctico en las clases de matemáticas de secundaria y bachillerato y en caso de ser así, estudiar cómo puede ser llevado a la práctica.

Para realizar la investigación se ha seguido una metodología concreta. En primer lugar, un marco teórico consistente en la visualización de todas las películas seleccionadas y la síntesis de sus respectivas escenas de interés, siempre con la finalidad de extraer sus contenidos matemáticos. En segundo lugar, un marco práctico donde hago uso de las escenas como elemento motivador y didáctico.

Los resultados de la investigación son que el cine puede ser usado como elemento didáctico útil en las clases de matemáticas de secundaria y bachillerato a través de experiencias didácticas, algunas de ellas de concursos matemáticos, realizadas a partir de escenas específicas de las cintas. Cabe mencionar también que he constatado que muchas de las películas presentan otros elementos didácticos de gran utilidad para otras asignaturas.

Finalmente, ha quedado demostrada la potencial utilidad del cine en las clases de matemáticas de secundaria y bachillerato, dado el sinfín de temas que aportan las películas seleccionadas, objeto de estudio de este trabajo de investigación.

Palabras clave: matemáticas, cine, escena, experiencia didáctica, educación.

ABSTRACT

Based on a previous interest in mathematics, the main objective of this work is to study whether cinema can be used as a didactic element in compulsory secondary education and baccalaureate classes and, if so, to study how it can be put into practice.

In order to carry out the research, a specific methodology has been followed. First of all, a theoretical framework consisting of the visualization of all the selected films and the synthesis of their respective scenes of interest, always with the aim of extracting their mathematical contents. Secondly, a practical framework where I make use of scenes as a motivating and didactic element.

The results of the research are that cinema can be used as a useful didactic element in compulsory secondary education and baccalaureate mathematics classes through didactic experiences, some of them mathematical contests, made from specific scenes of the films. It is also worth mentioning that I have found that many of the films present other didactic elements that are very useful for other subjects.

Finally, the potential usefulness of cinema in secondary and baccalaureate mathematics classes has been demonstrated, given the endless topics provided by the selected films, the object of study of this research work.

Keywords: mathematics, cinema, scene, didactic experience, education.

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

En aquest treball de recerca s'han analitzat vint-i-quatre pel·lícules potencialment útils en l'àmbit acadèmic matemàtic, perquè contenen escenes que poden ser presentades al grup classe a través d'experiències didàctiques.

A l'hora d'escollir el tema sobre què versaria el Treball de Recerca el meu interès es va focalitzar en les matemàtiques, àrea per la qual sempre he mostrat interès. És cert que, tenint en compte el nivell acadèmic on em trobo, no tinc la capacitat de comprendre aspectes de la matèria a nivell avançat, però a mesura que progresso en els meus estudis la meva formació respecte d'aquesta disciplina creix, al mateix temps que el meu interès per les aplicacions que les matemàtiques tenen en la vida quotidiana i el rerefons històric que contenen. Ha estat en l'àmbit familiar, a banda de l'acadèmic, des d'on se m'ha atansat a les matemàtiques, podent veure de primera mà l'essència d'aquestes, gràcies al pare, professor de matemàtiques, i a amistats de la família que s'hi dediquen.

Els objectius principals del meu Treball de Recerca són:

a) Determinar les referències matemàtiques de cada pel·lícula analitzada.
b) Esbrinar si aquestes referències tenen o no relació amb les matemàtiques que s'estudien a l'educació secundària i Batxillerat.
c) Avaluar la fidelitat amb què es tracten tant els temes matemàtics com la biografia de matemàtics reconeguts.
d) Establir la relació que tenen els continguts matemàtics que apareixen en la filmografia analitzada amb les qüestions plantejades en concursos matemàtics com ara les proves Cangur de la Societat Catalana de Matemàtiques, el concurs de primavera de la Universitat Complutense de Madrid i amb les proves PAU de Catalunya.
e) Estudiar quines escenes podrien servir com a element motivador en les classes de matemàtiques i construir-ne experiències didàctiques relacionades.

Podem resumir-los en les preguntes següents:

a) Es pot utilitzar el cinema com a element didàctic útil en les classes de matemàtiques de secundària i batxillerat?
b) En cas de ser així, com podem portar-ho a la pràctica?

El tipus d'estudi ha estat observacional-descriptiu, essent aquest un treball d'objectiu social donat que busca, mitjançant experiències didàctiques d'escenes cinematogràfiques, consolidar els coneixements dels alumnes de secundària i batxillerat respecte de les matemàtiques a través del cinema. El Treball de Recerca que presento a continuació consta de dues parts, en primer lloc un marc teòric consistent en la visualització i redacció de les escenes de les pel·lícules i en algun cas la lectura de les obres literàries que les han inspirat, per extreure'n els continguts matemàtics. Posteriorment, un marc pràctic on tractaré d'usar la filmografia matemàtica com a element motivador a la part que didàctic a l'aula mitjançant experiències didàctiques.

Considero que la rellevància del meu Treball de Recerca passa per ser crític amb els recursos filmogràfics relacionats amb les matemàtiques dels que disposo, uns recursos no molt accessibles i escassos, alhora que és indispensable identificar-los com a possible element motivador en les classes de matemàtiques de l'ESO i del Batxillerat.

Aquest TDR pot ser una eina per a qui vulgui introduir el cinema en les seves classes.

1. CONTEXTUALITZACIÓ

A dia d'avui vivim en un món on la tecnologia és a l'ordre del dia, i aquesta ens permet, entre d'altres, fer-ne ús en l'àmbit educatiu. Tot i això, sovint s'opta per usar únicament mètodes tradicionals, refusant una complementarietat que de ben segur seria favorable tant per l'alumnat com pels docents. Pel que fa a la utilització de la cinematografia en un grup classe, a Espanya tenim tres grans referents. Aquests són: José María Sorando Muzás, Alfonso Jesús Población Sáez i Pablo Beltrán Pellicer. Tots tres, des de diversos enfocaments, han buscat aplicacions didàctiques del cinema en l'àmbit educatiu.

Alfonso Jesús Población Sáez, a través de llibres, articles i organització de cicles cinematogràfics ha tractat d'apropar les matemàtiques a la realitat social quotidiana, tot defensant la idea de localitzar escenes que presentin algun aspecte motivador per a l'alumnat, a ser possible d'una manera diferent de l'emprada a l'assignatura, mostrant així als alumnes les aplicacions pràctiques que les matemàtiques tenen en la vida quotidiana, a banda d'indagar al mateix temps en la història de la matemàtica. Des d'un punt de vista educatiu opina que l'ideal seria visionar les pel·lícules al complet (encara que això precisa més temps del que dura una classe), tot coordinant-se amb altres matèries interessades a tractar temes presents en l'argument.

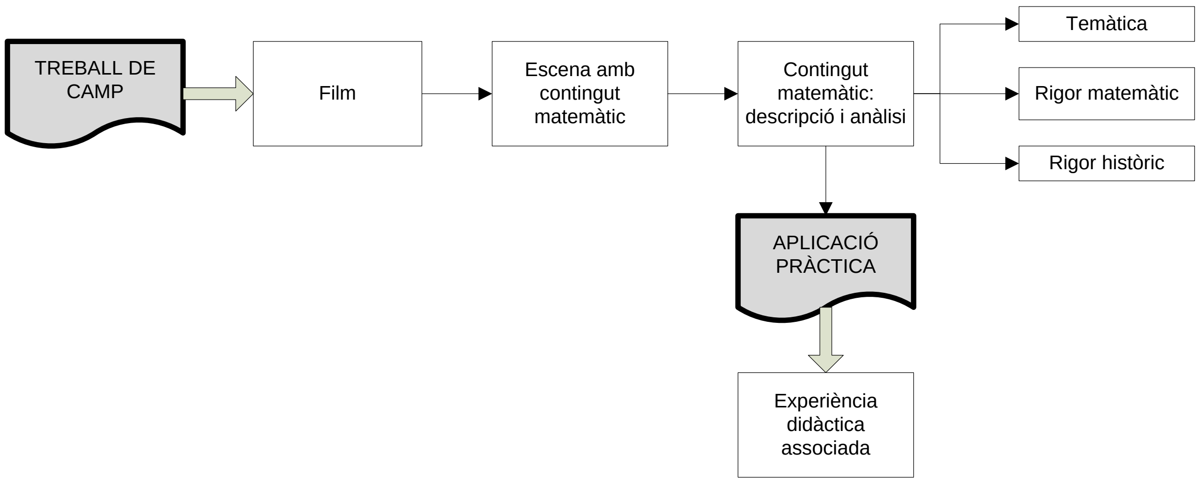
Però com que és alhora conscient del fet que les matemàtiques no són una disciplina molt abundant en el món filmogràfic, tracta de seleccionar escenes sobre les quals pot tenir un control en la duració, facilitant així la comprensió d'aquestes per part de l'alumnat.

Pel que respecta a José María Sorando, autor de diversos llibres on estableix relacions entre el cinema i les matemàtiques, considera que el cinema ha de sevir com a un recurs més en les classes d'aquesta matèria, amb l'objectiu d'escapar de la educació més clàssica, aportant a l'àmbit educatiu una contextualització d'allò que de bones a primeres els alumnes no considerarien matemàtic[1].

[1] Veure entrevista a José María Sorando Muzás en l'annex 1.

Per últim, Pablo Beltrán Pellicer, va redactar la seva tesi doctoral motivat per la utilització de les pel·lícules i sèries com a recurs didàctic, donada, tal i com ell defensa, la gran quantitat de contextos matemàtics que aquestes proporcionen de manera no didàctica ("perquè es conceben amb criteris d'entreteniment o culturals"), segons ell una característica que els atorga un valor especial respecte a la seva utilització com a recurs didàctic a l'aula.

2. TREBALL DE CAMP: DESCRIPCIÓ GENÈRICA



El treball de camp consta de tres passes: visualització del film, identificació de les escenes amb contingut matemàtic i per últim, descripció i anàlisi de les escenes escollides. Cal destacar que, en aquest Treball de Recerca, el treball de camp i l'aplicació pràctica són dos apartats convergents, perquè l'essència de l'aplicació pràctica implica fer una aplicació didàctica associada a les escenes prèviament escollides i analitzades. És per això que cada escena descrita té la seva experiència didàctica a continuació. Finalment, cal remarcar que a l'hora d'explicar les escenes amb contingut matemàtic m'he basat en tres ítems: temàtica, rigor matemàtic i rigor històric, que són al mateix temps els fonaments per una bona aplicació pràctica dels moments cinematogràfics que s'escullin. Voldria remarcar que el criteri que he seguit a l'hora d'agrupar les pel·lícules analitzades s'ha basat a prioritzar un element matemàtic principal, per tal de poder adscriure una cinta a un grup determinat.

El recorregut al llarg de les vint-i-quatre pel·lícules escollides és també un recorregut per la història de les matemàtiques, des de *Ágora* al segle cinquè fins al segle XXI.

Al mateix temps, en alguns films hi trobem altres aspectes que tenen ús didàctic, ja sigui en l'àmbit històric, com és el cas de *Aventuras de un matemático* amb la Segona Guerra Mundial, *Figuras ocultas* amb el racisme i el sexisme, *Moneyball* amb l'economia, *Rain Man* amb psicologia o *Cielo de octubre* que exalta els valors de la constància i l'esforç, convertint-la així en una pel·lícula que pot ser usada a tutoria.

- FILMOGRAFIA
  - ESTADÍSTICA I PROBABILITAT
    - Money ball: rompiendo las reglas
    - Rain Man
    - 21 Black Jack
    - The Pelayos
  - BIOGRAFIES DE MATEMÀTICS
    - Una mente maravillosa
    - El hombre que conocía el infinito
    - Ágora
    - Aventuras de un matemático
  - MATEMÀTICA APLICADA
    - Figuras ocultas
    - Midiendo el mundo
  - CRIPTOGRAFIA
    - Descifrando enigma
    - Descifrando el código
    - Windtalkers
  - MATEMÀTIQUES I FICCIÓ
    - La habitación de Fermat
    - La verdad oculta
    - El indomable Will Hunting
    - Moebius
    - x+y A brilliant young mind
    - Cielo de octubre
    - La fórmula preferida del profesor
    - Planilandia
    - Un don excepcional
    - El pequeño Tate
    - Los crímenes de Oxford

3. ANÀLISI DE LA FILMOGRAFIA I APLICACIÓ PRÀCTICA

3.1.Cinema i estadística i probabilitat

3.1.1 *Rain Man*

Charlie Babbitt és un jove i atractiu empresari que es dedica al sector de l'automòbil de luxe. L'empresa, però, s'atansa cada cop més a la bancarrota, però això semblarà poder solucionar-se quan el seu pare mori i se n'obri el testament. Per a sorpresa d'en Charlie, l'hereu és el seu germà Raymond, a qui no coneix gairebé. Ray pateix un trastorn autista i viu en un centre especialitzat. Charlie se l'endurà per tractar de recuperar el que li pertoca segons ell, però en aquest viatge s'atansarà molt al seu germà, qui gràcies a la seva facilitat per comptar cartes, li farà guanyar força diners jugant al blackjack.

3.1.1.1 Càlcul mental

Tal com es veu en l'escena del minut 00:59:35, en Raymond té una enorme capacitat per fer grans càlculs amb rapidesa i exactitud. En aquest fragment, un doctor li pregunta quant és 312 · 123, i Raymond respon ràpidament 38376, resultat correcte. Contesta de nou correctament quan se li pregunta pel resultat de multiplicar 4343 per 1234 i, finalment, aconsegueix amb gran destresa donar el resultat de l'arrel quadrada de 2130 amb tots els decimals que proporcionaria una calculadora científica (2130 és un nombre irracional). Però, poc després i havent-hi de pensar més del normal, Raymond demostra no saber quant li queda si d'un dòlar es gasta 50 centaus, donant com a resposta 70 centaus. A més, tampoc és capaç d'entendre el valor d'una barra de caramel o un cotxe esportiu quan a tots dos els assigna un valor de 100 dòlars.

- Experiència didàctica

El fragment ens brinda l'oportunitat de ser utilitzat didàcticament, en aquest cas treballant conceptes relacionats amb el càlcul mental.

a) Després d'haver vist el fragment, de senzilla comprensió, es podria plantejar la següent pregunta: tenir la capacitat de fer grans càlculs mentalment és sinònim d'un nivell alt de matemàtiques, per què?

b) Un cop fet el debat, és moment de fer una mica de recerca. Buscar almenys dos mètodes/sistemes de càlcul mental. Quins són? En què consisteixen? Quina utilitat tenen en el món actual? A tall d'exemple, com ens ho fem per multiplicar o dividir per potències de 10?

3.1.1.2 Probabilitat condicionada

És en el minut 1:22:23 quan veiem per primera vegada a Raymond comptar cartes d'una baralla de pòquer (baralla francesa; la mateixa que s'utilitza per jugar al blackjack[2]), i l'habilitat que té per fer-ho. El seu germà li pregunta quines cartes li queden i Raymond li ho respon exactament. Queda clar així que Raymond té capacitat per comptar cartes, o dit d'una altra manera, saber les que "no han sortit". Aquesta habilitat li serà de gran utilitat més endavant, quan visiti el casino

---

[2] L'objectiu d'aquest joc és obtenir amb les teves cartes un valor més pròxim a 21 que el que hagi obtingut el repartidor de cartes, la banca, i sense passar-se de 21.

amb el seu germà amb l'objectiu de guanyar diners. Abans d'anar-hi, però, en el minut 1:23:00 el seu germà li diu que *"cuando quedan muchos dieces y figuras es bueno para nosotros".* Tot seguit, li fa cinc cèntims de les regles no escrites d'un casino i de com i quant ha d'apostar, preparant-lo així per la seva visita a la ciutat del joc, Las Vegas. Serà allà on els dos germans faran fortuna gràcies a l'habilitat de Raymond, que es constatarà a partir del minut 1:26:00, quan Raymond demana carta tot i la negativa del seu germà, qui poc després s'adonarà que Raymond té raó i guanyaran. En les escenes que prossegueixen es veu com els dos germans continuen guanyant. Tot i això, i com era d'esperar, el casino comença a preguntar-se el perquè de la seva "bona sort". Però, els membres de seguretat del casino no aconsegueixen trobar una resposta concisa al perquè de la ratxa dels germans Babbitt, ja que pensen que és impossible comptar les cartes en una taula de sis jugadors, on hi ha sis baralles de 52 cartes cadascuna, a més a més no les toca, no fa grans apostes ni fa ús d'un ordinador. Poc després, i tot i estar guanyant de forma continuada, l'atenció d'en Raymond se centra en una "ruleta de la fortuna" en la que creu sortirà el número 20. El seu germà, confiat, fa una aposta de 3000 dòlars que resultarà ser una pèrdua de diners quan no surti el número esperat.

- Experiència didàctica

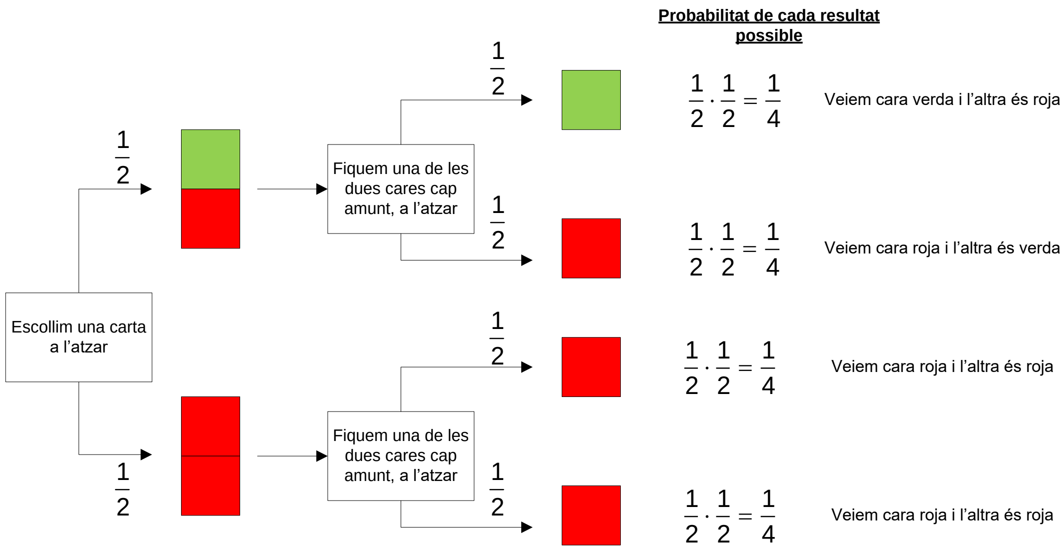
  Tot i ser força fictici, el fragment ens permet plantejar diverses qüestions.

a) Com que el concepte clau és la probabilitat condicionada, i el fet que l'aparició de certes cartes modifica la probabilitat de guanyar o perdre, en tant que la probabilitat que surtin les altres es veu alterada, es poden plantejar qüestions com les següents:

   Qüestió 1[3]) Tenim dues cartes: una amb les dues cares vermelles i l'altra amb una cara vermella i l'altra blava. N'escollim una a l'atzar, i la posem sobre la taula. Si la cara que veiem és vermella, quina és la probabilitat que l'altra cara d'aquella carta sigui també vermella?

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

✓ *Solució:*



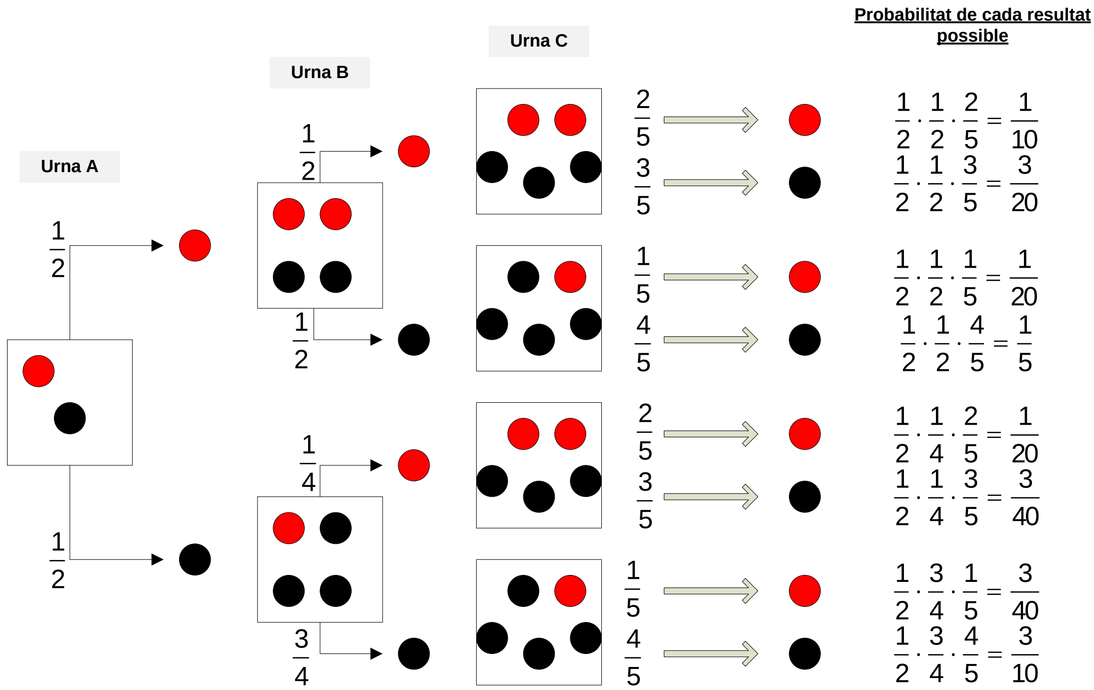
[3] X Concurso de Primavera de Matemáticas 2006, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 17.

La probabilitat demandada és: $p=\dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$

Qüestió 2[4]) En l'urna A tenim una bola vermella i una altra negra, en l'urna B tenim una bola vermella i dues negres i en l'urna C tenim una bola vermella i tres negres. Traiem a l'atzar una bola de l'urna A i la posem en la B; a continuació, extraiem a l'atzar una bola de l'urna B i la posem a la C. Per últim, extraiem a l'atzar una bola de l'urna C. Quina probabilitat hi ha que aquesta última bola sigui negra?

A) $\dfrac{13}{20}$ B) $\dfrac{27}{40}$ C) $\dfrac{7}{10}$ D) $\dfrac{29}{40}$ E) $\dfrac{3}{4}$

✓ *Solució:*



La probabilitat demandada és: $p=\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{40}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{29}{40}$

b) Raymond i el seu germà només juguen al blackjack, a excepció d'una vegada en que Ray, es deixa portar pels seus instints i considera que a la ruleta de la fortuna sortirà el nombre que ell creu, al que el seu germà, confiat, aposta. Per al jugador és més rendible jugar al blackjack o a la ruleta de la fortuna?
Per respondre has de saber que cada joc té un percentatge de retorn al jugador (RTP), que és el percentatge de diners gastats en un joc específic que serà retornat al jugador a llarg termini.

---

[4] XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas 2019, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 24.

Proposem completar la taula següent:

JOC	BLACKJACK	ESCURABUTXAQUES	RULETA FRANCESA	RULETA AMERICANA	PRIMITIVA
RTP					

3.1.2 *21 blackjack*

Ben Campbell és un jove i excel·lent estudiant de l'MIT[5] que ha aconseguit entrar a la facultat de medicina de Harvard, però necessita la Beca Robinson per tal de cobrir-ne les despeses. Hi ha molta competència per aconseguir-la, així que Ben s'unirà a un grup de joves, liderats pel seu professor de matemàtica avançada, per jugar al blackjack a Las Vegas i així poder guanyar suficients diners com per, si cal, costejar-se ell mateix els estudis.

3.1.2.1 Successió de Fibonacci

En l'escena del minut 00:10:49 podem veure com en el pastís, i tal com diu Cam, hi ha una successió de Fibonacci, on tal com matisa en Ben, hi falta el número 21. Això no és un error, ja que els punts suspensius que hi ha després del 13 indiquen els nombres que prossegueixen la sèrie, però en Ben considera la manca del nombre 21 un error tenint en compte que compleix vint-i-un anys. Tot i això podem observar que en el pastís hi ha 21 espelmes.

Figura 1. 21 blackjack: imatge del minut 00:10:41

[5] Massachusetts Institute of Technology.

- Experiència didàctica

La seqüència, o més ben dit la imatge, dona l'oportunitat de treballar un concepte força interessant, la successió de Fibonacci.

Qüestió[6]) En la successió de Fibonacci, que comença amb $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ i cada terme és la suma dels dos anteriors, quants termes tenen 2022 xifres?

A) 2 o 3 B) 4 o 5 C) 6 o 7 D) 8 o 9 E) 10 o més

✓ *Solució:*

Si observem els primers termes de la successió, n'hi ha 5 que tenen 2 xifres (13, 21, 34, 55 i 89), uns altres 5 que tenen 3 xifres (144, 233, 377, 610 i 987), però només n'hi ha 4 que tenen 4 xifres (1597, 2584, 4181 i 6765). La primera xifra dels termes que tenen un determinat nombre de xifres, suposant que hi hagi la màxima quantitat d'ells és, per ordre, 1, 2, 3, 5 i 8 o també, 1, 2, 3, 6 i 9. En qualsevol cas, el màxim nombre de termes de la successió amb un determinat nombre de xifres és 5. I el nombre mínim és 4.

3.1.2.2 Mètode de Newton

En el minut 00:13:18, el professor de matemàtica aplicada Micky Rosa pregunta a l'alumnat que li expliqui per què serveix el mètode de Newton. Ràpidament, en Miles contesta que es fa servir per resoldre equacions no lineals. Això és correcte, però és redundant en aquest cas ja que, tal i com indica el professor Rosa en to divertit, l'assignatura es diu *equacions no lineals*. Tot seguit, quan el professor demana que algú li digui alguna cosa que no sàpiga tothom, en Ben li diu que Newton[7] se'l va copiar[8] ja que Joseph Raphson[9] va publicar el mateix mètode 50 anys abans; i matisa que si l'aproximació inicial està massa lluny del 0 (el número que anul·la la funció) no funciona. Més endavant, en el minut 00:19:06, en Ben li pregunta al professor Micky Rosa, que l'ha fet anar a una aula per unir-se al grup que juga al blackjack (ell encara no en sap res de tot això) si hi ha cap problema amb el treball que ha fet, al que el professor Rosa li respon a en Ben "has trobat un mètode per calcular zeros més eficient que el de Newton, jo no en diria un problema d'això, si de cas una petita proesa; és clar que l'Isaac fa més de 250 anys que es mort, o sigui que era un combat desigual".

- Experiència didàctica

Donat que a segon de Batxillerat es treballa el teorema de Bolzano, que es pot utilitzar per resoldre equacions no lineals de forma aproximada, he comparat un problema de Selectivitat resolt pel teorema de Bolzano i pel mètode de Newton.

---

6 XXV Concurso de Primavera de Matemáticas 2022, Universidad Complutense de Madrid, 1ª Fase, Nivel 4, Problema 10.

7 Isaac Newton (1643-1727), físic, matemàtic i astrònom anglès.

8 Aquesta informació no és certa. Tot i que és cert que Raphson va ser el primer en publicar el mètode, gairebé 50 anys abans de la publicació del mètode de Newton, publicat *post-mortem*, l'últim no se l'havia copiat de Raphson, de fet, l'havia redactat 18 anys abans de la publicació de Raphson.

9 Joseph Raphson (1648-1715). A més, al llibre de Carl B.Boyer (1906-1976) *Historia de la matemática* no es cita en cap moment del llibre a Raphson, ni tan sols en l'apartat 15. El método de Newton y el paralelogramo de Newton, de la página 515.

La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b), sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

Esquema del programa	*Exemple*
1. Escriure «Introduïu un valor a»	L'usuari introdueix $a = 0{,}5$
2. Escriure «Introduïu un valor b»	L'usuari introdueix $b = 2$
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$»	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0{,}5) * f(1{,}25) = (0{,}5 + \ln(0{,}5)) * (1{,}25 + \ln(1{,}25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1{,}25$
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: a — b inici: 0,5 — 2 iteració 1: 0,5 — 1,25 iteració 2: 0,5 — 0,875 iteració 3: 0,5 — 0,6875 iteració 4: 0,5 — 0,59375 iteració 5: 0,546875 — 0,59375 iteració 6: 0,546875 — 0,5703125 iteració 7: 0,55859375 — 0,5703125 […]
7. Quan $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c» i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»

Qüestió[10]) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

✓ *Solució:*

Per a que el programa pugui trobar una solució a una equació $f(x) = 0$ entre a i b cal que la funció $f(x)$ compleixi el teorema de Bolzano, és a dir que la funció sigui contínua en $[a, b]$ i que $f(a)$ i $f(b)$ siguin de signe diferent, és a dir que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En aquest cas el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel dins l'interval (a, b). En l'exemple concret en el que s'ha aplicat el programa, podem veure que la funció $f(x) = x + ln(x)$ és contínua en l'interval [0,5, 2] ja que és la suma de dues funcions contínues en aquest interval, concretament una funció polinòmica de primer grau i la funció logarítmica que és contínua en tot el seu domini $Dom(ln(x)) = (0, +\infty)$. Veiem també què $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ la qual cosa demostra que existeix una solució de l'equació en [0,5, 2].

El que fa el programa és trobar el punt mig c entre els valors a i b, i buscar en quin interval canvia de signe la funció; si ho fa a l'interval $[a, c]$ el que fa és prendre com a nou valor de b el punt mig c, i d'aquesta manera tenim un nou interval [a,b] que torna a complir el teorema de Bolzano, ja que la funció canvia de signe i és contínua en aquest nou interval. En el cas en que el canvi de signe es produeixi a l'interval $[c, b]$, el que es fa és prendre com a nou valor a el punt mig c. En aquest cas també teniu un nou interval $[a, b]$ que compleix el teorema de Bolzano. En un i en l'altre cas reduïm a la meitat l'amplada de l'interval inicial. Repetint aquests passos diverses

[10] PAU Matemàtiques Catalunya 2022, Sèrie 5, Problema 6.

vegades aconseguirem apropar tant com es vulgui els valors de *a* i *b* obtenint així una aproximació de l'arrel que, pel teorema de Bolzano, està garantida en aquest interval.

He investigat com hagués trobat la solució aproximada el mètode de Newton.
Si tenim una funció derivable en un entorn de l'arrel buscada i que la derivada no s'anul·la en aquest entorn, com és el cas d'aquest exercici, perquè si $f(x) = x + \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, el mètode de Newton utilitza l'expressió $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ per trobar aproximacions successives del zero que estem buscant.

En la taula següent podeu observar els resultats obtinguts després de 6 iteracions amb Microsoft Excel ®

	X_n
Inici	2,0000000000
Iteració 1	0,2045685463
Iteració2	0,4393179529
Iteració 3	0,5562849855
Iteració 4	0,5670760699
Iteració 5	0,5671432879
Iteració 6	$\boxed{0{,}5671432904}$

He comprovat que el valor no canvia fins la iteració 30 i que coincideix amb el valor que donen com a solució programes de càlcul simbòlic com ara MAPLE ® o Derive ®.
El mètode de Newton s'ha revelat molt més eficient que el mètode de Bolzano per trobar el zero d'aquesta funció.

3.1.2.3 Probabilitat: problema de Monty Hall

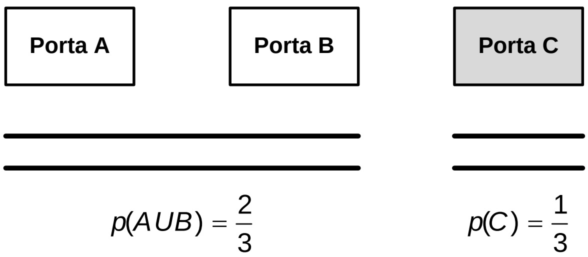
En el minut 00:14:23, el professor Micky Rosa vol "donar una oportunitat a en Ben per lluir-se" i li planteja el que ell anomena "el problema del presentador de concursos", clàssicament conegut com el problema de Monty Hall. El professor l'explica i queda posteriorment content del raonament, correcte, del seu alumne Ben.

- Experiència didàctica

El problema de Monty-Hall va aparèixer en el programa *Let's make a deal* a càrrec del presentador Monty Hall. Consisteix a escollir una de tres portes i endur-se el premi que s'hi troba darrera.

Qüestió a) Tenim tres portes tancades. Darrera de dues d'elles hi ha una cabra, i darrera l'altra un cotxe. El concursant tria una porta, i aleshores el presentador obre una de les dues portes restants, òbviament la que no conté el cotxe, i li pregunta al concursant si manté la seva elecció o bé prefereix canviar de porta.[11] Li convé canviar de porta al concursant?

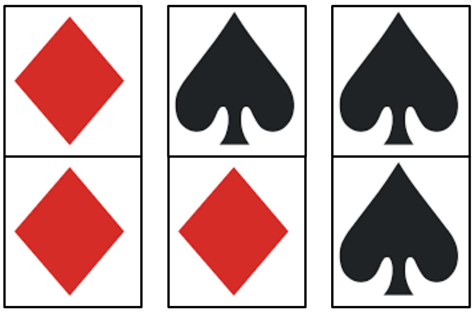
✓ *Solució:*



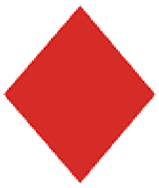
[11] Podeu trobar un simulador del joc a: https://www.math4all.es/monty-hall/simulador-monty-hall.html.

Suposem que triem la porta C. La probabilitat que el cotxe estigui darrere d'aquesta porta és $\frac{1}{3}$ i que estigui darrere de qualsevol de les altres dues $\frac{2}{3}$. El fet que obri una porta amb una cabra al darrere no augmenta la probabilitat de la porta escollida per nosaltres, però acumula tota la probabilitat que el cotxe estigui en la que queda tancada, que passa a ser de $\frac{2}{3}$, per tant ens convé canviar de porta. Perquè tenim el doble de probabilitat de guanyar el cotxe que de guanyar una cabra.
Una forma d'entendre-ho millor és suposar que hi ha 100 portes i que el presentador n'obre 98, que tenen una cabra. Ens convé canviar?

