

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021

Teoria.

1.

(a) Un estadístic és robust en presència d'atípics quan els atípics no el modifiquen significativament.

(b) Són robusts en presència d'atípics:

- la mitjana i la mitjana retallada (la represa és m_2)
- El rang interquartil (IQR)

El percentil 95 ~~no~~ és perquè els atípics poden tirar-la molt fàcilment. Pensa el mateix amb la mediana, el rang, el Q1 i el mínim (podem tenir atípics molt pròxims a Q1).

El coeficient de variació i el d'asimetria contiquen molt el fet que una ~~observació~~ observació i l'allunyament de la mitjana (per tant, també són robustes i el fet són una manera de detectar observacions molt extremes.

0'S

Teoria 2. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.

(a) $K_1 \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$: aquesta expressió recorda bastant a la distribució

de la mitjana quan no coneixem la variància real i l'hem d'estimar per S^2 . Per tant, sabem que aquesta seria una t -Student de $n-1$ graus de llibertat, ~~per tant~~ en quedaria

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}, \text{ i a dir, que } K_1 = \sqrt{n(n-1)} = \sqrt{n^2 - n}$$

0.75

(b) $K_2 \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$: ~~per tant~~ la part de dalt és $(n-1)S^2$, i

per tant tenim $K_2 \frac{(n-1)S^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$. ~~Ara veiem~~ Ara veiem tindrem $n\hat{\sigma}^2$, i

per tant, tenim $K_2 \frac{(n-1)S^2}{n\hat{\sigma}^2}$. Sabem que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ i que $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$

Aleshora, dividint ~~no~~ $K_2 \frac{(n-1)S^2}{n\hat{\sigma}^2}$ quedem una F de Snedecor, ja que en l'altoria dividim per grau de llibertat, no multiplicam. Per tant, K_2 ha de cancel·lar $n-1$ del numerador i n del denominador i aleshora, respectivament $\frac{1}{n-1}$ i $\frac{1}{n}$. Per tant, $K_2 = \frac{n^2}{(n-1)^2} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2$ i aleshora, $\frac{S^2/(n-1)}{\hat{\sigma}^2/n} \sim F_{n-1, n}$. (avem hem arribat que numerador i denominador són independents i en particular, en afirmar que es tracta d'una F)

Assignatura: **ESTADÍSTICA**

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021

Teoria (continuació del 2)

$$Z \cdot (C) K_3 \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = K_3 \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{n \hat{\sigma}^2} \cdot A \text{ dalt trinom una}$$

normal centrada (però no estàndarditzada!) ^{el quadrat} V_i a baix, ~~una~~ qualsevol una χ^2_n .
Però de fet, com que $\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)^2 \sim \chi^2_{1,1}$ i $\frac{n \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n,1}$ el quocient

$$\frac{(\bar{X} - \mu)^2 \cdot \frac{n}{\sigma^2}}{n \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{1,n,1} \text{ i per tant, en podem} \\ K_3 = n^2, \text{ alhora } n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{n \hat{\sigma}^2} = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{1,n}.$$

3.

(a) la probabilitat que en un dia hi hagi alguna incidència és
una Poisson de suport en $\mathbb{N}$ estàndard.

$$P_n(X \geq 1) = 1 - P_n(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} = C(\lambda). \text{ Pel principi}$$

de substitució dels estimadors mésim-versemblants, podem

calcular com un estimador per λ , i alhora l'estimador per $C(\lambda)$

és $C(\hat{\lambda})$. la versemblança dels nostres $\Sigma_{1,1} \sim \Sigma_n$ és

0.75

$$L(\lambda; \Sigma) = \prod_{i=1}^n f(\Sigma_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-m\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

la log-versemblança $\hat{\lambda}_i$, per tant,

$$\ell(\lambda; \tilde{X}) = -m\lambda + \left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \log \lambda - \sum_{i=1}^m \log(x_i!)$$

Si calculem l'error i l'igualem a zero,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ell(\lambda; \tilde{X}) = -m + \frac{m\bar{X}}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{m\bar{X}}{\lambda} = m \Leftrightarrow \frac{\bar{X}}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \bar{X}.$$

Per tant, $\hat{\lambda}_{ML} = \bar{X}$ i $\psi(\lambda)_{ML} = \psi(\hat{\lambda}_{ML}) = 1 - e^{-\bar{X}}$ és l'estimador
màxim versemblant de $P(X \geq 1)$.

