

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

### PROBLEMA 1

$$f(y, p, \lambda) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda} & y=0 \\ (1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} & y=1, 2, \dots \end{cases}$$

① Likelihood function

$$L(p, \lambda | y) = \prod_{i=1}^n f(y_i, p, \lambda) = (p + (1-p)e^{-\lambda})^{N_0} \cdot (1-p)^{n-N_0} e^{-\lambda(n-N_0)} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}$$

$N_0 = n^{\circ} \text{ de } 0$   
 $\downarrow$

(\*) Com que si  $y_i$  és 0 el sumatori queda igual &  $y_i!$  si  $y_i=0$  és 1 tampoc m'afecta afegir-los al producte.

Per la mostra  $y_0 = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$

$$N_0 = 2$$

$$n = 6$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1+2+6+3 = 12$$

$$\prod_{i=1}^n y_i! = 1! \cdot 2! \cdot 6! \cdot 3! = 2 \cdot 6 \cdot 720 = 8640$$

$$\text{Per tant } L(p, \lambda | y_0) = (p + (1-p)e^{-\lambda})^2 (1-p)^4 e^{-4\lambda} \cdot \frac{\lambda^{12}}{8640}$$

② MLE for  $p$  known

$$\log(p | y, \lambda) = N_0 \log(p + (1-p)e^{-\lambda}) + (n-N_0) \log(1-p) - \lambda(n-N_0) + \sum_{i=1}^n y_i \log \lambda - \log \prod_{i=1}^n y_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log(p | y, \lambda) = \frac{N_0}{p + (1-p)e^{-\lambda}} \cdot (1 - e^{-\lambda}) - \frac{n-N_0}{1-p}$$

$$\frac{N_0}{\hat{p} + (1-\hat{p})e^{-\lambda}} \cdot (1 - e^{-\lambda}) - \frac{n-N_0}{1-\hat{p}} = 0 \Leftrightarrow \frac{N_0(1 - e^{-\lambda})}{\hat{p}(1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda}} = \frac{n-N_0}{1-\hat{p}}$$

$$N_0(1 - e^{-\lambda})(1 - \hat{p}) = (n - N_0)\hat{p}(1 - e^{-\lambda}) + (n - N_0)e^{-\lambda}$$

$$-N_0(1 - e^{-\lambda})\hat{p} + N_0(1 - e^{-\lambda}) = n\hat{p}(1 - e^{-\lambda}) - N_0\hat{p}(1 - e^{-\lambda}) + (n - N_0)e^{-\lambda}$$

$$N_0(1-e^{-\lambda}) = n\hat{p}(1-e^{-\lambda}) + (n-N_0)e^{-\lambda}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n(1-e^{-\lambda})} [N_0(1-e^{-\lambda}) - (n-N_0)e^{-\lambda}]$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n(1-e^{-\lambda})} [N_0 - \cancel{N_0e^{-\lambda}} - ne^{-\lambda} + \cancel{N_0e^{-\lambda}}] = \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})} \quad \checkmark$$

Comproveu que és un màxim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \log L(p|x, \lambda) &= \frac{N_0(1-e^{-\lambda})}{p+(1-p)e^{-\lambda}} \cdot (1-e^{-\lambda}) - \frac{(n-N_0)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{N_0(1-e^{-\lambda})^2}{p(1-e^{-\lambda})+e^{-\lambda}} - \frac{(n-N_0)}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

Avaluem en  $\hat{p} = \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \log L(\hat{p}|x, \lambda) &= \frac{\cancel{N_0}(1-e^{-\lambda})^2}{\frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n} + e^{-\lambda}} - \frac{(n-N_0)}{\left(1 - \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n}\right)^2} = (1-e^{-\lambda})^2 - \frac{n-N_0}{\frac{n-e^{-\lambda}}{n} - \frac{N_0}{n} + \frac{ne^{-\lambda}}{n}} \\ &= (1-e^{-\lambda})^2 - n(1-e^{-\lambda}) = (1-e^{-\lambda})(1-e^{-\lambda}-n) < 0 \end{aligned}$$

$$= (1-e^{-\lambda})^2 - n(1-e^{-\lambda}) = (1-e^{-\lambda})(1-e^{-\lambda}-n) < 0$$

$\downarrow$   
0

$\downarrow$   
0

seu

$n \geq 1 \checkmark$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})} \text{ és EMV} \quad \checkmark$$

$\hat{p}_{MLE}$  per  $y_0 = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$   $N_0 = 2$

$n = 4$

$$\hat{p}_{MLE} = \frac{2 - \overset{6}{4}e^{-2}}{\underset{6}{4}(1-e^{-2})} = \frac{1.4586}{3.4586} = \boxed{0.4217} \quad d=2$$

0.228

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

③ MLE per  $P(Y=0)$

$$P(Y=0) = p + (1-p)e^{-\lambda}$$

Suposem  $\lambda$  coneguda.

Pel principi d'invariància sabem que si  $\hat{p}$  és EMV de  $p$  aleshores  $g(\hat{p})$  és l'EMV de  $g(p)$  ✓

En el nostre cas  $g(p) = p + (1-p)e^{-\lambda}$ , per tant ✓

EMV de  $P(Y=0) = \hat{p}_2$  serà  $\hat{p} + (1-\hat{p})e^{-\lambda}$  que podem reescriure

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})} + \left(1 - \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})}\right) e^{-\lambda} = \frac{N_0 - ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})} + \left(\frac{n - N_0 + ne^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})}\right) e^{-\lambda} \\ &= \frac{N_0 - ne^{-\lambda} + ne^{-\lambda} - N_0 e^{-\lambda}}{n(1-e^{-\lambda})} = \frac{N_0(1-e^{-\lambda})}{n(1-e^{-\lambda})} = \left[\frac{N_0}{n}\right] \text{ EMV per } P(Y=0) \end{aligned}$$

El valor ~~valor~~ estimat per la mostra anterior és  $\frac{2}{6} = \left[\frac{1}{3}\right]$  ✓

El resultat que obtenim és el que podríem esperar, la proporció de 0 de la mostra. La probabilitat que  $Y=0$  s'acostuma a estimar per la proporció mostral tal i com ens ha sentit en l'EMV ✓

④ Estimador pel mètode dels moments de  $(p, \lambda) \rightarrow (\hat{p}_{MM}, \hat{\lambda}_{MM})$

Comencem calculant  $E(Y)$  &  $E(Y^2)$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} i P(Y=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = (1-p) \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = (1-p) \lambda \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P(Y=i) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = (1-p) \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{(i-1)!} \\ &= (1-p) \left( \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{(i-1)!} \right) = (1-p) \left( \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-2}}{(i-2)!} \right) \\ &= (1-p) (\lambda + \lambda^2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$E(\text{Pois}(\lambda)) = \lambda$   
 $E(\text{Pois}(\lambda)^2) = \text{Var}(\text{Pois}(\lambda)) + \lambda^2 = \lambda + \lambda^2$

Per mètode dels moments tenim que

$$m_{1,n} \rightarrow \text{moment d'ordre 1} \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$m_{2,n} \rightarrow \text{moment d'ordre 2} \quad \frac{\sum x_i^2}{n}$$

$$\bar{x} = (1-\hat{p})\hat{\lambda}$$

$$m_{2,n} = (1-\hat{p})(\hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2) = (1-\hat{p})\hat{\lambda}(1+\hat{\lambda}) = \bar{x}(1+\hat{\lambda})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{m_{2,n}}{\bar{x}} - 1 = \hat{\lambda}_{MH}} \quad \checkmark$$

$$\frac{\bar{x}}{\hat{\lambda}} = 1 - \hat{p} \Leftrightarrow \hat{p} = 1 - \frac{\bar{x}}{\hat{\lambda}} = 1 - \frac{\bar{x}}{\frac{m_{2,n}-1}{\bar{x}}} = 1 - \frac{\bar{x}^2}{m_{2,n}-\bar{x}}$$

$$\boxed{\hat{p}_{MH} = 1 - \frac{\bar{x}^2}{m_{2,n}-\bar{x}}}$$

Per la mostra  $y_0 = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$

$$\bar{x} = \frac{1+2+6+3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$m_{2,n} = \frac{1^2+2^2+6^2+3^2}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} \quad \checkmark$$

$$(\hat{p}_{MH}, \hat{\lambda}_{MH}) = \left(1 - \frac{4}{\frac{25}{3}-2}, \frac{\frac{25}{3}}{2} - 1\right) = \left(\frac{7}{19}, \frac{19}{6}\right)$$