Qüestió b)



En l'estafa de les tres cartes[12] un enredaire té tres cartes com les de la figura i les fica en una caixa. El jugador n'agafa una i la col·loca sobre la taula. Per exemple la primera.



L'estafador li aposta un euro a que el pal de la cara oculta és igual que el visible i per convèncer el desprevingut jugador, que veu sobre la taula una diamant, li argumenta que la carta escollida no pot ser la doble pica, per tant o bé és diamant o bé és pica i per tant les probabilitats de guanyar són les mateixes per tots dos.

És un joc just? Com és que l'estafador guanyarà moltes més vegades que nosaltres si juguem amb ell una estona?

✓ *Solució:*
En primer lloc, cap joc proposat per un estafador serà mai just, perquè no tindria beneficis. L'estafador guanyarà el doble de vegades, perquè la carta que veiem pot ser un doble diamant (podem estar veient qualsevol de les dues cares del doble diamant) i guanya l'estafador, o diamant i pica i guanyem nosaltres.

3.1.2.4 Probabilitat condicionada

Quan el Ben pregunta al grup si estaven fent classe de repàs, aquests responen tot rient que no. El professor li pregunta si ha jugat mai al *blackjack* i en Ben respon que no, així que Rosa procedeix a explicar-li ràpida i clarament en que consisteix el joc.

[12] La podeu trobar a *Paradojas que hacen pensar*, pàgines 93-95.

Just després que el professor Rosa li expliqui a en Ben com funciona el *blackjack*, en Ben li pregunta: "i de què es tracta, d'anar comptant cartes?" al que el professor respon que no, que es tracta de guanyar molts i molts diners, però, insistent, en Ben li respon:" o sigui que si, que compteu cartes, per diners", i el seu company Fisher ho afirma tot dient que ho fan en equip. A més a més, el que aporta un toc interessant al film és que el grup del MIT, per tal de "passar desapercebuts" crea un "llenguatge propi" en el que "cada carta valia x punts", les altes -1 i les baixes +1 ; les altres 0, fent, tal i com diu en Ben, unes sumes i restes molt especials. L'equip tenia un sistema i fins i tot un llenguatge propi per poder passar inadvertit. Les paraules eren números, els números paraules, tot per tal de, sumant i restant punts saber quantes cartes quedaven al *sabot* (baralla) i quan s'havia d'apostar. D'aquesta última frase cal destacar que entre la versió en català, castellà i anglès hi ha una petita però notable diferència. En la versió en català, en Ben diu *"quan havia d'apostar"*, mentre que en castellà diu *"como apostar"* i en anglès diu *"what to bet".* Podríem qualificar aquest error com a error de doblatge, però, si volem ser rigorosos, la versió "més correcta" és la d'anglès on hi diu *"what to bet"* (traduït: què apostar), ja que és així com apareix en el guió del film. Com a dada interessant, quan en Ben esmenta que estudiava tot el dia (el joc del *blackjack*), es veu com sobre la taula té un llibre anomenat *Beat the dealer*[13], llibre que és considerat una lectura obligatòria per a tota persona que vulgui entendre la complexitat del joc del *blackjack*. La idea central de tot això és que cada carta que surt ens dona informació sobre les cartes que queden al sabot.

- Experiència didàctica

En relació a la probabilitat condicionada plantejo el següent problema:

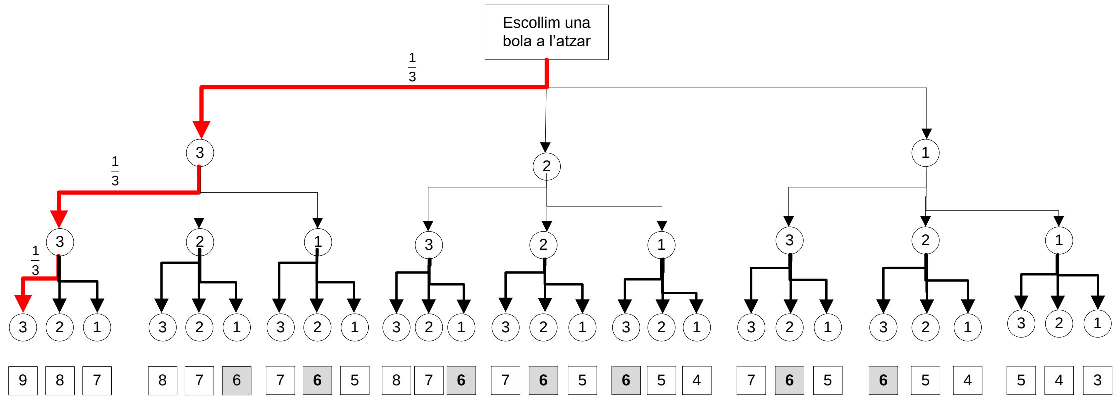
Qüestió a[14]) En una urna hi ha 3 boles, numerades 1,2 i 3. Fem tres extraccions, amb devolució, i anotant en cada cas el número de la bola extreta.

i. Expliqueu perquè el resultat d'una extracció no modifica les probabilitats de les següents extraccions.
ii. Determineu quina és la probabilitat de cadascun dels esdeveniments elementals.
iii. Si la suma dels números apuntats és 6, quina és la probabilitat que s'hagi extret les tres vegades la bola número 2?

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

[13] Llibre del matemàtic americà Edward O. Thorp, (1932-) , considerat "el pare del recompte de cartes" publicat l'any 1962.
[14] IX Concurso de Primavera de Matemáticas 2005, Universidad Complutense de Madrid, 1ª Fase, Nivel 4, Problema 7.

✓ *Solució:* En retornar cada bola a la urna, en les extraccions successives de cada bola la probabilitat de cadascuna és manté constant en $\frac{1}{3}$. Ho mostren a l'arbre.



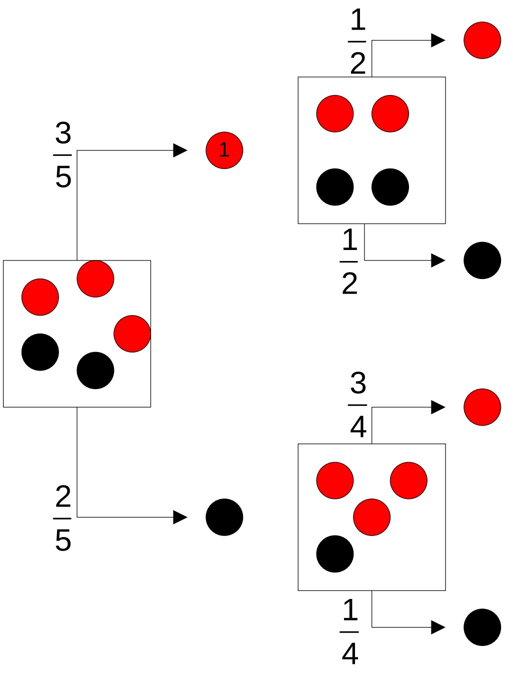
Per tant la probabilitat de cada esdeveniment elemental és $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

La probabilitat que hagi sortit un 6 és $\frac{1}{27}\cdot 7=\frac{7}{27}$ perquè en 7 dels esdeveniment elementals han resultat ser 6.

Com que només en un dels casos han sortit 3 dosos el resultat serà $\dfrac{\frac{1}{27}}{\frac{7}{27}}=\frac{1}{7}$

Qüestió b) Sigui una capsa amb 3 boles roges i 2 de negres. En traiem una a l'atzar i ens la fiquem a la butxaca. En traiem una segona bola a l'atzar i la deixem sobre la taula, quina és la probabilitat que aquesta segona bola sigui roja?

Probabilitat de cada resultat possible



$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

✓ *Solució:*

En aquest cas, com mostra el dibuix, les probabilitats de les segones extraccions es veuen condicionades pel resultat de la primera extracció i la probabilitat demanada és: $p=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

3.1.2.5 Càlcul mental

En el minut 00:22:52, quan la Jill va a tractar de convèncer en Ben per que formi part de l'equip, aquest, que està atenent una parella que compra roba per l'home, quan aquest pregunta "quant li costarà la broma", en Ben fa ràpidament els càlculs mentalment, tenint en compte els preus inicials i els descomptes, donant una resposta final, incloent-hi fins i tot els centaus, i dient, tímidament, que sempre ha tingut cap pels números. Cal destacar, però, que tot i la rapidesa i confiança tant dels clients com de Campbell, aquest s'ha equivocat (en la versió en castellà), ja que si fem les operacions a partir del que ell diu el preu final haurien de ser 1111,33 dòlars, és a dir, en Ben està cobrant 68,65 dòlars de menys.[15]

- Experiència didàctica

Deixant de banda els errors de càlcul, proposo una activitat en la que l'alumne, a partir de les dades esmentades en el fragment i del total esmentat al film, (1042,68 $) sense tenir en compte si és correcte o no, realitzi un exercici de càlcul.

Qüestió) A partir d'aquesta taula, completar els valors que falten i calcular quin és el percentatge de descompte que tenen les sabates.

Producte	Preu	Descompte	Subtotal
Corretja	49,95	-15 %	
Americana	589,99	-10 %	
Pantalons	285,99	-10 %	
Camisa	69,99	-5 %	
Sabates	155	x %	
		Total	**1042,68**

3.1.2.6 Funció, límit i continuïtat

En el minut 1:36:26 el professor Rosa esmenta que és a Cauchy[16], a qui li devem el primer estudi rigorós de les condicions necessàries de convergència d'una sèrie infinita, i que també va precisar els conceptes de funció, límit i continuïtat en la forma actual. Tot seguit, després que el professor pregunti: "no hi ha preguntes?" en Ben pregunta si és veritat que Cauchy robava idees als seus alumnes, al que el professor respon que això diu la llegenda negra. Ben ho diu amb segones intencions, ja que té la sospita que el professor li ha robat els diners guanyats a Las Vegas. Ben, que a part d'estar enfadat està informat, diu que Cauchy feia treballar per ell els seus millors alumnes i que després els desacreditava per quedar-se les seves equacions, o sigui que els

---

[15] Cal dir que aquest error l'esmenta **J.M. Sorando** en el seu llibre ***Cine y matemáticas: Resolviendo problemas*** en la pàgina 71, a l'apartat *Errores de doblaje*. Tot i així, tal i com ho destaca Sorando en el seu llibre, de la pel·lícula *21 blackjack* hi ha dues versions en espanyol amb doblatges diferents però amb la mateixa veu d'en Ben. En una versió els càlculs els fa incorrectament (error esmentat aquí), mentre que en l'altra estan ben fets. Tècnicament mai podrem saber el preu final correcte ja que no sabem quin és el descompte aplicat a les sabates.

[16] Augustin Louis Couchy (1789-1857), matemàtic francès.

explotava. El professor, que entén la indirecta, respon a tots que creu que Campbell pensa en un cas concret, el de Vladimir Stupnitsky, segons ell alumne de Cauchy que el va acusar d'haver-li robat una obra amb 4 volums sobre anàlisi matemàtica i d'haver-la publicat amb pseudònim però no hi ha manera de saber-ne la veritat, al no haver-hi proves, convertint així la història en un rumor o una calumnia. Tot seguit, fa un símil entre el que va passar suposadament entre Cauchy i Stupnitsky amb el que ha passat entre ells dos. Cal remarcar que Vladimir Stupnitsky no fou cap matemàtic, sinó un pseudònim utilitzat prèviament en la pel·lícula per referir-se al Ben, i és per això que el professor el torna a utilitzar quan explica la història de Cauchy i Stupnitsky, llençant un missatge subliminal que només en Ben pot entendre.

- Experiència didàctica

La seqüència dona peu a treballar els conceptes de funció, límit i continuïtat, que s'estudien a primer de Batxillerat.

Qüestió) El departament de matemàtiques d'un institut, millora la nota final de curs dels seus alumnes, segons la puntuació que hagin assolit a les proves cangur, mitjançant la funció següent:

$$m(x) = \begin{cases} 0 \quad si\ 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{-1}{945000}x^3 + \dfrac{13}{37800}x^2 - \dfrac{11}{700}x + \dfrac{4}{21} \quad si\ 30 < x \le 150 \end{cases}$$

On x és la puntuació assolida a les proves i m(x) els punts en què millorarà la seva nota final de curs

i. Quina millora obtindria un alumne que assoleix 90 punts a la prova Cangur?
ii. És una funció contínua en x=30? Perquè no sembla just que per petites diferencies en la puntuació x hi hagi grans diferències en la millora m(x).

✓ *Solució:*

$i)\ m(90) \simeq 0,79$

$ii)\ \lim_{x\to 30^+} m(x) = \lim_{x\to 30^-} m(x) = m(30) = 0$ per tant és contínua en x=30

3.1.3 *The Pelayos*

Gonzalo Pelayo és un pare de família, amb fills ja adults, que creu haver trobat un mètode per guanyar a la ruleta. Explicarà la seva idea als seus familiars, els quals, motivats per la recompensa econòmica, apostaran tal com els mani el patriarca, qui, per salut, no pot acompanyar-los. Junts viuran moltes aventures, gairebé de ficció, apostant en casinos d'arreu del món i omplint-se les butxaques gràcies al mètode.

3.1.3.1 Probabilitat experimental: llei dels grans nombres

En l'escena del minut 00:04:45, el patriarca de la família, Gonzalo García Pelayo, explica al seu fill Ivan que es va adonar que havia trobat un mètode que podia funcionar per guanyar diners al joc de la ruleta (ruleta francesa, amb un zero, i ruleta americana, amb dos zeros, quan surt el zero guanya la banca). Es va fixar que un nen jugava a un joc on s'havia de portar una bola fins al final d'un laberint, però això no arribava a passar ja que la bola sempre queia al mateix forat. Va ser aleshores quan es va adonar que el joc estava desequilibrat, i gràcies a això li ve la inspiració pel seu mètode.

Parteix de la certesa que és gairebé impossible fabricar quelcom perfecte, i la ruleta no té per què ser-ne una excepció. Aquesta pot presentar defectes que puguin marcar una tendència, tot i que puguin passar molt desapercebuts, com una rugositat que no es pugui percebre en el cromat o una esquerda microscòpica, o qualsevol altre factor que faci que la bola es decanti per uns números concrets amb més freqüència que per uns altres; el mateix que passava amb el joc infantil del laberint. Va ser aleshores quan va decidir enviar una amiga per que analitzés quins nombres sortien més sovint en les ruletes d'un casino de Madrid i així saber a quins havia d'apostar, per tal que, a llarg termini, pogués tenir beneficis. El que fa és determinar probabilitats de manera experimental.

Cap al final de la pel·lícula, al minut 1:36:20, la veu en off de l'Ivan comenta, mentre es veu com la família García Pelayo celebra que han desbancat legalment un casino jugant a la ruleta, que aquella nit havien aconseguit demostrar al món que es podien governar les lleis secretes de l'atzar. Cal afegir, però, que al que en realitat es refereix Ivan és a la coneguda llei dels grans nombres, que afirma que a gran escala els comportaments erràtics es difuminen i apareix una tendència.

- Experiència didàctica

Podem calcular probabilitats de manera experimental amb un cas més senzill que el que apareix al film. Consisteix en interpretar la freqüència amb la que cau de costat i la freqüència amb la que cau cap per avall una xinxeta. És evident que aquest experiment es pot reproduir en qualsevol grup classe, sempre i quan es treballi amb una mostra prou gran de resultats.

✓ *Solució:*

Proporcionem els resultats obtinguts per diversos grups d'alumnes que van fer aquest experiment,[17] en l'annex número 2.

3.1.3.2 Esperança matemàtica

És al minut 00:10:05 quan l'Ivan explica als seus cosins com funciona el joc de la ruleta (ja sigui francesa o americana) i quant els hi paga el casino si la bola cau al número al que ells han apostat, en aquest cas, el que han apostat multiplicat per 35, però perden tot el que han apostat als altres números. A continuació, els explica com han de gestionar els diners que han guanyat, indicant que han d'apartar el que han guanyat i tornar a apostar als mateixos números, hagin guanyat o perdut. Procedeix a indicar que començaran amb apostes de tan sols un euro, basant-se, tal i com diu Gonzalo, en un mètode estadístic que funciona a llarg termini[18], i no poden prendre el risc d'apostar molt sense tenir una bona base econòmica, per protegir-se davant d'una possible ratxa llarga de pèrdues. Ivan destaca que han d'apuntar en una llibreta tots els números guanyadors, per tal que el seu pare els pugui entrar en un programa informàtic, creat per ell

[17] Dades experimentals obtingudes a l'Institut d'Agramunt i a l'Institut Caparrella pel professor Robert Sirat Joaniquet, que les ha cedit per aquest treball.
[18] Clara referència altra vegada a la llei dels grans nombres.

mateix, i així poder afinar les apostes i saber també quan podran començar a pujar-les, amb l'esperança de poder obtenir així beneficis més grans.

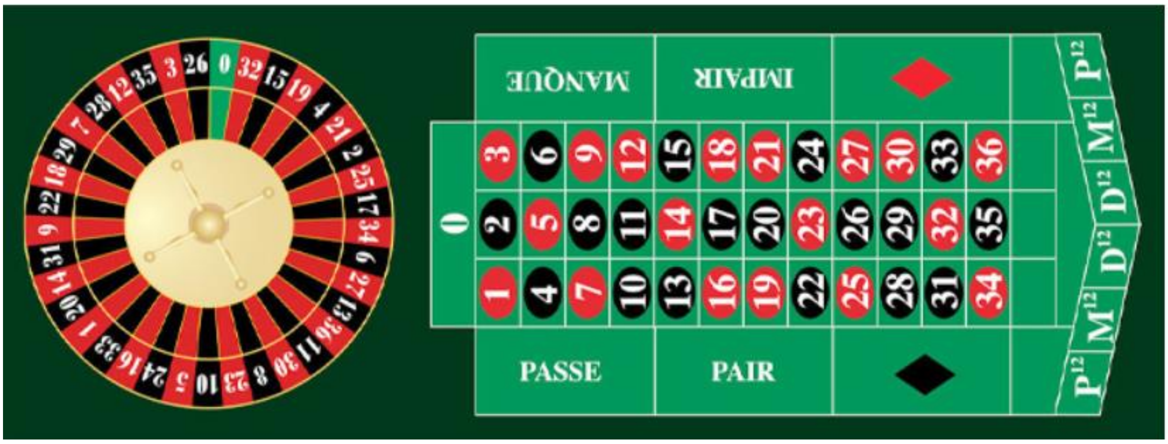


Figura 2. Ruleta francesa extreta de: https://mundoruleta.es/guia/tipos-de-ruleta/

- Experiència didàctica

El fragment brinda l'oportunitat d'introduir el concepte d'esperança matemàtica.

a) Calcular l'esperança matemàtica del joc de la ruleta francesa, on la probabilitat d'encertar és $\frac{1}{37}=0,02703$

✓ *Solució:* Considerant que apostem 100 €, tenim que: $E(x)=\frac{1}{37}\cdot 35\cdot 100-\frac{36}{37}\cdot 100\simeq -2,7$

Observem que per cada 100 € jugats, de mitjana en perdrem 2,7.

b) Calcular la probabilitat que hauríem de tenir de guanyar per tal que l'esperança matemàtica fos 0.

✓ *Solució:*

Hem de resoldre aquesta equació:

$$x\cdot 35\cdot 100-\frac{36}{37}\cdot 100=0\Rightarrow x=\frac{\frac{3600}{37}}{3500}=\frac{36}{1295}\simeq 0,02780$$

c) Calcular la probabilitat que hauríem de tenir de guanyar per tal que l'esperança matemàtica fos 3.

✓ *Solució:*

Hem de resoldre aquesta equació[19]:

$$x\cdot 35\cdot 100-\frac{36}{37}\cdot 100=3\Rightarrow x=\frac{3+\frac{3600}{37}}{3500}\simeq 0,02866$$

[19] S'observa que lleugeres modificacions en la probabilitat de guanyar ens fan pasar, a llarg termini, de perdre 2,7 € de cada 100 a guanyar-ne 3 de cada 100 de mitjana.

3.1.3.3 Biaix cognitiu probabilístic: fal·làcia del jugador

En l'escena del minut 00:17:12 un altre jugador li diu a Ivan que *"llevamos veintidós partidas sin que salga el 7, ahora es el momento"*. Aquesta escena mostra perfectament què és un biaix cognitiu[20]. En aquest cas se l'anomena fal·làcia del jugador[21].

- Experiència didàctica
  El breu fragment planteja una qüestió que es troba entre les matemàtiques i la psicologia: els biaixos cognitius. Amb l'objectiu de detectar-los proposo les següents qüestions:

a) Imagina que et trobes en una administració de loteria i has de triar un d'aquests dos números de loteria. Quin tries i per què?
   i. 86432
   ii. 00000

b) Suposa que estàs de viatge amb la família i passeu per davant d'una administració de loteria en la que han sortit premiats números cada any durant la darrera dècada. En compraríeu; si es així per què?

i. Sí, perquè hi ha més possibilitats de guanyar.
ii. No, el número de possibilitats no depèn de l'èxit dels darrers anys.

c) Respondre les preguntes d'aquest qüestionari estàndard en l'estudi del raonament probabilístic dels estudiants de secundària.[22]

i.) Quina de les següents successions és més probable que ocorri al llençar una moneda equilibrada 5 vegades?: a) CCCXXX; b) XCCXC; c) XCXXX; d) CXCXC; e) Les quatre successions són igual de probables. Per què has donat aquesta resposta?

ii.) Quina de les següents successions és menys probable que ocorri al llençar una moneda equilibrada 5 vegades?: a) CCCXX; b) XCCXC; c) XCXXX; d) CXCXC; e) Les quatre successions són igual de probables. Per què has donat aquesta resposta?

iii.) En un hospital d'una ciutat es registra el número de nens i nenes recent nascuts. Quin dels següents casos et sembla més probable?: a) Que en els propers 10 naixements 8 o més recent nascuts siguin nens (masculí); b) Que en els propers 100 naixements 80 o més recent nascuts siguin nens (masculí); c) Les dues anteriors a) i b) són igual de probables. Per què has donat aquesta resposta?

iv.) Si observem els següents 10 naixements, què et sembla més probable?: a) La fracció de nens (masculí) serà major o igual a 7/10; b) La fracció de nens (masculí) serà menor o igual a 3/10; c) La fracció de nens (masculí) estarà compresa entre 4/10 i 6/10; d) Les tres opcions anteriors a), b) i c) són igual de probables. Indica per què dones aquesta resposta.

---

[20] Un biaix cognitiu és un procés en el que la cognició es veu alterada en base a prejudicis o falses perspectives, i tot sovint afecta a la presa de decisions. Podeu consultar l'article aparegut a La Vanguardia el 26-01-2005, pàgina 37, titulat *La maldición del número 53*, on s'explica com el fet que un número de la loteria de Venècia que es resisteix a sortir provocà suïcidis i alarma social a Itàlia.
[21] En trobareu una magnífica descripció a *Paradojas que hacen pensar*, pàgines 87-89.
[22] Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria.

v.) Quan llencem dos daus simultàniament: a) Hi ha les mateixes possibilitats d'obtenir un 5 i un 6 que d'obtenir dues vegades el número 5; b) Hi ha més possibilitats d'obtenir un 5 i un 6 que d'obtenir dues vegades el número 5; c) Hi ha menys possibilitats d'obtenir un 5 i un 6 que d'obtenir dues vegades el número 5; d) És impossible saber-ho. Raona la teva resposta.

vi.) Quan llencem simultàniament tres daus, quin d'aquests resultats és més fàcil que ocorri?: a) Obtenir un 5, un 3 i un 6; b) Obtenir dues vegades el 5 i una vegada el 3; c) Obtenir tres vegades el número 5; d) Tots aquests resultats són igualment probables; e) És impossible saber-ho.

vii.) És alguna de les afirmacions de l'apartat vi. menys probable que les altres?

viii.) Una ruleta està dividida en cinc àrees iguals, numerades de l'1 al 5. Quin dels següents resultats és més probable que ocorri al girar la ruleta tres vegades?: a) 2, 1, 5, en aquest ordre exactament; b) 2, 1, 5, en qualsevol ordre; c) 1, 1, 5, en qualsevol ordre; d) Les opcions a) i b) són igual de probables; e) Les opcions a), b) i c) són igual de probables.

Apunts:

L'objectiu d'aquestes preguntes és detectar aquests quatre tipus de biaixos cognitius probabilístics entre els alumnes:

a) Raonar prescindint del tamany de la mostra, fent confiança a petites mostres suposant que han de reproduir tots els resultats possibles d'un experiment.

b) No considerar el nombre d'experiments en el càlcul de la probabilitat.

c) Creure que tots els resultats han de tenir la mateixa probabilitat encara que físicament això sigui impossible.

d) Fal·làcia del jugador.

3.1.4 *Moneyball: Rompiendo las reglas*

Film basat en una història real, la de Billy Beane, exjugador de beisbol que en la seva època com a gerent general dels Oakland Athletics, coneguts com a A's, de la MLB, va posar en pràctica, amb l'ajuda de l'economista Paul DePodesta (Peter Brand a la pel·lícula) un mètode, *moneyball,* per tal de poder saber quins són els millors fitxatges que podien fer, tenint en compte el seu baix pressupost, tot fent ús de l'estadística, o més concretament, les *sabermetrics*, concepte ja plantejat anys abans per Bill James[23].

[23] George William James (1949-), escriptor, historiador i estadístic de beisbol estatunidenc, que va encunyar el terme *sabermetrics* (sabermetria). La sabermetria, a grans trets, és un tipus d'anàlisi estadístic usada en el beisbol, amb l'objectiu d'aïllar l'atzar i tan sols mostrar el potencial dels jugadors i la seva repercussió en els resultats de l'equip.

3.1.4.1 Biaix cognitiu: decisions amb incertesa

En el minut 00:09:12, podem veure clarament un biaix cognitiu. Quan el grup d'analistes es reuneix per parlar de quins possibles fitxatges podrien fer, cadascú té la seva opinió. Després de parlar de diferents jugadors, parlen sobre un tal Pérez i un dels analistes diu que "su novia es fea", indicant que és per això que li falta confiança. Per aquest analista té més influència un aspecte personal com aquest que les pròpies estadístiques, que ni tan sols comenta. Algun altre indica que és un jugador amb molta presència, i que "físicamente da la talla para el papel", com si d'una obra de teatre és tractés, ignorant també les dades estadístiques sobre el rendiment esportiu d'aquest jugador.

- Experiència didàctica

Tenir dades quantitatives ajuda a prendre decisions en ambients d'incertesa.

Qüestió) Aquestes són les dades en forma de matriu de decisió.

	Pluja	Núvols	Assolellat
Aire lliure	10000	50000	65000
Pavelló cobert	45000	40000	35000

Quina decisió ha de prendre l'empresari si utilitza els cinc criteris de presa de decisions en ambient d'incertesa? Consulteu informació sobre aquests criteris per tal de completar la taula.

	Decisió
Criteri pessimista o de Wald	
Criteri optimista	
Criteri de Laplace	
Criteri de Hurwicz	
Criteri de Savage	

✓ *Solució:* a) Pessimista = pavelló (35.000); b) Optimista = Aire lliure (65.000);

c) Laplace = Aire lliure (41.667); d) Hurwicz = Aire lliure (51.250); e) Savage = Pavelló (30.000)

3.1.4.2 Mètode Moneyball: model matemàtic

En el minut 00:19:05, Peter Brand li comenta a en Billy que l'objectiu no ha de ser comprar jugadors sinó comprar victòries, i per comprar aquestes s'han de comprar carreres (anotacions). És en aquest moment on Beane coneix l'ADN del *mètode Moneyball*. Més endavant veurem com el raonament de Brand és totalment contrari al del grup d'analistes dels A's, però és correcte. Per a ell el valor d'un jugador el determina la seva aportació al joc i no pas el seu preu de mercat. Remarca, al mateix temps, que es valoren aparences i prejudicis i considera que les matemàtiques n'estan per sobre; en definitiva el seu raonament és estrictament científic.

Més endavant, en el minut 00:25:50, podem veure com en Peter utilitza la fórmula de l'expectativa pitagòrica per tal de conèixer quin és el mínim de partits que han de guanyar per tal d'arribar als *playoffs*, basant-se en el percentatge de partits que haguessin hagut de guanyar tenint en compte les carreres anotades i rebudes. Com a curiositat, se l'anomena així degut a la semblança de la fórmula amb el teorema de Pitàgores: $a^2 + b^2 = c^2$. La fórmula de la expectativa pitagòrica és: $\text{Proporció de victòries}=\dfrac{\text{Carreres realitzades}^2}{\text{Carreres realitzades}^2+\text{Carreres rebudes}^2}$

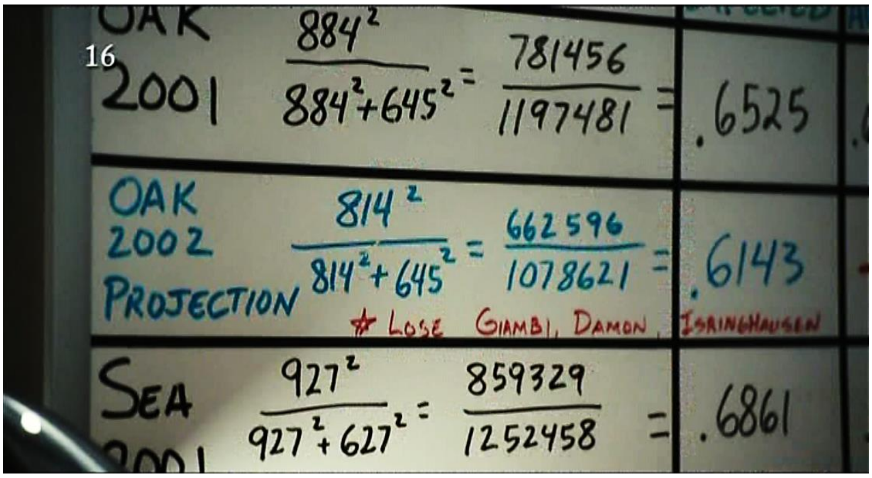


Figura 3. Money ball: rompiendo las reglas: imatge del minut 00:26:04

- Experiència didàctica

Podem fer estimacions amb aquest model matemàtic. Si anomenem W a la proporció de victòries que estima el model, S a les carreres realitzades i A a les carreres rebudes la fórmula seria $W = \dfrac{S^2}{S^2 + A^2}$

Qüestió a) Si en una temporada un equip ha jugat 162 partits i ha anotat 820 carreres però n'ha concedit 678. Quin és percentatge de partits guanyats que preveu la fórmula?

Qüestió b) Si aquest equip va guanyar realment 94 partits, creieu que la fórmula ha fet una bona estimació del percentatge de partits guanyats?

Qüestió c) Si un altre equip tenia una proporció de victòries de 0.604 i va concedir 768 carreres, quina és el nombre estimat de carreres anotades?

Qüestió d) Demostreu que la fórmula anterior es pot reescriure així $W = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{A}{S}\right)^2}$

Qüestió e) Considera la fórmula anterior però amb altres exponents de x: $W = \frac{1}{1+\left(\frac{A}{S}\right)^{x}}$ i utilitza-la per completar la taula següent :

Equip	Carreres anotades	Carreres concedides	Proporció partits guanyats	W quan x=1	W quan x=1,3	W quan x=1,5	W quan x=1,8	W quan x=2
A	809	754	0,472					
B	930	767	0,416					
C	865	812	0,472					
D	768	899	0,583					
E	716	834	0,559					
F	813	812	0,502					
G	772	789	0,501					

Qüestió f) Per saber si algun d'aquests valors de x proporciona una millor predicció que x=2, proposem calcular el coeficient de correlació lineal en cada cas entre el valor que preveu el model i el valor real observat previa elaboració del núvol de punts corresponent.[24]

3.1.4.3 Estadística: anàlisi de jugadors

Al llarg de la pel·lícula l'anàlisi de jugadors és constant, però és essencial l'escena del minut 00:26:05. Tot comença quan Beane li pregunta a en Peter què li està ensenyant, i aquest contesta que és un codi que els permet calcular les seves projeccions anuals, recollint les dades disponibles per a predir el rendiment dels jugadors. Els equips necessiten fer anàlisi d'aquest tipus per tal de, si volen fer les coses correctament, conèixer els jugadors "de forma matemàtica". Podem observar com Peter té en compte molts factors a l'hora de fer l'anàlisi, ja sigui l'alçada i el pes, fins un gran recull on s'inclou *strikeouts*, *batting average*, *slugging*, *on-base percentage*, carreres, strikes... entre d'altres. Tal i com diu Brand, es tracta de reduir-ho tot a un sol número i que, a l'utilitzar les estadístiques a la seva manera, trobaran en els jugadors un valor que ningú és capaç de veure; oblidant una sèrie de prejudicis i suposats defectes pels quals a vegades son descartats, com l'edat, aspecte, personalitat. Brand diu que Bill James (considerat el pare del *sabermetrics* modern) i les matemàtiques estan per sobre de tot això. D'aquest tall, és important tenir en compte el comentari que fa Brand al minut 00:26:46 quan diu que d'entre els 20000 jugadors de nivell que han de considerar creu que n'hi ha 25 que cabrien en el seu pressupost, tenint en compte que són més barats a l'estar infravalorats, constituint un equip guanyador. Les estadístiques s'han d'utilitzar amb grans mostres, és a dir, un conjunt representatiu de dades, en aquest cas necessari per tal de poder comparar un gran nombre de jugadors entre ells i poder veure quins "sobresurten del grup".

[24] Tant l'apartat e com el f seria recomanable que es ressolessin utilitzant el full de càlcul.

- Experiència didàctica

Qüestió) Imagina que ets director esportiu d'un club de bàsquet, i has de fitxar un base, escollint entre el jugador A i el jugador B.

Quin dels dos jugadors escolliries? Per què?