(b) La informació de Fisher ~~est~~ corresponent al paràmetre λ_{ML} és
la informació observada en $\hat{\lambda}_{ML}$ és a dir,

$$-\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ell(\lambda; \tilde{X}) \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}_{ML}} = \frac{m\bar{X}}{\lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}_{ML}} = \frac{m\bar{X}}{\bar{X}^2} = \frac{m}{\bar{X}}.$$

$I_n(\lambda)$?

$$I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$I_n(p) = \frac{g'(\lambda)}{I_n(\lambda)}$$

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021

Teoria. 4.

(a) Quan diu "dos sigma" es refereix a quel·li importància que ~~representa~~ la població està distribuïda normalment, l'interval de confiança del 95,5% correspon a $\mu \pm 2\sigma$, on μ és la mitjana i la desviació típica de la població. ✓

(b) El car de màxima indeterminació es refereix a l'aproximació que podem fer de l'estadística que busquem (en aquest cas, percentatge de penes que componen el producte) que dona més marge d'error, és a dir, el car en que la probabilitat que doni per nota i per sobre són màximes. ✓

(c)

0,5

X

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2024

Problema 1. Si $\Sigma_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, aleshores ε_i són que, com que $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, aleshores $\Sigma_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$. Per tant, la distribució conjunta de $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ és el producte de les distribucions de cada Σ_i , per ser les ε_i independents. Per tant, és

$$f(\underline{\Sigma}; \beta, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^m} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{y_i^2 - 2\beta x_i y_i + \beta^2 x_i^2}{\sigma^2}\right).$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (y_i^2 - 2\beta x_i y_i + \beta^2 x_i^2)\right)$$

1. Volem trobar don estadístiques suficients, un per β i un per σ^2 , tal que $T(\underline{\Sigma}) = (T_\beta(\underline{\Sigma}), T_{\sigma^2}(\underline{\Sigma}))$ sigui suficient. En a dir, volem una estadística amb distribució conjunta tal que $\frac{f(\underline{\Sigma}; \beta, \sigma^2)}{f(T(\underline{\Sigma}); \beta, \sigma^2)}$ no depengui de $\theta = (\beta, \sigma^2)$.

Per exemple, per β podem ~~trobar~~ factoritzar $f(\underline{\Sigma}; \beta, \sigma^2)$ com $g(T_\beta(\underline{\Sigma}) | \beta, \sigma^2) \cdot h(\underline{\Sigma}; \sigma^2)$, amb (donem)

$$g(\mathbf{T}(\mathbf{X}) | \beta, \sigma^2) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (-2\beta x_i + \beta^2 x_i^2)\right) f_{\beta}(\mathbf{X}) = \frac{\beta^m \sum x_i^2 - 2\beta \sum x_i y_i}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (-2\beta \sum x_i + \beta^2 \sum x_i^2)\right) \cdot \frac{\beta^m \sum x_i^2 - 2\beta \sum x_i y_i}{2\sigma^2}$$

$$h(\mathbf{X} | \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right)$$

$$g(\mathbf{T}(\mathbf{X}) | \beta, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right) \cdot \frac{\beta^m \sum x_i^2 - 2\beta \sum x_i y_i}{2\sigma^2}$$

(no constant de que
falta en estadística sufficient
per σ^2 , però no heu pogut
trobar el cap i)

2. Per trobar l'extremador mínim-variant de β , fem la funció de versemblança β :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log l(\mathbf{X} | \beta, \sigma^2) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{m}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (\sum_{i=1}^m (x_i - \beta x_i)^2)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (\sum_{i=1}^m (x_i^2 + \beta^2 x_i^2 - 2x_i \beta x_i))\right) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(2\beta \sum_{i=1}^m x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m x_i y_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2}$$

3. β_{ML} té una distribució normal, ja que és quocient de $\sum x_i y_i$ i $\sum x_i^2$ amb una distribució normal. De fet, té una esperança $\mu = \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot E(y_i)}{\sum_{i=1}^m x_i^2} = \beta$, i variància (seguint full)

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021.

