

Assignatura: Estadística

Estudiant/a

Data: 31/5/2021

Teoria:

Q4.

(a) Es tracta d'un disseny de dues mostres aparellades

L'estadístic de contrast seria $D_2 = Y_2 - X_2$

(i) ~~el test seria~~

Com les distribucions dels pesos segueixen ones normals

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \Rightarrow D \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

El test llavors seria

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 > 5 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \leq 5 \end{cases}$$

(b) Sabem que

$$\frac{D - (\mu_1 - \mu_2)}{S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)} \sim t_{n+m-2}$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{D} \leq t_{n+m-2, 1-\alpha} \left(\frac{S^2 \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right) + (\mu_1 - \mu_2) \right) = 1 - \alpha$$

S: Fem servir $\alpha = 0'05$ com es fa habitualment

$$t_{n+m-2} = 1'701 \quad S^2 \sqrt{2} = \bar{D} \leq 5'656$$

$$S^2 = 0'88$$

i per tant la reducció del pes és superior a 5.

0'25

Q1.

(a) Sabem que $X_K^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_K$ amb $X_i \sim N(0,1)$
així podríem obtenir X_K^2 fent

crear Fitner amb K mostres de σ_{norm}

sumar els quadrats de les dades d'aquest Fitner

(b) ~~Sabem que~~  ~~X_K^2~~

DS

(c) Sabem

que $t_K = \frac{X}{\sqrt{X_K^2/K}}$ ^{norm}

per tant només hauríem d'agafar la X_K

com en l'apartat anterior i prendre ~~X_K~~

ap: $\frac{r_{norm}}{X_K^2}$

(c) Procediríem igual que en l'anterior usant

que $F_{K_1, K_2} = \frac{X_{K_1}^2/K_1}{X_{K_2}^2/K_2}$

Q3.

(a) $E[\hat{\lambda}] = K E[\bar{z} : x_i] = K \sum_i E[x_i]$

$= \frac{K}{\lambda} \sum_i = K \left(\frac{\lambda(n+1)}{2\lambda} \right) = \lambda$

$\Leftrightarrow K = \frac{2\lambda^2}{n(n+1)}$ si usen la param.

(b)

~~$\lambda e^{-\lambda x} = F(x)$~~

P1.

$$y_1, \dots, y_n$$

$$P_\theta(y=y) = \binom{y-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{y-r}$$

$$y = r, r+1, r+2, \dots$$

$$r \in \mathbb{N} \quad \theta \in (0,1)$$

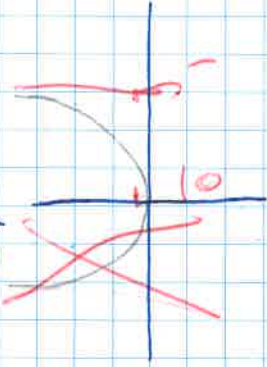
$$E_\theta[Y] = \frac{r}{\theta}$$

$$V_\theta[Y] = \frac{r(1-\theta)}{\theta^2}$$

$$(a) \quad L(\theta | \tilde{x}) = \prod_{i=1}^n \binom{y_i-1}{r-1} \cdot \theta^{r \cdot n} (1-\theta)^{\sum y_i - r \cdot n}$$

$$\log(L(\theta | \tilde{x})) = \sum_{i=1}^n \log \binom{y_i-1}{r-1} + r n \log(\theta) + (\sum y_i - r n) \log(1-\theta)$$

$$S: r=2, n=1: y=2 \Rightarrow L(\theta, \tilde{y}) = \binom{1}{1} \cdot \theta^{2 \cdot 1} \cdot (1-\theta)^0 = \theta^2$$



0.2

$$(b) \quad 1. E_\theta(Y) = \frac{r}{\theta}$$

$$\bar{Y} = m_1 \Rightarrow$$

Del mètode de moments

$$\frac{r}{\hat{\theta}_1} = m_1 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{r}{m_1}$$

$$2. E_\theta(Y^2) = E(Y)^2 + V(Y) = \frac{r^2}{\theta^2} + \frac{r(1-\theta)}{\theta^2} = \frac{r^2 + r(1-\theta)}{\theta^2}$$

$$Si \quad \bar{Y^2} = m_2 \quad \frac{r^2 + r(1-\theta)}{\theta^2} = m_2 \Leftrightarrow -m_2 \theta^2 + r \theta + (r^2 + r) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_2 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4m_2(r^2 + r)}}{-2m_2}$$

quina és la bona?

$$3. V_\theta(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{r(1-\theta)}{\theta^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{\bar{X} - \bar{X}^2}{\bar{X}^2} = m_2 - m_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{r(1-\theta)}{\theta^2} = m_2 - m_1^2 \Leftrightarrow r - r\theta + (m_2^2 - m_1^2) \theta^2$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_3 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4(m_2^2 - m_1^2)r}}{2(m_2^2 - m_1^2)}$$

0.1

(b) (segueix) Si: $x=2$ $n=2$: $Y=2,3$

$$m_1 = 5/2 \quad m_2 = 13/2 \quad m_1^2 - m_2^2 = -1/4$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{r}{m_1} = \frac{2 \cdot 2}{5} = 4/5$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot \frac{13}{2} (4+2)}}{2(-\frac{13}{2})} = 0,8191$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot 2}}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} = 0,89897$$

(c) Volem trobar el màxim de $L(\theta; X)$ i per facilitat de càlcul trobarem el de $\ln$ seu logaritme.

$$\frac{\partial \log(L(\theta; y))}{\partial \theta} = \frac{rn}{\theta} - \frac{\sum (y_i - r)}{1-\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{rn} = \frac{1-\theta}{\sum (y_i - r)} \Leftrightarrow \theta(\sum (y_i - r)) = (1-\theta)rn$$

$$\Leftrightarrow \theta(\sum y_i - rn + rn) = rn \Leftrightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{rn}{\sum y_i} = \frac{r}{\bar{y}}$$