Jugador	Partits jugats	Minuts jugats	Assistències per partit	Triples ficats per partit	Tirs ficats de dos per partit	Rebots per partit	Robatoris per partit	Un contra un guanyats	Edat	Sou mínim que cobrarà
A	66	2200	8	3	6	9	1.2	5	23	39 milions de dòlars
B	56	2100	6	4	6	5	0.8	9	34	47 milions de dòlars

3.1.4.4 Probabilitat condicionada

Al minut 1:18:20, quan Brandt explica aspectes més tècnics o matemàtics als jugadors, els comenta diferents coses. A un d'ells li diu: "cuando te llega tu *picheo* idóneo tu promedio es 0.625, es una pasada, pero cuando te da por hacer *swings* sabiendo que tu picheo es medio dentro a las bajitas y fuera tu promedio baja a 0.158". A continuació, explica a dos altres jugadors que "cada turno al bate es como una mano de *blackjack,* con cada carta que te den las probabilidades cambian y con cada primer lanzamiento que fallas tu promedio de bateo baja 0.075 puntos". Això demostra com, gràcies a la probabilitat, podem identificar "accions" o "factors" que, o bé ens afavoreixen o ens perjudiquen.

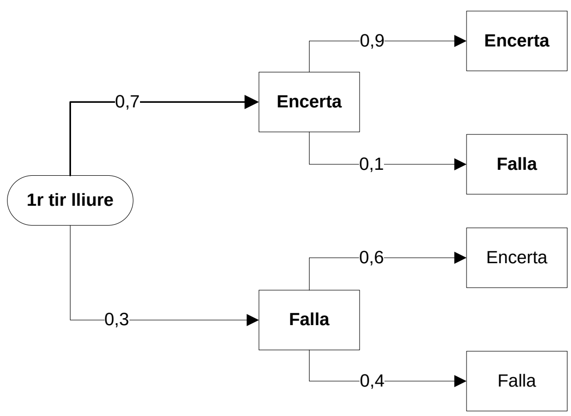
- Experiència didàctica

L'encert en els tirs lliures al basquet depèn de mols factors com ara: el minut de partit, el resultat en aquell moment, ser equip local o visitant, , la posició de joc del jugador a l'equip, si és el primer o el segon llançament, etc. Considerem només aquest últim factor. Sabem que un jugador té un 70 % d'encert en el llançament de tirs lliures (dades històriques del jugador) però que si encerta el primer té un 90 % de probabilitats d'encertar el segon, mentre que si falla el primer la probabilitat d'encertar el segon és del 60 %.

Tot completant el diagrama d'arbre respon:

Qüestió a) Quina probabilitat té d'encertar els dos llançaments?

Qüestió b) Quina probabilitat té de només encertar-ne un?



3.2 Cinema i biografies de matemàtics

3.2.1 *Aventuras de un matemático*

El film està basat en l'autobiografia de Stanislaw M. Ulam[25]: *Aventuras de un matemático*. Narra breument el seu període vital com a professor universitari, la relació amb el seu germà petit i el contacte amb la resta de la seva família, jueus atrapats en una Europa en plena Segona Guerra Mundial. La importància de la pel·lícula, però, recau en els seus dies a Los Álamos, com a membre del Projecte Manhattan, posant èmfasi en la seva amistat amb John von Neumann[26] i també en la seva vida familiar, passant per l'encefalitis que va posar en joc la seva vida.

3.2.1.1 Projecte Manhattan

El film, tot i mostrar-nos diversos aspectes matemàtics interessants, té com eix principal el Projecte Manhattan[27]. A grans trets, fou un ingent treball col·lectiu d'investigació amb l'objectiu principal de construir la primera arma nuclear, de vital importància pels americans per poder guanyar la Segona Guerra Mundial. Cal destacar que el projecte reuní a científics de disciplines diverses: físics, químics, matemàtics...

3.2.1.2 Probabilitat: diagrama d'arbre

Tot i que és només present en el fons de l'escena del minut 00:08:38, el fragment té molta importància matemàtica. En aquest cas, podem veure com l'anàlisi d'arbre és usat per calcular les probabilitats dels diferents resultats possibles en tirar dues vegades una moneda.

Figura 4. Aventuras de un matemático: imatge del minut 00:08:38

En l'escena del minut 00:08:28, Ulam diu als seus alumnes que el càlcul és la part avorrida de les matemàtiques, però permet fer coses fascinants, per exemple composar música i, encara més important, anar a Las Vegas i guanyar en jocs de cartes. A continuació, els diu que "el joc va tot de probabilitat". Té una baralla de 33 cartes (22 negres i únicament 11 vermelles). Proposa a un alumne trobar les cartes vermelles, i destaca que per cada dòlar que aposti, ell li'n donarà el doble si guanya, i li pregunta quants diners podria guanyar si el seu pressupost fos d'un dòlar, qüestió que l'alumne no pot contestar, però el professor destaca que són 2048 dòlars.

---

[25] Stanisław Marcin Ulam (1909-1984), matemàtic polonès-estatunidenc.
[26] John von Neumann (1903-1957), matemàtic hongarès-estatunidenc.
[27] Al juliol de 2023 es va estrenar la pel·lícula *Oppenheimer*, que té com a protagonista al director del Projecte Manhattan, Robert Oppenheimer (1904-1967), físic teòric estatunidenc.

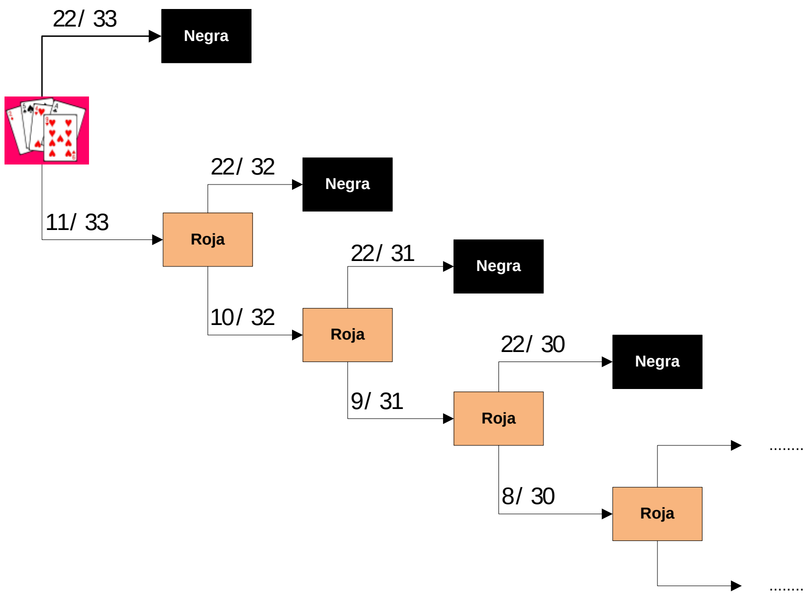
Figura 5. Aventuras de un matemático: imatge del minut 00:08:47

A continuació li proposa: com saps si hauries de seguir jugant? L'alumne, segur, contesta que "seguint el seu instint". El professor li demana que hi pensi, tenint en compte que una de cada tres cartes és vermella, és a dir, les possibilitats de perdre són dues vegades les de guanyar. Tot seguit ho posen en pràctica, amb l'alumne traient una carta (negra=perd), però diu que té més possibilitats amb la segona que tregui, i el professor destaca que així és, remarcant al mateix temps que el resultat no importa sinó que "cada partida que juguis et diu quelcom"[28], i els hi demana que juguin més a jocs de cartes.

- Experiència didàctica

A partir de l'escena i amb l'ajuda de l'anàlisi en arbre ("tree analysis" a la pel·lícula) podem respondre les qüestions següents, sobreentenent que el jugador si ha guanyat i vol tornar a jugar ho aposta tot.

a) Com sabem que el màxim que pot arribar a guanyar, si cada vegada aposta tot el que porta guanyat, són 2048 dòlars?
b) Quina seria la probabilitat de que això passes? Ajuda't del dibuix.
c) Com saps si hauries de continuar jugant, suposant que has guanyat la primera partida?



[28] Clara referència a la probabilitat condicionada.

3.2.1.3 Distribució de probabilitat: esperança matemàtica

Al minut 00:19:30 podem observar com Ulam està fent una classe i apunta en una pissarra un exercici de distribució de probabilitat discreta, en aquest cas tot el que necessiten els seus alumnes per un examen, i els demana que segueixin aplicant-ho i que practiquin cada dia i així doncs es suposa que ho faran bé.

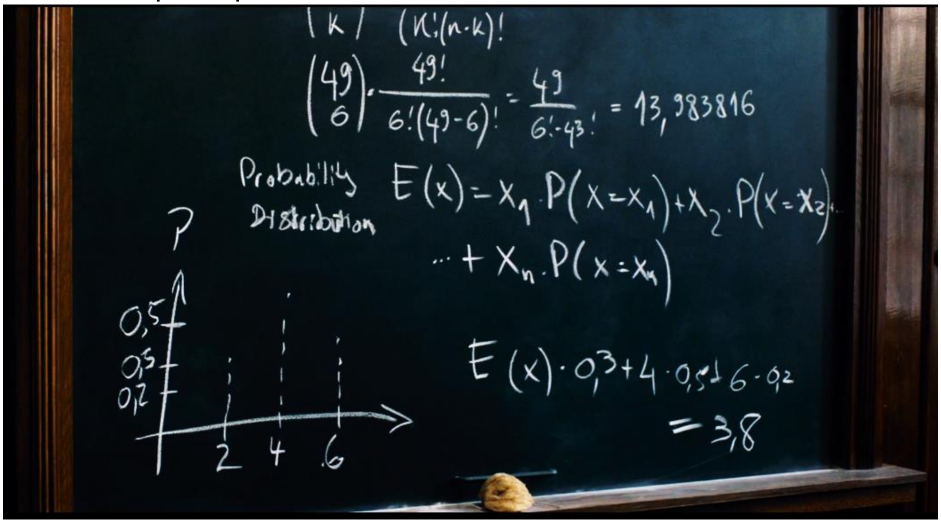


Figura 6. Aventuras de un matemático: imatge del minut 00:19:41

L'esperança matemàtica (que podem veure en la figura 6) d'una variable aleatòria discreta X que pren valors $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ amb probabilitats $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ és $E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n$ l'esperança matemàtica és pot interpretar com el valor esperat o mitjana de la variable si repetíssim l'experiment que genera la variable aleatòria "moltíssimes" vegades[29].

- Experiència didàctica

Reprenent el mateix joc de cartes de l'apartat anterior proposo les següents qüestions:

Suposem que has tingut una magnífica ratxa de sort i has guanyat les quatre primeres partides i has reinvertit tots els guanys en seguir jugant, per tant has rebut ja $2^4 = 16$ dòlars.

a) Quantes cares vermelles i quantes negres queden en la baralla?
b) Després de calcular la teva esperança matemàtica en aquest moment, continuaries jugant?

3.2.1.4 Computació

A la pel·lícula també podem veure com es menciona el MANIAC (sigles en anglès de Mathematical Analyzer, Numerator, Integrator, and Computer) tal i com veiem al minut 00:34:28 quan John von Neumann li diu a Ulam que està treballant en un algoritme d'autoreplicació al MANIAC, i li pregunta a Ulam si té alguna idea, al que aquest contesta si es refereix a simular reaccions en cadena, i que hi pensarà.
El MANIAC fou una computadora que tenia l'objectiu de simular les condicions necessàries per detonar una bomba d'hidrogen. La màquina estava basada en l'arquitectura de John von

---

[29] Llei dels grans nombres.

Neumann, desenvolupada per ell mateix amb la col·laboració de John Presper Eckert[30] i John William Mauchly[31].
Cal dir que a dia d'avui els simuladors informàtics tenen aplicacions molt diverses: prediccions meteorològiques, econòmiques, etc. Permeten estudiar el resultat final d'un fenomen amb variacions de les condicions inicials d'una manera molt ràpida.

3.2.1.5 Càlcul mental

Tot i que pot passar desapercebuda, l'escena del minut 1:01:26, aporta un matís interessant sobre el càlcul mental. Quan Ulam és troba a l'habitació de l'hospital, després que l'hagin operat, el metge, per tal de comprovar que Ulam "estigui bé" li pregunta quant és 9 per 7, al que Ulam, després d'una pausa, contesta: "sóc un matemàtic, no un ordinador."

3.2.1.6 Mètode de Montecarlo[32]

Primer de tot, al minut 1:06:48, després d'una breu conversa amb la seva dona, quan ell està jugant al solitari, Stanislaw s'adona gràcies a ella que no ha de jugar per conèixer el resultat final, ja que, tal com ha dit ella, només hi ha dues opcions: guanyar o perdre. A continuació d'aquesta escena, John von Neumann visita a Ulam a casa seva, i queda fascinat amb les idees del polonès, fins i tot dient-li, tot bromejant, que li haurien de fer més forats al cap si li venen aquest tipus d'idees. Ulam li explica com hi ha arribat, tot dient que estava pensant en quines eren les possibilitats que jugant al solitari, amb 52 cartes, guanyés. Explica que va intentar-ho per càlculs combinatoris, però va sentir que necessitava algun tipus de pensament abstracte. Von Neumann destaca que és exactament així: a més partides jugades, més exactament podran predir el resultat sense jugar.

- Experiència didàctica

Per tal d'entendre, en un cas senzill, com funciona el mètode, es pot fer una simulació en full de càlcul de l'experiment següent:

Llancem 5 daus i sumem les puntuacions de les cares. Volem obtenir una estimació de quina és la probabilitat de cadascun dels resultats finals $\{5,6,7,...,29,30\}$.

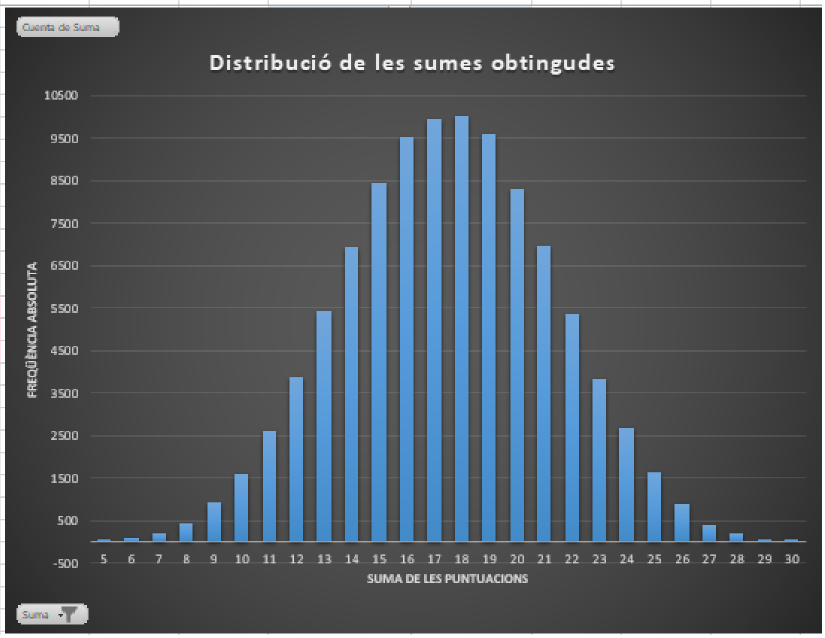
---

[30] John Presper Eckert (1919-1995), enginyer elèctric estatunidenc.
[31] John William Mauchly (1907-1980), físic estatunidenc.
[32] Algoritme computacional que utilitza un mostreig aleatori repetit per obtenir la probabilitat que es produeixin una sèrie de resultats. Fou desenvolupat per Stanislaw Ulam i John von Neumann.

Mostrem un resultat possible d'aquesta simulació amb 100.000 tirades:

A	B	C	D	E	F
Dau 1	Dau 2	Dau 3	Dau 4	Dau 5	Suma
=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=SUMA(A2:E2)

H	I	J
Etiquetas de fila	Cuenta de Suma	Probabilitat
5	17	0,01700%
6	66	0,06600%
7	197	0,19700%
8	448	0,44800%
9	919	0,91900%
10	1594	1,59400%
11	2616	2,61600%
12	3880	3,88000%
13	5418	5,41800%
14	6942	6,94200%
15	8441	8,44100%
16	9539	9,53900%
17	9951	9,95100%
18	10041	10,04100%
19	9609	9,60900%
20	8288	8,28800%
21	6957	6,95700%
22	5338	5,33800%
23	3825	3,82500%
24	2693	2,69300%
25	1630	1,63000%
26	908	0,90800%
27	415	0,41500%
28	195	0,19500%
29	55	0,05500%
30	18	0,01800%
Total general	100000	



3.2.2 *Una mente maravillosa*

Pel·lícula basada en la novel·la homònima biogràfica de Sylvia Nassar titulada *Una mente prodigiosa*, mostra la vida de John Forbes Nash[33], des dels seus inicis a Princeton, la seva lluita amb l'esquizofrènia paranoide, que es manifestarà "amb un Nash treballant pel govern desxifrant codis", la seva relació amb Alicia Nash i les seves aportacions al camp de les matemàtiques i de l'economia, en especial a la teoria de jocs, fent-lo mereixedor del Nobel d'Economia l'any 1994 per la transcendència de les aplicacions dels seus descobriments.

3.2.2.1 Jocs amb estratègia guanyadora

A l'escena del minut 00:08:39 podem veure com els companys de Nash estan jugant a un joc de taula, el go[34]. Nash apareix en escena, després de dir que intenta extraure un algoritme que defineixi el moviment de les palomes. El seu company Hansen el repta a jugar. Nash accepta i comencen a jugar; després d'un temps de partida, Nash perd i confús diu a Hansen "no podies guanyar, he fet la primera jugada, el meu joc (estratègia) era perfecte".

[33] John Forbes Nash (1928-2015), matemàtic estatunidenc.
[34] El go és un joc de taula d'estratègia per a dos jugadors originat a Xina.

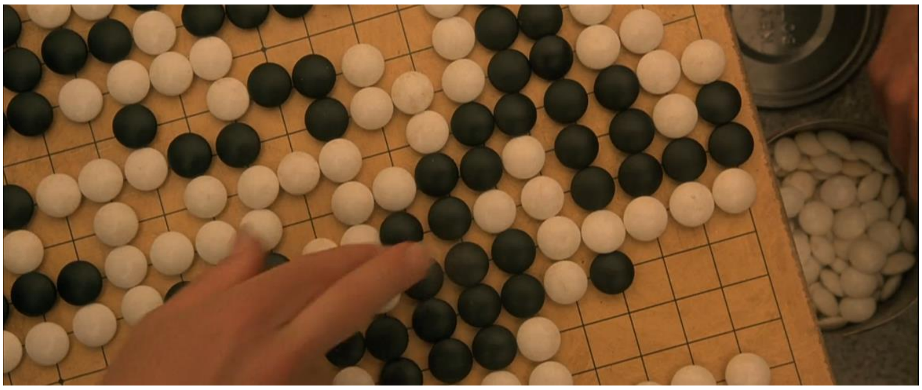


Figura 7. Una mente maravillosa: imatge del minut 00:10:16

- Experiència didàctica

L'escena dona peu a proposar un senzill joc d'estratègia.

Qüestió a) Tenim 21 palets, 2 jugadors agafen palets per torns. Poden agafar d'un a tres palets cada vegada. Perd el joc el jugador que agafa l'últim palet.

i. Quin jugador té avantatge, el que agafa primer o el que agafa segon?
És a dir, quin jugador guanyarà la partida si segueix al peu de la lletra una determinada estratègia faci el que faci l'altre?

ii. Què passa si un dels dos jugadors, el que té una estratègia guanyadora, no l'aplica?
iii. Canvia el problema si en comptes de 21 palets per agafar n'hi ha 22?

✓ *Solució:*

i. El jugador que té una estratègia guanyadora amb 21 palets és el segon, perquè sempre podrà completar fins a 4 el conjunt de palets agafats en cada torn entre tots dos jugador, de forma que l'últim palet l'agafarà el primer jugador.
ii. Si, amb 21 palets, el segon jugador no aplica la seva estratègia guanyadora en algun dels torns, és el primer jugador el que passa a tenir-la.
iii. Si hi ha 22 palets, i el primer jugador n'agafa un de sol en el primer torn, tenim 21 palets i el segon jugador passa a tenir el mateix paper que tenia el primer quan hi havia 21 palets, per tant l'estratègia guanyadora la té ara el primer jugador.

3.2.2.2 Jocs amb decisions simultànies

Al minut 00:11:34, el protagonista diu "... en tota competició sempre perd algú, si pogués trobar una equació d'equilibri on no predominés cap fet concret i no perdés ningú, t'imagines l'efecte que tindria?...."

Més endavant, al minut 00:18:40 Hansen i els seus companys diuen ".... Adam Smith pare de la economia moderna va dir que en la competència l'ambició individual beneficia el bé comú." És aleshores quan Nash diu que "Adam Smith s'equivocava quan deia que per al millor resultat cada membre del grup ha de fer el millor per ell, això va dir... incomplet; perquè per a aconseguir el millor resultat cada membre del grup ha de fer el millor per ell mateix i el millor pel grup... Adam Smith es va equivocar".

- Experiència didàctica

Les dues escenes introdueixen l'equilibri de Nash[35], del què en podem fer una aplicació.

Considerem aquestes dues situacions:

Qüestió a) Suposem dues empreses A i B que competeixen en el mateix mercat i que s'estan plantejant augmentar els preus, mantenir-los o disminuir-los. Òbviament tenen control sobre les seves decisions, però no sobre les del seu competidor. Els nombres de la taula indiquen el percentatge de quota de mercat que augmentarà o disminuirà l'empresa A enfront de l'empresa B (el que guanya A ho perd B i el que perd A ho guanya l'empresa B). Quina estratègia adoptarà cada empresa?

		Empresa B		
		Augmenta	Manté	Disminueix
Empresa A	Augmenta	4	-2	-7
	Manté	6	0	-3
	Disminueix	10	5	**2**

✓ *Solució:*

Amb aquesta informació, totes dues empreses haurien de disminuir els preus, perquè aquesta estratègia per a totes dues és dominant, és millor que qualsevol de les altres en tots els casos.

La casella ombrejada, on A guanya un 2% de quota de mercat i per tant B en perd un 2% és un equilibri de Nash, perquè cap de les dues té cap incentiu per canviar-la.

Qüestió b) Imaginem un concurs amb dos concursants A i B. Hi ha 30000 euros de premi possible i cada concursant pot decidir quedar-s'ho tot o repartir-ho a parts iguals i ho fa sense saber que escollirà l'altre concursant. En aquest joc cada concursant tracta de guanyar-se la confiança de l'altre tot dient que sense cap mena de dubte ho repartirà, però pot estar mentint sobre les seves intencions.

El resultat final el donem resumit en aquesta taula.

		Concursant B	
		M'ho quedo tot	**Ho Reparteixo**
Concursant A	**M'ho quedo tot**	**(0,0)**	(30000,0)
	Ho Reparteixo	(0,30000)	(15000, 15000)

[35] Aquest concepte apareix esmentat més endavant a la pel·lícula. L'equilibri de Nash és, segons el llibre *Los premios Nobel de Economía*: "Nash ha demostrat que hi ha, almenys, un resultat estable en els joc no cooperatius i que es tracta d'un equilibri on cap dels jugadors pot millorar el seu propi guany escollint una estratègia diferent, quan tots els jugadors anticipen de manera correcta l'estratègia dels altres. A més a més, encara que cada jugador actuï de forma racional, l'equilibri de Nash també mostra que la interacció de les decisions comporta, amb freqüència, una irracionalitat col·lectiva."

El primer nombre del parèntesi indica els guanys del concursant A i el segon nombre els guanys del concursant B.

✓ *Solució:*

Troben un equilibri de Nash quan tots dos diuen "m'ho quedo tot". Aquesta lògica porta però als dos concursants a decidir quedar-s'ho tot malgrat que seria millor per a tots dos dir: "Ho reparteixo". Però no tenen cap incentiu econòmic per canviar d'estratègia.

3.2.3 *Ágora*

Pel·lícula inspirada en la novel·la històrica *Hypatia, la mujer que amó la ciencia*, de Pedro Gálvez. Es desenvolupa en la ciutat d'Alexandria[36], Egipte, l'any 391 dC, sota el poder de l'imperi romà. El film té dos eixos fonamentals, la història, que ens mostra les discrepàncies culturals i religioses del moment, que afectaren amb violentes revoltes a la llegendària biblioteca, i les matemàtiques, en què la protagonista serà l'astrònoma Hipàcia[37], qui, amb una prodigiós enginy, serà capaç de fer avenços que no només repercutiran en el món de l'astronomia sinó també en les matemàtiques, tot lluitant per salvar la saviesa del món antic.

3.2.3.1 Còniques

Les còniques són el concepte matemàtic més rellevant de la pel·lícula, ja que hi apareixen explícitament. Al llarg de la cinta en tenim dues escenes força significants.

D'una banda, al minut 00:24:53, Hipàcia menciona el con d'Apol·loni, i n'esmenta el cercle, l'el·lipse, la paràbola, i diu que aquell dia n'examinaran la hipèrbole. Al minut 1:15:42 Sinesi es sorprèn al veure un con d'Apol·loni, que Hipàcia té a la seva biblioteca, on fa classe. Destaca que utilitza el con, que ha fet ella, per ensenyar als alumnes les quatre corbes, que Sinesi reconeix ràpidament (cercle, el·lipse, paràbola i hipèrbole). Ell queda impressionat, mentre que ella es pregunta el per què de la convivència del cercle amb formes tan "impures".

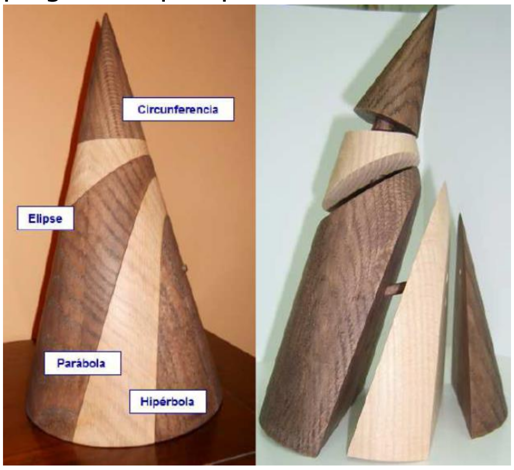


Figura 8. Còniques: imatge de https://culturacientifica.com/2015/06/24/la-retorica-de-las-conicas/

---

[36] Carl B.Boyer, *Historia de la matemàtica*, pàgina 235: "no hi ha hagut cap altra ciutat que hagi estat el centre de l'activitat matemàtica durant un període tan llarg de temps com ho fou Alexandria des dels dies d'Euclides (cap al 300 aC) fins la mort d'Hipàcia.

[37] Hipàcia d'Alexandria (350/370-415).

D'altra banda, al minut 1:37:03, Hipàcia segueix amb les seves qüestions astronòmiques, en concret la posició del Sol, en el marc de la pregunta: com podria ocupar dues posicions a la vegada? La resposta la troba tot seguit, i desmuntant un con d'Apol·loni troba el què necessita. Procedeix, amb ajuda d'Aspasi, a dibuixar una el·lipse a la sorra (mètode del jardiner), i serà d'aquesta forma amb el que podrà respondre les seves qüestions respecte les òrbites terrestres. D'aquesta escena, però, cal destacar que les òrbites el·líptiques van ser publicades per Johannes Kepler[38] dotze segles més tard, per tant, aquesta escena manca de rigor històric.[39]

Figura 9. Ágora: imatge del minut 1:40:21

- Experiència didàctica

Les còniques, al ser un concepte treballat a primer de Batxillerat, permeten proposar activitats relacionades.

Qüestió) Construir una el·lipse pel mètode del jardiner, determinar-ne els elements, l'equació i l'excentricitat.

Exemple:

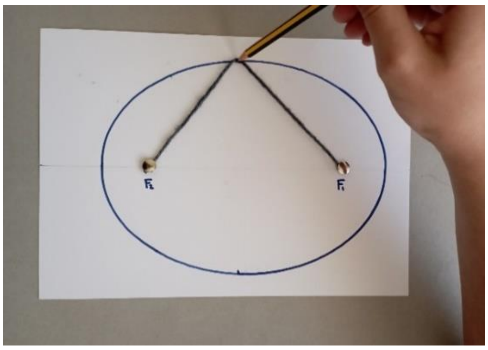


Figura 10. El·lipse pel mètode del jardiner (construcció)

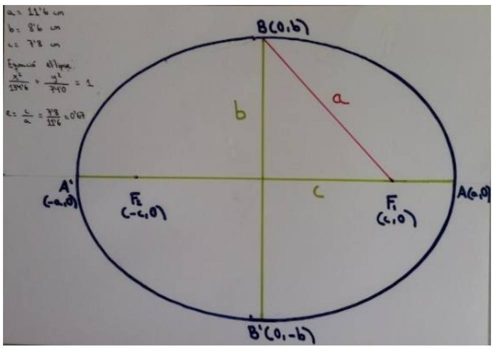


Figura 11. El·lipse mètode del jardiner (resultat final)

---

[38] Johannes Kepler (1571-1630), astrònom i matemàtic alemany.
[39] Sorando, *Aventuras matemáticas en el cine.*

3.2.3.2 Història de les matemàtiques: matemàtics de l'antiguitat

Tenint en compte el context tant històric com geogràfic en el que s'ambienta el film, no és cap sorpresa que al llarg de la cinta ens trobem, a banda d'Hipàcia, amb referències a matemàtics d'èpoques anteriors. Alguns dels mencionats són: Claudi Ptolemeu[40] (mencionat en relació al sistema de Ptolemeu i també als epicicles), Euclides[41] (mencionat en relació a la primera regla o axioma d'Euclides, que al film expliquen senzillament: si dues coses són iguals a una tercera, totes són iguals entre si), Apol·loni de Perge[42] (mencionat en relació al con d'Apol·loni), Aristarc de Samos[43] (en relació a les seves aportacions a l'astronomia, tal com l'heliocentrisme), Plató[44] (en relació a l'astronomia), Hiparc de Nicea[45] (en relació a l'astronomia) i Teó d'Alexandria[46] (apareix a la pel·lícula; pare d'Hipàcia i matemàtic).

- Experiència didàctica

Una de les obres cabdals de la matemàtica de l'antiga Grècia són els Elements d'Euclides, una sèrie de tretze llibres que dóna peu a una breu aplicació didàctica.

Qüestió a) Què és un axioma en matemàtiques?

Qüestió b) Què és un postulat en matemàtiques?

Qüestió c) Quins eren els cinc axiomes d'Euclides?

Qüestió d) Quins eren els cinc postulats d'Euclides en que es fonamenta la geometria que s'estudia habitualment a secundària?

[40] Claudi Ptolemeu (85-165 o 100-170).
[41] Euclides (va viure cap al 300 aC).
[42] Apol·loni de Perge (262 aC-190 aC).
[43] Aristarc de Samos (ca.310 aC–230 aC.)
[44] Plató (427 aC-347 aC).
[45] Hiparc de Nicea (190 aC-120 aC).
[46] Teó d'Alexandria (335-400).

3.2.4 *El hombre que conocía el infinito*

Film que ens mostra la real, però àrdua vida del matemàtic indi Srinivasa Ramanujan[47], considerat avui en dia un geni de la matemàtica. La història començarà amb el jove Ramanujan vivint a la zona del Madràs, i ens conduirà fins a la seva arribada i estada a Anglaterra, a Cambridge, on, amb l'ajuda del matemàtic anglès Hardy[48] podrà mostrar al món tot allò que dicta la seva ment, inspirada, segons ell diu, per una divinitat.

3.2.4.1 Patrons

Al minut 00:11:07, Ramanujan comenta a la seva esposa Janaki que hi ha patrons en tot: el color de la llum, els reflexos a l'aigua... A continuació, explica que en les matemàtiques aquells patrons es revelen d'una forma admirable i increïble, i destaca que "és molt bonic", demostrant així que la seva connexió amb les matemàtiques és extraordinàriament profunda.

- Experiència didàctica

El fragment, però més encara la reflexió de Ramanujan, ens permet abordar multitud de problemes matemàtics.

Qüestió[49]) La successió a_n verifica que $a_1 = 1$ *i* $a_{m+n} = a_m + a_n + m \cdot n$ per a qualsevol parell de nombres enters positius m i n. Quin és el valor del terme a_{100}?

A) 100 B) 2014 C) 4950 D) 5050 E) No pot determinar-se

✓ *Solució:*

Els termes de la successió seran:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + a_1 + 1$$
$$a_3 = a_2 + a_1 + 2 = a_1 + a_1 + a_1 + 1 + 2$$
$$a_4 = a_3 + a_1 + 3 = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + 1 + 2 + 3$$

Observem que els termes segueixen un patró:

$$a_{100} = 100 \cdot a_1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 \underset{\text{Progressió aritmètica}}{=} 100 + \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 5050$$

---

[47] Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemàtic indi autodidacta que va fer contribucions notables en aquesta ciencia.
[48] Godfrey Harold Hardy (1877-1947), matemàtic anglès conegut per haver formulat la desigualtat de Hardy.
[49] XVIII Concurso de Primavera de Matemáticas 2014, Universidad Complutense de Madrid, 1ª Fase, Nivel 4, Problema 15.

3.2.4.2 Funció gamma

Al minut 00:14:23 podem veure com Hardy rep una carta, que ha arribat del Madràs, Índia, per part del desconegut, aleshores, Ramanujan, que es presenta com a empleat d'un departament de comptabilitat. En aquesta carta, que conté diversos fulls, afirma que pot dotar de significat els valors negatius de la funció gamma. Hardy, igual que el seu majordom, creu que es tracta d'una broma per part del seu company i amic Littlewood[50], qui després ho nega, fent que Hardy comenci a revisar el contingut del sobre amb profunditat, en part perquè, tal com ha comentat al seu amic John Littlewood, la carta, segons ell per part d'un inculte empleat indi de Madràs, reta afirmacions que ell ha fet en els seus treballs.

3.2.4.3 Particions

Al llarg de tota la pel·lícula, tot i que gairebé no es vegi explícitament, Ramanujan col·labora amb Hardy entorn de les particions, tal com van fer en la vida real. Tot i això, al minut 00:42:18, quan el servent de Hardy li pregunta què hi ha en el paper que Ramanujan li acaba de donar Hardy respon que són particions. Posa com a exemple p(4)=5 per explicar el concepte al seu ajudant, i li diu, que això simplement significa que hi ha 5 maneres diferents de sumar el número 4. Destaca que quan augmentes el nombre de p a 100 hi ha 204226 combinacions diferents, i que el Major MacMahon ho va fer a mà trigant setmanes; i que ara Ramanujan creu poder elaborar una fórmula, en la que poses un número qualsevol i et surten les particions "com per art de màgia", però es considera quelcom impossible.