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## PROBLEMA 2

$X_1, \dots, X_{15}$  i.s.  $\sim \text{Exp}(\lambda)$

①  $H_0: \lambda = 1/5$

$H_1: \lambda < 1/5$

$X_{(1)} = \min \{X_1, \dots, X_n\}$

Regió crítica:  $\{X_{(1)} > 1\} = C$

a) Type I error

$\alpha = P_{H_0}(X \in C)$

Hem de calcular  $P(X_{(1)} > 1)$  on  $X_1, \dots, X_{15} \sim \text{Exp}(1/5)$

Calcularem la distribució de  $X_{(1)}$  ✓

$$\begin{aligned} P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = 1 - P(X_1 > x)^n \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n = 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^n = 1 - \underbrace{e^{-\lambda nx}}_{\text{iid}} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Per tant  $P(X_{(1)} > 1)$  sota  $H_0$

$P(X_{(1)} > 1) = 1 - (1 - e^{-1/5 \cdot 15 \cdot 1}) = e^{-3} = \boxed{0.04979}$  ✓

b) Power of the test  $\lambda = 1/25$

La potència del test és  $P_{H_1}(X \in C) = 1 - \beta$

$P(X_{(1)} > 1) = 1 - (1 - e^{-1/25 \cdot 15 \cdot 1}) = e^{-3/5} = \boxed{0.5488}$  potència  
|  $\lambda = 1/25$  ✓

② UMP  $H_0: \lambda = \frac{1}{5}$   
 $H_1: \lambda < \frac{1}{5}$

a) Parlem que most powerful test quan les hipòtesis  $H_0$  &  $H_1$  són simples ( $H_0: \theta = \theta_0$   $H_1: \theta = \theta_1$ ) i per tant en aquest cas MP és un test de mida  $\alpha = P_{H_0}(X \in C)$  i de manera que  $\beta = P_{H_1}(X \in \bar{C})$  sigui el mínim possible ✓

En canvi quan la hipòtesi alternativa és composta ( $H_0: \theta = \theta_0$   $H_1: \theta \in \Theta_1$ ) és quan parlem de tests uniformly most powerful ja que busquem que sigui un test de mida  $\alpha = P_{H_0}(X \in C)$  però que ~~si existís~~ que ~~per~~ per qualsevol altre test amb regió crítica  $\tilde{C}$   $P_{H_1}(X \in C) \leq P_{H_1}(X \in \tilde{C})$  ✓

b)  $H_0: \lambda = \frac{1}{5}$   
 $H_1: \lambda = \frac{1}{4}$  }

Utilitzarem el teorema de Neyman - Pearson per tant la regió crítica és la següent

$$C = \{ \underline{x}; \frac{L(\lambda_1 | \underline{x})}{L(\lambda_0 | \underline{x})} \geq A \}$$

Calculem primer  $L(\lambda | \underline{x})$

$$L(\lambda | \underline{x}) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

Per tant,

$$\frac{L(\lambda_1 | \underline{x})}{L(\lambda_0 | \underline{x})} = \frac{(\lambda_1)^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i}}{(\lambda_0)^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i}} = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n e^{-(\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i} \quad \checkmark$$

$$C = \{ \underline{x}; \underbrace{\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n}_{>0} e^{-\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_0)}_{>0} \sum_{i=1}^n x_i} \geq A \} = \{ \underline{x}; e^{-\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_0)}_{>0} \sum_{i=1}^n x_i} \geq A \cdot \underbrace{\left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n}_{>0} \}$$

$$= \{ \underline{x}; - \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_0)}_{>0} \sum_{i=1}^n x_i \geq \ln \left( A \cdot \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n \right) \} = \{ \underline{x}; \sum_{i=1}^n x_i \geq B \} \quad \checkmark$$

$\underbrace{\quad}_{>0} \lambda_1 < \lambda_0$   
 $\underbrace{\quad}_{>0}$

on  $B = \ln \left( A \cdot \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n \right) \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}$

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

O sigui que  $C_\alpha = \{ \underline{x} ; \sum_{i=1}^n x_i \geq B \}$

Podem calcular  $B$ , ja que sabem que és de mida  $\alpha$ , per tant

$$P_{H_0}(X \in C) = \alpha$$

$$P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq B\right) = P_{H_0}\left(\text{Gamma}(n, 1/5) \geq B\right) = \alpha$$

$X_i \sim \text{Exp}(1/5)$

$$\sum X_i \sim \text{Gamma}(n, 1/5) \quad \checkmark$$

amb valors concrets podríem calcular el valor de  $B$ .  $\checkmark$

c) UMP per  $H_0: \lambda = 1/5$  vs  $H_1: \lambda < 1/5$

Utilitzem el teorema de Neyman-Pearson per hipòtesis compostes.

Com que la regió crítica que hem calculat en el cas de hipòtesis simples no depèn del valor  $\theta_1$ , si no que només hem tingut en compte

que  $\theta_1 < \theta_0$  i per tant la regió ~~era~~ podem aplicar el mateix test

que acabem de calcular a l'apuntat anterior per contrastar les hipò-

tesis  $H_0: \lambda = 1/5$  vs  $H_1: \lambda < 1/5$ . Karlu-Rubin

Assignatura: \_

Estudiant/a: \_

Data: \_

### PROBLEMA 3

$X_1, \dots, X_n$  iid  $f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}$   $x > 0$

①  $X_1^2$  unbiased of  $\theta$

Necessitem la distribució de  $X_1^2$

$$P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = P(X_1 \leq \sqrt{x}) - P(X_1 \leq -\sqrt{x})$$

$\downarrow$   
 $x > 0$

Si derivem

$\frac{0}{11} \rightarrow f_{X_1}$  només per valors positius.

$$f_{X_1^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_{X_1}(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_{X_1}(-\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\theta} e^{-x/\theta} = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad \text{si } x > 0$$

$\hookrightarrow \text{Exp}(\frac{1}{\theta})$

10/10

B

$$f_{X_1^2}(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0$$

ara calculem  $E(X_1^2) = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \stackrel{\uparrow}{=} -x e^{-x/\theta} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x/\theta} dx$

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad v = -e^{-x/\theta}$$

$$= -\theta e^{-x/\theta} \Big|_0^{+\infty} = \theta \Rightarrow X_1^2 \text{ és un estimador sense biaix de } \theta.$$

② CCR  $\rightarrow$  hem de calcular la informació de Fisher

$$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$$

$$\log f(\theta|x) = \log 2x - \log \theta - \frac{x^2}{\theta}$$

$$\frac{\partial \log f(\theta|x)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x^2}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(\theta|x)}{\partial^2 \theta} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x^2}{\theta^3} \Rightarrow I_1(\theta) = -E\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2x^2}{\theta^3}\right) = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} E(X^2)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \theta = \frac{1}{\theta^2}$$

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \Rightarrow \text{CCR} = \frac{1}{n/\theta^2} = \frac{\theta^2}{n}$$

B

10/

### ③ UMVUE

Pel teorema de Lehman - Scheffé sabem que:

si  $T(x)$  és un estimador suficient i complet de  $\theta$

$W(x)$  és un estimador sense biaix de  $\tau(\theta)$

alleshores  $W_T = E_\theta(W|T)$  és UMVUE.

Agafem  $X_i^2$  com a  $W(x)$ .

Veiem d'altra banda que  $f(x; \theta)$  pertany a la família exponencial

$$h(x) = 2x$$

$$c(\theta) = 1/\theta$$

$$t(x) = x^2$$

$$w(\theta) = -1/\theta$$

Per la funció de versemblança  $h(x) = 2^n \prod_{i=1}^n x_i$

$$c(\theta) = (1/\theta)^n$$

$$t(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$w(\theta) = -1/\theta$$

i per tant  $\sum_{i=1}^n x_i^2$  és un estadístic suficient i complet per  $\theta = -1/p$

Aplicarem el teorema a  $p$ .

$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$  suficient i complet de  $p$

$W(x)$  estimador sense biaix de  $-1/p = \theta = T(p)$

Per tant  $W_T = E_p(W|T)$  és UMVUE de  $\theta$

$$E_p(W|T) = E(X_1^2 | \sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{\text{Gamma}(n-1, 1/\theta) \text{Exp}(1/\theta)}{\text{Gamma}(n, 1/\theta)}$$

$$f_{X_1^2 | \sum_{i=1}^n X_i^2 = t}(x) = \frac{f_{X_1^2, \sum_{i=1}^n X_i^2}(x, t)}{f_{\sum_{i=1}^n X_i^2}(t)} = \frac{f_{\sum_{i=1}^n X_i^2 | X_1^2}(t) f_{X_1^2}(x)}{f_{\sum_{i=1}^n X_i^2}(t)}$$

$$= \frac{\frac{(1/\theta)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} t^{n-2} e^{-1/\theta t} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-1/\theta x}}{\frac{(1/\theta)^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-1/\theta t}} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} e^{-1/\theta x} \cdot \frac{1}{t} \quad x > 0$$

(continua al final).

