

Assignatura: ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Estudiant: _____

Data: 05/11/20

0.5

①

a) Prenem $p = 23 \in \mathbb{Z}$ senar i $a = 5$, $a^2 = 25 = 2 \pmod{23}$. 0.25

b) Vull $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ t.q. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ i $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Els cods de f
estàn a $\mathbb{F}_p$ i no
a $\mathbb{Z}$

Definim el morfisme $\varphi: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x] \rightarrow A$ injectiu i exhaustiu
 $g(x) \mapsto g(\sqrt{2})$ [volem que és morfisme
nit a clon]

ja que $\forall g(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ tenim la seva imatge en A perquè
ni el grau del polinomi és m parell $\Rightarrow (\sqrt{2})^m = 2^{\frac{m}{2}}$ i si
és imparell $(\sqrt{2})^{m+1} = 2^{\frac{m}{2}}\sqrt{2}$ que pertanyen a A . És exhaustiu

ja que $\forall a+b\sqrt{2} \in A$ $g(a+b\sqrt{2}) = a+b\sqrt{2}$.

- $\in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ és bijectiu $\Rightarrow$ podem aconseguir $\varphi^{-1}: A \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$

No pot ser!
Batechu!

$A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
 $B = \mathbb{F}_p[x]$

morfisme d'anells i si era gen $g \circ \varphi^{-1}$

amb $g: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$g(x) \mapsto g(a^2)$ t.q. $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$

$g \circ \varphi^{-1}$ morfisme per ser composició de morfismes

c) El nucli del morfisme anterior és $\text{Ker}(g \circ \varphi^{-1}) = \langle g(\sqrt{2}) \rangle$ t.q.

$g(a^2) = 0 \Rightarrow x + ya^2 = 0 \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{p}$ i $y \equiv 0 \pmod{p}$.

$\Rightarrow \text{Ker}(g \circ \varphi^{-1}) = xp + yp\sqrt{2}$ amb $x, y \in \mathbb{Z}$.

Assignatura: ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Estudiant/a: [Redacted]

(F5)

Data: 05/11/20

②

a) Si prenem $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \in A$

Siguin $f(x), g(x) \in A$ aleshores $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f(x) + g(x) \in A$.

Siguin $f(x), g(x) \in A$ aleshores $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \in A$.

$\Rightarrow A$ és un subanell de $K[x]$.

Unitats?

0?

falla veure que l'opositi $\in A$
o la diferència $\in A$

b) Suposem que x^3 no és irreductible $\Rightarrow \exists f(x), g(x) \in A$ t.q.

$f(x)g(x) = x^3$ com que x^3 és de grau 3 i els coeficients dels

polinomis són en un cos $\Rightarrow$ no hi ha divisors de zero. Tenim que f o bé $f(x)$ és de grau 1 o bé $g(x)$ és de grau 1. (perquè no $\text{grau} = 3$)
 $\Rightarrow x^3 = (a+bx+cx^2)(d+ex) = ad + bdx + cd x^2 + e a x + e b x^2 + e c x^3$.

Obtenim que o bé $a=0$ o bé $d=0$ ja que x^3 no té terme independent.

o $a=0$ $\Rightarrow x^3 = bdx + (dc+eb)x^2 + ecx^3$.

Sabem $c \cdot e = 1 \Rightarrow c \neq 0 \Rightarrow e \neq 0$, a més $b \cdot d = 0 \Rightarrow b = 0$ o

$d = 0$ i $d \cdot c + e \cdot b = 0 \Rightarrow d = b = 0$

(si $d = 0$ o $b = 0 \Rightarrow e \cdot c \neq 0$)

$\Rightarrow x^3 = (cx^2) \cdot (ex)$ però $(ex)' = e \neq 0 \Rightarrow ex \notin A \Rightarrow$ no

pot ser. Mirem ara si $d=0$.

$d=0$ $\Rightarrow x^3 = e a x + e b x^2 + e c x^3$ però $e \cdot a = 0 = e \cdot b$ i

$c \cdot e$ han de ser diferents de zero $\Rightarrow a = 0 = b$ i tornem

a tenir $x^3 = (cx^2)(ex)$. Δ

Així doncs veiem que no existeixen $f(x), g(x) \in A$ $f(x) \cdot g(x) = x^3$
 $\Rightarrow x^3$ irreductible en A .