- Experiència didàctica

Una partició de un nombre enter positiu és una forma d'expressar-lo com a suma d'enters positius. Si n és el nombre la quantitat de particions que es poden calcular la representem per P(n).

Qüestió) Calcular les particions d'alguns nombres "petits" explícitament.

✓ *Solució:* les particions pels 7 primers[51] enters positius es mostren en la taula següent:

Nombre	Nombre de particions	Particions explícites
1	1	[1]
2	2	[1, 1], [2]
3	3	[1, 1, 1], [1, 2], [3]
4	5	[1, 1, 1, 1], [1, 1, 2], [2, 2], [1, 3], [4]
5	7	[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 2], [1, 1, 3], [2, 3], [1, 4], [5]
6	11	[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3], [1, 1, 4], [2, 4], [1, 5], [6]]
7	15	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 2, 2], [1, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 3], [1, 1, 2, 3], [2, 2, 3], [1, 3, 3], [1, 1, 1, 4], [1, 2, 4], [3, 4], [1, 1, 5], [2, 5], [1, 6], [7]

$[1,2]$ significa que 3 es pot expressar com $1+2$

[50] John Edensor Littlewood (1885-1977), matemàtic britànic que col·laborà amb G.H. Hardy i que refutà una conjectura de Gauss.

[51] Notar que les particions d'un enter creixen ràpidament.

3.2.4.4 Càlcul mental

En l'escena del minut 00:07:21 podem veure com l'encarregat que està per sobre de Ramanujan, quan aquest treballa de comptable, li pregunta per què no utilitza l'àbac[52], al que Ramanujan respon que ho fa més de pressa mentalment; donant-nos ja una pista de la seva destresa pel càlcul mental.

També ho observem en l'escena del minut 1:05:52, quan Hardy acompanya a Ramanujan a conèixer a Percy Alexander MacMahon que s'oposa a les idees de Ramanujan sobre el problema de les particions. Aquest el rep tot preguntant-li l'arrel quadrada de 58639, al que Ramanujan, contesta, ràpidament, 242, i després de la insistència de MacMahon, li'n dona també els primers decimals, 242,1549090...; cal destacar que $\sqrt{58639}$ és irracional . Continuen amb Srinivasa preguntant-li a MacMahon, davant la petició d'aquest per que Ramanujan el posi a prova, el mateix nombre (58639) al quadrat, al que MacMahon respon sense, cap dificultat, 3438532321.

- Experiència didàctica

Sense arribar al nivell mostrat a la pel·lícula, podem investigar les regles per calcular els quadrats d'alguns nombres; aquí n'hi ha dues de proposades:

Qüestió a) Quadrats de nombres acabats en 5.

Qüestió b) Quadrats de potencies de 10 més o menys una unitat.

3.2.4.5 Combinatòria

Tot i que molt de passada, la combinatòria[53] apareix (simplement mencionada) en algun moment del film. Primer, quan al minut 1:05:22 Hardy li diu a Ramanujan que, sent que ja té una actitud més rigorosa, hauria de conèixer al Major MacMahon, catedràtic de combinatòria a la Universitat. A l'escena següent, concretament al minut 1:06:21, quan Hardy i Ramanujan van a veure MacMahon, aquest, entre altres qüestions matemàtiques, esmenta, després de contestar a una pregunta de càlcul mental per part de Ramanujan (escena esmentada a l'apartat d) que la combinatòria és el seu; i afegeix que és "un joc de daus glorificat".

- Experiència didàctica

La combinatòria, tant present en problemes de la vida quotidiana, com ara en els jocs d'apostes, és una eina útil en situacions molt diverses.

Qüestió[54]) Quantes llistes de zeros i uns, de longitud 20, tenen tots els zeros consecutius o tots els uns consecutius o totes dues coses alhora?

A) 190	B) 192	a) 211	C) 380	D) 382

[52] Segons diccionari.cat: 1.1 Aparell simple de càlcul digital consistent en un marc proveït de filferros paral·lels, al llarg dels quals hom fa córrer boles foradades, usat per a fer totes les operacions aritmètiques bàsiques.
[53] Segons diccionari.cat: 3.*femení* MATEMÀTIQUES Part de la matemàtica que estudia la formació de subconjunts partint d'un conjunt donat, tenint en compte el nombre i l'ordenació dels seus elements.
[54] XVIII Concurso de Primavera de Matemáticas 2014, Universidad Complutense de Madrid, 1ª Fase, Nivel 4, Problema 25.

✓ *Solució:*

Contem els casos:

20 zeros → 1

19 zeros, 1 u → 20 (l'u en cadascuna de les posicions)

18 zeros, 2 uns → 19+1 (els uns junts → 19 llocs i els uns separats)

17 zeros, 3 uns → 18+2

...

2 zeros, 18 uns → 1+19

1 zero, 19 uns → 20

20 uns → 1

En total tenim: $19 \cdot 20 + 2 = 382$

3.3 Cinema i matemàtica aplicada

3.3.1 *Figuras ocultas*

Pel·lícula basada en fets reals, és l'adaptació cinematogràfica del llibre *Figuras Ocultas*, de Margot Lee Shetterly. Ambientada al Centre d'Investigació Langley de la NASA ubicat a Hampton a l'estat de Virginia, a començaments dels anys seixanta. El film ens conduirà per les carreres professionals de Katherine Johnson, Mary Jackson i Dorothy Vaughan, tres dones científiques que treballaven a la NASA, inicialment com a calculadores. Aquesta feina requeria d'un nivell matemàtic avançat, però, donada la situació racial del país, i agreujada pel fet de ser dones, la seva feina no era suficientment reconeguda a l'agència. Tot i ser víctimes de la segregació racial i el masclisme de l'època, totes tres, no conformes amb les seves respectives situacions, lluitaran per ser reconegudes, i tindran un paper essencial en la carrera espacial.

3.3.1.1 Equacions polinòmiques

En una de les primeres escenes de la cinta podem veure a una jove Kate[55] resoldre una equació de quart grau. Kate destaca que "si el producte de dos factors és 0, és evident que algun dels factors del producte té aquell valor...". Veiem com resol les dues equacions de segon grau per separat; i destaca que "a partir d'allí la resta és molt fàcil".

[55] Katherine Coleman (1918-2020)

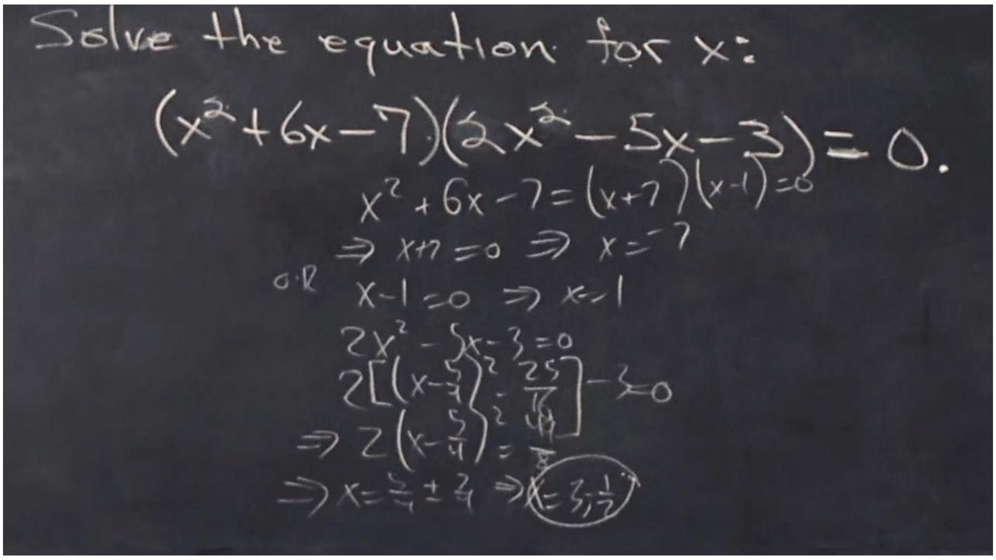


Figura 12. Figuras ocultas: imatge del minut 00:02:31

Més endavant en el film veiem altres tipus d'equacions. Al minut 00:25:43 veiem com a la pissarra d'Al Harrison està farcida d'equacions. Hi ha un pla, posterior a aquest, al minut 00:26:33, en què veiem com el moviment es descriu mitjançant coordenades esfèriques, però no es veuen prou bé els càlculs, ja que no és un primer pla.

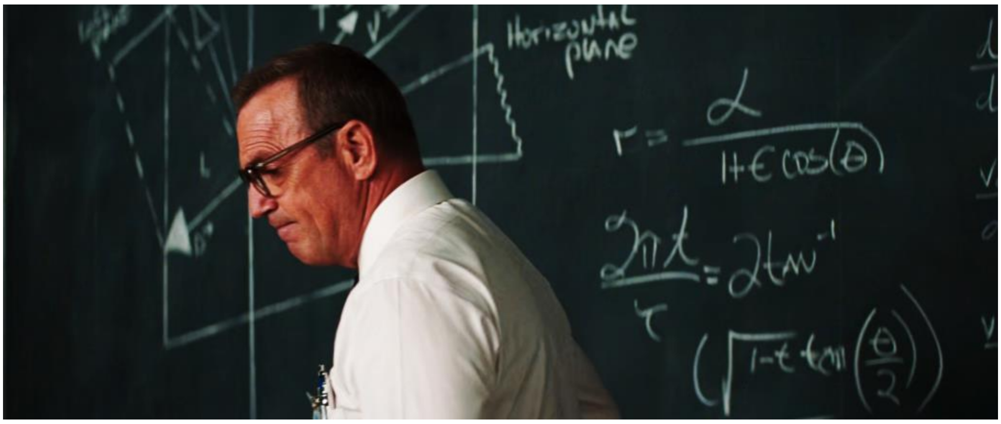


Figura 13. Figuras ocultas: imatge del minut 00:25:43

Posteriorment, quan s'ha de calcular la trajectòria del coet s'utilitzen equacions diferencials.

Figura 14. Figuras ocultas: imatge del minut 01:20:41

- Experiència didàctica

A partir d'aquestes escenes es poden proposar activitats com la següent:

Qüestió[56]) Quin és el producte de les solucions de l'equació $(x-4)(x-2)+(x-2)(x-6)=0$

A) 12 B) 20 C) 48 D) 10 E) 96

3.3.1.2 Geometria analítica: òrbites el·líptiques i parabòliques

Hi ha escenes de la pel·lícula que constaten la necessitat de tenir algú amb coneixements de geometria analítica (per exemple Katherine), deixant entreveure que aquest apartat de les matemàtiques té una funció essencial en els càlculs per llençar coets a l'espai. Hi ha algun moment en el film, quan s'estudia el moviment de la càpsula espacial, en el que es mencionen també les òrbites el·líptiques i parabòliques, sovint en el mateix instant.

- Experiència didàctica

La geometria analítica que es treballa a primer de Batxillerat, ens brinda l'oportunitat de proposar aquestes qüestions:

Qüestió a[57]) El conjunt de punts del pla (x,y) les coordenades dels quals satisfan l'equació $x^2-xy+x-y=0$ és:

A) Una el·lipse B) Una paràbola C) Un punt D) Una recta E) Dues rectes secants

Qüestió b[58]) El conjunt de tots els valors possibles del paràmetre m que fan que les corbes d'equacions $x^2+y^2=1$ *i* $y=x^2+m$ tinguin exactament un punt en comú és:

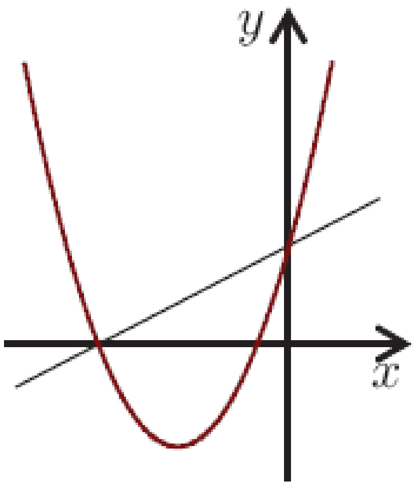
A) $\left\{\frac{-5}{4},-1,1\right\}$ B) $\left\{\frac{-5}{4},1\right\}$ C) $\{-1,1\}$ D) $\left\{\frac{-5}{4}\right\}$ E) $\{1\}$

[56] XX Concurso de Primavera de Matemáticas 2016, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 3.

[57] XXI Concurso de Primavera de Matemáticas 2017, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 10.

[58] Proves Cangur 2023, Societat Catalana de Matemàtiques, Nivell 4, Problema 8.

Qüestió c[59]) La paràbola de la figura té l'equació $y = ax^2 + bx + c$. Quina de les equacions següents podria ser l'equació de la recta de la figura?



A) $y = ax + b$

B) $y = bx + c$

C) $y = cx + a$

D) $y = ax + c$

E) $y = cx + b$

3.3.1.3 Computació

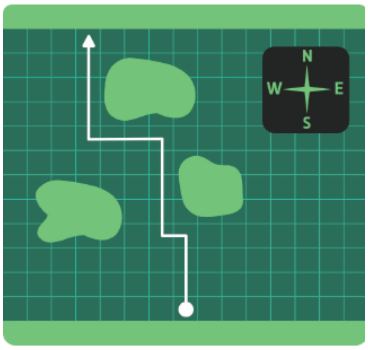
En diversos moments del film és menciona l'IBM[60]. La importància d'aquest ordinador ve donada per la necessitat que tenen de fer molts càlculs en el menor temps possible, tal com diuen a la pel·lícula, és capaç de resoldre 24000 multiplicacions per segon (l'IBM 7090). Tot i ser una màquina extraordinària, no cal oblidar que es necessita gent, com les protagonistes de la cinta, per ordenar-li què ha de fer, o dit d'una altra manera, per programar-lo. En aquest sentit es menciona el llenguatge de programació Fortran[61].

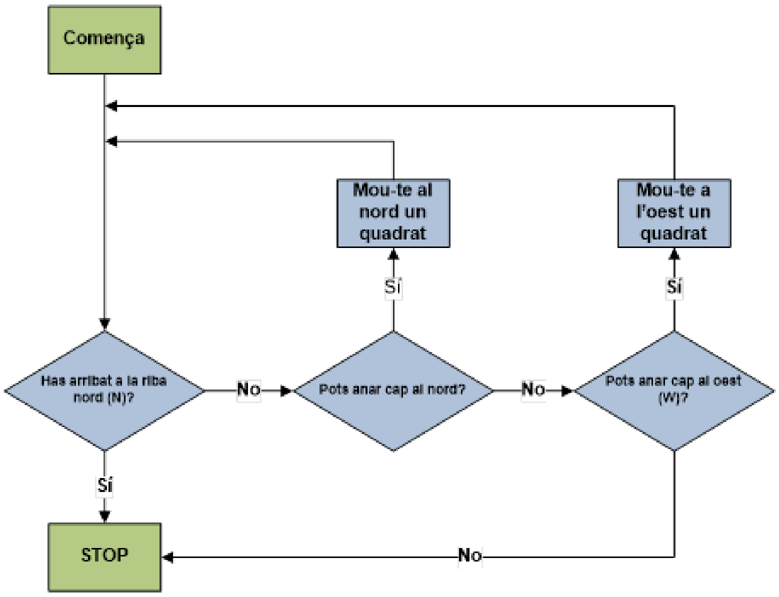
- Experiència didàctica

Els llenguatges de programació són un conjunt d'instruccions lògiques que ordenen a la computadora com ha de procedir. Proposo activitats relacionades com la següent:

Qüestió[62]) Un vaixell robotitzat surt de la riba sud del riu cap a la riba nord. Ha de navegar entre les illes del riu. El vaixell utilitza un mapa digital per trobar el seu camí d'un quadrat cap al següent. El vaixell només pot anar a un quadrat sempre i quant aquest no estigui bloquejat per cap part d'una illa. Observeu que està programat per anar cap al nord o cap a l'oest, prioritzant sempre anar cap al nord si és possible. El vaixell utilitza aquestes instruccions:

[59] Proves Cangur 2021, Societat Catalana de Matemàtiques, Nivell 4, Model de la prova A, Problema 10.
[60] International Business Machines
[61] Contracció de l'anglès *The IBM Mathematical **For**mula **Tran**slating System*.
[62] 2020 Bebras Australia Solutions Guide Round 2. Bebras és un concurs que té com a objectiu ajudar a que els estudiants de diverses edats explorin el seu talent i passió per la informàtica i el pensament computacional tot resolent reptes interessants.

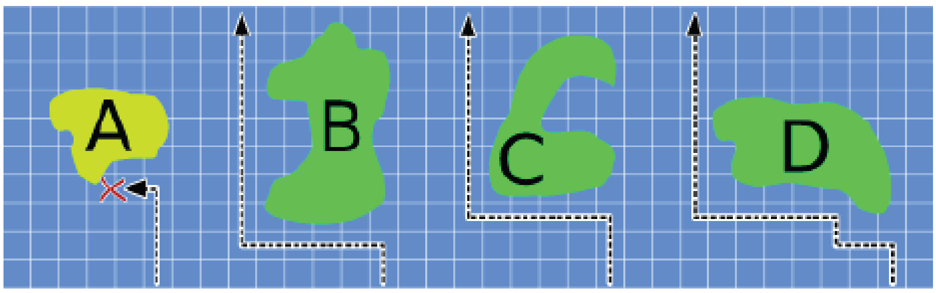




Uns pirates volen instal·lar una illa artificial per atrapar el vaixell. Atansar-se a l'illa podria aturar el vaixell mentre segueix les seves instruccions.

La pregunta és: quina d'aquestes illes podria ser una trampa per al vaixell robotitzat?

✓ *Solució:*



La resposta correcta és la A, tal com es veu en aquestes figures.

3.3.2 *Midiendo el mundo*

Pel·lícula basada en el llibre *El mesurament del món* de Daniel Kehlmann que narra dues històries paral·leles, de dos enormes personatges que van compartir no només època sinó talent en els seus respectius camps: Alexander von Humboldt[63] i Carl Friedrich Gauss[64], d'orígens socioeconòmics completament diferents. El film narrarà, per separat la major part del temps, les seves respectives vides, passant per aspectes personals, però també professionals, donant importància a les extraordinàries aportacions que tots dos van fer en el seu àmbit.

3.3.2.1 Progressions aritmètiques

Al començament del film, al minut 00:04:34 apareix la molt coneguda escena en què el mestre, quan Gauss era un nen, va fer sumar als seus alumnes tots els nombres del 1 al 100. En l'escena apareix la fórmula de la suma dels primers n enters positius, què és l'aplicació de la fórmula de la suma de les progressions aritmètiques d'aquest cas concret. $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

- Experiència didàctica

Donat el reconeixement d'aquest moment de la infantesa de Gauss, proposo la següent activitat.

Qüestió a[65]) Sigui S_n la suma dels n primers termes de la progressió aritmètica $8, 12, \ldots$ i T_n la suma dels n primers termes de la progressió aritmètica $17, 19, \ldots$. Aleshores $S_n = T_n$ per a:

A) Cap valor de n B) Un valor de n C) Dos valors de n D) Tres valors de n E) Més de tres valors de n

Qüestió b[66]) Els quatre primers termes d'una progressió aritmètica són $a, 9, 3a - b$ i $3a + b$. Quin és el nombre que ocupa el lloc 2'11 en aquesta progressió?

A) 8041 B) 8043 C) 8045 D) 8047 E) 8049

Qüestió c[67]) Si la suma dels primers vint termes d'una progressió aritmètica de diferència 5 és S, la suma dels deu primers termes que ocupen un lloc parell és:

A) $S-50$ B) $\frac{S}{2}$ C) $\frac{S}{2}+25$ D) $\frac{S}{2}-25$ E) $\frac{S+100}{2}$

63 Alexander von Humboldt (1769-1859), explorador, naturalista i geògraf alemany.
64 Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemàtic, astrònom i físic alemany.
65 X Concurso de Primavera de Matemáticas 2006, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 8.
66 XV Concurso de Primavera de Matemáticas 2011, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 16.
67 XVIII Concurso de Primavera de Matemáticas 2014, Universidad Complutense de Madrid, 1ª Fase, Nivel 4, Problema 4.

3.3.2.2 Història de les matemàtiques: heptadecàgon

Al minut 00:24:34 a Gauss, ja adult, se li demana una explicació sobre un problema que ha resolt, ja que alguns consideren que no és això el que li deu al seu país. Gauss explica, pels que no ho saben, que allò que hi ha al paper és un heptadecàgon, i es defensa dient que ha resolt un problema de més de 2000 anys per sempre mai més.

El 30 de març de 1796, Gauss va aconseguir construir, amb regle i compàs, un polígon regular de 17 costats, l'heptadecàgon. Fins a aquell moment ja s'havia aconseguit construir pentàgons regulars, però cap altre polígon regular d'un nombre primer de costats.

- Experiència didàctica

La construcció de polígons regulars amb regle i compàs no és en general senzilla. Proposo una activitat relacionada de menor dificultat.

Qüestió a) Investigar com és construeix amb regle i compàs un hexàgon regular i un pentàgon regular.

3.3.2.3 Triangulació

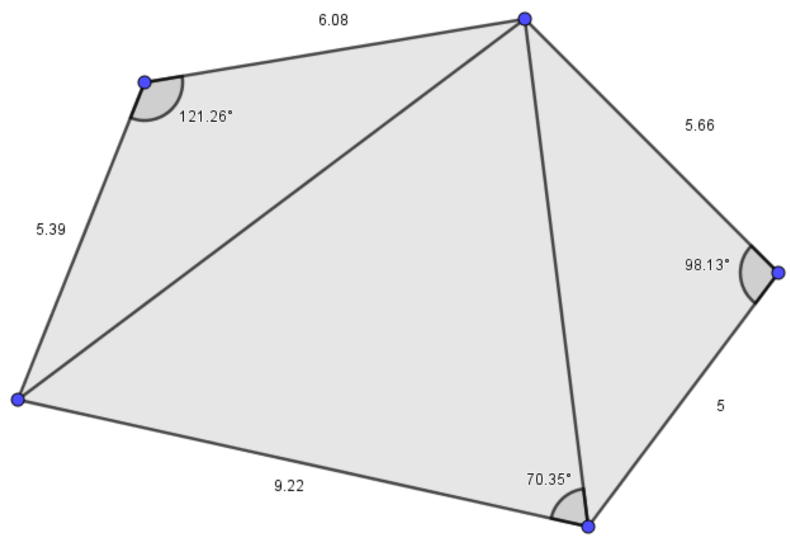
Al minut 00:34:24 a Gauss li pregunten que fa pujat sobre una escala. Ell contesta que està mesurant la Terra amb un teodolit; destaca que és una feina i que marca triangles, i que se'n diu triangulació. Després, juntes una sèrie de triangles i ja tens tot el pla.

- Experiència didàctica

La triangulació, en aquest cas, presenta una aplicació força interessant.

Qüestió a) Un topògraf ha pres les mesures següents, expressades en metres. Es tracta de trobar la superfície de la figura. A la pràctica podem trobar la superfície d'un triangle si en coneixem els tres costats (a, b i c) amb la fórmula d'Heró.

$$A=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} \quad on \quad p=\frac{a+b+c}{2}$$



3.3.2.4 Història de les matemàtiques: *Disquisitiones arithmeticae*

Al minut 01:02:30, Gauss li presenta al duc de Brunswick el seu llibre *Disquisitiones arithmeticae*, una obra d'importància cabdal en la història de les matemàtiques.

3.4.Cinema i criptografia

3.4.1 *Descifrando Enigma*

Biopic de caràcter bèl·lic que narra la història d'Alan Turing[68], matemàtic britànic que va tenir un paper essencial desxifrant els codis de la Màquina Enigma, usada pels nazis i de vital importància en el desenvolupament de la Segona Guerra Mundial. La pel·lícula mostrarà certes escenes de la joventut de Turing, però se centrarà en la seva vida adulta, especialment en els seus dies com a criptoanalista durant la Segona Guerra Mundial, passant per la seva homosexualitat però tenint com a eix principal la seva tasca en el desxifrat de la complexa màquina alemanya de xifrat a Bletchley Park[69].

3.4.1.1 Màquina Enigma

Podríem considerar la màquina Enigma l'eix principal del llargmetratge, tant a nivell general com pel que respecta a l'aspecte matemàtic. Al llarg del film, la feina de Turing i dels seus companys, tots ments brillants, amb alta capacitat per les matemàtiques i la criptografia, serà, tal com indica el títol, desxifrar Enigma per tal d'aconseguir així un avantatge estratègic. Al llarg del film veurem els durs esforços que comportava realitzar aquest treball i l'enginy i esforç col·lectiu necessaris per poder avançar.

Turing va crear una màquina que permetia mecanitzar la tasca de desxifrat. Donat que fer-ho manualment era impossible, ja que els nazis canviaven els codis diàriament, per enfrontar-se a Enigma calia una altra màquina. La feina de Turing ha inspirat a generacions d'investigadors en la recerca sobre el que els científics han anomenat "Màquines de Turing", que avui coneixem com a ordinadors (escena del minut 01:49:43).

---

[68] Alan Mathison Turing (1912-1954), matemàtic i lògic britànic.
[69] Instal·lació militar britànica on es van fer els treballs de desxifrat dels codis alemanys.

- Experiència didàctica

Per entendre tipus de problema que abordava el nostre protagonista proposo una situació de desencriptat.

En la taula[70] següent tenim les freqüències amb que apareixen les lletres en la llengua castellana.

Freqüència alta		Freqüència mitjana		Freqüència baixa	
Lletra	%	Lletra	%	Lletra	%
E	16,78	R	4,94	Y	1,54
A	11,96	U	4,80	Q	1,53
O	8,69	I	4,15	B	0,92
L	8,37	T	3,31	H	0,89
S	7,88	C	2,92	G	0,73
N	7,01	P	2,76	F	0,52
D	6,87	M	2,12		

Qüestió a) Elabora una taula de freqüències de les lletres d'aquest text:

OCDKWYC MOXKXNY OX EX BOCDKEBKXDO WEI LYXSDY K VK YBSVVK NOV VKQY

del qual sabem que està escrit en llengua castellana i que s'ha xifrat canviant una lletra de l'alfabet per una altra tot mantenint la separació entre paraules.

Lletra	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
K		
Y		
O		
X		
V		
D		
C		
E		
B		
W		
N		
S		
I		
L		
Q		
M		

Qüestió b) Podries comparant les dues taules i amb una mica d'enginy desxifrar aquest missatge?

✓ *Solució:*

"Estamos cenando en un restaurante muy bonito a la orilla del lago"

---

[70] Segons un estudi sobre textos del diari El País d'Enrique Fontanillo (la mostra presa són els exemplars d'aquest diari publicats durant una setmana, 52619 lletres en total).

3.4.1.2 Irracionalitat de $\sqrt{2}$

A l'escena del minut 00:49:21 podem veure a Alan Turing durant la seva època estudiantil en una classe de matemàtiques, en la que el professor enuncia: "si suposem que l'arrel quadrada de 2 és un nombre racional, podem dir que l'arrel quadrada de 2 és *a* entre *b*. Si *a* i *b* són naturals, aleshores *b* no és 0..."

El professor estava explicant la demostració de la irracionalitat de $\sqrt{2}$ pel mètode de reducció a l'absurd. Ho treballen a classe en el marc dels nombres irracionals.

- Experiència didàctica

Aquest concepte es treballa a primer de batxillerat. Proposo un problema similar.

Qüestió a) Demostrar, seguint el mateix raonament que en l'escena, la irracionalitat de $\sqrt{3}$.

3.4.1.3 Estadística i presa de decisions

Al minut 1:24:41 Turing, acompanyat de Joan, li comenta al general de divisió Menzies que ja han desxifrat Enigma, però s'ha de mantenir en secret. Alan afegeix que mentrestant han de desenvolupar un sistema que els ajudi a determinar amb quanta intel·ligència actuar, quins atacs detenir i quins no; anàlisis estadístics per fer el mínim nombre de cops per poder guanyar la Guerra i el màxim nombre d'atacs abans que els alemanys sospitin[71]. Tot i la convincent explicació, el general sembla no estar segur de confiar tot això a l'estadística, a les matemàtiques, però Turing n'està completament.

3.4.2 *Descifrando el código*

Pel·lícula basada en el llibre *Alan Turing: The Enigma* d'Andrew Hodges que narra des d'un punt de vista més personal i íntim la vida del matemàtic anglès Alan Turing. Des de la seva adolescència fins la seva mort, passant per moments clau de la seva vida com la seva estança al GCHQ[72] amb l'objectiu de descodificar els missatges encriptats pels nazis amb la màquina Enigma, el robatori al seu habitatge, la seva perseguida homosexualitat, la relació que va tenir amb Joan Clarke[73] (al film Patricia Green), i també el lligam amb la seva mare. El film tanca amb la seva mort, considerada avui un suïcidi per intoxicació amb cianur de potassi.

3.4.2.1 Trencaclosques numèrics

Al minut 00:07:30, podem veure com Alan, de jove, juga amb un puzle de números. Aquest tipus de joc té un objectiu merament lúdic, i aporta diverses opcions per jugar-hi: ordenar els números amb els imparells primer, amb els parells primer, per ordre de menor a major horitzontalment o verticalment, en ordre de menor a major de forma perifèrica o fins i tot en espiral.

[71] Els comandaments alemanys de l'època conisderaven la màquina Enigma com indesxifrable.
[72] Government Communications Headquarters, un dels tres serveis d'intel·ligència del Regne Unit.
[73] Joan Clarke (1917-1996), matemàtica i criptoanalista britànica.

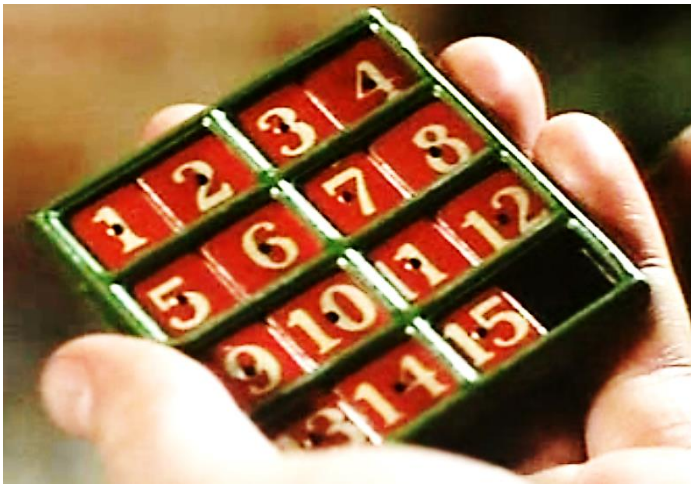


Figura 15. Descifrando el código: imatge del minut 00:07:33

- Experiència didàctica

Jocs com aquest o similars (Sudoku, Sujiko, Ken-ken, , etc.) tenen una importància cabdal sobre el tipus de problema que haurà d'afrontar Turing com a criptoanalista.

Qüestió a) Poseu en pràctica les vostres habilitats jugant a jocs de lògica. Podeu utilitzar, entre altres, el lloc web: https://www.psicoactiva.com/juegos-inteligencia/

3.4.2.2 Teorema d'incompletesa de Gödel

Al minut 00:28:30, el Sr. Knox li diu a Alan que ha estat analitzant alguns detalls del seu treball, però que no ha entès gairebé res. El contingut del treball, a grans trets és: nombres computables amb una aplicació al *Ent-scheid-ungs-problem*. Knox li'n demana una explicació a grans trets, i Turing, lleugerament sorprès procedeix a fer-la. Li diu que tracta de la dificultat de discernir entre allò que és cert i allò que és fals, destacant que és un article tècnic de lògica matemàtica, Desenvolupa la idea i menciona el llibre "Principia Mathematica" de Bertrand Russell[74] i de com va influir aquest llibre a David Hilbert[75] i acaba tot dient que el Teorema de Gödel[76] és la cosa més bonica que coneix.

- Experiència didàctica

En l'annex número 3, trobareu la transcripció completa en castellà de l'escena on Turing explica aquest teorema.

3.4.2.3 Màquina Enigma: combinatòria

La màquina Enigma no és per a res el fil conductor d'aquest llargmetratge, però podem veure com hi apareix en diversos moments. Primer de tot, apareix explícitament a l'escena inicial del film. Després, és esmentada al minut 00:36:00, quan a Turing se li diu en què ha d'estar treballant: el codi Enigma (màquina). Tal com defineix el Sr. Knox, Enigma ha estat ideat i

---

[74] Bertrand Arthur William Russell (1872-1970), filòsof i matemàtic britànic.

[75] David Hilbert (1862-1943), matemàtic alemany.

[76] Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), lògic i matemàtic austríac. Va publicar el teorema que porta el seu nom l'any 1931.

desenvolupat pels alemanys, i ho qualifica d'absolut atzucac . A continuació, Patricia li aclareix a Turing que Enigma és un codi mecànic. Instants després, podem veure una màquina Enigma.

Figura 16. Imatge de màquina Enigma (Wehrmacht Enigma I) de https://www.ciphermachinesandcryptology.com/en/enigmatech.htm de l'autor D. Rijmenants.

Al minut 00:37:36, després que Patricia li hagi explicat a Alan el funcionament d'Enigma, li comenta que és una màquina polialfabètica amb 26x26x26 possibles configuracions; Alan respon 17.576 ràpidament, però no ho considera un número tan gran. Tot i així, ella li diu que els nazis canvien la configuració a diari i que l'han anat millorant, tenint ara un total de 60 possibles combinacions (afegides) que fan un total de 1.054.560 configuracions, tal com diu ràpidament Patricia, que afegeix que a causa d'altres canvis la màquina té milers de milions de disposicions possibles.

- Experiència didàctica

En la figura 16 veiem una màquina enigma de tres rotors de 26 dents.

Qüestió a) Si la màquina tingues 8 rotors cadascun amb 26 dents quantes disposicions diferents podrien adoptar els rotors?