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

④ LRT, Test de Wald, Score test

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

LRT → regió crítica ve donada per

$$C_\alpha = \left\{ \underline{x}; \frac{\max_{\theta \in H_0} L(\theta | \underline{x})}{\max_{\theta \in H} L(\theta | \underline{x})} \leq A \right\}$$

calculem en primer lloc  $L(\theta | \underline{x})$

$$L(\theta | \underline{x}) = \prod_{i=1}^n 2x_i / \theta e^{-x_i^2 / \theta} = \left( \frac{2}{\theta} \right)^n \prod_{i=1}^n x_i e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

• Numerador tenim un sol valor, per tant

$$\max_{\theta \in H_0} L(\theta | \underline{x}) = \left( \frac{2}{\theta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n x_i e^{-\frac{1}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

• Pel denominador, necessitem calcular EMV

$$\log L(\theta | \underline{x}) = n \log 2 - n \log \theta + \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta | \underline{x}) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

només ens falta comprovar que efectivament és un màxim

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta | \underline{x}) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\text{Ho avaluem en } \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\hat{\theta} | \underline{x}) = \frac{\frac{n^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} - \frac{2n^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{n^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2} < 0$$

⇒ com que no tenim cap més punt crític que  $\hat{\theta}$  és EMV

Per tant,

$$\frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|x)}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta|x)} = \frac{\left(\frac{2}{\theta_0}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i e^{-\frac{1}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i^2}}{\left(\frac{2}{\hat{\theta}}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i e^{-\frac{1}{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^n x_i^2}} = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\hat{\theta}}\right)}$$

$$= \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n e^{-n\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right)}$$

B

$$C = \{x; \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n e^{-n\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right)} \leq A\} \quad (*)$$

Test de Wald

$$W = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{I_n(\hat{\theta})}$$

R

Per tant

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 / n - \theta_0}{\frac{n}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 / n\right)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 / n - \theta_0}{\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}} \sim \chi_1^2 \rightarrow \begin{matrix} \dim \Theta \\ 1 \end{matrix} - \begin{matrix} \dim \Theta_0 \\ 0 \end{matrix}$$

Test de Score

$$S = \frac{(\text{score})^2}{I_n(\theta_0)}$$

B

Per tant ;

$$S = \frac{\left(-\frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}{n/\theta_0^2} = \frac{\frac{1}{\theta_0^2} \left(-n + \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} n\right)^2}{n/\theta_0^2} = n\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right)^2 \sim \chi_1^2$$

(idem a l'anterior)

4) Com que no coneixem la distribució de l'estadístic resultant apliquem el teorema de Wilks.

si

$$\lambda(x) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n e^{-n\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right)}$$

-  $2 \log \lambda(x)$  és composta com una  $\chi_1^2$  (idem als anteriors)

$$-2 \log \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n e^{-n\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right)} = -2n \log \hat{\theta} + 2n \log \theta_0 - n\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right)$$

8/

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

⑤  $n = 200$       Supposem  $\alpha = 0.05$   
 $\theta_0 = 3.5$   
 $\theta = 2.5$

$$LTR = -2 \cdot 200 \log 2.5 + 2 \cdot 200 \log 3.5 - 200 \left( \frac{2.5}{3.5} - 1 \right) = 191.73 > 3.84$$

$\uparrow$   
 $\chi^2_{0.05,1}$

$\downarrow$   
 $RH_0$

$$W = \frac{2.5 - 3.5}{\frac{200}{2.5^2}} = -0.03125 < 3.84 \Rightarrow NRH_0$$

$\uparrow$   
 $\chi^2_{0.05,1}$

$$S = 200 \left( \frac{2.5}{3.5} - 1 \right)^2 = 16.326 > 3.84 \Rightarrow RH_0$$

$\uparrow$   
 $\chi^2_{0.05,1}$

10/

5/ pel que li surtes

Per tant, en el test de likelihood ratio i score rebutgem  $H_0$  a favor de  $H_1$ , en canvi el test de Wald no rebutgem  $H_0$ .

(\*) continuació de ③

$$W_T = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}} \frac{f(n)}{f(n-1)} dx = -\theta \frac{f(n)}{f(n-1)} e^{-\frac{x}{t}} \Big|_0^{+\infty} = (n-1)\theta$$

$$\uparrow \frac{1}{t} \left( -\theta x e^{-\frac{x}{t}} \Big|_0^{+\infty} + \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{t}} dx \right) = \frac{1}{t} \theta^2$$

$u = x \quad du = dx$   
 $0$

$$dv = e^{-\frac{x}{t}} \quad v = \int e^{-\frac{x}{t}} dx = -\theta e^{-\frac{x}{t}}$$

hi ha alguna errada  
no hauria de  
dependre de  $\theta$

$$W = \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \rightarrow \text{UMVUE de } \theta$$

5/

8/10

2.1

Assignatura: INTERFERÈNCIA

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: 09/01/2015

### PROBLEMA 1

$$f(y; p, \lambda) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda} & \text{si } y=0 \\ (1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} & \text{si } y=1, 2, \dots \end{cases}$$

1

0.65 Descriu la funció de densitat a:

$$f(y, p, \lambda) = p^{1 - \mathbb{1}_{[1, \infty)}(y)} + (1-p)e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^y}{y!} \right)^{\mathbb{1}_{[1, \infty)}(y)}$$

Calculamos la función de verosimilitud:

$$Z: \Omega \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(y, \lambda) \longmapsto \prod_{i=1}^n f(y_i, p, \lambda)$$

En nuestro caso:

$$Z(y, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(y_i, p, \lambda) = \prod_{i=1}^n \left( p^{1 - \mathbb{1}_{[1, \infty)}(y_i)} + (1-p)e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^{y_i}}{y_i!} \right)^{\mathbb{1}_{[1, \infty)}(y_i)} \right) = (*)$$

~~no se entiende el resultado porque no lo resolví~~

$$\text{Si } y_p = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$$

$$Z(y, \lambda) = (1-p)e^{-\lambda} \cdot (p + (1-p)e^{-\lambda})^2 \cdot (1-p)e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \cdot (1-p)e^{-\lambda} \frac{\lambda^6}{6!} \cdot (1-p)e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!}$$

no se entiende el resultado porque no lo resolví

$$(*) = \underbrace{(p + (1-p)e^{-\lambda})^{n - \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[1, \infty)}(y_i)}}_{\text{nom de } p} \cdot (e^{-\lambda} (1-p))^{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[1, \infty)}(y_i)} \cdot \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda^{y_i}}{y_i!} \right)^{\mathbb{1}_{[1, \infty)}(y_i)}$$

②  
0.25 el estimador de máxima verosimilitud se define como  
 $\hat{\theta}_{mv}$  tal que  $L(x, \hat{\theta}_{mv}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x, \theta)$

Para buscar este supremo podemos utilizar

$$\frac{\partial \ln(L(x, \theta))}{\partial \theta} = 0$$

puesto que los extremos para  $\ln(\cdot)$  serán los mismos que para  $L(x, \theta)$ .

Así pues: (atención a la covariable)

deno = de los logaritmos por favor!!

$$\ln(L(x, p)) = \left( n - \sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i) \right) \ln(p + (1-p)e^{-\lambda}) + (-\lambda) + (1-p) \sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i) + \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{y_i}}{y_i!} \right) \frac{1_{[1, +\infty)}(y_i)}{L(x, p)}$$

$$\frac{\partial \ln(L(x, p))}{\partial p} = \left( n - \sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i) \right) \left( \frac{1}{p} + \frac{-e^{-\lambda}}{1-p} \right) + \frac{-\sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i)}{(1-p)} = 0$$

$$\left( n - \sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i) \right) ((1-p) + p(-e^{-\lambda})) - p \sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i) = 0$$

$$(n-k)(1-p + p(-e^{-\lambda})) - kp = 0$$

$$n-k - (n-k)p - e^{-\lambda}p - kp = 0 \Rightarrow n-k = (n-k + e^{-\lambda} + k)p$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{MLE} = \frac{n - \sum_{i=1}^n 1_{[1, +\infty)}(y_i)}{n - e^{-\lambda}}$$

$$\frac{n - ne^{-\lambda}}{n(1 - e^{-\lambda})}$$

y siempre calcula!!