Problema 1. apartat 3. (continuació)

$$E[\hat{\beta}_{ML}^2] = E\left[\frac{(\sum x_i y_i)^2}{(\sum x_i^2)^2}\right] = \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i x_j y_j\right] =$$

$$= \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[y_i y_j] =$$

$$= \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[x_i y_i x_j y_j] = \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[x_i^2 x_j^2] = \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 x_j^2 = \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} (\sum x_i^2)^2 = 1$$

allò

$$= \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[\beta^2 x_i x_j + \beta x_i \varepsilon_j + \beta x_j \varepsilon_i + \varepsilon_i \varepsilon_j]$$

$$= \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 x_j^2 \beta^2 + \beta x_i^2 x_j \cdot 0 + \beta x_j^2 x_i \cdot 0 + \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \sigma^2)$$

$$= \beta^2 + \frac{\sum x_i^2 x_j^2 \beta^2}{(\sum x_i^2)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\beta}_{ML}) = \sigma^2 \frac{(\sum x_i^2)}{(\sum x_i^2)^2}$$

$$\hat{\beta}_{ML} \sim N\left(\beta_1, \sigma^2 \frac{(\sum x_i^2)}{(\sum x_i^2)^2}\right)$$

" β_1

-0.25

4. β_2 es normal de mitjana $E[\beta_2] = \frac{\sum E[Y_i]}{n\bar{x}} = \frac{\beta \sum x_i}{n\bar{x}} = \beta \frac{n\bar{x}}{n\bar{x}} = \beta_1$

invariancia $E[\hat{\beta}_2] = \beta^2$ i el primer terme és

$$E[\hat{\beta}_2] = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[Y_i Y_j]}{n^2 \bar{x}^2} = \frac{\sum \sum E[\beta^2 x_i x_j + \beta x_i \varepsilon_j + \beta x_j \varepsilon_i + \varepsilon_i \varepsilon_j]}{n^2 \bar{x}^2} =$$

$$= \beta^2 + \frac{\sigma^2}{(n\bar{x})^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{(n\bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_2 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{(n\bar{x})^2}\right)$$

• $\hat{\beta}_3$ es normal també, d'esperança

$$E\left[\frac{1}{n} \sum \frac{Y_i}{x_i}\right] = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x_i} E[Y_i] = \frac{1}{n} \sum \beta = \beta_1$$

i de variància

$$E[\hat{\beta}_3] = E\left[\frac{1}{n^2} \sum \sum \frac{Y_i Y_j}{x_i x_j}\right] = \frac{1}{n^2} \sum \sum \frac{E[Y_i Y_j]}{x_i x_j} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum \sum \frac{\beta^2 x_i x_j + \sigma^2}{x_i x_j} =$$

$$= \frac{1}{n^2} (n^2 \beta^2) + \left(\sum \frac{\sigma^2}{x_i}\right)^2 = \beta^2 + \left(\sum \frac{\sigma^2}{x_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\beta}_3) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{x_i}\right)^2$$

$$\hat{\beta}_3 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{(n\bar{x})^2}\right)$$

-0.2

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021

5. Per exemple, podem fer servir

$$\hat{\beta}_4 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}} = e^{\frac{1}{n} \sum (\log Y_i - \log X_i)}$$

~~Estimador de la funció de versemblança~~

Si considerem $Z_i = \log Y_i$, i $\alpha_i = \log X_i$, donem

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n} \sum (Z_i - \alpha_i)\right] &= \frac{1}{n} \left(\sum E[Z_i] - \bar{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum \log p X_i \right) - \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum (\log \beta + \log X_i - \log X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum \log \beta = \log \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E[\hat{\beta}_4] = \exp(\log \beta) = \beta.$$

6. Envol·lim l'estimador màxim-versemblant, ja que sabem que té propietat asintòtica molt bona, com ser eficient i consistent.