3.4.3 *Windtalkers*

Film ambientat a la Segona Guerra Mundial, posant el focus sobre un aspecte molt concret de la Guerra, l'ús dels navahos per enviar missatges des de terra hostil fins a bases militars o vaixells de guerra sense que els enemics poguessin descobrir-ne el significat, donada la complicació de l'idioma navaho. La pel·lícula ens condueix al camp de batalla, on la col·laboració entre navahos i militars americans serà essencial per poder guanyar batalles.

3.4.3.1 Missatges xifrats

El film gira en torn d'un fet històric concret: la col·laboració dels navahos amb l'exèrcit americà a la zona del Pacífic. En diverses escenes podem veure, d'una forma brutalment realista, en què consistia. A grans trets, el que es feia era que els navahos (xifradors), membres d'un poble amerindi, transmetessin missatges via ràdio des del camp de batalla fins a bases militars o comandaments americans on hi havia un altre navaho (desxifrador) i des dels que es poguessin emprendre les accions convenients.

Figura 17. Windtalkers: imatge del minut 00:09:12

- Experiència didàctica

Aquesta mena de xifrat, que utilitzava una llengua poc coneguda i molt simbòlica, ens brinda la oportunitat d'analitzar els avantatges i inconvenients d'aquest tipus de xifrat respecte del xifrat mecànic, tipus SIGABA, per exemple.

SIGABA	NAVAHO
Complexitat	Complexitat (idioma impenetrable, intel·ligible)
Indesxifrable	Indesxifrable
Lentitud	Rapidesa
Difícil transport	Fàcil transport
Comunicació segura	Comunicació segura
La pèrdua de la màquina no implica la pèrdua del codi automàticament -> El codi és va canviant	Amb el navaho mor el codi -> No cal canviar el codi perquè el navaho el protegeix amb la seva vida

Havent vist aquesta taula, quin tipus de xifrat creieu era més eficient en aquelles circumstàncies?

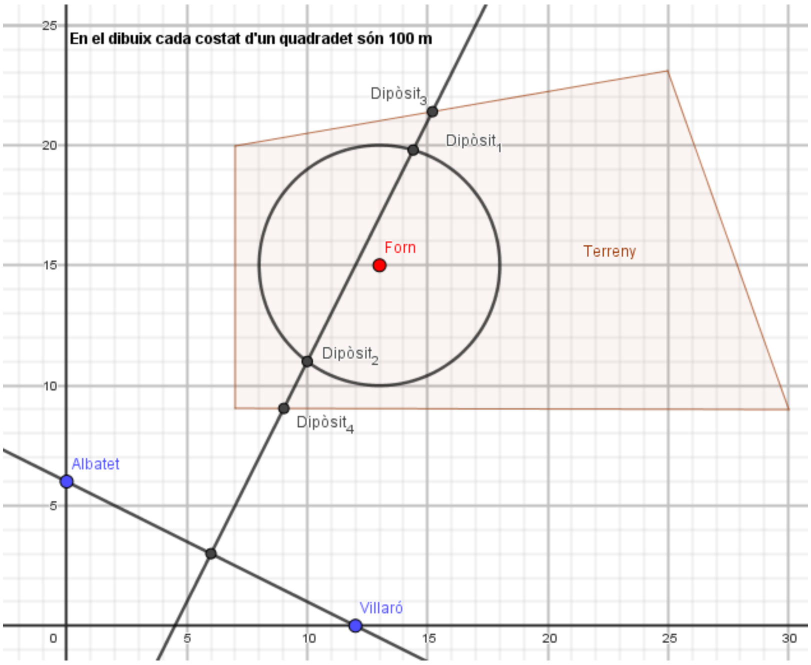
3.4.3.2 Sistema de coordenades

Al llarg de la pel·lícula veiem, en moments puntuals, la importància que tenen els sistemes de coordenades en un ambient bèl·lic. En el cas del film, aquests sistemes són utilitzats, per exemple, per comunicar-se entre una base militar amb els soldats que són al front i viceversa. Un exemple n'és dir als soldats el punt exacte on han d'actuar o atacar. D'això en tenim diversos exemples al llarg del film, però l'escena del minut 00:41:03 ens pot servir com a model, no només pel que fa a les coordenades sinó també per entendre com es duia a terme la transmissió de missatges xifrats en navaho des del camp de batalla fins a un cuirassat, en aquest cas. També es pot observar la perplexitat dels soldats japonesos davant la impossibilitat de desxifrar els missatges americans (en navaho).

Figura 18. Windtalkers: imatge del minut 00:42:15

- Experiència didàctica

Els sistemes de coordenades apareixen a la cinta i són una eina que permet resoldre molts problemes, com aquest:



Els alcaldes d'Albatet i Villaró juntament amb el director d'una factoria industrial que ocupa el terreny de la figura, estan debatent el millor lloc per instal·lar un enorme dipòsit de gas propà que hauria d'abastir tant els pobles com la fàbrica. El dipòsit ha d'estar dins dels terrenys d'aquesta indústria, però no pot ser a menys de 500 m d'un forn de la mateixa per complir amb la normativa de seguretat. D'altra banda, els dos alcaldes volen que el dipòsit estigui a la mateixa distància de totes dues localitats. Com que el cost de les canonades de transport anirà a càrrec de la fàbrica, aquesta vol que el dipòsit estigui el més a prop possible dels dos pobles i del forn que consumirà el propà. Quina de les 4 ubicacions proposades serà l'escollida i com n'establiríeu les seves coordenades?

3.5.Cinema i resolució de problemes

3.5.1 *La habitación de Fermat*

Quatre matemàtics, autèntics prodigis nacionals, són convidats si poden resoldre una endevinalla, per un desconegut amfitrió de nom Fermat, a una reunió de cap de setmana on se suposa que hauran de resoldre un gran enigma. Cadascun d'ells serà rebatejat amb el nom d'un matemàtic important: Hilbert, Galois, Pascal i Oliva, tot i que aquesta última no fou matemàtica. Un cop es trobin, una sèrie de pistes els conduiran a un antic magatzem. Serà a partir d'aleshores quan, dins d'una habitació de decoració completament diferent de la del magatzem, hauran de resoldre una sèrie d'endevinalles matemàtiques per poder conservar les seves vides després de quedar-hi tancats i sense cap altra opció que pensar per sobreviure.

3.5.1.1 Nombres primers i conjectura de Goldbach

A l'escena del minut 00:00:48 just abans de començar la trama, un dels protagonistes introdueix el film tot dient: sabeu que són els nombres primers?; perquè si no sabeu el que són els nombres primers més val que marxeu. Tot seguit, en la primera escena, el personatge que després serà anomenat com *Galois*, el mateix qui ha dit la frase introductòria, destaca que va ser Christian Goldbach[77] qui al 1742 es va adonar que els nombres parells es podien expressar com la suma de dos nombres primers. Procedeix a posar uns exemples $(1000 = 521 + 479;\ 7112 = 5119 + 1993)$ a dues noies, admiradores seves. En destaca, després, que no es pot comprovar si tots els nombres parells són la suma de dos nombres primers perquè els nombres són infinits, i remarca que s'hauria de trobar una llei que els comprengués tots, i que trobar-la és, segons ell, el problema més difícil de la història de les matemàtiques (Conjectura de Goldbach). Més endavant la conjectura de Goldbach serà motiu de rivalitat entre els personatges de *Galois* i Hilbert.

- Experiència didàctica

La conjectura de Goldbach es pot comprovar manualment amb nombres petits.

Qüestió a) Comproveu que els nombres $18, 36\ i\ 74$ és poden escriure com a suma de dos nombres primers, i si es pot fer de diverses formes diferents escriu-les totes.

[77] Christian Goldbach (1690-1764), matemàtic prussià.

3.5.5.2 Successions

El repte a resoldre per accedir a la reunió a la que citen als protagonistes és una seqüència de nombres, de la que s'ha de trobar el patró a que obeeix. La seqüència és:
5 - 4 - 2 – 9 - 8 - 6 - 7 - 3 - 1

La seqüència aporta al mateix temps un biaix cognitiu, ja que els protagonistes, especialment *Pascal* (l'únic a qui veiem resoldre-ho) triguen a descobrir que els nombres estan ordenats per ordre alfabètic (en llengua castellana), una resposta més senzilla de la que podien esperar, potser pensant d'entrada que el patró és numèric.

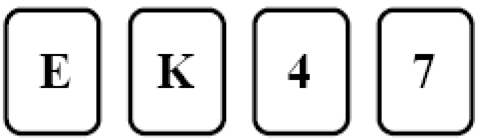
3.5.5.3 Enigmes

Els enigmes juguen un paper fonamental en aquesta pel·lícula. Al llarg de la cinta, els protagonistes n'hauran de resoldre per tal de poder sobreviure. En el desenvolupament de la trama se'n plantegen un total de nou (incloent el repte inicial de la seqüència numèrica), sense tenir en compte el gran enigma què és el per què els volen matar. Trobareu els enigmes detallats en l'annex 4.

- Experiència didàctica

En la mateixa línia de pensament lògic proposo aquests dos reptes.

Qüestió a[78]) Cadascuna d'aquestes cartes té una lletra en una cara i un número a l'altra cara. En Pere diu: " En qualsevol d'aquestes cartes es verifica que si té una vocal per una cara, té un número parell per l'altra". Quantes cartes com a mínim ha de girar Alícia per comprovar que en Pere diu la veritat?



A) Cap B) Una C) Dos D) Tres E) Quatre

✓ *Solució:*

Si l'Alícia dona la volta a la carta E y observa que per darrere hi ha un nombre parell y dona la volta a la carta 7 y observa que per darrere no hi ha una vocal, ha comprovat que en Pere diu la veritat perquè per darrere de les cartes K i 4 pot haver-hi qualsevol número y qualsevol lletra respectivament, la qual cosa no influirà en la veracitat d'allò que diu en Pere. Per tant la resposta correcta és la C.

3.5.5.4 Conjectura de Kepler

Al minut 00:23:56 *Hilbert* agafa una taronja, d'una pila que hi ha en una espècie de bol, i diu que l'última reunió a la que va anar d'aquell tipus tractava sobre allò. *Oliva*, li pregunta si la reunió tractava sobre taronges, però ell li contesta, rient, que no, que tractava sobre el problema de

[78] X Concurso de Primavera de Matemáticas 2006, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 21.

Kepler[79] de com apilar formes esfèriques (conjectura de Kepler[80]). *Galois* pregunta, gairebé segur de la resposta, si segueix sent un problema sense resoldre, i *Pascal* contesta, donant la seva opinió, que creu que el que és un problema és que els matemàtics malgastin la seva vida en tonteries que no tenen aplicació pràctica, però *Galois* discrepa.

3.5.2 *La fórmula preferida del profesor*

Film basat en la novel·la de Yoko Ogawa, *La fórmula preferida del profesor*, narra la història d'un antic professor de matemàtiques que després d'haver patit un accident, té una memòria de tan sols 80 minuts. Una assistenta serà, després de moltes altres, l'encarregada de cuidar-lo durant el dia, però acabaran convertint-se en amics gràcies a la bondat de la noia i també del professor, que la sorprendrà amb els seus grans coneixements matemàtics. Tot anirà encara millor, quan aquest conegui al fill de l'assistenta, al qui anomenarà *Root* i amb qui aconseguirà teixir una gran amistat, compartint el beisbol com a afició comuna.

3.5.2.1 Factorial d'un enter positiu

Al minut 00:09:25, quan Kyoko es presenta al professor, aquest la rep tot preguntant-li per la seva talla de sabata, al que ella contesta: 24 centímetres. Ell destaca que aquell és un nombre noble, remarcant que és el factorial de 4. La noia pregunta tímidament què és un factorial, al que el professor, sense cap problema, respon que si multipliques tots els enters de l'u al quatre et dona 24 $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24)$.

Poc després, al minut 00:10:27 veiem com *Root*, ja adult, explica als seus alumnes la història del professor amb el factorial, i aprofita per explicar què és el factorial de 24. A banda d'això, pregunta als seus alumnes pel factorial de 5; una alumna contesta ràpidament 120. El següent cop pregunta pel factorial de 7, al que un alumne contesta amb rapidesa 5040.

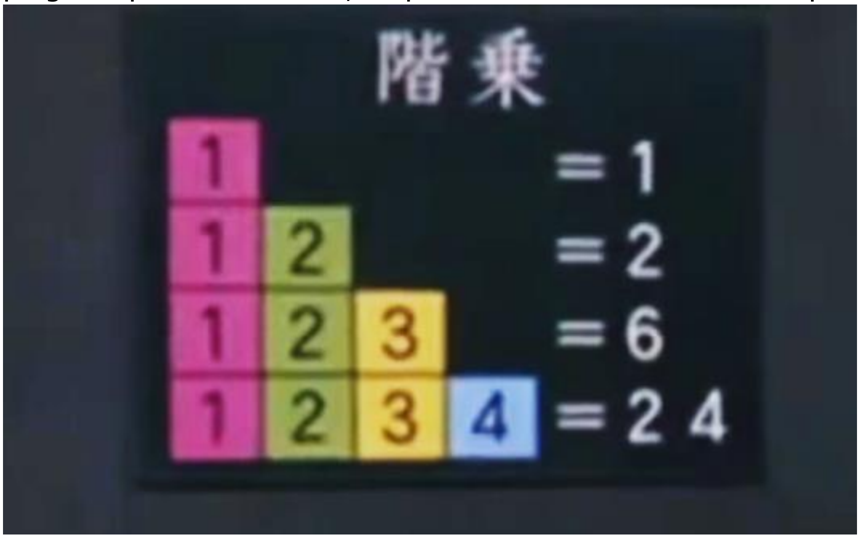


Figura 19. La fórmula preferida del profesor: imatge del minut 00:11:23

[79] Johannes Kepler (1571-1630), astrònom i matemàtic alemany.

[80] En la conjectura s'afirma que si apilem esferes iguals, la densitat màxima s'aconsegueix amb un apilament piramidal de cares centrades. Al juny de 2017, la demostració formal de la Conjectura de Kepler va ser acceptada en la revista Fòrum of Mathematics.

- Experiència didàctica

El factorial d'un nombre s'explica en l'estudi de la combinatòria.

Qüestió a[81]) Quin és el factorial més petit que és múltiple de 3^{29}?

A) 50! B) 54! C) 58! D) 60! E) 63!

✓ *Solució:*

Analitzem el nombre de vegades que apareix el factor 3 en cadascuna de les respostes.

En 60! Hi ha 20 múltiples de 3, 6 múltiples de 9 i 2 múltiples de 27. Per tant el nombre de vegades que apareix el factor 3 en 60! és $20+6+2=28$, per tant no serà múltiple de 3^{29}. Deduïm aleshores que la resposta correcta serà 63! Ja que 63 ! té $21+7+2=30$ vegades el factor 3.

Qüestió b[82]) Quin és el menor factorial que és divisible per 2^{1000}?

A) 1000! B) 1001! C) 1004! D) 1008! E) 1010!

✓ *Solució:*

2^{1000} té 1000 dosos. Estudiem quants dosos hi ha a $1000! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 998\cdot 999\cdot 1000$. Tots els parells aporten un 2, els múltiples de 4 aporten un altre dos extra, els múltiples de 8 aporten una altre dos extra i així successivament amb totes les potències de 2. Per tant tenim 500 múltiples de 2, 250 múltiples de 4, 125 múltiples de 8, 62 múltiples de 16, 31 múltiples de 32, 15 múltiples de 64, 7 múltiples de 128, 3 múltiples de 256 i 1 múltiple de 512. En total 1000! té $500+250+125+62+31+15+7+3+1=994$ dosos. Ens en falten 6. 1002 aporta un 2 més, 1004 aporta dos dosos més i 1006 un altre, en tenim 998, encara ens en falten 2. 1008 n'aporta 4, perquè és múltiple de 16, per tant la solució és 1008!.

3.5.2.2 Nombres amics

Al minut 00:24:40 el professor, amablement, li pregunta a Kyoko si sap què és un divisor. Ella contesta que així ho creu. Aleshores, el professor procedeix a escriure tots els divisors de 220 i 284, exceptuant a aquests mateixos, és a dir, tan sols escriu els divisors propis.

Al minut 00:26:59 el professor comenta que 220 i 284 són nombres amics. Els anomena així ja que sumant tots els divisors propis de 220 obtens 284 i al mateix temps, sumant els divisors propis de 284 obtens 220. A continuació comenta que aquestes parelles de nombres no són gens comunes, i per ajudar a que la noia que el cuida se'n faci una idea de la seva raresa, destaca que fins i tot Fermat[83] i Descartes[84] tan sols van descobrir una parella com aquestes cadascun. A l'escena posterior, quan veiem a *Root* (adult) fent de professor, explica als seus alumnes que

---

[81] XIX Concurso de Primavera de Matemáticas 2015, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 2.
[82] XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas 2019, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 15.
[83] Pierre de Fermat (1607-1665), jurista i matemàtic francès.
[84] René Descartes (1596-1650), filòsof, matemàtic i físic francès.

Pitàgores fou el primer en descobrir nombres amics. A continuació, al minut 00:29:04, *Root* comenta als seus alumnes que la següent parella més petita de nombres amics després de 220 i 284 és 1184 i 1210, i que la parella fou descoberta l'any 1866 per Nicolò Paganini[85], als setze anys.

- Experiència didàctica

Els nombres amics, tot i no treballar-se a classe, donen peu a fer un estudi dels divisors.

Qüestió a) Comprovar que 2620 i 2924 són nombres amics.

3.5.2.3 Nombres complexos

A l'escena del minut 00:37:33, *Root*, ja professor, explica breument l'origen dels nombres complexos, tot citant a Bombelli[86]. Podeu veure en l'annex 5 un breu resum de la història dels complexos.

3.5.2.4 Sistema d'equacions

En l'escena del minut 00:49:59 *Root*, com a estudiant, ha de resoldre un problema mitjançant un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, què el professor dibuixa a la pissarra. El nen diu que ha comprat dos mocadors i dos parells de mitjons per 380 iens, i que els mateixos dos mocadors i cinc parells de mitjons costen 710 iens. Ha de contestar quant val cada ítem.

Formalment seria $\left.\begin{matrix} 2x + 2y = 380 \\ 2x + 5y = 710 \end{matrix}\right\}$ però el professor dibuixa quadrats per representar els mocadors i uns mitjons molt especials.

- Experiència didàctica

El problema plantejat és força interessant i es pot resoldre a partir del dibuix sense utilitzar els mètodes tradicionals.

Qüestió a) Resoldre el sistema a partir del dibuix sense utilitzar els habituals mètodes de reducció, substitució o igualació, tot fent un raonament lògic.

Figura 20. La fórmula preferida del profesor: imatge del minut 00:52:10

[85] Nicolò Paganini (1850-?), matemàtic italià.

[86] Rafael Bombelli (1526-1572), matemàtic i enginyer hidràulic italià.

3.5.2.5 Nombres perfectes

Al minut 00:52:55 Kyoko diu al professor i al seu fill que ha fet un descobriment. Els diu que s'ha adonat que si sumes els divisors de 28, obtens 28. El professor ho escriu a la pissarra i diu que és un nombre perfecte, i destaca que el més petit és el 6 $(1+2+3=6)$. El professor li dona molta importància a això, citant a Descartes, que també n'havia trobat en el seu moment, i per exemplificar-ho remarca que en els darrers milers d'anys tan sols se n'han descobert unes poques parelles. A l'escena posterior veiem a *Root* com a professor explicant el concepte i detalls dels nombres perfectes als seus alumnes, als qui remarca que no s'ha demostrat que n'existeixi un nombre infinit.

- Experiència didàctica

Els nombres perfectes, tot i la seva escassetat, brinden l'oportunitat de plantejar unes qüestions relacionades també amb els divisors.

Qüestió a) Demostreu que 496 és un nombre perfecte

Qüestió b) Demostreu que 8128 és un nombre perfecte

Qüestió c) Comproveu que també per 496 i 8128, es verifica que són suma de nombres enters positius començant per 1, tal i com també observem que passa pel 6 i el 28. $6=1+2+3$; $28=1+2+3+4+5+6+7$

3.5.2.6 Fórmula d'Euler

Primer de tot, al minut 1:33:59 veiem com el professor ha deixat apuntat en un petit paper la fórmula d'Euler (la fórmula preferida del professor donat el "simbolisme romàntic" que tenia per a ell). Poc després, al minut 1:36:55 veiem el mateix nombre a la pissarra de *Root* quan ja és docent.

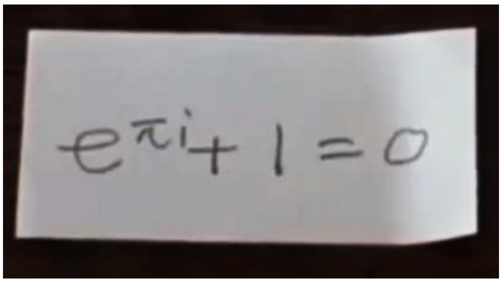


Figura 21. La fórmula preferida del profesor: imatge del minut 01:33:59

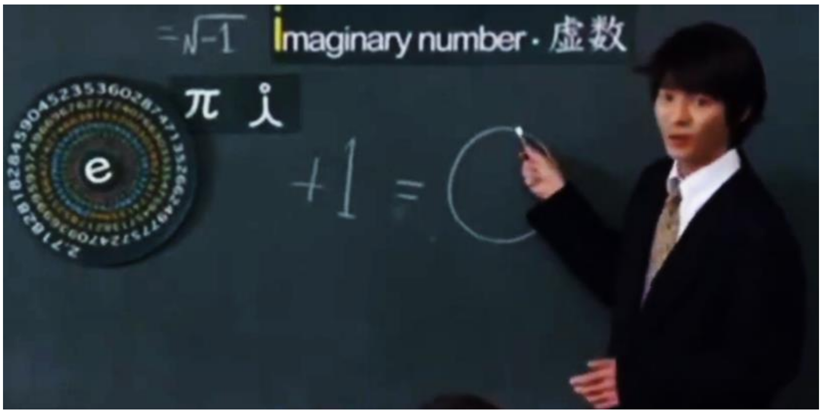


Figura 22. La fórmula preferida del profesor: imatge del minut 01:36:55

La fórmula d'Euler:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \text{ ens porta a } e^{j\pi} = \cos\pi + i\sin\pi \underset{\pi\text{ en radiants}}{=} -1$$

i d'aquí sorgeix el que al film anomenen la fórmula preferida del professor.

3.5.3 *El indomable Will Hunting*

Will Hunting és un jove de vint anys amb un nivell intel·lectual extraordinari. Lluny de fer-ne ús, treballa com a personal de neteja de l'Institut de Tecnologia de Massachusetts, i en el seu temps lliure opta per sortir amb els amics, encara que també dedica molt de temps a la lectura. La seva situació canviarà després que el professor del MIT Gerald Lambeau, reconegut matemàtic, plantegi un problema de grafs en una de les pissarres del passadís, que Will resoldrà anònimament. Poc després serà descobert, però escaparà, refusant una vida intel·lectual. Lambeau i un solitari psicòleg acabaran ajudant al noi.

3.5.3.1 Aplicacions de les matrius

A l'escena del minut 00:04:52 podem veure com Will es queda observant en una pissarra un exercici de grafs, que presenta diverses preguntes. Més tard, al minut 00:08:10 podem veure, com, per a sorpresa del professor Lambeau, l'exercici ha estat resolt a la mateixa pissarra. Més tard, al minut 00:13:33 el professor juntament amb un company, descobreix a Will resolent un altre exercici de grafs, però el jove escaparà. Lambeau acabarà descobrint que Will és qui ha resolt els exercicis.

En el graf de la figura observem que hi ha un tram per anar del vèrtex 1 al 4 o a l'inrevès, un tram per anar del 1 al 2 o a l'inrevès i un tram per anar del 2 al 4 o a l'inrevès. També observem que per anar del vèrtex 2 al tres tenim dos possibles trams (superior i inferior).

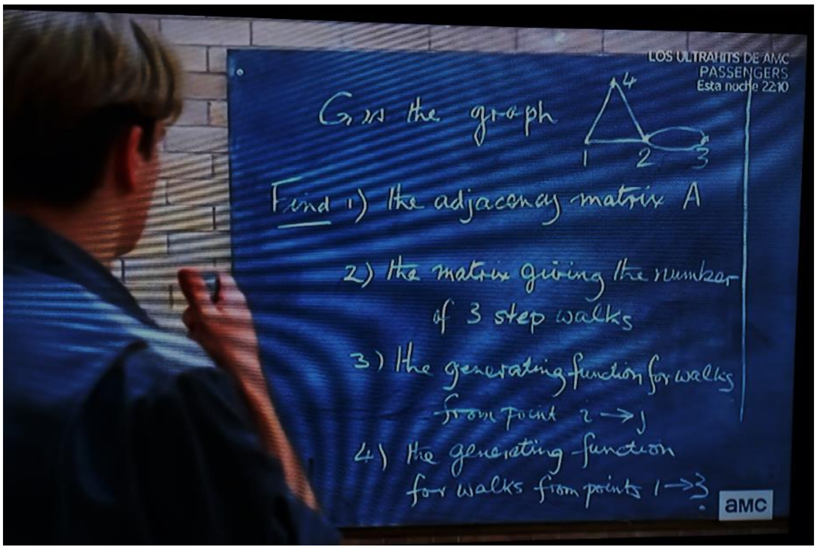


Figura 23. El indomable Will Hunting: imatge del minut 00:04:50

Demanen al punt 1) escriure aquesta informació en forma de matriu, un problema clàssic de segon de batxillerat: expressar una determinada situació en forma matricial per analitzar-la més fàcilment, cosa que tenim resolta en la imatge 2 on:

$$A=\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{0} & 1 & 0 & 1 \\ \color{red}{1} & 0 & \color{red}{2} & 1 \\ \color{red}{0} & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Què signifiquen aquests nombres. Comento els marcats en vermell. El 0 de V_1 a V_1 significa que no hi ha cap forma de anar de V_1 a V_1 amb un sol tram. El 1 de V_1 a V_2 significa que hi ha un tram que uneix V_1 amb V_2. El 0 de V_1 a V_3 significa que no hi ha un tram per anar directament de V_1 a V_3 i el 2 de V_3 a V_2 significa que hi ha dos trams que uneixen directament aquests vèrtexs.

Demanen al punt 2) la matriu que calcula les formes d'anar d'un vèrtex a un altre utilitzant tres trams. També és un problema típic de segon de batxillerat.

La resposta és la matriu

$$A^3=\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & \color{red}{7} \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

que no veiem del tot a la imatge següent.

Comentem el 7 marcat en vermell. Significa que podem anar de V_4 a V_2 de set formes diferents utilitzant tres trams del graf. En efecte són:

$$V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2$$
$$V_4 \rightarrow V_2 \underset{Superior}{\rightarrow} V_3 \underset{Superior}{\rightarrow} V_2$$
$$V_4 \rightarrow V_2 \underset{Superior}{\rightarrow} V_3 \underset{Inferior}{\rightarrow} V_2$$
$$V_4 \rightarrow V_2 \underset{Inferior}{\rightarrow} V_3 \underset{Superior}{\rightarrow} V_2$$
$$V_4 \rightarrow V_2 \underset{Inferior}{\rightarrow} V_3 \underset{Inferior}{\rightarrow} V_2$$
$$V_4 \rightarrow V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2$$
$$V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2$$

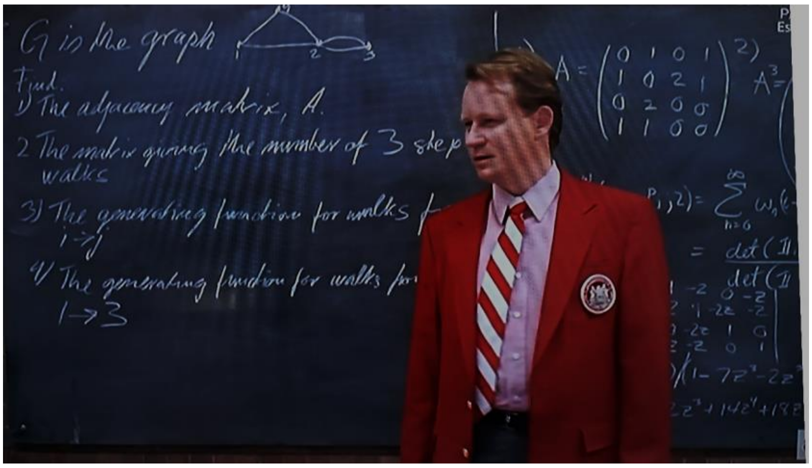


Figura 24. El indomable Will Hunting: imatge del minut 00:08:27

- Experiència didàctica

L'escena de la pel·lícula dona peu a plantejar situacions similars, que s'estudien a segon de batxillerat.

Qüestió a[87]) Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Record i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 6520 \\ 8130 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$? Calculeu-la.
Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$? Calculeu-la.

Qüestió b[88]) Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $\boldsymbol{X} = (d\ m\ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, en què $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.
***a*)** Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1\ 1\ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem?
***b*)** Si el vector codificat que ens ha arribat és (2036 1 –13), quina és la data sense codificar?

Qüestió c[89]) En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu $\boldsymbol{P}$ ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdors $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x\ y\ z)$.
a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.

b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per a tota la comanda? Quin és aquest preu?

---

[87] PAU Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials 2018, Sèrie 5, Problema 5.
[88] PAU Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials 2019, Sèrie 5, Problema 1.
[89] PAU Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials 2019, Sèrie 4, Problema 6

3.5.4 *Un don excepcional*

Mary Adler és una nena de set anys amb un gran talent per les matemàtiques que viu amb el seu tiet matern d'ençà de la mort de la seva mare, un prodigi en el camp de les matemàtiques. A Mary li sorgeix l'oportunitat de rebre una educació especialitzada, però el seu tiet s'hi nega, adduint que la nena ha de tenir la infància normal d'una persona de la seva edat. Això portarà a un enfrontament amb l'àvia materna de la nena, qui vol explotar el talent de la seva néta, amb l'objectiu que s'assembli al que va ser la seva filla i aconsegueixi fites similars a les seves.

3.5.4.1 Càlcul mental

En diferents moments de la pel·lícula podem veure la notòria capacitat de Mary pel càlcul mental. Al minut 00:08:46, el seu tiet explica a la seva professora, qui està sorpresa per l'habilitat de la nena, que Mary utilitza el mètode Trachtenberg. Li explica qui fou el seu inventor i aclareix que va deixar d'utilitzar-se quan es van inventar les calculadores. Res lluny de la ficció, aquest mètode va ser desenvolupat per Jakow Trachtenberg[90] en els anys que fou presoner d'un camp de concentració nazi, amb l'objectiu de mantenir la seva ment ocupada. Aquest efectiu mètode, similar al de la matemàtica vèdica de Bharati Kirshna Tirtha[91], permet fer mentalment càlculs tant simples com complexos, basant-se en un nombre de patrons fàcilment memoritzables, que fan que es puguin realitzar computacions aritmètiques de forma mental.

- Experiència didàctica

L'escena permet proposar la investigació de com funciona el mètode Trachtenberg.

Qüestió a) Investigar com es troba el resultat al multiplicar un nombre enter qualsevol per 11.

Qüestió b) Investigar com es troba el resultat al multiplicar un nombre enter qualsevol per 7.

3.5.4.2 Equació de Navier-Stokes i problemes del Premi del Mil·leni

L'equació de Navier-Stokes és, en part, un dels fils conductors de la cinta. Es menciona en diversos moments, deixant clara la seva importància (cal tenir en compte que és un dels set problemes del Mil·leni[92]). El paper que té en el film és fruit que la mare de la protagonista, que ja és morta, havia dedicat gran part de la seva vida a resoldre-la, i de fet al final de la pel·lícula es descobreix que "ho va aconseguir", tot i que no ho va voler publicar.

Al minut 00:46:47 podem veure com l'àvia de Mary li ensenya el que són els problemes del premi del Mil·leni (Millenium Problems). Davant un dubte de Mary, l'àvia aclareix qui és l'únic home retratat, Grigori Perelman[93], qui va resoldre la conjectura de Poincaré, l'únic dels set problemes que ha pogut ser resolt fins a dia d'avui.

---

[90] Jakow Trachtenberg (1888-1953), matemàtic rus.

[91] Jagadguru Shankaracharya Swami Bharatikrishna Tirtha (1884-1960), monjo hindú indi.

[92] "El 24 de Maig de l'any 2000 el Clay Mathematics Institute va plantejar 7 problemes matemàtics de gran complexitat. Són problemes clàssics que s'han resistit als matemàtics durant anys. A aquests se'ls coneix com els problemes del mil·lenni. El premi per trobar la solució de qualsevol dels problemes és d'un milió de dòlars. Nombrosos catedràtics, científics, investigadors… han dedicat la seva carrera a l'estudi d'algun dels problemes sense cap èxit. Avui dia, gairebé 20 anys després, només 1 dels problemes del mil·lenni ha estat resolt."

[93] Grigori Perelman (1966-), matemàtic rus. Va rebre la medalla Fields l'any 2006, tot i que no es presentà a recollir-la; situació descrita en l'article de La Vanguardia, pàgina 21, del dimarts 29 d'agost del 2006 titulat: "Sin noticias de Perelman".

Figura 25. Un don excepcional: imatge del minut 00:47:00

3.5.4.3 Càlcul integral

Al minut 00:46:10 podem veure com en un aula universitària estan escrivint un problema de càlcul integral, que instants després, al minut 00:48:07 descobrirem és una "mena de prova" per a Mary. Després que Mary hagi estat un temps rumiant, en silenci, es sent com la seva àvia, conversant amb un professor, li demana que no sigui tant dur, excusant a la nena explicant-li les seves circumstàncies: on ha dormit, etc... Li demana una oportunitat i destaca que als sis anys va llegir a Zimmer[94]. El professor pregunta a l'àvia si Mary va entendre el què va llegir. Més tard, Mary diu que el problema no es podia resoldre perquè estava malament, ja que, de bon principi, l'exponent no tenia signe negatiu i per tant la part restant del problema era errònia. Més tard el resol.