(Suponiendo:  $\left. \frac{\partial^2 \ln(L(x, p))}{\partial p^2} \right|_{p=\hat{p}_{MLE}} < 0$ ) y porque vale la pena!

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/a:

Data: 09/01/2015

(PROBLEMA 1)

0.45

3. Si  $Y=0 \Rightarrow \hat{p}_{MLE} = \frac{n}{n-e^{-\lambda}}$  (solo tenemos una muestra)

Además,  $P(Y=0) = p + (1-p)e^{-\lambda}$

Por tanto, aplicando el principio de invariancia del MLE:

✓ no pongo el error de 2)

$$\begin{aligned} \widehat{P(Y=0)} &= \hat{p}_{MLE} + (1 - \hat{p}_{MLE})e^{-\lambda} = \\ &= \frac{n}{n-e^{-\lambda}} + \left(1 - \frac{n}{n-e^{-\lambda}}\right)e^{-\lambda} = \\ &= \frac{n}{n-e^{-\lambda}} + \left(\frac{n-e^{-\lambda}-n}{n-e^{-\lambda}}\right)e^{-\lambda} = \\ &= \frac{n}{n-e^{-\lambda}} + \frac{-e^{-2\lambda}}{n-e^{-\lambda}} = \frac{n-e^{-2\lambda}}{n-e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

0.45

4. El método de los momentos utiliza las funciones de momentos o generadoras para realizar estimaciones mediante el método de sustitución.

Calculamos  $E(Y)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = (1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \\ &= (1-p) \cdot E(X) = (1-p) \lambda \checkmark \Rightarrow \hat{\lambda}_{MM} = \frac{\bar{X}}{(1-p)} \end{aligned}$$

$X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Y=k) = (1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = (1-p) E(X^2) = (1-p)(\lambda + \lambda^2) \checkmark$$

$$\lambda = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Rightarrow E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

$$(1-p)(\lambda + \lambda^2) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \checkmark \Rightarrow -p(\lambda + \lambda^2) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\lambda + \lambda^2)$$

$$\hat{p}_{MM} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\lambda + \lambda^2)}{-(\lambda + \lambda^2)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{\bar{x}}{\frac{\bar{x}^2}{n}}}{1}$$

no podem arribar a  $\hat{p}_{MM}$  utilitzant  $\hat{\lambda}_{MM}$ .

pero se tracta de llocals, no de departaments.

Dada la muestra  $y_0 = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 6 \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i^2}{n} = 8.33$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MM} = \frac{\bar{x}}{1-p} = \frac{6}{1-p}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{MM} = \frac{8.33 - (\lambda + \lambda^2)}{-(\lambda + \lambda^2)}$$

$$\rightarrow p = \frac{\bar{x}^2 - \left( \frac{\bar{x}}{1-p} + \left( \frac{\bar{x}}{1-p} \right)^2 \right)}{- \left( \frac{\bar{x}}{1-p} + \left( \frac{\bar{x}}{1-p} \right)^2 \right)}$$

fe des d'aquí com  
se feu que resolva

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: 09/01/2015

## PROBLEMA 2

 $X_1, \dots, X_n$  mostra aleatòria simple,  $X \sim \exp(\mu)$ (2)  
a) Considerem un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu, \mu \in \mathcal{O})$ Què volem contrastar:  $H_0: \lambda = \frac{1}{5}$  vs  $H_1: \lambda < \frac{1}{5}$  ( $H_0: \lambda \in \mathcal{O}_0$ ,  $H_1: \lambda \in \mathcal{O}_1$ )

Per a realitzar el contrast, tenim que definir una regla de decisió per a rebutjar o acceptar la hipòtesis nula. ✓

Donat el espai  $\Omega$  definim  $A_0$  y  $A_1$  talis que  $A_0 \cup A_1 = \Omega$ ,  $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ .

De esta manera, mediante dichas regiones a las que llamamos de aceptación y rechazo respectivamente queda definido el test: ✓

$$\psi: \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mathbb{1}_{A_1}(x)$$

cuando  $\psi(x) = 1 \Rightarrow$  rechazamos  $H_0$ cuando  $\psi(x) = 0 \Rightarrow$  aceptamos  $H_0$ Dado  $\psi$ , definimos la función potencia del test como:

$$\phi: \mathcal{O} \rightarrow [0, 1]$$

$$\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(A_1)$$

A la restricción de  $\phi$  a  $\mathcal{O}_1$ , la llamaremos potencia del test, es decir:

$$\phi_\psi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(A_1), \quad \theta \in \mathcal{O}_1 \quad \checkmark$$

Definimos:  $\mathcal{D}_\alpha = \{ \text{test con nivel de significación } \alpha \}$ Decimos que dados dos tests  $\psi, \psi' \in \mathcal{D}_\alpha$ ,  $\psi$  es más potente que  $\psi'$  si

$$\phi_{\psi'}(\theta) \leq \phi_\psi(\theta) \quad \forall \theta \in \mathcal{O}_1 \quad \checkmark$$

Decimos que un test es uniformemente más potente si:

$$\forall \theta' \in D_1, \quad \phi_{\theta'}(\theta) \leq \phi_{\theta}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$



b) Queremos calcular la región de rechazo del test UMP para el contraste

$$H_0: \lambda = 1/5, \quad H_1: \lambda = 1/7$$

En primer lugar, calculamos la función de verosimilitud

$$\mathcal{L}: \Omega \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, \theta) \longmapsto \mathcal{L}(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

en nuestro caso,

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

Para calcular el test UMP utilizaremos el Lema Fundamental de Neyman-Pearson.

LEMA NEYMAN PEARSON: Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias y  $\mathcal{L}(x, \theta)$  su función de verosimilitud.

Fijada  $\alpha \in (0, 1)$ , asumimos que existe  $c_\alpha$  constante positiva tal que la región

$$A_\alpha = \left\{ x: \frac{\mathcal{L}(x, \theta_1)}{\mathcal{L}(x, \theta_0)} \leq c_\alpha \right\}$$

satisface  $P_{\theta_0}(A_\alpha^c) = \alpha$ . Entonces, el test  $\phi = 1_{A_\alpha^c}$  es UMP a nivel de significación  $\alpha$  para el contraste

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta = \theta_1$$

Así pues, calculamos la región  $A_\alpha$ :

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/a:

Data: 09/01/2015

(PROBLEMA 2)

$$A_0 = \left\{ x: \frac{\lambda_1^n \cdot e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i}}{\lambda_0^n \cdot e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i}} \leq C_\alpha \right\}$$

$$\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n e^{(-\lambda_1 + \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i} \leq C_\alpha$$

$$\lambda_1, \lambda_0 > 0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 0$$

$$\Rightarrow e^{(-\lambda_1 + \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i} \leq C_\alpha \cdot \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n$$

$$\Rightarrow (-\lambda_1 + \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i \leq \ln \left( C_\alpha \cdot \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n \right)$$

$$\lambda_1 < \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 - \lambda_1 > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{\ln \left( C_\alpha \cdot \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n \right)}{\lambda_0 - \lambda_1} = C$$

$\Rightarrow$  la regió de acceptació es  $A_0 = \left\{ x: \sum_{i=1}^n x_i \leq C \right\}$  tal que  $P_{\lambda_0}(A_0^c) = \alpha$

$\Rightarrow$  la regió de rebuza es  $A_0^c = A_1 = \left\{ x: \sum_{i=1}^n x_i > C \right\}$  ✓

$\Rightarrow$  el test  $\varphi(x) = 1_{A_1}(x)$  es ~~UMP~~ para el contraste dado. ✓

c) Consideramos:  $H_0: \lambda = 1/5$  vs  $H_1: \lambda < 1/5$

En este caso, tenemos  $\lambda_0 > \lambda_1$ . Así pues, como la región encontrada en el apartado anterior no varía según el valor que tome  $\lambda_1$  si  $\lambda_0 > \lambda_1$ , podemos extender dicho test al contraste:

$H_0: \lambda = 1/5$  vs  $H_1: \lambda < 1/5$

siendo este también UMP. ✓

① Para el contraste

$$H_0: \lambda = 1/5 \quad \text{vs} \quad H_1: \lambda < \frac{1}{5}$$

Considera que:

$$A_1 = \{x: X_{(n)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \geq 1\} \quad \text{región de rechazo}$$

$$A_0 = \{x: X_{(n)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} < 1\} \quad \text{región de aceptación.}$$

a) Recordem que el error de tipo I queda definido como:

$$\alpha_1(\theta) = P_{\theta_0}(A_1) \quad , \quad \text{es decir, la probabilidad de rechazar } H_0 \text{ siendo ésta cierta.}$$

