International Mathematics Competition
IMC – 2010

Del 24 al 30 de Julio de 2010 se celebró la XVII edición de la Olimpiada Internacional de Matemáticas para Estudiantes Universitarios (IMC) en Blagoevgrad (Bulgaria). A esta XVII edición de la competición asistieron 328 estudiantes representando a 90 Universidades de más de 40 países.

España participó con 26 estudiantes representando a la Universidad de Alicante (Carlos Pastor), Universidad Autónoma de Madrid (David Alfaya, Daniel Estévez), Universidad Complutense de Madrid (Sergio Calle, Hugo Fernández, Gabriel Furstenheim, Teresa Rodrigo, Vadym Paziy), Universidad Politéncica de Cataluña (Roger Casals, Ivan Geffner, Arnau Messegué, Daniel Remón), Universidad Politéncica de Madrid (Miguel Hernán Delgado, Francisco Borja Morán), Universidad Pontificia de Comillas (Pedro Ciller, Isabel Garro, Alberto Orgaz, Manuel Peña), Universidad de Valencia (Marta Latorre, Angel David Martínez, Vicente Pérez Calabuig, Raquel Vidaurre) y la Universidad de Zaragoza (Rubén Blasco, Javier Campos, Eva Elduque, Adrián Rodrigo).

El profesor acompañante que actuó como líder de la Delegación Española fue José Luis Díaz Barrero de la Universidad Politécnica de Cataluña.

El Jurado Internacional, compuesto por los líderes de las diferentes delegaciones, fue el encargado de seleccionar los problemas para las pruebas así como de fijar los baremos y de su posterior corrección. La prueba constó de dos sesiones, de cinco problemas cada una, en dos días consecutivos. La puntuación máxima otorgada a cada problema fue de diez puntos.

Los enunciados de los problemas propuestos fueron los siguientes:

Day 1, July 26, 2010

Problem 1

Let $0 < a < b$. *Prove that*

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}$$

Problem 2

Compute the sum of the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots$$

Problem 3

Define the sequence $x_1, x_2, \cdots$ *inductively by* $x_1 = \sqrt{5}$ *and* $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ *for each* $n \geq 1$. *Compute*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}{x_{n+1}}$$

Problem 4

Let a, b *be two integers and suppose that* n *is a positive integer for which the set*

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

is finite. Prove that $n = 1$.

Problem 5

Suppose that a, b, c *are real numbers in the interval* $[-1, 1]$ *such that*

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Prove that

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$$

for all positive integers n.

Day 2, July 27, 2010

Problem 1

(a) A sequence $x_1, x_2, \cdots$ of real numbers satisfies $x_{n+1} = x_n \cos x_n$ for all $n \geq 1$. Does it follow that this sequence converges for all initial values x_1?

(b) A sequence $y_1, y_2, \cdots$ of real numbers satisfies $y_{n+1} = y_n \sin y_n$ for all $n \geq 1$. Does it follow that this sequence converges for all initial values y_1?

Problem 2

Let $a_0, a_1, \cdots, a_n$ be positive real numbers such that $a_{k+1} - a_k \geq 1$ for all $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Prove that

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right) \leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

Problem 3

Denote by S_n the group of permutations of the sequence $(1, 2, \cdots, n)$. Suppose that G is a subgroup of S_n such that for every $\pi \in G \setminus \{e\}$ there exists a unique $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ for which $\pi(k) = k$. (Here e is the unit element in the group S_n). Show that this k is the same for all $\pi \in G \setminus \{e\}$.

Problem 4

Let A be a symmetric $m \times m$ matrix over the two-element field all of whose diagonal entries are zero. Prove that for every positive integer n each column of the matrix A^n has a zero entry.

Problem 5

Suppose that for a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and real numbers $a < b$ one has $f(x) = 0$ for all $x \in (a, b)$. Prove that $f(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ if

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(y + \frac{k}{p}\right) = 0$$

for every prime number p and every real number y.

El equipo español consiguió tres medallas de plata: Arnau Messegué (UPC), Ivan Geffner (UPC) y Carlos Pastor (Universidad Alicante); y siete de bronce: Gabriel Furstenheim (UCM), Daniel Remón (UPC), Eva Elduque (Universidad de Zaragoza), Vicente Pérez Calabuig (Universidad de Valencia), Adrián Rodrigo (Universidad de Zaragoza), Teresa Rodrigo (UCM) y Raquel Vidaurre (Universidad de Valencia). La universidad española mejor clasificada en vigésimo quinto lugar fue la Universidad Politécnica de Cataluña.

José Luis Díaz Barrero
Universidad Politécnica de Cataluña