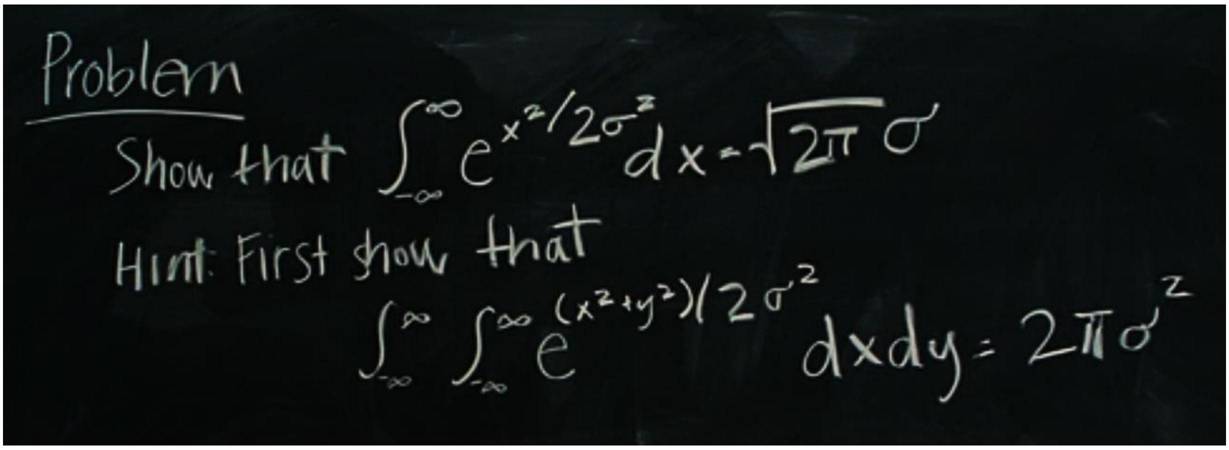


Figura 26. Un don excepcional: imatge del minut 00:48:44 (enunciat erroni).

[94] Robert Zimmer (1947-2023), matemàtic estatunidenc.

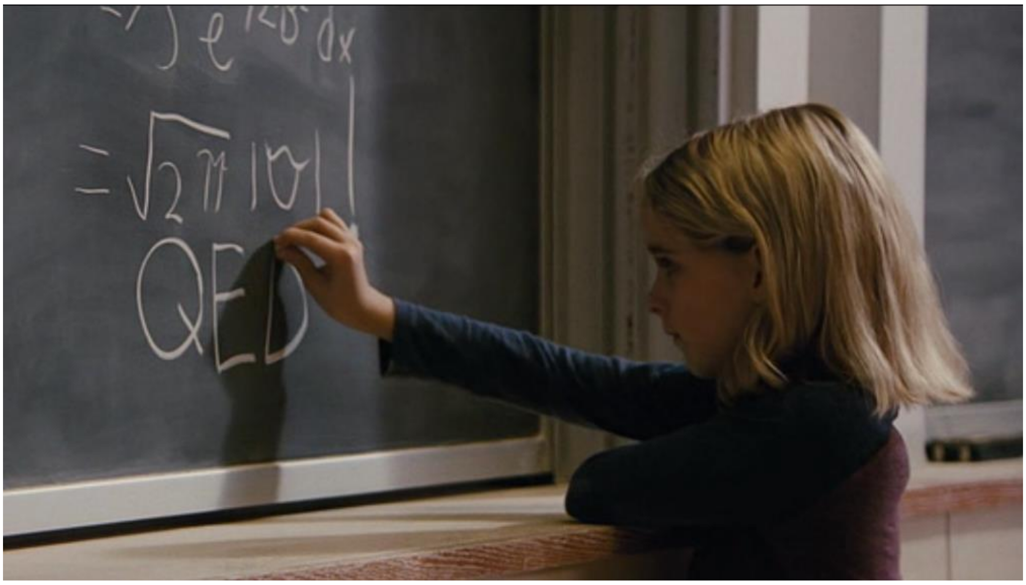


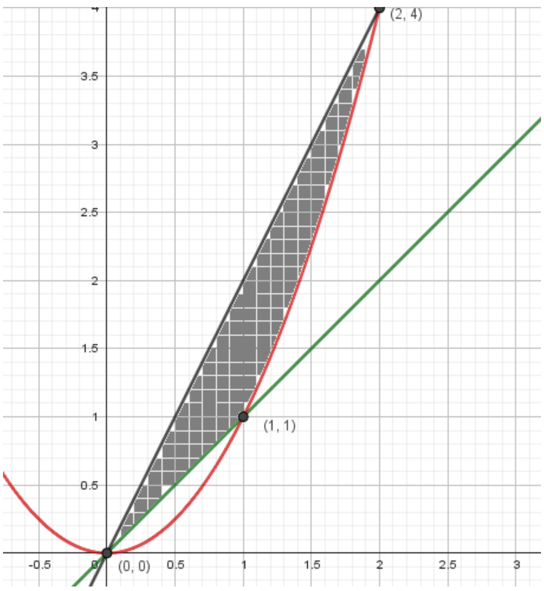
Figura 27. Un don excepcional: imatge del minut 00:50:43 (quod erat demonstrandum)

- Experiència didàctica

El càlcul integral s'estudia a segon de Batxillerat. Presento una activitat relacionada.

Qüestió[95]) Considereu les rectes Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.

***a*)** Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.



***b*)** Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.

✓ *Solució:*

a) Els punts es veuen al gràfic.

b)

$$\int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{6}u^2$$

[95] PAU Matemàtiques Catalunya 2019, Sèrie 5, Problema 1.

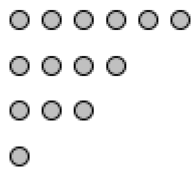
3.5.4.4 Particions

Cap al final de la pel·lícula, al minut 1:34:57, quan Mary ja està atenent classes universitàries, en una d'aquestes es treballa el concepte de funció de partició, més coneguda com p(n) i de la què Srinivasa Ramanujan[96] en va descobrir algunes importants propietats, destacades pel professor de Mary.

- Experiència didàctica

Les particions, concepte que no es treballa al Batxillerat, brinden l'oportunitat de fer petits descobriments.

Qüestió) Una partició és una forma d'expressar un enter com a suma d'enters positius, així per exemple una partició de 14 és $14 = 6 + 4 + 3 + 1$, que podem representar així, mirant el gràfic de dalt a baix. D'aquest esquema se'n diu diagrama de Ferrers[97]. Observeu que si la mirem d'esquerra a dreta tenim una altra possible partició de 14 com a $14 = 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$.



Proposo dibuixar una partició qualsevol dels nombres 10 i 20 i dibuixar el diagrama de Ferrers corresponent per tal de deduir-ne una de diferent a la vista del diagrama.

3.5.5 *x+y A brilliant young mind*

La pel·lícula, basada en un documental de la BBC[98], té com a protagonista un jove prodigi de les matemàtiques, en Nathan, qui, tot i la seva capacitat matemàtica, sovint ho passa malament en aspectes quotidians de la vida. La mort del seu pare en un accident de trànsit quan Nathan l'acompanya, posarà les coses encara més difícils al nen, qui, però, amb el suport de la seva mare, aconseguirà trobar un institut i un professor amb capacitat per comprendre'l. Els esforços hauran valgut la pena quan Nathan sigui seleccionat per representar el Regne Unit a l'Olimpíada Internacional de Matemàtiques a Taipei.

3.5.5.1 Patrons

Al minut 00:02:36, Nathan li comenta al que es suposa és el seu psicòleg que li agraden els patrons, i quan el psicòleg li pregunta com es sent al veure un bon patró el nen li contesta que es sent bé, i que "són colors bonics", deixant entreveure que té capacitat per identificar-los.

- Experiència didàctica

El fragment brinda l'oportunitat d'introduir un exercici de patrons.

Qüestió[99]) Quin nombre ocupa el lloc 2007 en la successió 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,...?

55 59 63 67 71

---

[96] A Youtube podeu trobar una obra de teatre *Partition* d'Ira Hauptman, què relata en part la vida de Ramanujan: https://www.youtube.com/watch?v=XfB3kWGE4oo

[97] Norman Macleod Ferrers (1829-1903), matemàtic britànic.

[98] Beautiful Young Minds: https://www.youtube.com/watch?v=N5fmiAsHxxo

[99] XI Concurso de Primavera de Matemáticas 2007, Universidad Complutense de Madrid, 2ª Fase, Nivel 4, Problema 13.

✓ *Solució:*

Com que cada nombre ocupa tants llocs com indica el seu valor, el nombre de llocs ocupats fins al nombre n inclòs vindrà donat per $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$. Plantegem aleshores l'equació $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}=2007$ i obtenim que $62<n<63$. Així doncs amb $n=62$ no arribem a ocupar el lloc 2007 i amb $n=63$ ens passem, per tant el lloc 2077 estarà ocupat pel nombre 63.

3.5.5.2 Probabilitat: diagrama d'arbre

A l'escena del minut 00:11:12, podem veure com, en una de les classes particulars que el professor Humphreys fa a en Nathan, li diu que començaran amb la probabilitat, i afegeix que faran diagrames d'arbre, i d'exemple en fa un de cara o creu. Cal dir que els diagrames d'arbre són molt útils en la resolució de problemes de probabilitat.

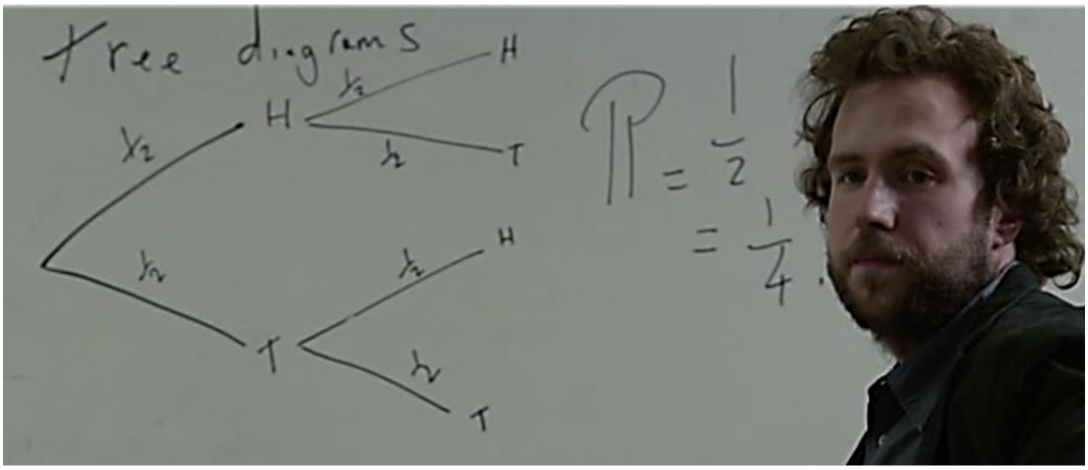


Figura 28. x+y A brilliant young mind: imatge del minut 00:11:35

▪ Experiència didàctica

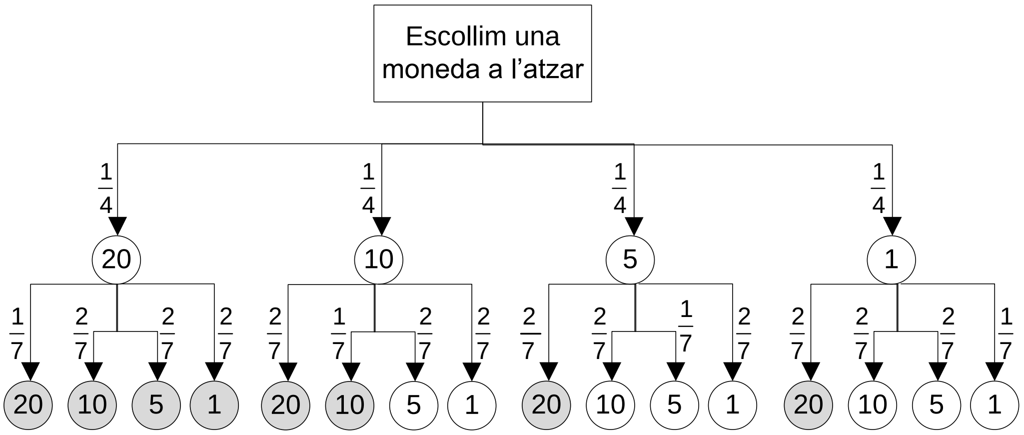
L'estratègia que apareix en l'escena pot utilitzar-se en el problema següent.

Qüestió[100]) En un moneder hi tenim 2 monedes d'un cèntim d'euro, 2 de cinc, 2 de deu i 2 de vint cèntims. Si traiem simultàniament dues monedes a l'atzar, quina és la probabilitat que la suma sigui 20 o més cèntims?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

[100] X Concurso de Primavera de Matemáticas 2006, Universidad Complutense de Madrid, 1ª Fase, Nivel 4, Problema 15.

✓ *Solució:*



Ombrejats observem els casos en què la suma és 20 o més cèntims

La probabilitat demanada és: $p = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$

3.5.5.3 Olimpíada Internacional de Matemàtiques

L'Olimpíada Internacional de Matemàtiques podria ser considerada el fil conductor de la pel·lícula. Primerament, perquè participar-hi "és un objectiu" pel protagonista, ja des de ben petit, quan mostra interès per com ho va fer el seu professor i també quan llegeix el llibre *The IMO Compendium* (un llibre que conté una col·lecció de problemes de l'OIM)[101]. A més a més, és conscient del que representa l'OIM i fins i tot mostra interès pels problemes que hi han aparegut, com el problema 5 de 1996, el "més difícil" plantejat mai a l'Olimpíada.

Al mateix temps, concretament al minut 00:12:20, podem veure com Nathan està treballant un problema de l'estil de l'OIM amb el professor Humphreys.

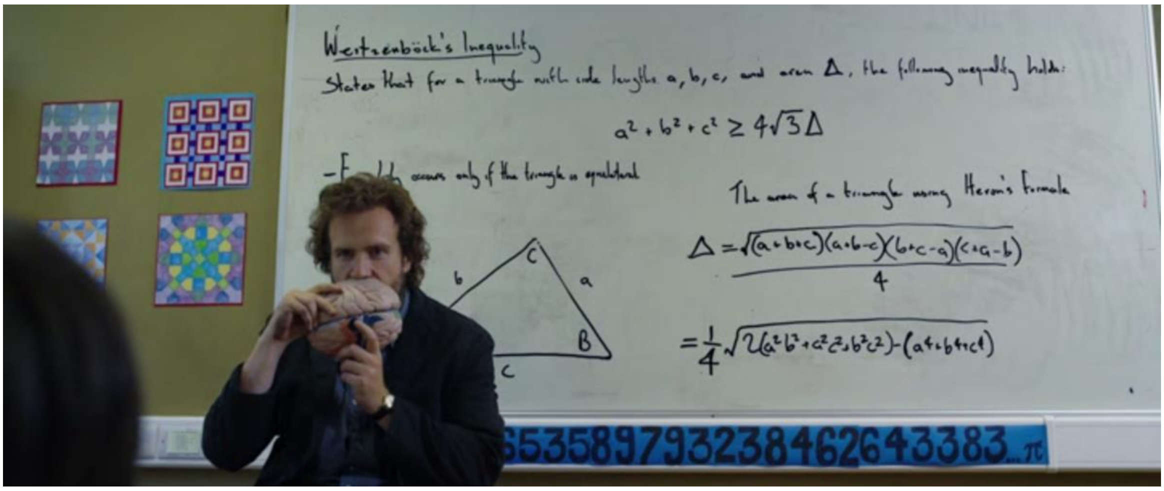


Figura 29. x+y A brilliant young mind: imatge del minut 00:12:21

---

[101] *The IMO Compendium A collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004.*

Més endavant, quan sigui seleccionat per tenir la opció, si és escollit, de representar al Regne Unit a l'OIM, una bona part de la pel·lícula girarà entorn aquesta. Cal destacar que en el marc de la preparació i selecció dels integrants finals de l'equip britànic per a la prova, el grup realitza, conjuntament amb altres seleccions, exercicis de prova per practicar. En el film en trobem dos que són força interessants.

- Experiència didàctica

Els dos problemes que apareixen explícitament a la cinta, el primer d'ells completament resolt, permeten copsar el nivell exigit en aquesta competició.

a) El problema de les cartes

Al minut 00:59:40 els joves treballen el següent problema: vint cartes a l'atzar, les posem en fila totes boca avall. Un moviment consisteix en posar una carta que està boca avall boca a dalt i donar la volta a la carta que està immediatament a la dreta. Demostreu que sigui quina sigui la elecció de les cartes, aquesta seqüència de moviments ha d'acabar.

Resolució completa d'en Nathan: "Hem de veure les cartes com a números. Li podem dir a les que estan cap avall 1, i a les de cap a dalt 0. Inicialment seria una seqüència de 1 perquè totes estan avall però després seria quelcom com 10011010, que podem veure és un número binari. Un moviment que consisteix en posar cap a dalt una carta que està boca avall i la carta que està immediatament a la dreta podria ser un 1 seguit de un 1 que es converteix en 00 o pot ser un 1 seguit de un 0 que es converteix en 01. En qualsevol cas podem veure que el número binari és estrictament decreixent; la qual cosa significa que la seqüència ha d'acabar; perquè no se pot seguir restant de un enter positiu sense convertir-lo en negatiu."

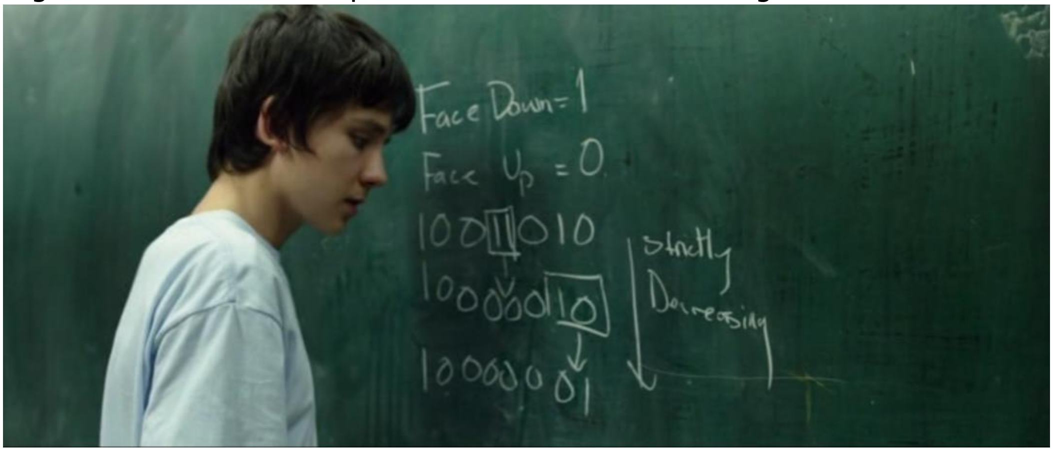


Figura 30. x+y A brilliant young mind: imatge del minut 1:02:12

b) El problema dels enters i colors:

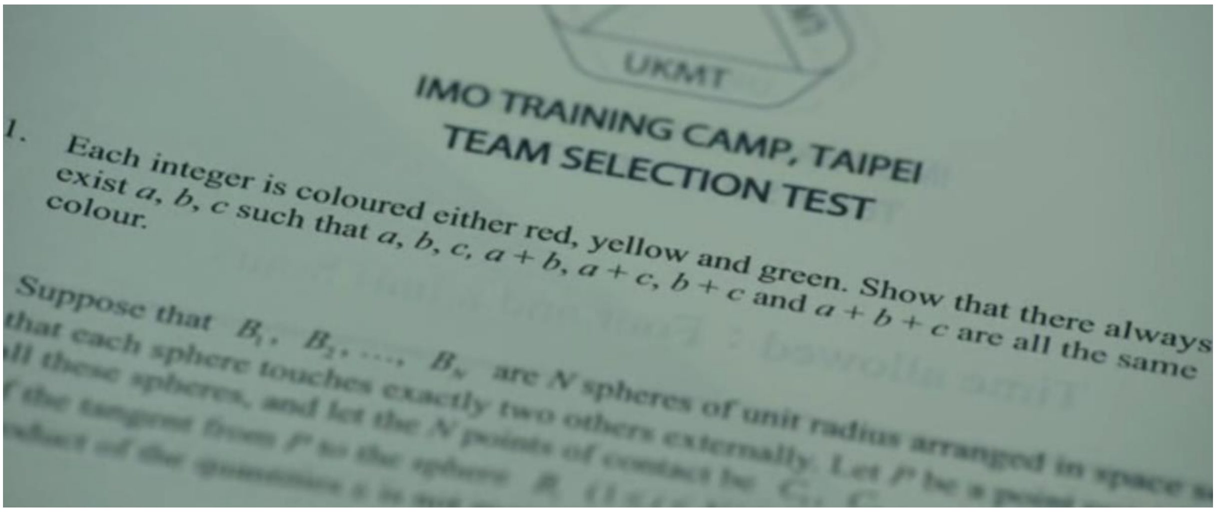


Figura 31. x+y A brilliant young mind: imatge del minut 1:11:56

Traducció: assignem a cada enter el color roig, groc o verd. Demostra que sempre existiran a, b i c; de tal manera que a, b i c, $a+b$, $a+c$, $b+c$ i $a+b+c$ siguin del mateix color.

3.5.6 *Cielo de octubre*

Film inspirat en fets reals[102] i ambientat a finals dels anys cinquanta a Coalwood, Virginia Occidental, EUA. Homer Hickam, un jove de disset anys, n'és el protagonista. Fill d'un superintendent de la mina de carbó del poble, el jove té aspiracions diferents de les del seu pare; el seu somni és, amb el temps, dedicar-se a tot allò que estigui relacionat amb els coets. Incentivats per la seva professora de ciències, Homer i tres amics més dedicaran esforços ingents a construir un coet per tal de participar primer a la fira científica del comtat i, en cas de guanyar, poder anar al concurs a nivell nacional i rebre una beca universitària en cas de ser-ne els guanyadors.

3.5.6.1 Moviment parabòlic

En una de les moltes proves de llançament que fan, els joves perden un coet. Al mateix temps, hi ha un incendi a prop de la zona on practiquen, i són acusats pel director de l'institut de ser-ne els culpables. Serà aleshores quan Homer farà ús de les equacions del moviment en un tir parabòlic per defensar el grup i demostrar que són innocents. A partir d'aquestes equacions, en les que es tenen en comptes diversos factors, podrà calcular el que anomenem abast màxim, i demostrar que no són els culpables. Hi ha dues escenes de les que podem extreure'n contingut relacionat. La primera d'elles és la del minut 1:11:04, quan Homer ensenya els seus càlculs a Quentin. En el full podem veure la resolució que ha fet d'una equació de tir parabòlic (cal tenir en compte que un coet al llarg de la seva trajectòria descriu una paràbola) i on s'inclouen fórmules com les que estudiaria un alumne de primer de batxillerat a l'assignatura de física. Aquestes són:

[102] Basada en el llibre *Rocket Boys*, autobiografia de Homer Hickam.

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ On S és l'alçada màxima assolida i t el temps que triga en arribar a terra.

$V = a \cdot t$ On V és la velocitat en un MRUA, a l'acceleració i t el temps.

$D = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2A)$ On D és l'abast màxim, v la velocitat inicial, g l'acceleració de la gravetat i A l'angle de tir.

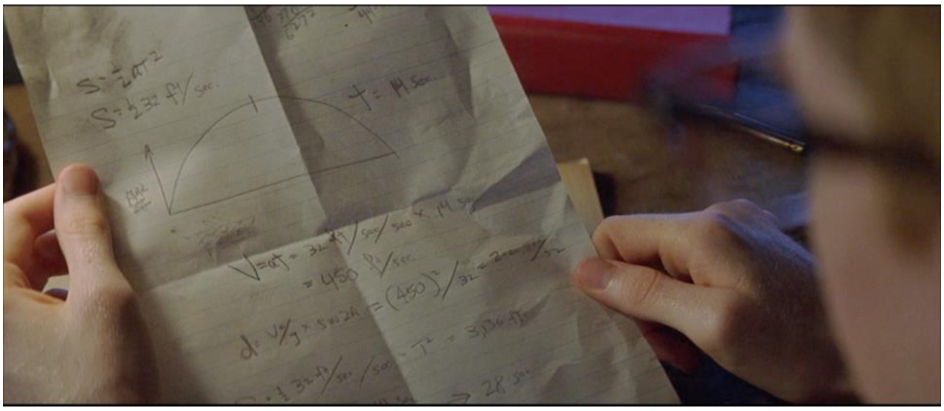


Figura 32. Cielo de octubre: imatge del minut 1:11:04

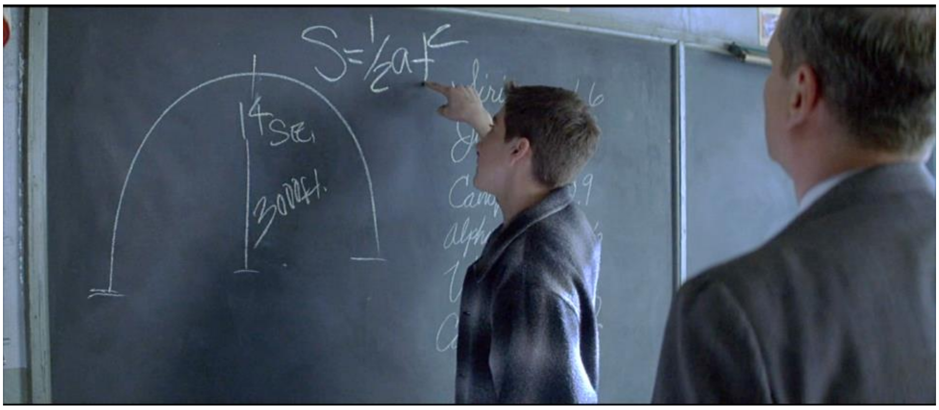


Figura 33. Cielo de octubre: imatge del minut 01:16:22

Després, quan demostra la seva innocència a classe davant del director, també veiem com fa ús del dibuix d'una paràbola i de les fórmules $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ i $V = a \cdot t$. Destaca que l'incendi va ocórrer a 5 quilòmetres de la rampa de llançament, mentre que l'abast màxim que ells tenien era de 1,9 quilòmetres (exactament on el van trobar). Continua amb la seva explicació, tot dient que el coet va caure durant uns 14 segons, la qual cosa significa que va arribar a una altura de 900 metres (3000 peus), tot això segons les equacions ja esmentades. Cal destacar que, tot i que Homer no l'esmenti, es necessita una altra fórmula per trobar l'abast $D = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2A)$, però en aquest cas es sobreentén que ja ho ha calculat abans.

- Experiència didàctica

En la figura següent s'ha reconstruït a escala, amb les dades de la pel·lícula, el problema plantejat.

Qüestió) Calcular l'altura màxima que va assolir el coet sabent que va caure durant 14 segons.

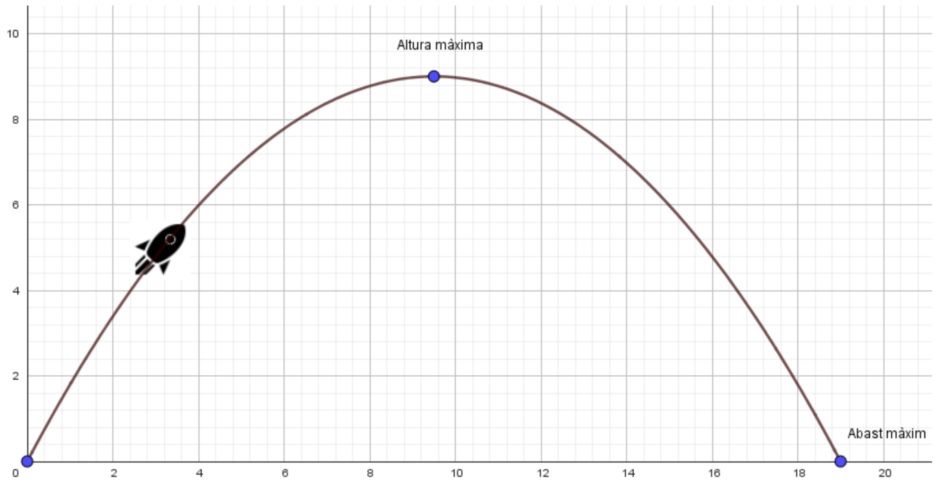


Figura 34. Il·lustració a escala de la trajectòria del coet.

3.5.6.2 Trigonometria

Al minut 1:11:27 Quentin queda gratament sorprès de com Homer ha resolt una equació de tir parabòlic, per tal de provar que ells no van provocar l'incendi. Tot i així, necessita ajuda amb la trigonometria, que els servirà per fer un càlcul d'on va caure el coet, i demostrar així la seva innocència. Cal destacar que en aquest cas les equacions que realitza i la trigonometria van lligades, tenint en compte que són equacions de tir parabòlic en les que els conceptes de sinus, cosinus, tangent d'un angle són essencials per resoldre les equacions.

- Experiència didàctica

En la figura següent s'ha reconstruït a escala, amb les dades següents, el problema plantejat.

Qüestió) Amb la fórmula $D = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2A)$ troba el valor de l'angle *A*. Suposem que la velocitat inicial (*v)* és de 150 m/s.

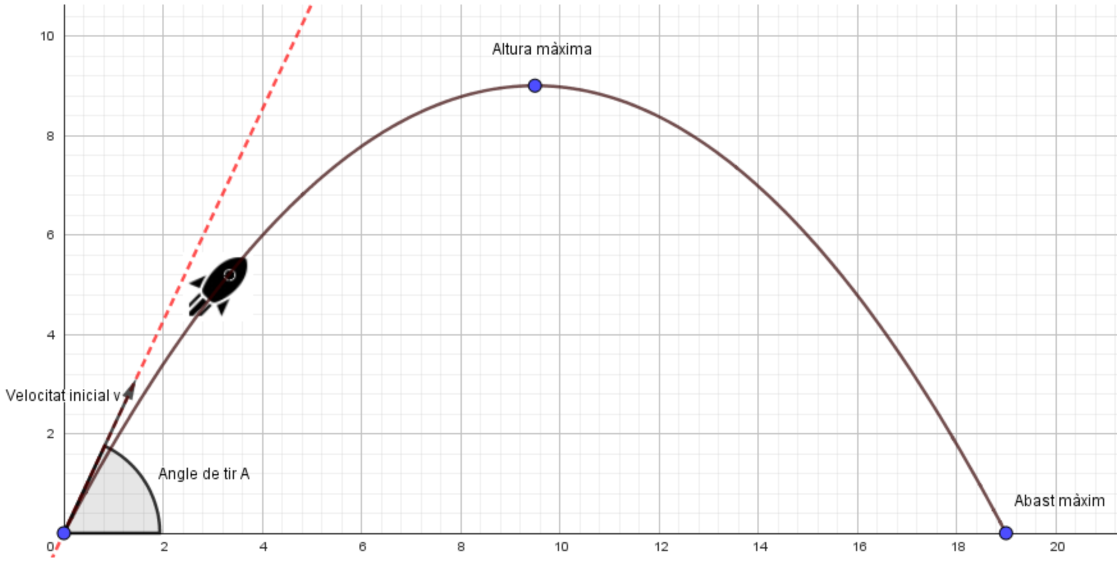


Figura 35. Il·lustració a escala de la trajectòria del coet amb l'angle a calcular.

3.5.7 *Los crímenes de Oxford*

Film basat en el llibre del matemàtic argentí Guillermo Martínez[103], *Los crímenes de Oxford*, ens mostra una història fictícia ambientada als voltants de la ciutat d'Oxford, seu d'una prestigiosa universitat. Martin, un jove estudiant estatunidenc hi arriba amb l'objectiu que Arthur Seldom, un dels matemàtics més prestigiosos de la universitat, dirigeixi la seva tesi. El jove s'hostatja a casa d'una anciana, que viu amb la seva filla, però tot farà un tomb inesperat quan l'anciana sigui assassinada per una persona desconeguda. Al crim n'hi seguiran d'altres, fent que Martin i Seldom "col·laborin" per trobar l'assassí a partir de les pistes, matemàtiques, que aquest deixarà.

3.5.7.1 Teorema d'incompletesa de Gödel

A la primera escena del film veiem un ambient bèl·lic, enmig del qual s'hi troba un soldat, escrivint en un quadern. A l'escena següent, més concretament al minut 00:01:46, de la mà d'Artur Seldom, descobrim que aquell soldat era Ludwig Wittgenstein[104], i que el que escrivia, que era molt important, era el *Tractatus Logico-Philosophicus*, segons Seldom l'obra filosòfica més influent del segle XX. Seldom explica que Wittgenstein va posar límits al nostre pensament, tenint com a objectiu desxifrar l'enigma/pregunta: podem conèixer la veritat? Destaca que per trobar aquesta veritat Wittgenstein va usar la lògica matemàtica, un llenguatge immutable i aliè a les passions dels homes. Va arribar a la conclusió que no existeix cap veritat fora de les matemàtiques, i per tant, la filosofia ha mort, remarca Seldom.

Això lliga amb l'escena del minut 00:36:07, quan Arthur conversa amb Martin, i aquest, després de debatre amb el veterà matemàtic diu: "d'acord, hi ha alguns enunciats matemàtics que no es poden afirmar o negar a partir dels seus axiomes; enunciats indeterminats." Seldom li dona la

---

[103] Guillermo Martínez (1962-), matemàtic i escriptor argentí.
[104] Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951), filòsof, matemàtic, lògic i lingüista austríac fins al 1939 i britànic des d'aleshores fins a la seva mort.

raó, i afegeix: exacte, el teorema d'incompletesa de Gödel. Segueixen parlant del tema, aportant idees diverses però immensament interessants.

3.5.7.2 Sèries lògiques

Les sèries lògiques juguen un paper molt important en aquest llargmetratge. Apareixen en diversos moments i tenen un rol estretament relacionat amb els crims que apareixen a la pel·lícula.