Calculamos dicha probabilidad:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda_0) &= P_{\lambda_0=1/5}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq 1) = P_{\lambda_0}(X_1 \geq 1, \dots, X_n \geq 1) = P_{\lambda_0}(X_1 \geq 1) \dots P_{\lambda_0}(X_n \geq 1) = \\ &\quad \text{va. idénticamente distribuidas} \qquad \qquad \qquad \text{va. independientes} \\ &= (P_{\lambda_0}(X \geq 1))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^1 = 1 - (-e^{-\lambda_0} + e^0) = \\ &= 1 + e^{-\lambda_0} - 1 = e^{-\lambda_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\theta) = (P_{\lambda_0}(X \geq 1))^n = (e^{-\lambda_0})^n = e^{-\lambda_0 n} = e^{-3} = 0.049$$

$\uparrow$   
 $n=15$   
 $\lambda_0=1/5$

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: 09/01/2015

(PROBLEMA 2)

- b) Recordem que la potència de un test ve donada per la funció potència de manera que:

$$\text{Potència} = \phi(\theta) = P_{\theta}(A_1) \quad , \quad \forall \theta \in \Omega_1$$

Això se pot descriure com,

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= 1 - P_{\theta}(A_0) \quad , \quad \forall \theta \in \Omega_1 \\ &= 1 - \alpha_2(\theta) \quad \text{donde} \quad \alpha_2(\theta) = P_{\theta}(A_0) \quad \forall \theta \in \Omega_1 \quad \text{també anomenat} \\ &\quad \text{error de tipus II.} \end{aligned}$$

Calculem el error de tipus II.

$$\begin{aligned} \alpha_2(i) &= P_{\lambda_1}(A_0) = P_{\lambda_1}(\min\{X_1, \dots, X_n\} < 1) = 1 - P_{\lambda_1}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq 1) \\ &= 1 - (P_{\lambda_1}(X_1 \geq 1))^n \end{aligned}$$

$$P_{\lambda_1}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq 1) = e^{-\lambda_1 n}$$

$$\Rightarrow \phi(i) = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 n}) = e^{-\lambda_1 n}$$

$$\phi(1/25) = e^{-1/25 \cdot 15} \approx 0.5488 \quad \checkmark$$

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/

Data: 09/01/2015

### Problema 3

1.

Considerem la funció :  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$   $g(x) = x^2 = W$   
 $x \mapsto x^2$

la funció és creixent, entones  $W$  és una variable aleatòria amb densitat

$$f_W(w) = f_X(g^{-1}(w)) \cdot (g^{-1}(w))' \cdot 1_{\mathcal{J}(w)}$$

$$g^{-1}(w) = \sqrt{w}$$

$$(g^{-1}(w))' = \frac{1}{2} w^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_W(w) &= f_X(\sqrt{w}) \cdot \frac{1}{2} w^{-1/2} 1_{\mathcal{J}(w)} \\ &= \frac{2\sqrt{w}}{\theta} e^{-w/\theta} \cdot \frac{1}{2} w^{-1/2} 1_{(0,+\infty)}(w) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} w} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W \sim \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \rightarrow E(W) = \theta$$

$$\Rightarrow b_W(\theta) = E(W) - \pi(\theta) = \theta - \theta = 0 \Rightarrow W \text{ és } \underline{\text{insesgado}}$$

10/10

2.

Quèremos encontrar la cota de Cramer - Rao

Per a ello recordem:

Considerem la mostra aleatòria simple  $x_1, \dots, x_n$ . Sea  $L(x, \theta)$  la funció de versemblança

Sea  $T$  un estimador insesgado de  $\pi(\theta)$

Y suposem: (i)  $\pi$  és diferenciable sobre  $\theta$

(ii) Per a tota  $h(x)$  tal que  $E(h(x)) < +\infty$ , se satisfà

$$\frac{d}{d\theta} \int \dots \int h(x) f(x, \theta) dx = \int \dots \int h(x) \frac{d}{d\theta} f(x, \theta) dx_1 \dots dx_n$$

Entonces,

$$\text{Var}(T) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{E\left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x, \theta)\right)^2\right)} = C_\theta$$

Aplicamos dicho teorema:

$$\tau'(\theta) = 1$$

$$E\left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x, \theta)\right)^2\right) = I(\theta) = \text{información de Fisher.}$$

Primero calculamos la función de verosimilitud:

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} e^{-x_i/\theta} = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\ln(L(x, \theta)) = n \ln\left(\frac{x}{\theta}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial \ln(L(x, \theta))}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln(L(x, \theta))}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

La información de Fisher también la podemos calcular como:  $I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(L(x, \theta))\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(\theta) &= -E\left(-\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} E\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n E(x_i^2) = \\ &= \frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} n \cdot \theta = \frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} \end{aligned}$$

$E(x_i^2)$   
 $x_i^2 \sim \exp(\theta)$   
 iid

10/10

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/a:

Data: 09/01/2015

(PROBLEMA 3)

$$\rightarrow C_{\theta} = \frac{1}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n} \equiv \text{Cota Cramer-Rao.}$$

③

Quèrem calcular el estimador uniformement de mínima varianza de  $\theta$   
Es decir, considerant la família de estimadors:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\theta} &= \{ \text{estimadors de } \theta, \text{ integrals i de quadrado integrable} \} \\ &= \{ \text{Estimador } T \text{ de } \theta, E(T) = \theta, E(T^2) < +\infty \} \end{aligned}$$

Puesto que el error cuadrático medio (o algo considerando la f. de pérdida  $w(t, \theta) = (t - \theta)^2$ )  
queda definido como

$$R_T(\theta) = E_{\theta}((T - \theta)^2) = E \left( \underbrace{(T - E(T))^2}_{\text{Var}(T)} + \underbrace{(E(T) - \theta)^2}_{b_T(\theta)} \right)$$

dado que la familia  $\mathcal{E}_{\theta}$  satisface  $b_T(\theta) = 0$ , buscamos el estimador  
que minimice  $R_T(\theta)$ , por tanto, quèrem  $T$  tal que su varianza sea mínima.

Calculamos el estimador de máxima verosimilitud.  $\hat{\theta}_{MV}$  es tal que

$$L(x, \hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x, \theta)$$

Por tanto, buscamos los  $\theta$  que maximicen  $L(x, \theta)$ . Consideraremos  $\ln(L(x, \theta))$  para simpli-  
ficar los cálculos y puesto que sigue la misma monotonicidad nos conducirá al mismo  $\hat{\theta}_{MV}$ .  
Pasando a los cálculos de ②. Tenemos:

$$\frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow -n\theta + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{MV}} = \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}^2} - \frac{2}{\left( \frac{\sum x_i^2}{n} \right)^3} \sum x_i^2 =$$

$$= \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}^2} - \frac{2n^3}{(\sum x_i^2)^2} < 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} \text{ m\grave{a}xim}$$

Aplicando el Teorema Central del l\imite:

2.5/10

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n W_i}{n} = \bar{W} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad R$$

$$\mu = \theta, \sigma^2 = \theta^2 \Rightarrow \text{Var}(\bar{W}) = \frac{\theta^2}{n} = C_0 = \text{Cota de Cramer-Rao}$$

$\Rightarrow \bar{W} = \hat{\theta}_{MV}$  es VMLVUE de  $\theta$ .

Això no es l'argument.  
ja que la variancia de  
l'EMV es sempre la CCR  
quan  $n \rightarrow \infty$

Pero ho deducim en mostres  
de mida  $n$

Assignatura: INFERÈNCIA

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: 09/01/2015

(PROBLEMA 3)

4

Considerando el espacio de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta \in \mathcal{O})$

Queremos contrastar:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

$$(\text{H}_0: \theta \in \mathcal{O}_0$$

vs

$$H_1: \theta \in \mathcal{O}_1, \quad \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset)$$

(\*)

$$\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset)$$

Por tanto, podemos aplicar el test de razón de verosimilitudes.