14

c) Si veiem que x^3 no és primer aleshores sabem que A no pot ser factorial perquè en un anell factorial $p \in A$ primer $\Leftrightarrow p \in A$ irreductible.

Si x^3 fos primer $\Rightarrow (x^3)$ primer $\Rightarrow \forall a, b \in A$ t.q. $a \cdot b \in (x^3) \Rightarrow \exists a' \in (x^3) \text{ o } b' \in (x^3)$.

Prenem $x^3 + 1 = f(x) = x^3 + 2 = g(x)$, veiem que pertanyen a A :

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0 \quad ; \quad g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(0) = 0 \Rightarrow \exists g, g \in A.$$

$g(x) = g(x)$ no pertanyen a (x^3) però $f(x)g(x) = x^6 + 3x^3 \in (x^3)$

$$\exists h(x) \in A \text{ t.q. } \begin{cases} h(x)x^3 = f(x) \\ \text{o} \\ h(x)x^3 = g(x) \end{cases} \quad \text{no es verifica}$$

④ $f(x) = g(x)$ de grau 3 $\Rightarrow h(x)$ de grau 0 $\Rightarrow h(x) = K$.

$$K \cdot f(x) = Kx^3 + K \neq x^3 \quad \forall K.$$

$$Kg(x) = Kx^3 + 2K \neq x^3 \quad \forall K$$

$\Rightarrow x^3$ no és primer. $\Rightarrow A$ no factorial.

e) No pot ser euclidià ja que tot anell euclidià $\Rightarrow$ anell principal $\Rightarrow$ anell factorial i ja hem vist que A no és factorial. 05

d) Prenem $(x^2) + (x^3) = \{f(x) + g(x) \mid f(x) \in (x^2), g(x) \in (x^3)\} = I$ sabem que és un ideal perquè la suma d'ideals és ideal, de fet és l'ideal més petit que conté a (x^2) i (x^3) .

Si $\exists h(x) \in A$ t.q. $I = (h(x))$ aleshores $x^3 + x^2 = c(x)h(x)$ amb $c(x) \in A$. Obtenim que $x^3 + x^2$ és irreductible sobre

A ja que si no hauria de ser multiplicació d'un de grau 1 per un de grau 2, o 3 de grau 1. $\Rightarrow$ hi hauria d'haver menys un factor de grau 1. no unitat

Per ② $x^3 + x^2 = ad + bdx + cdx^2 + eax + bex^2 + ecx^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 & x^3 + x^2 = bdx + cdx^2 + bex^2 + ecx^3 \text{ o } b=d=0 \\ b=0 & x^3 + x^2 = cdx^2 + ecx^3 \text{ tots diferents de 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d+ex)(x^2) \Rightarrow (d+ex)' = e \neq A.$$

03

ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 05/11/20

FS

②

si $d=0$ $x^3 + x^2 = eax + ebx^2 + cex^3 \Rightarrow a=0$ ja que no hi ha
 $x \Rightarrow x^3 + x^2 = (bx + cx^2)(ex)$ i ni $(bx + cx^2)' = b + 2cx \notin A$
 $(ex)' = e$
~~per què $bx + cx^2 \notin A$?~~

$\Rightarrow$ irreductible $\Rightarrow h(x) = x^3 + x^2$ però $x^3 \in I$ i $x^2 \notin I$ $\Rightarrow h(x) = x^3 + \underbrace{h(x)c(x)}_{\in I}$
 $\forall c(x) \in A \Rightarrow I$ és un ideal no principal.