~~Estimador de la funció de versemblança~~
No es pot servir per a l'estimació de la funció de versemblança
No es pot servir per a l'estimació de la funció de versemblança
No es pot servir per a l'estimació de la funció de versemblança
No es pot servir per a l'estimació de la funció de versemblança



-0.2

$$E(\log Y_i) \neq \log E(Y_i)$$

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021

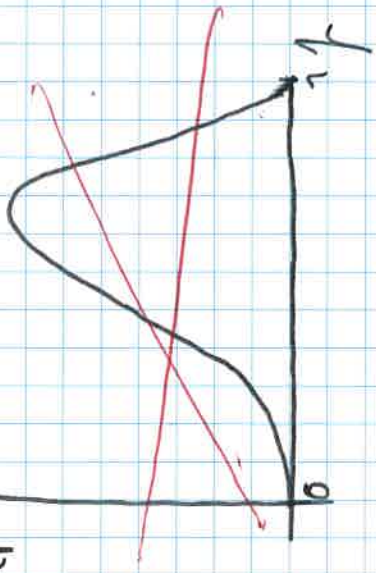
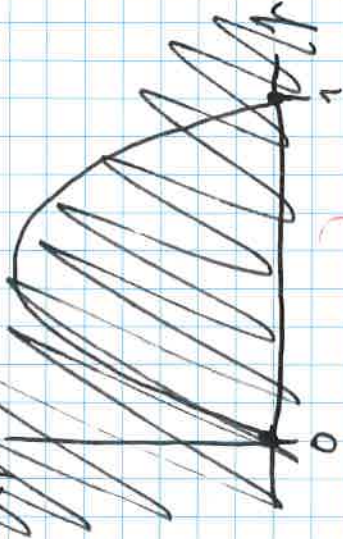
Problem 2.

1. Aquest experiment ~~es~~ es pot modelar amb una distribució binomial, de paràmetres $n=10$ i p desconeguda, on p és la probabilitat que senti la cara superior de la moneda negra.
2. La funció de versemblança de l'experiment per $Y=7$ és

$$L(p; Y=7) = f(Y=7; p) = \binom{10}{7} p^7 (1-p)^3, \quad p \in [0,1].$$

El dibuix aproximat de la funció de versemblança és

$$L(p; Y=7)$$



3. Tria la Beta (α, β) a priori per la p , ja que té suport en $(0,1)$.
Aleshores, la posteriori seria $\Pi(p|Y=7) \propto f(Y=7|p) \cdot \Pi(p)$,
on és α

$$f(Y=7|p) = L(p; Y=7) = \binom{10}{7} p^7 (1-p)^3$$

$$\Pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}$$

$$\Rightarrow f(Y=7|p) \cdot \Pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \binom{10}{7} p^{\alpha+7-1} (1-p)^{\beta+3-1}$$

És a dir, com que una beta i una binomial són conjugades, la distribució de p a posteriori és una beta, $\text{Beta}(\alpha + 7, \beta + 3)$.

Per triar α i β , busquem valor tal que la mitjana de la distribució sigui el màxim de la distribució a priori: és a dir, primer calculem l'índex màxim de $p^7(1-p)^3$ en $(0,1)$:

$$L'(p; Y=7) = 7p^6(1-p)^3 - 3p^7(1-p)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7p^6(1-p)^3 = 3p^7(1-p)^2$$

$$\Leftrightarrow 7(1-p) = 3p$$

$$\Leftrightarrow 7 - 7p = 3p \Leftrightarrow p = \frac{7}{10}$$

$$\rightarrow E[\text{Beta}(\alpha, \beta)] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \sim \alpha = 7, \beta = 3$$