Sea

$$\lambda(x) = \frac{L(x, \mathcal{O}_0)}{L(x, \mathcal{O})}$$

la razón de verosimilitud

$$\text{donde } L(x, \mathcal{O}_0) = \sup_{\theta \in \mathcal{O}_0} L(x, \theta)$$

$$L(x, \mathcal{O}) = \sup_{\theta \in \mathcal{O}} L(x, \theta)$$

Entonces,  $A_0 = \{x: \lambda(x) \geq c_\alpha\}$  para  $c_\alpha$  constante ( $c_\alpha \leq 1$ )

tal que  $\mathbb{P}_{\theta_0}(A_0^c) \leq \alpha$ . Contrasta el test (\*)

$$\text{Calculando } L(x, \mathcal{O}_0) = L(x, \theta_0) = \left(\frac{2}{\theta_0}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot e^{-\frac{1}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$L(x, \mathcal{O}) = L(x, \theta_{mv}) = \left(\frac{2}{\theta_{mv}}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot e^{-\frac{1}{\theta_{mv}} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{L(x, \mathcal{O}_0)}{L(x, \mathcal{O})} = \left(\frac{\theta_{mv}}{\theta_0}\right)^n \cdot \exp\left\{\left(-\frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_{mv}}\right) \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

$$\Rightarrow A_0 = \left\{x: \left(\frac{\theta_{mv}}{\theta_0}\right)^n \cdot \exp\left\{\left(-\frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_{mv}}\right) \sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \geq c_\alpha\right\}$$

R  
(T. Wilks)

## Test Wald

el test de Wald considera el estadístic

$$W_n^s = (\hat{\theta}_{mv} - \theta_0)^T \cdot \hat{I}(\theta_0) \cdot (\hat{\theta}_{mv} - \theta_0)$$

Rechaza  $H_0$  si  $W_n^s > \chi_{(k), \alpha}^2$

En nuestro caso:

$$W_n^s = (\hat{\theta}_{mv} - \theta_0)^2 \cdot \frac{n}{\theta_0^2} \quad R$$

## Test de Score

Considera el estadístico

$$T_n^s = (I(\theta_0))^{-1} \left( \frac{\partial \log L(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2$$

Rechaza  $H_0$  si  $T_n^s > \chi_{(k), \alpha}^2$

$$T_n^s = \frac{\theta_0^2}{n} \cdot \left( -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^2 \quad B$$

Falla  
acabar (T. Wilks)  
i he he  
petits errors

6/10

5

$$W_n^s = (2'5 - 3'5)^2 \cdot \frac{200}{3'5^2}$$

$$T_n^s = \frac{3'5^2}{200} \left( -\frac{200}{3'5} + \frac{1}{3'5^2} \sum X_i^2 \right)^2$$

2/10

Perque no ho compares!

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

# PROBLEMA 1

$$f(y; p, \lambda) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda} & \text{si } y=0 \\ \frac{(1-p)e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} & \text{si } y=1, 2, \dots \end{cases}$$

## 1. Función de verosimilitud

$$L(p, \lambda; \underline{y}) = \begin{cases} p^n + (1-p)^n e^{-n\lambda} & \text{para } y=0 \\ \frac{(1-p)^n e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}}{y_1! \dots y_n!} & \text{para } y=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$y_0 = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$$

$$L(p, \lambda; y_0) = \begin{cases} p^6 + (1-p)^6 e^{-6\lambda} & \text{cuando } y=0 \\ \frac{(1-p)^6 e^{-6\lambda} \lambda^{12}}{8640} & \text{cuando } y=1, 2, \dots \end{cases}$$

## 2. Estimación máximo verosímil de $p$ ( $\lambda$ conocido)

$$\log L(p, \lambda; \underline{y}) = \begin{cases} \text{ninguno} \\ n \log(1-p) - n\lambda + \sum_{i=1}^n y_i \log \lambda - \log(y_1! \dots y_n!) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = \frac{-n}{1-p} = 0 \rightarrow \text{no interviene } p$$

0.25

4. Estimación por el método de los momentos de  $(p, \lambda)$ 

Primero se calculan los momentos de primer y segundo orden.

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot P(Y=y) = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + \dots =$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} y \cdot \left[ (1-p) e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \right]$$

$$E[Y^2] = \sum_{y=0}^{\infty} y^2 \cdot P(Y=y) = \sum_{y=1}^{\infty} y^2 \cdot \left[ (1-p) e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \right]$$

A continuación se iguala  $E[Y] = m_1$  y se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo  $\hat{p}_{MM}$  y  $\hat{\lambda}_{MM}$ .

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## PROBLEMA 2

1)

$$\textcircled{2} \begin{cases} H_0: \lambda = 1/5 \\ H_1: \lambda < 1/5 \end{cases} \quad f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad E[X] = 1/\lambda$$

a)  $\Delta$  El test más potente es aquel que dado un contraste del tipo  $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta = \theta_1 \end{cases}$  establece una zona de rechazo "C" para la cual el contraste es de potencia máxima fijado un nivel de significación " $\alpha$ ".

La diferencia respecto a un test uniformemente más potente es que este último establece dado un contraste del tipo  $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$  una zona de rechazo "C" para la cual el contraste es de máxima potencia para cada uno de los valores de  $\theta_0$  que establece  $H_1$  fijado un nivel de significación " $\alpha$ ".  $+/-$

b) Se aplicará el lema de Neyman-Pearson.

0.75

$$\frac{L(\lambda_0 | \underline{x})}{L(\lambda_1 | \underline{x})} = \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum x_i}}{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum x_i}} = \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^n e^{\sum x_i (\lambda_1 - \lambda_0)}$$

$$\log \left( \frac{L(\lambda_0 | \underline{x})}{L(\lambda_1 | \underline{x})} \right) = n(\log \lambda_0 - \log \lambda_1) + \sum x_i (\lambda_1 - \lambda_0) \geq A$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \geq \frac{n(\log \lambda_1 - \log \lambda_0) + A}{\lambda_1 - \lambda_0}, \quad \text{con: } \lambda_0 = 1/5 \text{ y } \lambda_1 = 1/4$$

La zona de rechazo es  $C = \{X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^+ \mid \sum_{i=1}^n X_i \geq B\}$

Con un tamaño  $\alpha = P(\underline{X} \in C \mid H_0)$  ✓

c) Se transforma el test en:

$$\begin{cases} H_0: \lambda = 1/5 \\ H_1: \lambda < 1/5 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 \ (\lambda_1 < 1/5) \end{cases}$$

La zona de rechazo será del tipo:

$$\log \left( \frac{L(\lambda_1 | \underline{X})}{L(\lambda_0 | \underline{X})} \right) = n(\log \lambda_1 - \log \lambda_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i (\lambda_1 - \lambda_0)}_{< 0} \geq A$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{n(\log \lambda_1 - \log \lambda_0) + A}{\lambda_1 - \lambda_0}$$

La zona de rechazo ~~habrá~~ será del tipo  $\sum_{i=1}^n X_i \leq B$  no

$$\alpha = P(\underline{X} \in C \mid H_0)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq B$$

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

### PROBLEMA 3

$X_1, \dots, X_n$  iid r.v.  $\sim f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}$ ,  $x > 0$

① Mostrar que  $X_1^2$  es un estimador insesgado de  $\theta$ .

→ Si se aplica la substitución  $W = X^2$ , mostrar que  $X_1^2$  es insesgado equivale a mostrar que  $W_1$  es un estimador insesgado también de  $\theta$ . A continuación se encuentra la función de densidad de  $W$ .

$$f_W(w) = f_X(\sqrt{w}) \cdot \left| \frac{d\sqrt{w}}{dw} \right|$$

$W = X^2 \rightarrow \sqrt{W} = X$  (cambio de variable)

$$f(w; \theta) = \frac{2\sqrt{w}}{\theta} e^{-w/\theta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{\theta} e^{-w/\theta}, \text{ que sigue una}$$

distribución exponencial con esperanza  $\theta$ .

$$E[W_1] = E[W] = \theta \text{ es insesgado} //$$

10/10

②, Encontrar la cota de Cramer-Rao para la variancia de un estimador insesgado de  $\theta$ .

Primero se calcula la información de Fisher:

$$I_n(\theta) = E \left[ - \frac{\partial^2 \log L(\underline{x}|\theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

$$L(\underline{x}|\theta) = \frac{2 \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta}}; \quad \log L(\underline{x}|\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log x_i - n \log \theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta}$$

$$\frac{\partial \log L(\underline{x}|\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{\theta^2}; \quad \frac{\partial^2 \log L(\underline{x}|\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2 \sum x_i^2}{\theta^3}$$

$$E \left[ - \left( \frac{n}{\theta^2} - \frac{2 \sum x_i^2}{\theta^3} \right) \right] = E \left[ \frac{2 \sum x_i^2}{\theta^3} \right] - \frac{n}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n E[x_i^2] - \frac{n}{\theta^2} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ E[x_i^2] = \theta \end{matrix}$$

$$= \frac{2n\theta}{\theta^3} - \frac{n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} \quad 10/10$$

La cota de Cramer-Rao es  $\frac{1}{I_n(\theta)} \Rightarrow \frac{\theta^2}{n}$

③. Encontrar el UMVUE de  $\theta$  ( $\hat{\theta}$ ).