- Al minut 00:15:23 es menciona la sèrie de Fibonacci.
- Al minut 00:17:50 es menciona la sèrie 2,4,6. Seldom afegeix que en aquest cas ens sentim bé perquè sabem que vindrà el 8, ho podem preveure.
- Al minut 00:26:38, després de la mort de Mrs. Eagleton, Seldom comenta al policia que per desgràcia ell mateix compara les sèries lògiques amb els crims en sèrie. Això ve arran d'una nota que ha rebut amb un cercle dibuixat (primer element d'una sèrie). Més endavant apareix el segon signe (que indica com s'ha de llegir la successió), que pot semblar un joc de simetries o senzillament un peix dibuixat de forma simple. Tot i així no es sap que representen. Després apareix el tercer símbol, un triangle. Al minut 1:24:19, quan Martin i Lorna troben la informació dels pitagòrics en un llibre, descobreixen el quart símbol, la Tetraktys[105], que, al cap d'uns instants, gràcies a una altra informació, els farà percatar de quin serà el següent crim.

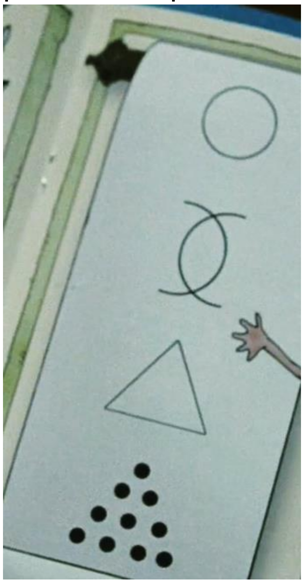


Figura 36. Los crímenes de Oxford: imatge del minut 01:24:19

- Al minut 00:45:21 apareix Kalman, antic alumne de Seldom, a qui aquest va iniciar en l'estudi de les sèries lògiques. Tot i així, Kalman, en els test d'intel·ligència que feia, va trobar-se amb respostes inesperades, que semblaven absurdes però que eren una altra solució possible i perfectament valida, només que la justificació era més complexa. En definitiva, tal com diu Seldom, la intel·ligència d'aquells alumnes es saltava la solució convencional i arribava molt més lluny. Es menciona doncs la paradoxa de Wittgenstein sobre les regles finites; Seldom destaca doncs que la sèrie 2,4,8 es pot continuar amb el

---

[105] Figura triangular que consisteix en deu punts ordenats en quatre files, amb un, dues, tres i quatre punts en cada fila. Va ser un símbol molt important per als pitagòrics.

16 però també amb el 10 o amb el 7004, ja que sempre es possible trobar una justificació per continuar la sèrie amb qualsevol número.

- Al minut 00:52:53 Artur Seldom proposa a l'inspector i Martin una altra sèrie, i els pregunta pel quart símbol d'aquesta. Més tard, al minut 00:57:36, descobrirem que el quart símbol és una M amb una ratlla horitzontal; i per trobar la "resposta final"[106] (1,2,3,4) s'ha de fer una línia vertical que passi pel mig dels quatre símbols.

Figura 37. Los crímenes de Oxford: imatge del minut 00:52:54

Figura 38. Los crímenes de Oxford: imatge del minut 00:57:45

- Experiència didàctica

Un dels eixos de la pel·lícula és com continua una determinada sèrie: de nombres, de símbols, etc. Proposo una experiència didàctica que demostra que una sèrie es pot continuar amb qualsevol número, trobant sempre una regla que la generi.

Raonament) La informació de com continua una sèrie depèn de la informació de partida: així la sèrie 2, 4,... hom pot considerar que és una progressió aritmètica de diferència 2 i contínua així 2, 4, 6, 8 ..... o bé que és una progressió geomètrica de raó 2 i continua així: 2, 4, 8, 16, ...

[106] Veure la figura 38.

El que demostrarem ara és que sempre es pot trobar una fórmula a_n, com a terme general de la sèrie, que s'ajusti a qualsevol valor que escrivim en tercer lloc de la sèrie.

Considerem les parelles $(1,a_1),(2,a_2)\,i\,(3,a_3)$. Busquem un polinomi de grau 2, perquè tenim tres parelles de dades, que s'ajusti a aquests valors. Si el polinomi és $a_n = an^2 + bn + c$ obtenim un sistema d'equacions: $\left.\begin{array}{l} a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = a_1 \\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = a_2 \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = a_3 \end{array}\right\}$. La matriu de coeficients del sistema és $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ el determinat de la qual té l'estructura del determinant de Vandermonde[107] i és ben coneguda $\begin{vmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)(1-3)(2-3) = -2$ que en ser diferent de 0 (el determinant de Vandermonde sempre dona una resultat diferent de zero) ens permet afirmar, segons el Teorema de Rouché[108], que el sistema és compatible i determinat, per tant té una solució única que podem trobar resolent el sistema pel mètode de Gauss o aplicant la regla de Cramer[109].

És a dir, per qualsevol valor donat de a_3 trobarem una fórmula diferent pel terme general a_n.

Aquest raonament és pot fer extensiu de la mateixa forma a qualsevol sèrie finita de nombres: $(1,a_1),(2,a_2),\ (3,a_3),\ldots,(n,a_n)$. Sempre som capaços de trobar un polinomi interpolador de grau $n-1$, si tenim n valors de la sèrie, que s'ajusti a les dades.

Els exemples següents per il·lustrar la qüestió els he calculat amb el programa de càlcul simbòlic MAPLE ®

$i)\ a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6 \Rightarrow a_n = 2n$
$ii)\ a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8 \Rightarrow a_n = 2^n\ o\ a_n = n^2 - n + 2$
$iii)\ a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 13 \Rightarrow a_n = \frac{7}{2}n^2 - \frac{17}{2}n + 7$
$iv)\ a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 0 \Rightarrow a_n = -3n^2 + 11n - 6$
$v)\ a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5 \Rightarrow a_n = \frac{-1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 1$

107 Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), músic i químic francès.
108 Eugène Rouché (1832-1910), matemàtic francès.
109 Gabriel Cramer (1704-1752), matemàtic suís.

3.5.7.3 Teorema de Fermat

El darrer teorema de Fermat[110] apareix "camuflat" a la pel·lícula, ja que l'anomenen *L'últim teorema de Bormat*. Cal tenir en compte que la pel·lícula s'ambienta l'any 1993, any en què Andrew Wiles[111] (a la pel·lícula *Henry Wilkins)* va fer-ne la demostració (la primera, que presentava un error, tot i que ho va subsanar al 1995), fet que apareix al film.

- Experiència didàctica

A partir del darrer teorema de Fermat, proposo una activitat relacionada.

S'anomenen ternes pitagòriques els conjunts a, b i c de nombres enters positius que verifiquen que $c^2 = a^2 + b^2$.

i) Comproveu que donats dos nombres m i n enters positius amb $m > n$ els nombres $\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}$ formen sempre una terna pitagòrica.

ii) Calculeu a partir del resultat anterior quatre conjunts de ternes pitagòriques.

3.5.8 *La verdad oculta*

Catherine és una noia de vint-i-set anys que es dedica a les matemàtiques, tal com ha fet el seu pare, considerat un geni en aquest àmbit. La jove Catherine ha passat anys cuidant-lo, patint indirectament la inestabilitat mental del seu progenitor. Serà després de la mort del pare quan apareixerà en escena la seva germana, a qui Catherine no suporta, ja que intenta tenir-ho tot sota control. També haurà de tenir paciència amb Hal, que era alumne del seu pare i té com a objectiu trobar algun resultat de valor matemàtic d'entre els molts quaderns que ha deixat escrits el pare de Catherine.

3.5.8.1 Infinit

El concepte infinit apareix més d'un cop al film, tot i que sovint de forma "camuflada" en aspectes quotidians.

A l'escena del minut 00:07:13, quan el pare de Catherine li presenta a Hal, li destaca a la seva filla que aquest forma part del programa d'infinits, i que conforme va acabant la seva tesi el temps tendeix a infinit.

Més endavant, al minut 00:58:12, el pare de Catherine li ensenya l'esborrany d'una demostració. Al minut 1:23:59 li dona la demostració segons ell acabada, i ella la llegeix en veu alta: "*supongamos que x es igual a la cantidad de todas las cantidades de x. Supongamos que x es igual al frío. Hace frío en diciembre. Los meses de frío van de noviembre a febrero. Hay cuatro meses de frio, cuatro de calor, y también hay cuatro de entretiempo. En febrero, nieva, en marzo,*

---

[110] El teorema de Fermat afirma que: si n és un nombre enter major o igual que 3, llavors no existeixen nombres enters positius x, y i z, tals que es compleixi la igualtat $x^n + y^n = z^n$.

[111] Andrew John Wiles (1953-), matemàtic britànic.

el lago esta helado, en septiembre los estudiantes regresan, y las librerías están llenas. Entonces x es igual a los meses de librerías llenas. El número de libros tiende a infinito cuando el número de meses de frío tiende a 4. Nunca tendré tanto frío ahora como en el futuro. El futuro del frío es infinito. El futuro del calor es el futuro del frío. Las librerías son infinitas así que nunca están llenas al buen sentido en verdad..."

- Experiència didàctica

El concepte d'infinit, a banda de treballar-se tant a secundària com a Batxillerat, tot sovint representa un repte de comprensió.

Qüestió a) Investigar qui fou Georg Cantor[112] i què va aportar a les matemàtiques.

Qüestió b) Creus que hi ha més nombres naturals $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,...\}$ o nombres parells $\{2,4,6,8,10,...\}$? En podries donar una explicació?

Qüestió c[113]) El valor de la suma de la següent sèrie d'infinits sumands és:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + ...$$

A) 0 B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{9}{32}$ E) $\frac{27}{32}$

3.5.8.2 Nombres primers de Germain

Al minut 00:30:41, a la festa-funeral per la mort del pare de Catherine, aquesta té una conversa amb Hal, quan aquest li comenta que molts creuen que la creativitat arriba al seu apogeu als 23 anys, i que a partir d'allí comença la decaiguda. Comenta el cas de Sophie Germain[114], que ell creu està a Stanford malgrat que no l'ha vist mai, però Catherine li diu que va néixer a París l'any 1776. Hal s'adona del seu error i reconeix que ella va treballar en els nombres primers, i destaca que "has de multiplicar-los per dos, després has d'afegir 1, i ja tens un altre primer"[115]. Catherine en destaca el més gran, el 92305 · 2^{16998} +1. D'aquesta escena hi ha dues coses a destacar. La primera, que no tots els nombres primers compleixen aquesta regla perquè un nombre natural és primer de Germain si $2 \cdot p + 1$ també és un nombre primer. La segona, que a dia d'avui hi ha un nombre primer de Germain més gran (cal tenir en compte que ençà que es va publicar el film al 2005 la recerca matemàtica no ha descansat), el 2.618.163.402.417 ·$2^{1.290.000}$ -1. Hi ha la conjectura que els primers de Germain són infinits.

- Experiència didàctica

Proposo una activitat relacionada amb els primers de Germain.

Qüestió) Comprovar si els nombres primers 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 i 31 són primers de Germain.

---

112 Georg Cantor (1845-1918), matemàtic alemany.
113 XLIX, Olimpiada Matemática Española, Comunidad de Madrid, Fase cero, 2012.
114 Sophie Germain (1776-1831), matemàtica i física francesa.
115 Al que es refereix Hal és als nombres primers de Germain.

3.5.8.3 Equacions diferencials

Quan Catherine parla amb el professor Bhandari (professor de Catherine), aquest afirma al minut 00:50:20 que a ella no li interessen les equacions diferencials[116], tot i que ella diu, sense estar-ne convençuda, que sí.

- Experiència didàctica

Malgrat aquestes equacions no s'estudien explícitament al batxillerat, proposo trobar una solució de les proposades, a partir de les derivades de funcions elementals.

Qüestió) Resoldre aquestes equacions diferencials:

$$a)\ y' = 2x$$

$$b)\ y' + y = 0$$

$$c)\ y^2 + (y')^2 = 1$$

3.5.8.4 Número de Hardy-Ramanujan

Al minut 1:07:31, en una tensa conversa entre pare i filla, Robert, pare de Catherine, li pregunta quants dies ha perdut per culpa de la seva inactivitat, al que ella respon que creu un mes, però ell vol la xifra exacta. Ella diu 33 dies, però ell vol més precisió, i la seva filla destaca que aquell dia s'havia despertat a les 12, al que el seu pare contesta, són 33 dies i quart (¿?), segons ell un número increïble. Al contrari, Catherine diu que és avorrit i depriment. La justificació del pare, és que si cada dia perdut fos un any, seria increïble. La contra resposta amb que es troba el pare és que 33 anys i quart no és interessant, però el seu pare li busca les pessigolles, tot dient-li que sap el que vol dir. La filla contesta "1729 setmanes"[117]. La resposta del pare és força interessant, tot dient "el nombre menor que pot expressar-se de dues formes diferents com la suma de dos cubs."[118]

- Experiència didàctica

El número 1729, més enllà de l'escena en la seva totalitat, aporta una essència matemàtica molt desapercebuda. El mateix nombre apareix a la pel·lícula *El hombre que conocía el infinito* de manera anecdòtica dos cops.[119]

Qüestió a) Comprovar amb alguns nombres primers que es verifica la següent propietat: "Si un nombre primer dividit per 4 dona residu 1, aleshores es pot expressar com a suma de dos quadrats de nombres enters".

Qüestió b) Demostrar que 205 és pot escriure com a suma de dos quadrats de dues formes diferents.

Qüestió c) Hi ha algun nombre enter menor que 205 que es pugui expressar com a suma de dos quadrats de nombres enters de dues formes diferents?

---

[116] Equació que relaciona una funció amb les seves derivades i on la incògnita és la funció.

[117] $33,25 \cdot 52 = 1729$

[118] $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Es sobreentén que els dos cubs han de ser positius.

[119] El 1729 es coneix també com a "número taxi" o número de Hardy-Ramanujan, i té el seu origen en una anècdota entre tots dos.

3.5.9 *Moebius*

Pel·lícula argentina basada en el conte *Un subterráneo llamado Moebius*, d'Armin Joseph Deutsch. La història gira entorn un "accident" al metro de Buenos Aires, on un dels combois s'ha perdut en la xarxa. Daniel Pratt, topòleg, serà l'encarregat d'intentar resoldre aquest misteri que ha agafat a tots per sorpresa.

3.5.9.1 Topologia

La topologia apareix, tant esmentada com portada a la pràctica (servirà com a eina per resoldre la desaparició d'un comboi del "Suburbano") en diversos moments del llargmetratge. Un exemple n'és l'escena del minut 00:14:31, quan el protagonista, Daniel Pratt, es presenta al director del "Suburbano de Buenos Aires". Pratt li diu que ell és topòleg, matemàtic, i davant el dubte del director sobre quina és la seva utilitat, Daniel li contesta que la topologia és una branca de les Matemàtiques que investiga les superfícies i les converteix en fórmules; una explicació clara i concisa.

- Experiència didàctica

A la vista que un dels protagonistes no sabia què és un topòleg, proposo estudiar la diferència entre la feina d'un topòleg i la d'un topògraf.

3.5.9.2 Cinta de Moebius

Com era d'esperar pel títol de la pel·lícula, la cinta de Moebius, tot i no ser la protagonista del film hi té un paper important, a grans trets, simbòlic. D'una banda serveix com a símil o exemple gràfic a l'hora de representar certes situacions i fer-les més comprensibles, com al minut 00:52:22, quan Daniel Pratt compara el sistema ("Suburbano") amb una cinta de Moebius, ja que considera que es comporta com a tal. En altres moments, la cinta, de la que en certes situacions se'n volen aplicar les propietats, apareix físicament (00:38:09) o tan sols mencionada.

La cinta de Moebius és un objecte geomètric immensament curiós, que s'obté prenent una cinta prou llarga i enganxant els seus extrems després de girar-los mitja volta. A grans trets, es tracta d'una superfície bidimensional en un espai tridimensional. Les instruccions per construir-la i la descripció de les seves propietats van ser dutes a terme per August Ferdinand Möbius i Johann Benedict Listing, tots dos matemàtics alemanys.[120]

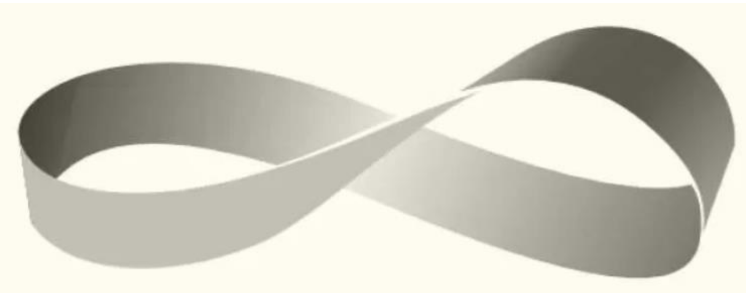


Figura 39. Imatge de conductasegura.com: Moebius y su cinta.

[120] August Ferdinand Moebius (1790-1868) i Johann Benedict Listing (1808-1882)

- Experiència didàctica

L'aparició de la cinta de Moebius en el film ens brinda la oportunitat de construir-ne una i investigar-ne les seves propietats més senzilles:

i. Té una sola cara?
ii. Té una sola vora?
iii. Quan fem una volta completa sobre la cinta arribem al mateix lloc amb el costat dret canviat per l'esquerra? (Si la resposta és afirmativa, la superfície se'n diu no orientable).
iv. Si resseguim la superfície amb un cúter de manera que la tallem per la meitat, quantes peces obtenim?
v. La cinta de Moebius té aplicacions en ciència, enginyeria, arquitectura, escultura, disseny... Podríeu trobar-ne tres?

3.5.10 *El pequeño Tate*

Fred Tate és el fill superdotat d'una mare soltera, Dede. Tots dos viuen junts, sense cap mena de luxe, però això no és important donat que mare i fill tenen una fantàstica relació. La seva vida podrà canviar quan al nen se li ofereixi estudiar en una escola per a nens amb grans capacitats, entitat que té gran interès en Fred. La seva mare s'hi negarà d'entrada, però acabarà acceptant-ho i, sota la responsabilitat d'una professora que s'encarregarà d'ell, el nen entrarà en un entorn intel·lectual, on no tot serà perfecte, però.

3.5.10.1 Càlcul mental

El càlcul mental és un dels aspectes matemàtics amb més presència al film. La primera presa de contacte que hi tenim és al minut 00:13:58, quan Fred li diu a la seva mare que Damon Wells pot multiplicar dues columnes de vint números en tan sols cinc minuts, cosa que sembla tenir impressionat al nen.

Més endavant, al minut 00:32:41, podem veure com un grup de joves, entre els que es troba Damon, estan participant en un concurs. Se'ls fa la pregunta: quants minuts hi ha en 48 anys?

Damon respon 25.228.800 minuts, i afegeix, 151.368.000 segons. La primera resposta és correcta (sempre i quan no es tinguin en compte els anys de traspàs) però la segona no ho és (la resposta correcta és 10 vegades la que diu Damon, és a dir, 1.513.728.000). Cal destacar que l'error no és de doblatge ja que en la versió original (en anglès) l'error és el mateix.

Al minut 00:34:58 veiem com és Fred qui participa ara al concurs. Observem com respon amb facilitat quina és l'arrel cúbica de 3.796.466, contestant, correctament (i obviant els decimals), 156. També se li pregunta pel número que té com a peculiaritat que si afegim el seu cub a cinc vegades el seu quadrat i del resultat restem 42 vegades el número i després 40, el resultat és 0. Contesta ràpid però dubtós, cinc?, i és correcte.

- Experiència didàctica

Un inconvenient de trobar amb càlcul mental una resposta senzilla a una pregunta, tot i el mèrit que això té, és que podem estar obviant altres respostes, com es comprova plantejant i resolent aquest últim problema de manera formal.

Qüestió a) Resoldre el problema del nombre peculiar de l'escena.

✓ *Solució:*

Si plantegem l'equació corresponent a aquest enunciat, on x és el nombre buscat, tenim que $x^3 + 5x^2 - 42x - 40 = 0$. Buscant una arrel sencera entre els divisors de 40 trobem que 5 ho és, per tant podem factoritzar l'equació com $(x-5)(x^2 + 10x + 8) = 0$ i aleshores, resolent l'equació de segon grau $x^2 + 10x + 8 = 0$ obtenim dues altres solucions amb nombres irracionals, que no apareixen en la pel·lícula: $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-32}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{68}}{2} = -5 \pm \sqrt{\frac{68}{4}} = -5 \pm \sqrt{17}$. Per tant el problema té 3 solucions en el conjunt dels nombres reals: $5, -5+\sqrt{17}, -5-\sqrt{17}$

3.5.10.2 Políedres regulars

Al minut 00:14:51, podem veure com Fred observa amb atenció un conjunt de formes geomètriques, són els sòlids platònics o poliedres regulars. Hi apareixen els cinc. En un pla posterior es veuran altres poliedres. Més tard, al minut 00:30:25 podem veure una situació similar, però en la que els poliedres, que tenen un paper decoratiu, no són regulars.

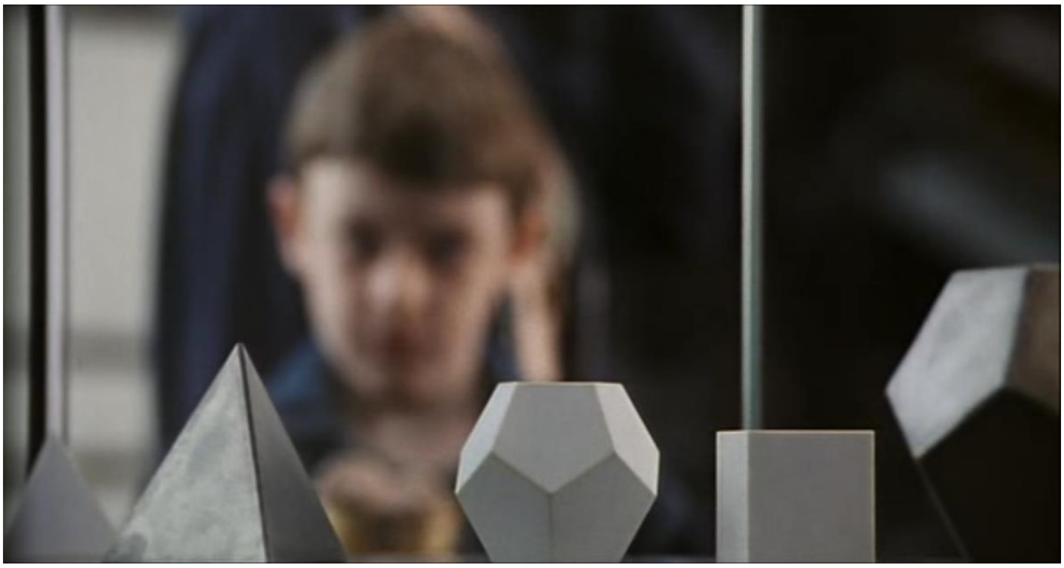


Figura 40. El pequeño Tate: imatge del minut 00:14:51

Al minut 00:32:05 Jane queda meravellada per un model de tensegritat[121] d'un icosaedre que ha fet Fred amb gomes d'esborrar i llapis (única part rígida de l'estructura; els dotze extrems dels quals formen els vèrtexs de l'icosaedre).

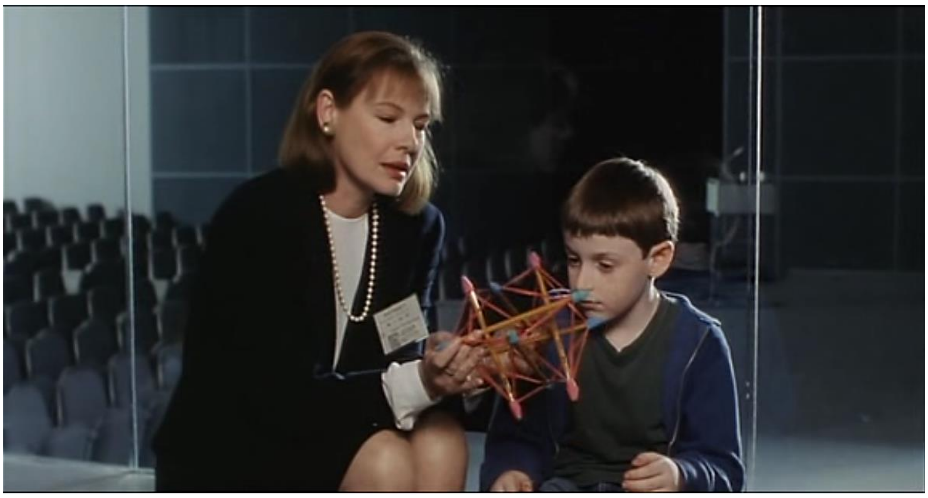


Figura 41. El pequeño Tate: imatge del minut 00:32:07

- Experiència didàctica

Els poliedres regulars tenen una sèrie de característiques. Proposo una activitat relacionada:

Qüestió a) Descriure els 5 poliedres regulars: cares, vèrtexs i arestes.

Qüestió b) Investigar per què no hi ha cap poliedre regular amb cares hexagonals.

3.5.10.3 Divisibilitat

Al minut 00:21:35 la professora de l'escola habitual de Fred pregunta als alumnes: "qui em pot dir quants d'aquests nombres (1,2,3,4,5,6,7,8,9 i 10) són divisibles per dos?". Fred, que està centrat en una altra cosa, davant la insistència de la professora, li contesta que tots ho són. La professora queda sorpresa, i sembla fins i tot no comprendre al nen. Tot sembla indicar que entenen el concepte divisibilitat de maneres diferents.

Al minut 00:32:55, una de les preguntes plantejades als concursants, en aquest cas la respon Damon, és quants divisors hi ha de 3067. Damon contesta, correctament i convençut, que no n'hi ha ja que és un nombre primer. A continuació, i després que Damon demani que el desafiïn de veritat, el "jutge" els demana que diguin un número que al dividir-lo pel producte dels seus dígits doni 3 de quocient i que si hi afegíssim 18 a aquell número els dígits quedarien invertits. Fred, que es troba entre el públic però no entre els concursants, hi pensa i contesta en veu alta: 24. És correcte, i el jutge pensa que es Damon qui ho ha dit, però ell nega haver-ho dit, tot i que diu que ho anava a fer.

[121] RAE: Propietat de les estructures l'equilibri de les quals depèn de les forces de tensió i compressió dels seus elements.

- Experiència didàctica

El fragment del minut 00:21:35 brinda l'oportunitat de reflexionar en torn al càlcul mental. A més a més, el concepte de divisibilitat permet fer un plantejament formal del problema del minut 00:32:55.

Qüestió a) Fred contesta a la seva professora que dels nombre de l'u al deu, tots són divisibles per dos. Té raó? Per què?

Qüestió b) Com plantejaríem l'escena del minut 00:32:55 si el nombre buscat tingués dues xifres?

✓ *Solució:*

Sigui ab el nombre buscat aleshores $10a+b+18=10b+a \Rightarrow 9a-9b=-18 \Rightarrow a-b=-2$ $\Rightarrow b-a=2$ per tant tenim els següents casos possibles

a	b	$a \cdot b$
7	9	63
6	8	48
5	7	35
4	6	24
3	5	15
2	4	8
1	3	3

$\Rightarrow$ l´ única solució és 24

Qüestió c) Podria ser la solució un nombre de tres xifres?

✓ *Solució:*

Sigui abc el nombre buscat, aleshores $100a+10b+c+18=100c+10b+a$ $\Rightarrow 99a-99c=-18 \Rightarrow 11a-11c=-2 \Rightarrow 11(a-c)=-2$ que és una equació que no té solució en el conjunt dels nombres enters positius.

3.5.11 *Planilandia*

Planilandia és l'única pel·lícula d'animació que forma part d'aquest treball. Està basada en la novel·la homònima publicada per primera vegada el 1884, obra d'Edwin A.Abbot. Els protagonistes que habiten aquest món de dues dimensions són polígons i es pot considerar com una sàtira corrosiva del món jerarquitzat de l'Anglaterra victoriana: les classes socials, el paper de les dones, la permeabilitat a noves idees, etc.

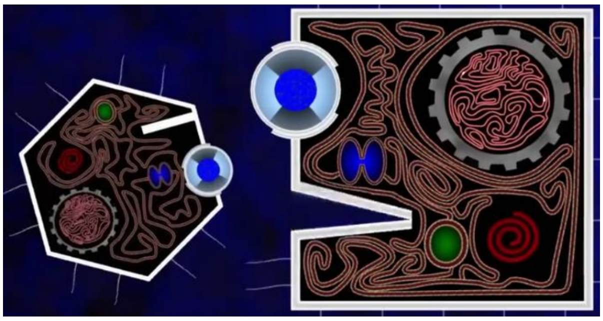


Figura 42. Planilandia: imatge del minut 00:00:47

El protagonista principal és un quadrat "A-square", de professió advocat i que té interès per les matemàtiques. El seu fill més espavilat és un hexàgon i els altres fills són pentàgons. Tots ells regulars.

Donat que el seu univers només té dues dimensions, el problema principal del seus habitants és com reconèixer als altres habitants, ja que en dues dimensions qualsevol polígon és vist com un segment rectilini.

Figura 43. Planilandia: imatge del minut 00:01:06

Figura 44. Planilandia: imatge del minut 00:01:04

Imatge del pare intentant que el seu fill aprengui a distingir un pentàgon d'un triangle isòsceles, sense tocar-los, perquè tocar es considera de mala educació.

3.5.11.1 Polígons regulars

La regularitat és la principal virtut dels planilandesos i aspiració de qualsevol dels seus habitants i la irregularitat es considera una forma pròpia de classes inferiors. Així, quants més costats té el polígon regular més alta és la classe social a la qual es pertany, de forma que els polígons regulars amb un nombre molt, molt gran de costats són anomenats "cercles" i formen la classe dirigent d'aquest món. No són cercles realment, però en tenen tota l'aparença.

El protagonista viu tota una sèrie d'aventures, les més rellevants en relació a:

a) Les disputes amb els cromatistes, que defensen que els costats es puguin pintar per facilitar el reconeixement.

b) El descobriment en somnis de Linialàndia, un món d'una sola dimensió, amb habitants incapaços d'entendre un mon de dues dimensions.

c) La visita d'un habitant del món tridimensional (una esfera) que l'introdueix en el coneixement de les tres dimensions, impossible de fer perceptible de bon principi al nostre protagonista i que, després que ell ho assimili, no aconsegueix fer-ho comprensible als seus conciutadans de Planilandia.

- Experiència didàctica

La pel·lícula dona peu a fer càlculs sobre la mesura de l'angle intern d'un polígon regular.

a) Quina és la fórmula que ens permet calcular la mesura d'un angle intern en un polígon regular de n costats?
b) Quant mesura l'angle intern d'un polígon regular de 72360 costats?
c) Els habitants més perillosos de Planilandia, en el sentit que poden ferir a altres habitants sigui per accident o voluntàriament, són els que tenen angles interns més petits. En la imatge veiem alguns d'aquests habitants. Quins són i quins d'ells creieu que són més perillosos?

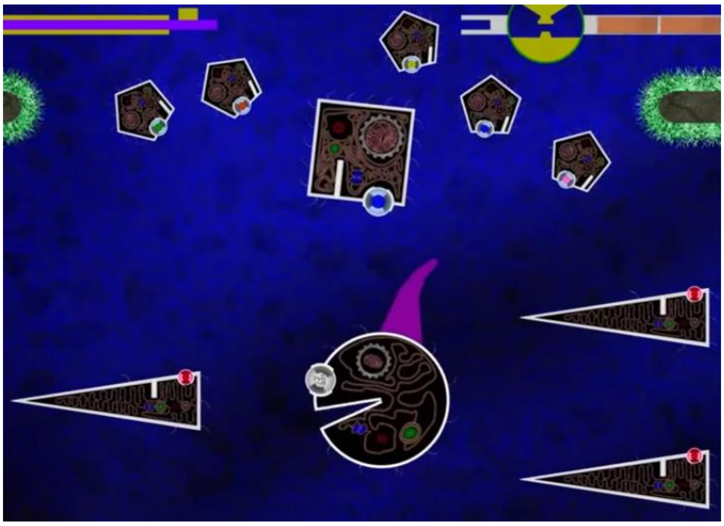


Figura 45. Planilandia: imatge del minut 01:27:48

4. CONCLUSIONS

En primer lloc, s'han pogut determinar les referències matemàtiques de cada pel·lícula analitzada, quelcom indispensable a l'hora de redactar el marc pràctic. Cal dir, però, que no totes les cintes han aportat referències matemàtiques en la mateixa quantitat, tal com mostra l'índex. Al mateix temps, ha quedat demostrat que aquestes referències tenen relació amb les matemàtiques que s'estudien a l'educació secundària i batxillerat, tot i que he trobat certes referències d'un nivell més avançat, com és el cas dels problemes de l'Olimpíada Internacional de Matemàtiques de la pel·lícula *x+y A brilliant young mind*.

S'ha pogut avaluar la fidelitat amb què es tracten tant els temes matemàtics com la biografia de matemàtics reconeguts; en la majoria dels casos es respecta el rigor matemàtic i històric, tot i que en alguns films es tendeix a l'exageració de certs aspectes, especialment biogràfics i psicològics, sovint amb l'objectiu que la pel·lícula sigui més atractiva per al públic, com és el cas de *Una mente maravillosa* pel que respecta a l'esquizofrènia de John Nash. Addicionalment, he constatat que en alguns films s'abusa del personatge matemàtic com a personatge excèntric, com ara a *La verdad oculta* amb el personatge del pare de la protagonista o a *El pequeño Tate* amb Damon.

Ha quedat demostrat que es pot establir una relació entre les escenes amb contingut matemàtic amb alguns problemes plantejats en concursos matemàtics o a les PAU de Catalunya, relació que s'ha plasmat a la part pràctica a través de les experiències didàctiques, encara que en alguns casos aquestes experiències tenen relació amb concursos d'altres països o són de creació pròpia. Amb tot això, i constatant que les escenes podrien servir com a element motivador en les classes de matemàtiques, s'han pogut proposar experiències didàctiques relacionades, peça clau del marc pràctic d'aquest treball.