③ Pel mateix raonament que abans ja que els graus de x^3 i $h(x)$ són
 iguals $\Rightarrow c(x) = cte$.

a) El conjunt d'unitats de A^k són els termes independents. $g(x) = cte$.
~~no zero~~

I imaginem que $\exists g(x)$ unitat de grau 2 $\Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
 $(a + bx)(c + dx) = 1 = ac + (ad + bc)x + d^2x^2$ ~~$\Rightarrow$~~

$$a \cdot c = 1 \text{ i } a \cdot b + c \cdot d = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \cdot b = 0 & a \cdot d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ x \cdot d = 0 & b \cdot c = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

Suposem que en general existeix unitats de grau més gran que 0
 aleshores $\exists g(x) \cdot g(x) = 0$ $g(x)$ de grau n i $g(x)$ de grau m

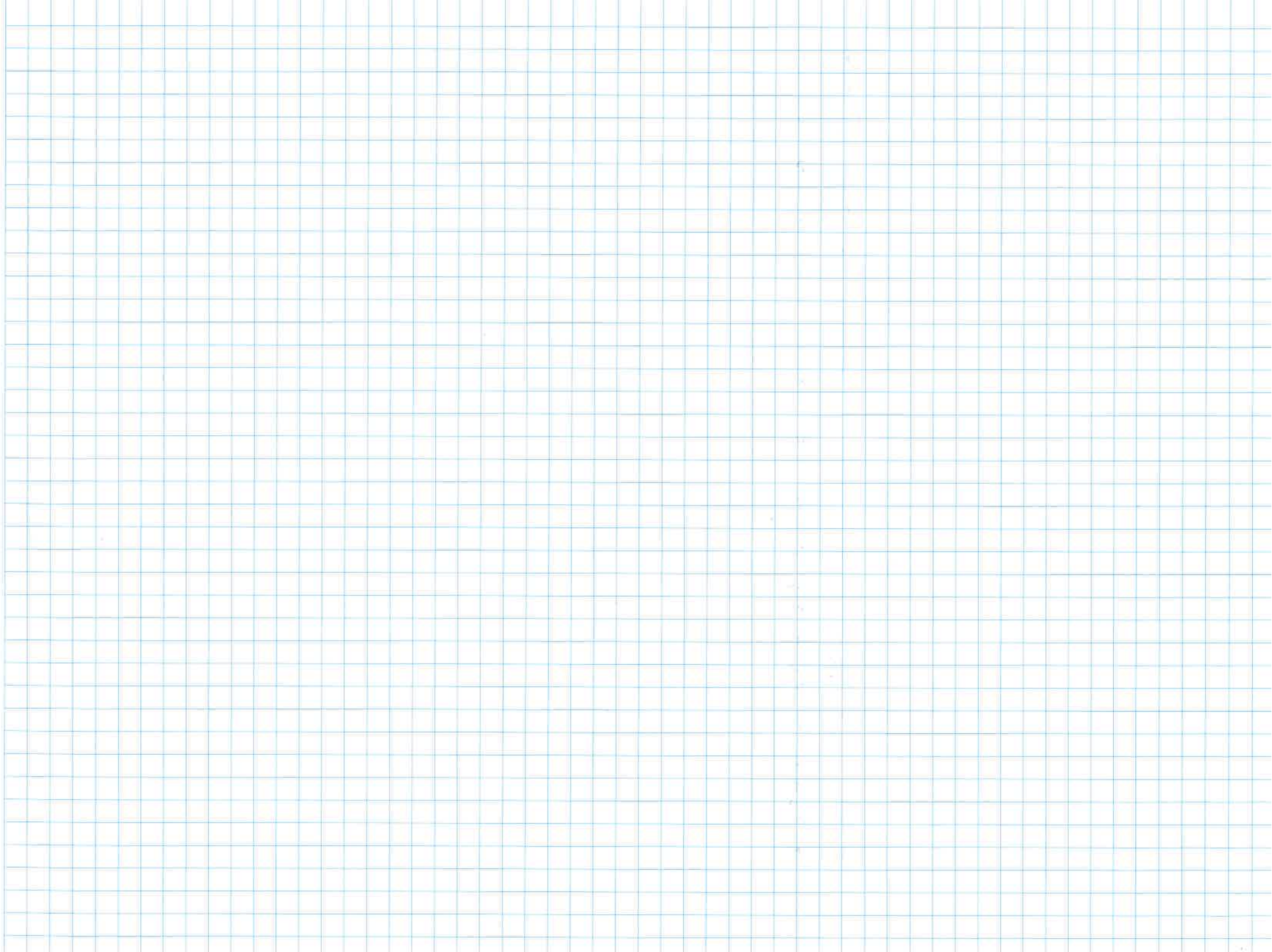
Si no són constants prenem $s = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$ $r = \min\{j \mid b_j \neq 0\}$
 amb $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ i $g(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$

Tenim: $c_{r+s} = 0 = a_0 b_{r+s} + \dots + a_s b_r + \dots + b_0 a_{r+s}$
 Tene $r+s$ de la multiplicació
 H' l'únic $\Rightarrow$ contradicció.