Se puede enfocar de varias formas: 1) Partir de  $X_1$ , ya que es insesgado, y aplicar Lehmann-Sheffe' basándose en el estadístico suficiente  $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ .

2) ~~Se~~ Aprovechar que se ha calculado  $\frac{\partial \log L(\underline{x}|\theta)}{\partial \theta}$  para obtener el estimador máxima verosímil, ver que es insesgado y además alcanza la cota de Cramer-Rao (se hace a continuación).

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

### Continuació PROBLEMA 3

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial \log L(\underline{x}|\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum X_i^2}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} = \frac{\sum X_i^2}{n}$$

La segona derivada en  
aquest punt és decreixent

$$E[\hat{\theta}_{MLE}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right] = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^n X_i^2] =$$

$$= E[X^2] = \theta \text{ insesgado}$$

Para calcular la varianza de  $\hat{\theta}_{MLE}$  se calculará la  $\text{Var}[X^2]$ .

primero

Como  $f(x;\theta)$  pertenece a la familia exponencial con  $h(x) = x$ ,  $c(\theta) = \frac{2}{\theta}$ ,  $w(\theta) = -\frac{1}{\theta}$  y  $t(x) = x^2$ , entonces:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial w(\theta)}{\partial \theta} t_i(x)\right) = -\frac{\frac{d^2 \log c(\theta)}{d\theta^2}}{\frac{d^2 \log c(\theta)}{d\theta^2}} - E\left(\sum_{i=1}^n \frac{d^2 w(\theta)}{d\theta^2} t_i(x)\right)$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\theta^2} X^2\right) = \frac{-1}{\theta^2} - E\left(-\frac{2}{\theta^3} X^2\right) = \frac{-1}{\theta^2} - \left(\frac{-2}{\theta^2}\right)$$

$$\frac{1}{\theta^4} \text{Var}(X^2) = \frac{1}{\theta^2} \Rightarrow \text{Var}(X^2) = \theta^2$$

10/10

$$\text{Como } \text{Var}(\hat{\theta}_{MLE}) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i^2) = \frac{n}{n^2} \theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$$

alcanza la cota de Cramer-Rao,  $\hat{\theta}_{MLE} = \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$  es el estimador insesgado de mínima varianza.

$$(4) \begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

### Test del Score

Estadística del test: 
$$\frac{S^2}{I_n(\theta)} = \frac{\left(\frac{\partial \log L(X|\theta)}{\partial \theta}\right)^2}{n/\theta^2} = \frac{\left(\frac{\sum X_i^2}{\theta^2} - \frac{n}{\theta}\right)^2}{n/\theta^2} =$$

$$= \frac{[\sum X_i^2]^2 - 2n\sum X_i^2\theta + n^2\theta^2}{n\theta^2} = \frac{(\sum X_i^2)^2}{n\theta^2} - \frac{2\sum X_i^2}{\theta} + n =$$

$$= \frac{(\sum X_i^2)^2 - 2\sum X_i^2 n\theta + n^2\theta^2}{n\theta^2} = \frac{(\sum X_i^2 - n\theta)^2}{n\theta^2} \text{ se rechaza } H_0 \text{ si}$$

$$\frac{(\sum X_i^2 - n\theta)^2}{n\theta^2} > \chi_1^2 = 3,84$$

7.5/10

### Test de Wald

Estadística del test: 
$$(\hat{\theta} - \theta_0)^2 I_n(\theta) = \left(\frac{\sum X_i^2}{n} - \theta_0\right)^2 \frac{n}{\theta^2}$$

Se rechaza  $H_0$  si 
$$\left(\frac{\sum X_i^2}{n} - \theta_0\right)^2 \frac{n}{\theta^2} > \chi_1^2 = 3,84$$

### Test de razón de verosimilitud

$$\lambda(x) = \frac{L(\theta_0 | x)}{L(\hat{\theta} | x)} = \frac{\frac{2\pi x_i}{\theta_0} e^{-\frac{\sum X_i^2}{\theta_0}}}{\frac{2\pi x_i}{\hat{\theta}} e^{-\frac{\sum X_i^2}{\hat{\theta}}}} = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} e^{\frac{\sum X_i^2}{\hat{\theta}} - \frac{\sum X_i^2}{\theta_0}}$$

Aplicando Wilks 
$$-2 \ln \lambda(x) \geq \chi_1^2$$

Se rechaza  $H_0$  si  $\rightarrow$

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Continuació PROBLEMA 3

5)  $n=200$ ,  $\theta_0=3,5$ ,  $\hat{\theta}=2,5$

### Test del Score

Se rechaza  $H_0$  si:  $\frac{(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\theta)^2}{n\theta^2} > \chi_1^2 = 3,84$

### Test de Wald

$$\left(\frac{\sum X_i^2}{n} - \theta_0\right)^2 \cdot \frac{n}{\hat{\theta}^2} = (2,5 - 3,5)^2 \cdot \frac{200}{2,5^2} = 32 > 3,84$$

↓  
Se rechaza  $H_0$

### Test de Razón de Verosimilitud

Se rechaza  $H_0$  si:  $-2 \ln \left[ \frac{2,5}{3,5} e^{\frac{\sum X_i^2}{2,5} - \frac{\sum X_i^2}{3,5}} \right] > \chi_1^2 = 3,84$

5/10

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Problema 1

$Y_1, \dots, Y_n$  <sup>i.i.d</sup> zero-inflated Poisson  $\lambda$

$$f(y, p, \lambda) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda} & \text{si } y = 0 \\ (1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} & \text{si } y = 1, 2, \dots \end{cases}$$

1) Función de verosimilitud

①  $L(y, p, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(y_i; p, \lambda)$

$$\begin{aligned} L(y, p, \lambda) &= \prod_{i=1}^n (1-p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} \\ &= (1-p)^n \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} \end{aligned}$$

varianza, esperanza

$L(p, \lambda) = 1-p$

$$L(y, p, \lambda) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda} \\ (1-p)^n \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} \end{cases}$$

incorrecta

2)  $L(y, p) = (1-p)^n \frac{\prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!}$

→ Logaritmo de la funció.

$\ln L(y, p) = n \ln(1-p) + \sum_{i=1}^n \ln \lambda^{y_i} - \sum_{i=1}^n \ln y_i!$

→ ~~Es~~ Calculeu la primera derivada.

$\frac{dL}{dp} = \frac{n}{1-p}$

→ Igualo la derivada a 0

$\frac{n}{1-p} = 0$

$n = 1-p$

$\Rightarrow \frac{n}{1-p} = n+1$

fixa n = 1?  $\Rightarrow \frac{n}{1-p} \neq 0$

→ Comprobo que és un màxim amb la segona derivada.

$\frac{d^2L}{dp^2} = \frac{-n}{(1-p)^2} < 0$

→  $y_0 = (1, 0, 2, 0, 6, 3)$   $\lambda = 2$   
 $n = 6$

$f(y, p, \lambda) = \begin{cases} (n+1) + (1-p)(n+1)e^{-\lambda} \\ (1-p)(n+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} \end{cases}$