De retruc, he descobert que en moltes de les cintes analitzades s'hi troben altres aspectes amb possible ús didàctic: en l'àmbit històric (*Aventuras de un matemático*, *Ágora*, *Descifrando Enigma*, *Descifrando el código*, *Figuras Ocultas*, *Windtalkers*, *Midiendo el mundo* i *El hombre que conocía el infinito*), ciències físiques (*Cielo de octubre* i *Figuras ocultas*), ciències naturals (*Midiendo el mundo*), ciències econòmiques (*Moneyball: Rompiendo las reglas*, *The Pelayos*, *21 blackjack*, *Rain Man* i *Una mente maravillosa*) i per a tutoria (*Cielo de octubre*), convertint-les així en eines transversals.

Amb tot plegat, queda demostrat que el cinema pot ser utilitzat com a element didàctic d'utilitat en les classes de matemàtiques de secundària i batxillerat, per mitjà d'experiències didàctiques concretes bastides gràcies a escenes específiques analitzades dels films prèviament escollits, no oblidant, a pesar de tot, que el cinema matemàtic no existeix com a tal, ja que no hi ha pel·lícules que expliquin matemàtiques, sinó films on apareixen matemàtiques, tot i que no són les protagonistes de la cinta en molts casos, tesi que defensa igualment el matemàtic José María Sorando.

5. BIBLIOGRAFIA

(1) ABBOT EDWIN A. Planilandia. Editorial Laertes. 2008

(2) ARGÜELLES RODRÍGUEZ, JUAN. Historia de la matemática. Ediciones Akal. 1989.

(3) BELTRAN PELLICER, PABLO. Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria. Tesis doctoral UNED. 2015

(4) BOUCHAUD, JEAN-PHILIPPE. Las leyes de los grandes números. Mundo Científico num 161 pp 870-874. Octubre 1995.

(5) BOYER, CARL B. Historia de la matemàtica. Alianza Universidad Textos. Madrid. 1994

(6) GARCÍA-PELAYO, GONZALO, GARCÍA PELAYO, IVAN. La fabulosa historia de los Pelayos. Plaza y Janés. Barcelona. 2003.

(7) GARDNER, MARTIN. ¡Ajá! Paradojas. Paradojas que hacen pensar. Editorial Labor. Barcelona. 1989

(8) GUASP,G; REVENTÓS, A. La "cinta" de Moebius. Materials matemàtics volum 2013 no 2. Universitat Autònoma de Barcelona. 2013.

(9) GUISASOLA ARANZABAL, JENARO, IGNACIO BARRAGUÉS, JOSÉ. Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. Enseñanza de las ciencias Vol 20 Num 2. Universitat Autònoma de Barcelona. 2002.

(10) MACHO STAEDLER, MARTA. Las sorprendentes aplicaciones de la banda de Moebius. Actas segundo congreso internacional de matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura, pp 29-61. 2008

(11) MARTÍNEZ BORREGO, JUAN JOSÉ. Els jocs d'atzar: ¿qüestió de sort o de matemàtiques? Una manera atractiva d'explicar la probabilitat a l'educació secundària. Treball fi de màster. UPC. 2013.

(12) MARTÍNEZ, GUILLERMO. Els crims d'Oxford. Columna. 2004

(13) NASAR, SYLVIA. Una mente prodigiosa. Comunicación y publicaciones. Barcelona. 2005.

(14) NÚÑEZ VALDÉS, JUAN y PONCE ESCUDERO, MANUEL. Una visita a Planilandia. Revista Suma num 41 pp 103-112.

(15) OGAWA, YOKO. La fórmula preferida del profesor. Tusquets editores colección andanzas. Barcelona. 2022.

(16) POBLACIÓN SÁEZ, ALFONSO J. Algunos momentos matemáticos del cine. Materials matemàtics volum 2008 no 2. Universitat Autònoma de Barcelona. 2008.

(17) POBLACIÓN SÁEZ, ALFONSO JESÚS. 15 años a vueltas con el cine. Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las matemáticas (JAEM) Cartagena. 2015.

(18) POBLACIÓN SÁEZ, ALFONSO JESÚS. Las matemáticas en el cine. Proyecto Sur de Ediciones, S.L. Real Sociedad Matemática Española. 2006.

(19) ROUX, DOMINIQUE. Los premios Nobel de economía 1969-2005. Editorial Akal colección Economía Actual. Madrid. 2006.

(20) SERRANO, LUIS; BATANERO, CARMEN; ORTIZ, J.JESÚS I CAÑIZARES, M.JESÚS Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria Educación Matemática, 1998, 10 (1), pp 7-25.

(21) SINGH, SIMON. Los códigos secretos. Editorial Debate. 2000

(22) SORANDO MUZÁS, JOSÉ MARÍA. Aventuras matemáticas en el cine. Editorial Guadalmazán Colección Mathematica. 2015.

(23) SORANDO MUZÁS, JOSÉ MARIA. Cine y matemáticas. Resolviendo problemas. Editorial Guadalmazán Colección Mathematica. 2016.

(24) SORANDO MUZÁS, JOSÉ MARÍA. Matemáticas de cine. Editorial Guadalmazán Colección Mathematica. 2020.

(25) SORANDO MUZÁS, JOSÉ MARÍA. Problemas escolares vs problemas reales (1). Revista Suma num 73 pp 73-79.

(26) SORANDO MUZÁS, JOSÉ MARÍA. Problemas escolares vs problemas reales (2). Revista Suma num 74 pp 19-26.

(27) ULAM, STALISNAW M. Aventuras de un matemático. Memorias de Stalisnaw M.Ulman. Nivola libros y ediciones. 2002.

(28) TANIGUCHI, PABLO. Como superar las matemáticas de 3º de B.U.P. Editorial Universitaria de Barcelona. 1980.

6. WEBGRAFIA

- (n.d.), La CINTA de MOEBIUS, ¿qué es y para qué sirve?, Cinta de Moebius – Exprime tu mentecintademoebius.com, https://www.cintademoebius.com/la-cinta-de-moebius/, recuperat el 06-07-2023.
- (n.d.), La historia del método de Newton-Raphson y otro caso más de mala documentación en el cine – Gaussianos, Porque todo tiende a infinito gaussianos, https://www.gaussianos.com/la-historia-del-metodo-de-newton-raphson-y-otro-caso-mas-de-mala-documentacion-en-el-cine/, recuperat el 10-07-2023.

- (n.d.), Simulador Monty Hall, math4all, https://www.math4all.es/monty-hall/simulador-monty-hall.html, recuperat el 11-07-2023.

- (n.d.), 21 Script - Dialogue Transcript, Drew's Script-O-Rama, http://www.script-o-rama.com/movie_scripts/t/21-script-transcript.html DIA 23/9, recuperat el 11-07-2023.

- Leyja, Lydia, NATIONAL GEOGRAPHIC EN ESPAÑOL, Proyecto Manhattan: El plan de Oppenheimer para la creación de la bomba atómica, https://www.ngenespanol.com/el-mundo/proyecto-manhattan-el-plan-de-oppenheimer-para-la-creacion-de-la-bomba-atomica/, recuperat el 07-08-2023

- (n.d.), La pasión de pensar, 1952, MANIAC. Primera generación de ordenadores, https://lapasiondepensar.wordpress.com/2018/08/10/1952-maniac/, recuperat el 08-08-2023

- (n.d.), IBM, ¿Qué es la simulación Montecarlo?, https://www.ibm.com/es-es/topics/monte-carlo-simulation?mhsrc=ibmsearch_a&mhq=montecarlo, recuperat el 20-08-2023

- Matthews, Morgan, Beautiful Young Minds, Regne Unit i Eslovènia, Regne Unit, Gee, Joby, 2006, 90 minuts, https://www.youtube.com/watch?v=N5fmiAsHxxo, recuperat el 03-09-2023.

- Djukic, Dusan et al, The IMO Compendium A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Eötvös Loránd Tudományegyetem, https://nagyzoli.web.elte.hu/compendium.pdf, recuperat el 17-09-2023.

- (n.d.), Método Trachtenberg, Wikipedia, https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_Trachtenberg, recuperat el 23-09-2023.

- (n.d.), Matemática védica de Bharati Krishna Tirtha, https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_v%C3%A9dica_de_Bharati_Krishna_Tirtha, recuperat el 23-09-2023.

- (luisyep), Los 7 problemas del milenio. 1 millón de dólares cada uno. , Ingeniería Básica – ¡Atrévete a pensar!, https://ingenieriabasica.es/los-7-problemas-del-milenio/, recuperat el 23-09-2023.

- Ira Hauptman, Partition, Estats Units d'Amèrica, vídeo d'una representació de l'obra de teatre al Explora Science Center and Children's Museum d'Albuquerque, Nou Mèxic, Estats Units d'Amèrica, https://www.youtube.com/watch?v=XfB3kWGE4oo, recuperat el 29-09-2023

- (n.d.), Juegos de intel·ligencia, PsicoActiva, https://www.psicoactiva.com/juegos-inteligencia/, recuperat el 30-09-2023.

- Rijmenants, Dirk, Technical Details of the Enigma Machine, Cipher Machines and Criptlology, https://www.ciphermachinesandcryptology.com/en/enigmatech.htm , recuperat el 30-09-2023.

- (n.d.), Criptografía: método de las frecuencias, Estadística para todos, https://www.estadisticaparatodos.es/taller/criptografia/criptografia.html , recuperat el 30-09-2023.

- (Sacit Ámetam), Habitación de Fermat, solución de los acertijos, Revista Digital de Matemáticas Sacit Ámetam, http://revistasacitametam.blogspot.com/2010/02/habitacion-de-fermat-solucion-de-los.html , recuperat el 07-10-2023.

- (n.d.), Tetraktys, Viquipèdia, https://ca.wikipedia.org/wiki/Tetraktys , recuperat el 08-10-2023.

7. FILMOGRAFIA ANALITZADA

[1] *La habitación de Fermat*. Luis Piedrahita y Rodrigo Sopeña. Nostro Films. España. 2007.

[2] *Los crímenes de Oxford.* Alex de la Iglesia. Tornasol Films/Estudios Picasso/ Oxford Crimes/La Fabrique de Films. España. 2008.

[3] *Ágora.* Alejandro Amenábar. Telecinco Cinema/Mod Producciones/ Himenóptero. España 2009.

[4] *Moebius*. Gustavo Mosquera. Universidad del Cine de Buenos Aires. 1996

[5] *Una mente maravillosa* (A Beautiful Mind). Ron Howard. Dreamworks/Universal Pictures/Imagie Entertainment. EE.UU. 2001

[6] *El indomable Will Hunting (Good Will Hunting).* Gus Van Sant. Miramax International. EE.UU. 1997

[7] *Descifrando Enigma (The Imitation Game).* Morten Tyldum. The Weinstein Company/Black Bear Pictures/Ampersand Pictures. Reino Unido. 2014

[8] *Breaking the code.* Herbert Wise. BBC/The Drama House/WGBH Boston. Reino Unido. 1996

[9] *Midiendo el mundo.* Detlev Buck. Boje Buck Produktion/Lotus Film/ A Company Filmproduktionsgesellschaft. Alemania. 2012.

[10] *El hombre que conocía el infinito (The Man Who Knew Infinity).* Matt Brown. Animus Films/Edward R. Pressman Film/ Firecracker Entertainment. Coproducción Reino Unido-Estados Unidos.2015

[11] *Figuras ocultas. (Hidden Figures).* Theodore Melfi. Levantine Films/Chernin Entertainment/Fox 2000 Pictures. EE.UU. 2016

[12] *La verdad oculta (Proof).* Larysa Kondracki. John Madden. Miramax. EE.UU. 2005.

[13] *La fórmula preferida del professor (Hakase no aishita sushiki) (The Professor and His Beloved Equation).* Asmik Ace/ Hakuhodo DY Media Partners/ Imagica/ Sumitomo Corporation/ Tokyu Recreation. Takashi Koizumi. Japón. 2005.

[14] *21 Black Jack.* Columbia Pictures. Robert Luketic. EE.UU. 2008

[15] *X+Y (A brilliant Young Mind).* Morgan Matthews. Origin Pictures/ Minnow Films/ Head Gear Films/ BBC Film. Reino Unido. 2014.

[16] *Cielo de octubre (October Sky).* Joe Johston. Universal Pictures. EE.UU. 1999.

[17] Adventures of a Mathematician. Thorsten Klein. Coproducción Alemania-Polonia-Reino Unido; Dragonfly Films/ ShipsBoy/ Mirror Productions/ Zischlermann Filmproduktion/ Erfttal Film/ Sampsonic Media/ Polski Instytut Sztuki Filmowej/ Medienboard Berlin-Brandenburg/ German Federal Film Fund/ Tribeca Film Institute/ Independent Film/ Alfred P. Sloan Foundation/ Polsko-Niemiecki Fundusz Filmowy/ ZDF/Arte. Alemanía. 2020.

[18] *El pequeño Tate.* Jodie Foster. Orion Pictures/Metro-Goldwyn-Mayer. EE.UU. 1991.

[19] *Moneyball. Rompiendo las reglas.* Bennett Miller. Columbia Pictures/ Michael De Luca, Scott Rudin Productions/ Specialty Films. EE.UU.2011.

[20] *Planilandia (Flatland).* Ladd Ehlinger Jr. Flatland Productions. EE.UU.2007.

[21] *Rain Man.* Barry Levinson. United Artists/ Guber-Peters Company/ Mirage Entertainment/ Star Partners. EE.UU. 1998.

[22] The Pelayos. Eduard Cortés. Alea Docs & Films/Bausan Films. España. 2012.

[23] *Un don excepcional (Gifted).* Marc Webb. Metro-Goldwyn-Mayer. EE.UU. 2017.

[24] Windtalkers (Códigos de guerra). John Woo. EE.UU. 2002.

8. ÍNDEX ANALÍTIC

9. ÍNDEX DE FIGURES

necesitaban, en qué punto se encontraban. En esa época, los libros de matemáticos eran demenciales, basados en estructuras inconcebibles. Tuve que rebajar el rigor y nivel matemático para acercarme al nivel pedagógico y humano; proceso lento que a veces topa con las sinergias escolares. El cine, por ejemplo, me ayudó a conseguirlo, todo y las discrepancias de algunos de mis compañeros. Cabe decir que lo fácil es llenar pizarras y pizarras, pero diseñar una actividad didáctica lleva mucho tiempo de trabajo y a lo mejor se consume en un cuarto de hora; es costoso pero necesario.
Intenté conseguir que viesen que hay matemáticas fuera de clase, que no son solo para listos, y que también son "para la gente de letras". En conclusión, utilizaba muchos recursos para mantener vivo su interés, pero sin olvidar nunca que estábamos haciendo matemáticas; alguna vez incluso salíamos de clase e íbamos al río Ebro, cuando hacíamos trigonometría, para medir su anchura utilizando la trigonometría, o calcular la altura de la torre del centro comercial, o cuando estudiábamos estadística hacíamos sondeos en el barrio resolviendo problemas con elementos reales. ¡Incluso otros elementos como la magia también pueden ser útiles!

5) Como profesor y matemático, cuál es su respuesta a la pregunta: ¿de qué sirven las matemáticas? Justamente una de las charlas que doy por los institutos se titula: ¿matemáticas para qué? Siempre doy cuatro respuestas: para entender el mundo, detectar engaños, tomar las mejores decisiones y por último reír disparates; ¡también se pueden echar risas matemáticas! Una buena respuesta a esa pregunta también puede ser la frase de Puig Adam[124]: el único conocimiento que es seguro que nunca utilizarás es el que no tengas.

6) Dirigiéndose ahora a un posible colectivo de gente con una visión diferente a la suya, ¿cómo defendería usted su declaración al medio *Calamocha TV*: "las Matemáticas no son solo un saber académico"? Siempre hablo del pensamiento matemático. Las mates te dan instrumentos para resolver ciertas cuestiones, pero sobre todo forman tu pensamiento, así que todos somos matemáticos porque en la vida vamos a encontrar un problema detrás de otro. Si somos capaces de razonar las situaciones, los problemas de diversos tipos, estamos razonando en clave matemática, aunque no uses explícitamente los tópicos académicos.

7) ¿Habiendo sido usted profesor de secundaria a lo largo de 36 años, considera que la educación, concretamente matemática, debe estar sometida a cambios si estos son necesarios, o bien debe adoptar una posición conservadora, optando única y exclusivamente por métodos tradicionales? Te diría que aunque cambien las leyes, las prácticas suelen cambiar bastante poco. Por desgracia, los profesores tenemos tendencia a repetir lo que se hizo con nosotros, y deberíamos saber con quién estamos; ¡nuestros alumnos no son nosotros a su edad! Hay que evitar ese sesgo tan personalista que a veces tenemos los profesores y debemos entender que el mundo evoluciona. ¡Hacer lo clásico, clásico no tiene sentido!

8) ¿Cree usted que el cine tiene lugar en una clase de Matemáticas, independientemente del curso? ¿Si es así, por qué? Sí, pero en justa medida; puede ser un recurso más. En contra de los prejuicios establecidos, con el cine vemos las matemáticas relacionadas con las aventuras, la intriga, el amor, la risa, todo aquello que no se espera de las matemáticas.

[124] Pedro Puig Adam (1900-1960), matemàtic i enginyer espanyol.

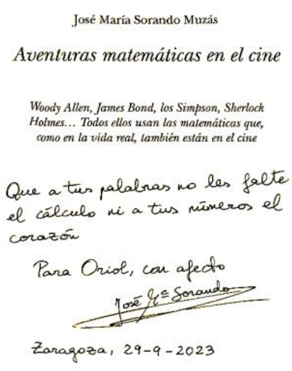
9) No solo el cine puede ser un elemento didáctico. ¿Cree que la lectura tiene cabida en una clase de matemáticas? Sí, hay libros muy adecuados. Aun así, debe comentarse en el aula e intentar que la lectura sea durante un período de vacaciones, para así no cargar más a los alumnos, que tenéis ya muchos trabajos por hacer entre semana.

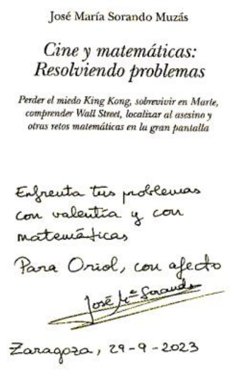
10) ¿A nivel personal, a usted el cine y la lectura le han ayudado a conocer más sobre las matemáticas? Me han ayudado en el mismo sentido que me ha ayudado dar clase. Cuando tienes que explicar algo, aprendes algo nuevo sobre aquello que pensabas que ya sabías. De este mismo modo, cuando he tenido que pensar como llevar las escenas de cine a clase, he tenido que reflexionar sobre aspectos matemáticos que nunca me había planteado.

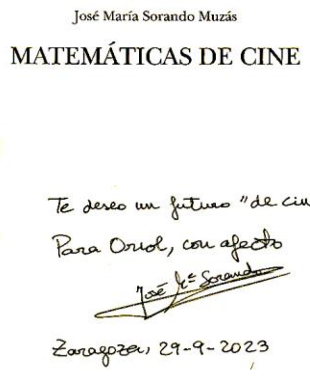
11) ¿Considera usted que las películas de contenido matemático van solo dirigidas a un público que las pueda comprender? ¡Lo primero de todo decir que películas de ese tipo no hay! Lo más parecido serían las películas cuyo protagonista es un matemático y ya se cuidan mucho los directores de enfatizar sobre todo las situaciones dramáticas, los amores, las anécdotas… Películas puramente matemáticas no las hay.

12) *La fórmula preferida del profesor, Aventuras de un matemático, Una mente maravillosa*… son ejemplos de películas que tienen a su vez una versión bibliográfica. ¿Considera que ambas versiones aportan el mismo contenido? ¿En cuál de las dos opciones confía usted más? Dependiendo del caso. Por ejemplo, de la *Fórmula preferida del profesor* me gusta mucho más la película que el libro, ya que aporta un impacto que el libro no me transmitió; puede depender. En el caso de *Midiendo el mundo*, siendo distintos estarían a la par. Aun así, no te daría una respuesta general, sino que depende de cada caso.

13) ¿Por último, como terminaría la frase: el cine matemático es…? ¡Lo siento, pero es que no hay un cine matemático! Sí que hay grabaciones de divulgación matemática, como *Una matemática viene a verte* de Clara Grima[125], pero un cine que explique matemáticas no lo hay. Lo más parecido, aun así, fue un corto de media hora sobre la vida de Galois[126], de los años sesenta titulada *Galois* donde él habla de su teoría, pero de fondo hay el duelo, y es la que conozco con más "parrafada matemática". ¡Es excesivo llamar cine matemático a muchas películas donde las matemáticas no son protagonistas!



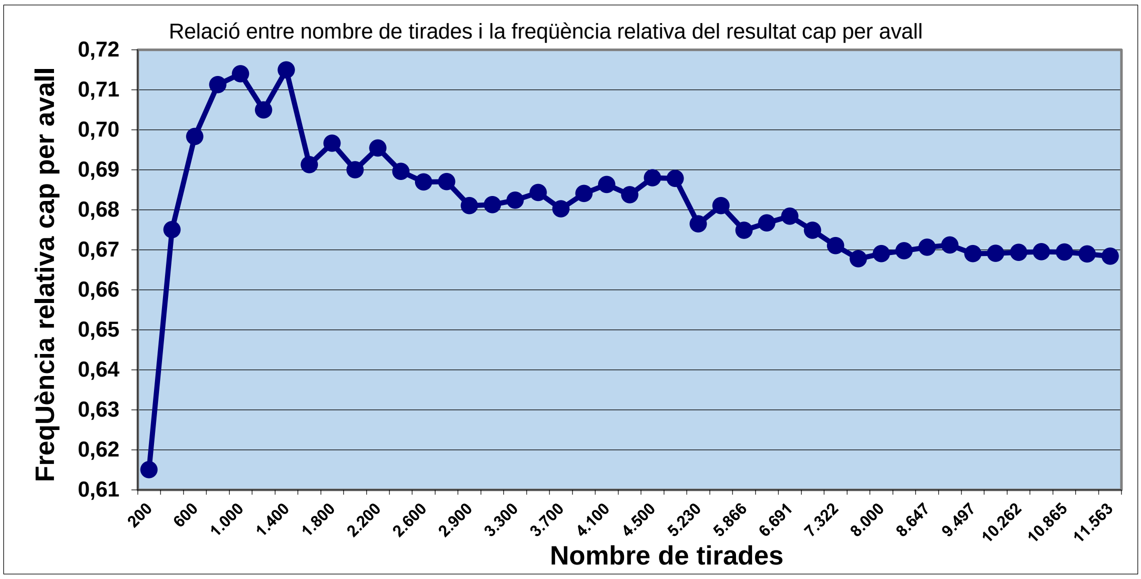




125 Clara Isabel Grima Ruiz (1971-), matemàtica espanyola i divulgadora científica.
126 Évariste Galois (1811-1832), matemàtic francès.

11. Annex 2: taula de l'experiment de la xinxeta

Alumne	Nombre de tirades	Nº de vegades que cau de costat	Nº de vegades que cau cap per avall	Total tirades	Total costat	Total cap per avall	Freq relativa cap per avall	En %
1	200	77	123	200	77	123	0,615000	62%
2	200	53	147	400	130	270	0,675000	68%
3	200	51	149	600	181	419	0,698333	70%
4	200	50	150	800	231	569	0,711250	71%
5	200	55	145	1.000	286	714	0,714000	71%
6	200	68	132	1.200	354	846	0,705000	71%
7	200	45	155	1.400	399	1.001	0,715000	72%
8	200	95	105	1.600	494	1.106	0,691250	69%
9	200	52	148	1.800	546	1.254	0,696667	70%
10	200	74	126	2.000	620	1.380	0,690000	69%
11	200	50	150	2.200	670	1.530	0,695455	70%
12	200	75	125	2.400	745	1.655	0,689583	69%
13	200	69	131	2.600	814	1.786	0,686923	69%
14	100	31	69	2.700	845	1.855	0,687037	69%
15	200	80	120	2.900	925	1.975	0,681034	68%
16	200	63	137	3.100	988	2.112	0,681290	68%
17	200	60	140	3.300	1.048	2.252	0,682424	68%
18	200	57	143	3.500	1.105	2.395	0,684286	68%
19	200	78	122	3.700	1.183	2.517	0,680270	68%
20	200	49	151	3.900	1.232	2.668	0,684103	68%
21	200	54	146	4.100	1.286	2.814	0,686341	69%
22	200	74	126	4.300	1.360	2.940	0,683721	68%
23	200	44	156	4.500	1.404	3.096	0,688000	69%
24	200	63	137	4.700	1.467	3.233	0,687872	69%
25	530	225	305	5.230	1.692	3.538	0,676482	68%
26	353	89	264	5.583	1.781	3.802	0,680996	68%
27	283	126	157	5.866	1.907	3.959	0,674906	67%
28	450	135	315	6.316	2.042	4.274	0,676694	68%
29	375	110	265	6.691	2.152	4.539	0,678374	68%
30	211	92	119	6.902	2.244	4.658	0,674877	67%
31	420	165	255	7.322	2.409	4.913	0,670992	67%
32	380	150	230	7.702	2.559	5.143	0,667749	67%
33	298	89	209	8.000	2.648	5.352	0,669000	67%
34	367	115	252	8.367	2.763	5.604	0,669774	67%
35	280	85	195	8.647	2.848	5.799	0,670637	67%
36	350	110	240	8.997	2.958	6.039	0,671224	67%
37	500	185	315	9.497	3.143	6.354	0,669053	67%
38	500	165	335	9.997	3.308	6.689	0,669101	67%
39	265	85	180	10.262	3.393	6.869	0,669363	67%
40	304	99	205	10.566	3.492	7.074	0,669506	67%
41	299	100	199	10.865	3.592	7.273	0,669397	67%
42	347	120	227	11.212	3.712	7.500	0,668926	67%
43	351	122	229	11.563	3.834	7.729	0,668425	67%



12. Annex 3: transcripció de l'explicació d'Alan Turing del Teorema de Gödel

".....es un artículo técnico de la lógica matemática pero también trata de la dificultad de discernir entre lo cierto y lo falso....La mayoría de la gente piensa que en matemáticas siempre sabemos lo que es cierto y lo que es falso. Pues no, ya no. Este problema ha ocupado a los matemáticos durante cuarenta o cincuenta años. Quiero decir como decidir qué es cierto y que es falso. Bertrand Russell escribió un libro inmenso sobre el tema, "Principia Mathematica". Su idea consistía en descomponer los conceptos y razonamientos matemáticos en pequeños elementos para luego probar que estos podían deducirse de la lógica pura, pero no resulto del todo bien. Después de muchos años de trabajo inmenso lo único que saco en limpio fue mostrar que es increíblemente difícil hacer algo semejante. Sin embargo fue un libro importantísimo. Importante e influyente. Influyo tanto en David Hilbert como en Kurt Gödel. Se parece bastante a lo que los físicos denominan dividir el átomo. Del mismo modo que el análisis del átomo ha conducido el descubrimiento de una nueva física, así también el intento de analizar estos átomos matemáticos ha llevado a un nuevo tipo de matemáticas. David Hilbert llevo el problema a un nivel más avanzado. Imagino que su nombre no le dirá gran cosa – si es que le suena de algo-, bueno que le vamos a hacer, así funciona el mundo, la gente nunca oye hablar de los matemáticos verdaderamente grandes.

Hilbert abordo el problema desde una perspectiva totalmente diferente y propuso que cualquier sistema fundamental para las matemáticas – como el que Russell estaba intentando obtener- debía satisfacer tres requerimientos básicos: consistencia, completitud y decidibilidad.

La **consistencia** significa que nunca te encontrarás con contradicciones en tu propio sistema; dicho de otro modo, si sigues las reglas de tu sistema nunca acabarás demostrando que dos y dos son cinco.

La **completitud** implica que si una afirmación es verdadera, entonces debe existir alguna forma de demostrarla siguiendo las reglas de tu sistema.

Y la **decidibilidad** exige que exista algún método, algún procedimiento o técnica preciso, que aplicado a cualquier afirmación matemática dada permita decidir si esta es o no demostrable.

Hilbert creyó que imponer este conjunto de requerimientos era algo muy razonable, pero en el plazo de unos pocos años Kurt Gödel demostró que ningún sistema para las matemáticas podía ser a la ver consistente y completo. Lo consiguió construyendo una afirmación matemática que decía, de hecho: "Esta afirmación no puede ser demostrada". Una paradoja clásica: "Esta afirmación no puede ser demostrada".

Bien, o se puede o no se puede.

Si pudiese ser demostrada tenemos una contradicción y el sistema es inconsistente. Si no pudiese ser demostrada entonces la afirmación es verdadera pero no puede demostrarse, lo que implica que el sistema es incompleto. Así pues las matemáticas o bien son inconsistentes o bien son incompletas. Es un teorema hermoso, realmente hermoso. Creo que el teorema de Gödel es la cosa más hermosa que conozco.

Sin embargo la cuestión de la decidibilidad aún no está resuelta…."

13. Annex 4[127]: enigmes de *La habitación de Fermat*

1) 00:14:25 Un pastor, un llop, una ovella i una col són a la vora d'un riu. Han de creuar a la riba oposada, però la barca on pujaran no és prou gran i només pot portar el pastor i un dels seus acompanyants. No pot deixar el llop i l'ovella junts a cap de les dues ribes, ja que el llop devoraria l'ovella. De manera semblant, l'ovella es menjaria la col si les deixa juntes. Tot i això, el pastor va aconseguir resoldre el problema sense que hi hagués cap víctima. Sabries dir com ho va poder aconseguir?

2) 00:30:00 Tenim tres caixes de caramels: una té caramels de taronja, una altra de llimona, i la tercera els conté barrejats. Les caixes vénen etiquetades com a "Taronja", "Llimona" i "Barreja", però se sap que les tres etiquetes són incorrectes. La pregunta és: quants caramels caldrà provar per conèixer el contingut de cada caixa?

3) 00:32:42 Apareixen un munt de uns i zeros:

0000000000000000111111110000 11111111111001000111000100 1

0011111001001111010111110011 1001001110001111111111000001

0000010000000100000100000011 1111100000001111100000000000 0000000

Què representen?

4) 00:41:54 "L'assumpte dels tres interruptors"

A l'inici d'un llarg passadís fosc es troba un home, amb tres interruptors de la llum davant. Vol saber quin dels tres interruptors és el que encén la bombeta de la seva habitació, situada al final del passadís feliç. I arriba, després d'una profunda reflexió, a la conclusió que, prement un o més

[127] Solucions a http://revistasacitametam.blogspot.com/2010/02/habitacion-de-fermat-solucion-de-los.html

interruptors i fent a continuació un sol recorregut fins a l'habitació, ja podrà tenir la seguretat de quin és l'interruptor que busca.

Com va pensar l'assumpte el nostre amic?

5) 00:49:40 "Rellotges de sorra"

Com mesurar exactament 9 minuts amb dos rellotges de sorra de 4 i 7 minuts?

6) 00:55:23 "Les filles del Professor Otto"

Un col·lega pregunta al Professor Otto les edats de les seves tres filles i aquest respon que el producte de les seves edats és igual a 36 i que la suma és igual al número del portal del davant. El col·lega mira el portal en qüestió i, després de pensar un moment, diu que li manca una dada. Aleshores el professor Otto assenteix i diu: "La major toca el piano". Quines edats tenen les tres filles del Professor Otto?

7) 00:59:40 "Les dues portes"

Dues portes, dos guardians (un que sempre menteix, i un altre que sempre diu la veritat), una porta a la sortida del laberint i l'altra només et manté al laberint. Només és lícit fer una pregunta a un sol guardià.

Les dues portes es perceben iguals, els dos guardians també. Quina pregunta fer per escollir la porta correcta?

8) 1:01:55 Una qüestió d'edats

Una mare és 21 anys més gran que el seu fill. Al cap de 6 anys l'edat de la mare serà cinc vegades la que tingui el fill. Què fa el pare?

14. Annex 5[128]: breu història dels nombres complexos

L'any 1534. Tartaglia (1499-1557) descobreix un mètode per resoldre totes les equacions de grau 3, com ara per exemple l'equació $x^3 - 15x - 4 = 0$. Observeu que aquesta equació admet com a solució $x = 4$, i per tant és pot factoritzar com a $(x-4)\cdot(x^2+4x+1) = 0$ i resolent l'equació de segon grau $x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} - 2 \\ x_2 = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}$ ja tenim totes les solucions.

El mètode, que no detallarem en aquest apartat[129] i que es coneix com a fórmula de Cardano-Tartaglia per raons històriques, dóna lloc però a un altre problema, perquè per obtenir les solucions de l'equació anterior cal trobar el resultat de l'operació següent:

[128] Adaptació de la pàgina 26 del llibre *Como superar las matemáticas de 3º de B.U.P* de Pablo Taniguchi Dietrich.
[129] Ho podeu trobar a https://ca.wikipedia.org/wiki/Equaci%C3%B3_de_tercer_grau

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Aquests casos s’anomenaren casos irreductibles. Però d’alguna forma o altra aquests càlculs intermedis havien de conduir als resultats correctes coneguts. Hi havia alguna connexió entre ells.

Aquesta situació de perplexitat va portar l'italià Rafael Bombelli (1526- 1572) a tenir «la idea boja» (segons ell mateix la va anomenar) d'operar amb aquestes arrels «com si s'hi pogués». I va arribar a la conclusió que, si s’admetien aquestes operacions, s' obtenien les solucions buscades.

Com es va operar amb les arrels de nombres negatius? Vegem-ho en el cas de l’equació $x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{-1}$

Aquesta dificultat es va poder superar definint un altre tipus de nombres. D’entrada G. Cardano (1501-1576) defineix un nou nombre de valor $\sqrt{-1}$ anomenat unitat imaginària que a partir de L.Euler (1707-1783) es simbolitza per $i = \sqrt{-1}$, de forma que els nombres reals eren aquells que tenien un quadrat positiu o nul i els nombres imaginaris aquells que tenien un quadrat negatiu. Així per exemple: $\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11 \cdot i$

A la suma o diferència d’un nombre real i un nombre imaginari se l’anomenà nombre complex. Per exemple $3+4i,\ 2-7i,\ \sqrt{5}-12i, \ldots$ són nombres complexos.

Van haver de passar tres segles des que els nombres imaginaris van aparèixer en la resolució d’equacions fins que es va acceptar que eren un nombres amb tanta realitat com els altres. Avui en dia les seves aplicacions són ben tangibles i d’ús quotidià.