(com que ~~$r+s \leq m$~~ $r \leq m$ i $s \leq m \Rightarrow r+s \leq m+m$). 01

$\Rightarrow$ les úniques unitats són les constants, que ho són perquè
 pertanyen a un cos.

distints de 0!



3.

a) Tenim $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{3})$ mínim cos que conté $\mathbb{Q}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{3}$.

Tenim l'esquema de cosos



• $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q} : \alpha = \sqrt[3]{5} \Rightarrow \alpha^3 - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 5$ és irreductible

sobre $\mathbb{Q}$ ja que si no fos irreductible tindria alguna arrel sobre $\mathbb{Q}$ i les seves arrels $\sqrt[3]{5}$ no són de $\mathbb{Q}$.

• $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q} : \alpha = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \alpha^3 - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3$ és irreductible

sobre $\mathbb{Q}$? Definim $\varphi : \mathbb{Z}[\alpha] \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[\alpha]$ i tenim pel criteri

de reducció que si $\tilde{\varphi}(\alpha^3 - 3) = \alpha^3 - 3$ és irreductible sobre

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ho és sobre $\mathbb{Z}[\alpha] \Rightarrow$ irreductible sobre $\mathbb{Q}[\alpha]$

vist a classe.

a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[\alpha]$ només pot tenir com a arrels $\pm 1, \pm 2, \pm 3, 0$.

veiem que cap ho és $\Rightarrow \alpha^3 - 3$ irreductible.



• $[M : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})]$, sabem que $\alpha^3 - 5$ té coeficients en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ i

és irreductible en $\mathbb{Q}$. Observem que si $\alpha^3 - 5$ no fos irreductible

en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \Rightarrow \sqrt[3]{5}$ (a serà arrel) $\in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$, ja que $\alpha^3 - 5$ de

grau 3 $\Rightarrow$ no irreductible a té una arrel.

Com que $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \Rightarrow [M : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})] = 3$

$\Rightarrow [M : \mathbb{Q}] = [M : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 15$

i $[M : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})] = \frac{[M : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}]} = 5$

c) Tenim $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[15]{5})$. $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[15]{5})$

ambdós podem construir una $\mathbb{Q}$ -base de $M = \langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{i,j}$

amb $\alpha_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ -base $i = 0, \dots, 4$, $\beta_j \in \mathbb{Q} \setminus K = \mathbb{Q}$ -base

$j = 0, \dots, 2$ ja que amb tindrem 15 elements que són els que

reconstruïm per l'apartat a) i generen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[15]{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ generen M que és el mínim us que conté els 3.

Àlgebra Lineal - ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Examen

(F5)

Data 05/11/20

4) Prenem A un anell euclidià, I un ideal de A . Com que

A és euclidià $\exists \delta: A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$

Prenem $c = \langle a \in I \mid \min_{a' \in I} \delta(a') = \delta(a) \rangle = \min_{a' \in I} \delta(a') = \delta(c)$, sabem

que existeix ja que $\delta(I) \subset \mathbb{N}$.

Venim que $I = (c)$, en efecte $\forall y \in I$ com que A euclidià

$\exists q, r \in A$ t.q. $y = q \cdot c + r$ amb $\begin{cases} \delta(r) < \delta(c) \\ r = 0 \end{cases}$, però veiem

que $r = y - q \cdot c \in I \Rightarrow$ no pot ser que $\delta(r) < \delta(c) = \min \delta(I)$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow y = q \cdot c$ amb $q \in A \Rightarrow y \in (c) \Rightarrow I \subseteq (c)$.

Que $(c) \subseteq I$ és trivial ja que $\forall m \in A$ c.m $\in I$ perquè $c \in I$

$\Rightarrow (c) = I$.