$f(y=1) = (1-2) e^{-2} \frac{2^1}{1!}$

$f(y=2) = 6 e^{-2} \frac{2^2}{2!}$

$f(y=0) = 6 + 6 e^{-2}$



Assignatura: \_\_\_\_\_

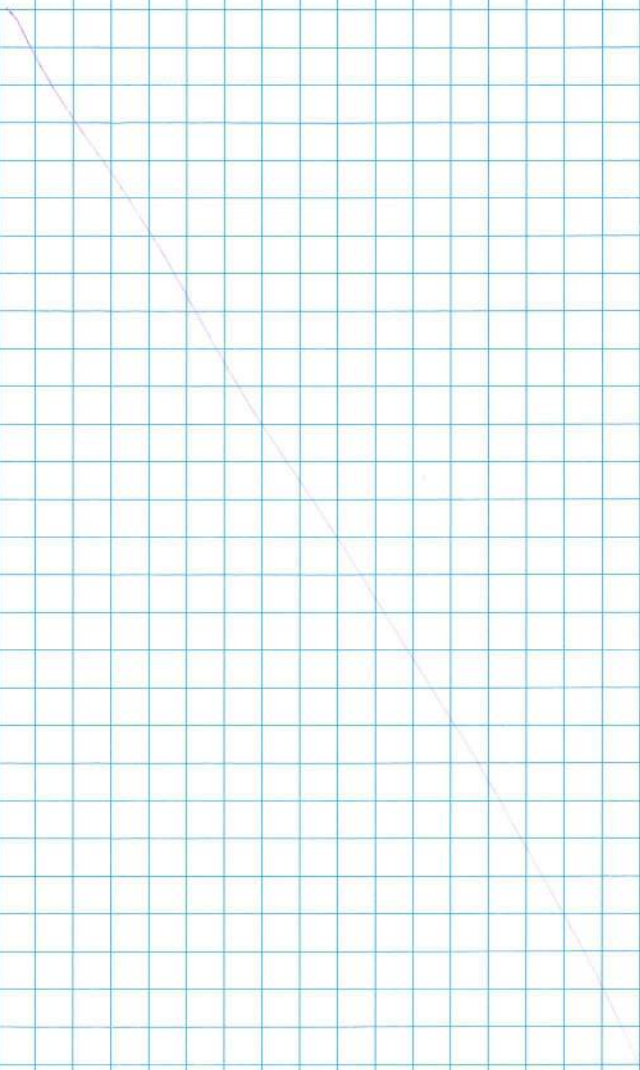
Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

$$f(y=3) = 6 + e^{-2} \frac{2^3}{3!}$$

$$f(y=6) = 6 + e^{-2} \frac{2^6}{6!}$$

4)



Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## PROBLEMA 2

$X_1, \dots, X_n \sim \text{Exponential}(\lambda)$

$$\mu = \lambda^{-1}$$

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} f(x; \mu) &= \mu e^{-\mu x} \\ &= \lambda^{-1} e^{-x/\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \end{aligned}$$

1)  $H_0: \lambda = 1/5$

$H_1: \lambda < 1/5$

$$X_{(1)} = \min \{X_1, \dots, X_n\}$$

Si  $X_{(1)} \geq 1$  se rebutja la  $H_0$ .

$$\alpha = 0.05$$

$$P(\text{rebutar la } H_0 \mid \text{certa } H_0) = \alpha$$

$$P(X_{(1)} \geq 1 \mid \lambda = 1/5) = 0.05$$

$$P\left(\frac{1}{5} (X_{(1)} \geq 1) e^{-5} \right) = 0.05$$

2) b-  $H_0: \lambda = 1/5$   
 $H_1: \lambda \leq 1/5$  ?

*Diferencia!*

Lema Neyman-Pearson

0.5/ Sea  $C$  una función de  $\lambda$  entonces  $C(\theta) = \frac{L(\lambda|\beta)}{L(\lambda|\beta_0)} \geq A(\alpha)$

Si  $C(\theta)$  no depende de  $\theta$  entonces es una prueba estadística UMP con región crítica  $C$  de dimensión  $n$ .

Cálculo de la f. de verosimilitud

$$f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$L(x; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x_i}$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i}$$

*que es*

$$C(\theta) = \left\{ \frac{L(x|\lambda)}{L(x|\lambda_0)} = \frac{\lambda \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i}}{\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_0 x_i}} \geq A(\alpha) \right\}$$

?

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

### Problema 3

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } f(x; \theta)$$

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} \quad x > 0.$$

1)  $X_1^2$  es un estimador insesgado de  $\theta$ .

- Un estimador es insesgado si tiene como sesgo = 0.

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = 0$$

?

2) Se calcula la cota de Cramér-Rao como:

$$CR = \frac{\left( \frac{d}{d\theta} \tau(\theta) \right)^2}{I_n(\theta)}$$

Donde,  $I_n(\theta)$  es la información de Fisher y se define como

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ell}{d\theta^2}\right)$$

A) Calcular la f. verosimilitud.

$$\begin{aligned} L(f(x; \theta)) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta} e^{-x_i^2/\theta} \\ &= \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n (x_i e^{-x_i^2/\theta}) \end{aligned}$$

b) Calculo la log-verosimilitud

$$\log(L(x|\theta)) = n \log 2 - n \log \theta + \sum \log x_i - \sum \frac{x_i^2}{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{\sum x_i}{\theta^2}$$

$$\frac{d^2L}{d\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} + \frac{2 \sum x_i}{\theta^3}$$

c) Sustituyo la segunda derivada para calcular la ~~segunda~~ información de Fisher.

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{d^2L}{d\theta^2}\right) = -E\left(\frac{n}{\theta^2} + \frac{2 \sum x_i}{\theta^3}\right) =$$

$$= -\left(\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\right) E(\sum x_i) = -\left(\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\right) E(x) =$$

$$= \frac{\theta^3 n + 2\theta^2 E(x)}{\theta^5} = \frac{\theta n + 2 E(x)}{\theta^2}$$

En el apartado (1)

se comprobó que

$x_i^2$  es un estimador

insesgado por lo tanto la

$$E(x) = \frac{1}{2}$$

5/10

d) Por lo tanto la varianza de como sea es.

$$CR = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{\theta n + 2} E(x)$$

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

### 3) UMVUE de $\theta$

Lema Rao-Black

Sea  $X_1, \dots, X_n$  mas. de  $X$  con función densidad  $f(x|\theta)$ .

Sea  $T(x)$  un estadístico suficiente de  $\theta$  y sea

$w(x)$  un estimador insesgado de  $\tau(\theta)$ . Se define

$$w_T = \mathbb{E}_\theta(w|T).$$

Entonces,

- 1)  $w_T$  es una función única de  $T(x)$ .
- 2)  $E(w_T) = \tau(\theta)$
- 3)  $V(w_T) \leq V(w)$

Esto se demuestra de la siguiente manera.

- 1) Se cumple ya que  $T(x)$  es un estadístico suficiente de  $\theta$ .
- 2)  $E(w_T) = E(w|T) = E(w) = \tau(\theta)$ .
- 3)  $\text{Var}(w_T) = \text{Var}(w|T) \leq \text{Var}(w)$ .

Lema de Heger

Si  $T(x)$  es un estadístico suficiente de  $\theta$  y

$w(x)$  es un estimador insesgado de  $\tau(\theta)$ . Entonces

$w_T = E_\theta(w|T)$  es un estimador UMVUE. Además si

$V(w_T) > 0$ , este estimador es único

En el apartado (1) se ha demostrado que  $X^2$  es un estimador insesgado y por el teorema de factorización  $X^2$  es un estadístico suficiente.

NO!

Teorema de Factorización ... Un estadístico  $T$  es suficiente si  $\exists g(T|x)$  y  $\exists h(x)$  y de manera que la función de densidad se pueda expresar de la siguiente forma:

$$f(x|\theta) = (g(T|x)) \cdot h(x)$$

$$\hookrightarrow \text{Por lo tanto } T(x) = X^2.$$

Estadístico suficiente

$$\frac{2.3}{10}$$

4) TCST De curvatura

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

se define  $W = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 I_0(\hat{\theta}) \sim \chi^2_{1,1-\alpha}$

$$W = (X_1^2 - \theta_0)^2 \cdot \frac{\theta_0 + 2}{\theta^3} E(x)$$

Se rechaza la  $H_0$  si  $W > \chi^2_{1,1-\alpha}$

TCST Del score

$$T = \frac{(S_n(\beta_0))^2}{I_n(\beta_0)} \sim \chi^2_{1,1-\alpha} \text{ donde } S_n() \text{ es la primera derivada de la f. verosimilitud evaluada en } \beta = \beta_0.$$

Se rechaza la  $H_0$  si  $T > \chi^2_{1,1-\alpha}$

Assignatura: \_\_\_\_\_

Estudiant/a: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

$$T = \frac{\left( \frac{-n}{\theta_0} - \frac{\sum x_i}{\theta_0^2} \right)^2}{\frac{\theta_0 + 2}{\theta_0^3} E(x)}$$

2.5/10

Test razón de verosimilitud

$$\lambda = \frac{\max_{\theta \in \theta_0} L(X|\theta)}{\max_{\theta \in \theta} L(X|\theta)}$$

Se calcula el máximo verosimil de la función y  
realiza el contraste entre la  $H_0$  y la general.

~~Esta~~ (esta es la principal diferencia con Neyman-Pearson)

Cuando se calcula  $\lambda$  se sustituye a  $-2 \ln(\lambda)$ .

~~2.2.2.2.2.2~~

Se rechaza la  $H_0$  si  $\lambda > \chi^2_{1-\alpha}(1) = 3.84$