International Mathematics Competition
IMC – 2009

Del 25 al 30 de Julio de 2009 se celebró la XVI edición de la Olimpiada Internacional de Matemáticas para Estudiantes Universitarios (IMC) en Budapest (Hungria). A esta XVI edición de la competición asistieron 347 estudiantes representando a más de 90 Universidades (65 con equipos de tres o más estudiantes) de más de 40 países. España participó con 24 estudiantes representando a la Universidad de Alicante, Universidad Complutense de Madrid, Universidad Autónoma de Madrid, Universidad de Granada, UNED, Universidad Politéncica de Cataluña, Universidad Pontificia de Comillas, Universidad de Valencia y la Universidad de Zaragoza.
Los profesores acompañantes que actuaron como líderes de la Delegación Española fueron José Miguel Manzano Prego de la Universidad de Granada, Carlos Vinuesa del Rio de la Universidad Autónoma de Madrid y José Luis Díaz Barrero de la Universidad Politécnica de Cataluña.
El Jurado Internacional, compuesto por los líderes de las diferentes delegaciones, fue el encargado de seleccionar los problemas para las pruebas así como de fijar los baremos y de su posterior corrección. La prueba constó de dos sesiones, de cinco problemas cada una, en dos días consecutivos. La puntuación máxima de cada problema fue de diez puntos. El idioma de trabajo de la competición es el inglés.

Los enunciados de los problemas propuestos fueron los siguientes:

Day 1, July 27, 2009

Problem 1

Suppose that f and g are real-valued functions on the real line and $f(r) \le g(r)$ for every rational r. Does this imply that $f(x) \le g(x)$ for every real x if

a) *f and g are not decreasing?*

b) *f and g are continuous?*

Problem 2

Let A, B and C be real square matrices of the same size, and suppose that A is invertible. Prove that if $(A-B)C = BA^{-1}$, then $C(A-B) = A^{-1}B$.

Problem 3

In a town every two residents who are not friends have a friend in common, and no one is a friend of everyone else. Let us number the residents from 1 to n and let a_i be the number of friends of the i-th resident. Suppose that $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n$. Let k be the smallest number of residents (at least three) who can be seated at a round table in such a way that any two neighbors are friends. Determine all possible values of k.

Problem 4

Let $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ be a complex polynomial. Suppose that $1 = c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$ is a sequence of real numbers which is convex (i.e. $2c_k \leq c_{k-1} + c_{k+1}$ for every $k = 1, 2, \ldots, n-1$), and consider the polynomial

$$q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + c_2 a_2 z^2 + \ldots + c_n a_n z^n.$$

Prove that

$$\max_{|z|\leq 1} |q(z)| \leq \max_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$

Problem 5

Let n be a positive integer. An n-simplex in $\mathbb{R}^n$ is given by $n+1$ points $P_0, P_1, \ldots, P_n$, called its vertices, which do not all belong to the same hyperplane. For every n-simplex S we denote by $v(S)$ the volume of S, and we write $C(S)$ for the center of the unique sphere containing all the vertices of S. Suppose that P is a point inside the n-simplex S. Let S_i be the n-simplex obtained from S by replacing its i-th vertex by P. Prove that

$$v(S_0)C(S_0) + v(S_1)C(S_1) + \ldots + v(S_n)C(S_n) = v(S)C(S).$$

Day 2, July 28, 2009

Problem 1

Let ℓ be a line and P a point in $\mathbb{R}^3$. Let S be the set of points X such that the distance from X to ℓ is greater than or equal two times the distance between X and P. If the distance from P to ℓ is $d > 0$, find the volume of S.

Problem 2

Suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a two times differentiable function satisfying $f(0) = 1, f'(0) = 0$, and for all $x \in [0, +\infty)$,

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0.$$

Prove that for all $x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

Problem 3

Let $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ be two $n \times n$ matrices such that

$$A^2B + BA^2 = 2ABA.$$

Prove that there exists a positive integer k such that $(AB-BA)^k = 0$.

Problem 4

Let p be a prime number and $\mathbb{F}_p$ be the field of residues modulo p. Let W be the smallest set of polynomials with coefficients in $\mathbb{F}_p$ such that

- *the polynomials $x + 1$ and $x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x^2 + 2x + 1$ are in W, and*
- *for any polynomials $h_1(x)$ in W the polynomial $r(x)$, which is the remainder of $h_1(h_2(x))$ modulo $x^p - x$, is also in W.*

How many polynomials are there in W?

Problem 5

Let $\mathbb{M}$ be the vector space of $m \times p$ matrices. For a vector subspace $S \subseteq \mathbb{M}$, denote by $\delta(S)$ the dimension of the vector space generated *by all columns of all matrices in S. Say that a vector subspace $T \subset \mathbb{M}$ is a* **covering matrix space** *if*

$$\bigcup_{A \in T, A \neq 0} \ker A = \mathbb{R}^p$$

Such a T is **minimal** *if it does not contain a proper vector subspace $S \subset T$ which is also a covering matrix space.*

(a) *Let T be a minimal covering matrix space and let $n = \dim T$. Prove that*

$$\delta(T) \leq \binom{n}{2}$$

(b) *Prove that for every positive integer n we can find m and p, and a minimal covering matrix space T as above such that $\dim T = n$ and $\delta(T) = \binom{n}{2}$.*

El equipo español consiguió tres medallas de plata: Adrián Rodrigo (Universidad de Zaragoza), Arnau Messegué (UPC) y Xavier Ros (UPC); y cuatro de bronce: David Alfaya (UAM), Elisa Lorenzo (UNED), Miquel Teixidor (UPC) y Ángel David Martínez (Universidad de Valencia). Las tres universidades españolas mejor clasificadas fueron La Universidad Politécnica de Cataluña (38), La Universidad Autónoma de Madrid (54) y la Universidad de Zaragoza (55).

José Luis Díaz Barrero
Universidad Politécnica de Cataluña