~~(Per assegurar-nos que el nostre estimador és el màxim de la funció de versemblança)~~

Com que $\frac{1}{\theta} \rightarrow \infty \rightarrow N(r/\theta, \frac{r(1-\theta)}{\theta^2 n})$

$$\hat{\theta}_4 \rightarrow \frac{r}{N(r/\theta, \frac{r(1-\theta)}{\theta^2 n})}$$

~~-0.3~~

Estadística

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 8/31/5/2021

P1

(d)

$$Pr(a \leq \hat{\theta}_4 \leq b) = Pr\left(\frac{r}{b} \leq \bar{X} \leq \frac{r}{a}\right)$$

$$i \text{ com } \frac{(\bar{Y} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$Si: \text{volem } Pr(b' \leq \bar{Y} \leq a') = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow Pr\left(\frac{N_{0.1}^{-1}(\alpha/2)\sigma}{\sqrt{n}} + \mu \leq \bar{Y} \leq \frac{N_{0.1}^{-1}(1-\alpha/2)\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Si ho volem en funció de $\hat{\theta}_4$ tenim que l'interval de confiança de $\bar{Y}$

$$\left[\frac{N_{0.1}^{-1}(\alpha/2)\sigma}{\sqrt{n}} + \mu, \frac{N_{0.1}^{-1}(1-\alpha/2)\sigma}{\sqrt{n}} + \mu \right]$$

on $\sigma = V_{\theta}[Y]$ tota l'estona.

$$i \mu = E_{\theta}[Y]$$

(e)

$$\begin{cases} H_0: \theta \geq 5 \\ H_1: \theta < 5 \end{cases}$$

és un test unilateral

Ent servir el lema de Neyman-Pearson la regió crítica

$$R_e = \{x \in X^n : \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{rn} \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{\sum (Y_i - r)} \geq A_{\alpha}\}$$

Prenent logaritme ~ banda : banda :

$$R_c = \{x \in X^n : rn \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \sum (Y_i - r) \log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \geq \log(A_{\alpha})\}$$

$$= \{x \in X^n : \sum Y_i \geq A - \frac{\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) rn}{\log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)} + rn\}$$

dividim entre n ~

banda i banda

$$R_c = \{Y \geq A'\}$$

$$A' =$$

$$A' = \frac{A - \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) rn}{n \log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}$$

aproximat.

0.2

Per trobar A' veiem que $P(\bar{Y} \geq A' | \theta_0 = 0.5) \leq 0.05$

$= 1 - 2P(\bar{Y} \leq \frac{N(0,1)(1-\alpha)\sigma}{\sqrt{n-1}} + \mu)$

$= 1 - 2P(\bar{Y} \leq \frac{\sqrt{n-1} N(0,1)(1-\alpha)}{0.5^2} + \frac{r}{0.5})$

Hipòtesi nula

Així, doncs $A' = N(0,1)(1-\alpha) \frac{\sqrt{n}}{0.5^2} + \frac{r}{0.5}$

Tenint la regió crítica

en funció de $\bar{Y}$ el lema ens assegura que aquest test és UMP

(F)

Ara farem servir el test de ràtio de versemblances generalitzat

Veiem que es compleixen les condicions de monòtonia:

$$\frac{f(\theta_0; x)}{f(\theta_1; x)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{y-r} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{y-r}$$

que és estrictament creixent per $\theta_0 < \theta_1$

Per tant ara podem definir la regió crítica:

$$R_c = \left\{ \frac{d(\theta_0; x)}{\max_{\theta \neq \theta_0} d(\theta; x)} \leq A \right\}$$

$$\theta^n (1-\theta)^{\sum y_i - r}$$

$$\max_{\theta \neq \theta_0} \prod_{i=1}^n (y_i - 1 + r) \log \theta + \sum_{i=1}^n (y_i - r) \log (1 - \theta)$$

que ja hem trobat en l'apartat 1 on $\frac{r}{y}$

$$Així: R_c = \left\{ \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{rn} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum (y_i - r)} \leq A \right\}$$

i trobariem A analògicament a l'apartat

anterior tenint en compte que tenim un "L" en comptes d'un "Z"

$$-2 \log \lambda(y) \sim \chi^2_1$$

?

0.2

Estadística

Assignatura:

Estudiant/a

Data: 31/5/2021

P1. (g)

A l'apartat (c) hem vist que $\hat{\theta} = \frac{\bar{r}}{Y}$

Calculen $\bar{r} = \frac{360}{127} = 2'8346$

Així per $r=1$ $\hat{\theta}_4 = \frac{127}{360} = 0'3528$

i ara calculem el interval de confiança seguit

l'apartat (d) $\hat{\theta} \in [A, B]$

$N_{0.1}^{-1}(0'025) = -1'960$

$N^{-1}(0'975) = 1'960$

$A = 2'1960 \cdot \frac{2'8346}{\sqrt{127}} + 2'8346$

$B = \frac{1}{-1'96 \cdot \frac{1-0'3528}{\sqrt{0'3528(1-0'3528)}} + 2'8346} = 0'518$

$A = 0'267$

(h)

Faria un test de bondat, ~~discretització~~

~~la funció de probabilitat~~

o Faria servir la diferència entre

frequència esperada segons la distribució

per i la freqüència observada per realitzar

un test d'hipòtesis?

0.5

deu bo

com?

?

P1

a) Els rendiments?

-0.2

b) Quin model trien?

-0.4

P2

a) Trien model equivocant

-0.4

b) -0.5

No, en la feia