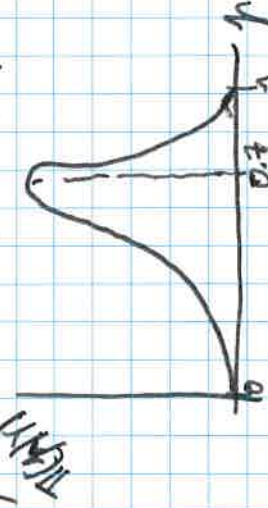
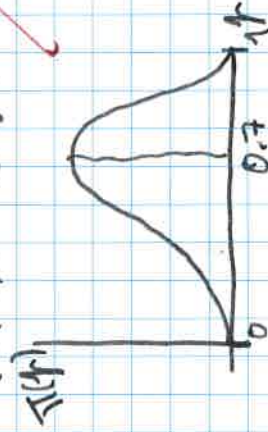
Aleshores, $\pi(p) = \text{Beta}(7, 3)$ i $\pi(p|Y=7) = \text{Beta}(14, 6)$

Per triar α i β , ajustarem de seu valor per tal que ~~l'esperança de~~ l'esperança de $\pi(p)$ sigui el màxim de $L(p; Y=7) = \binom{10}{7} p^7(1-p)^3$. Aquest s'analitza quan

$$L'(p; Y=7) = 0 \Leftrightarrow 7p^6(1-p)^3 - 3p^7(1-p)^2 = 0 \Leftrightarrow 7(1-p) - 3p = 0$$

$$\Leftrightarrow 7 - 10p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{7}{10}$$

Per tant, agafem $\alpha = 7, \beta = 3$, i la distribució a priori de p , $\pi(p)$ és una $\text{Beta}(7, 3)$, i la distribució a posteriori és $\text{Beta}(14, 6)$. Aproximadament són



Es fan i s'ajusten al màxim de la distribució a priori.

ESTADÍSTICA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 26/03/2021

Problema 3. $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n \sim f(x|\theta) = \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4}, x > 0, \theta > 0.$

$$E[X+\theta] = \int_0^{+\infty} (x+\theta) \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^3} dx = \frac{3\theta^3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2}{(x+\theta)^3} dx$$

"
 $E[X] + \theta$

$$= \frac{3\theta^3}{2} \left[\frac{-1}{(x+\theta)^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{3\theta^3}{2} \left(0 + \frac{1}{\theta^2} \right) = \frac{3\theta}{2} \Rightarrow E[X] = \frac{\theta}{2}$$

$$E[(X+\theta)^2] = \int_0^{+\infty} (x+\theta)^2 \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^2} dx = 3\theta^3 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\theta)^2} dx =$$

"
 $E[X^2] + 2\theta E[X] + \theta^2$

$$= 3\theta^3 \left[\frac{-1}{x+\theta} \right]_0^{+\infty} = 3\theta^3 \left(0 + \frac{1}{\theta} \right) = 3\theta^2 \Rightarrow E[X^2] = \theta^2$$

1. Utilitzant els moments desparats que hem calculat just abans, podem calcular $\theta = \frac{E[X^2]}{2E[X]}$, i per tant l'estimador pel mètode dels moments

utilitzant els moments desparats i segon ordre ~~desparats~~ és:

$$\hat{\theta}_{MM} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}{2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2 \sum_{i=1}^n X_i}$$

$$\hat{\theta}_{MM} = \frac{\sum X_i^2}{2 \sum X_i}$$

$$-0.5$$

2. La variància de $\hat{\theta}_m$ és $E[(\hat{\theta}_m - E[\hat{\theta}_m])^2] = E[\hat{\theta}_m^2] - E[\hat{\theta}_m]^2$.

~~$E[\hat{\theta}_m^2] = E[\hat{\theta}_m]^2$~~

~~$E[\hat{\theta}_m^2] = E[\hat{\theta}_m]^2$~~

Asimptòticament, $\hat{\theta}_m$ és el quocient entre una χ_m^2 i una normal, pel teorema central del límit.

3. L'estimador màxim-versemblant és el que anul·la l'error,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log \left(\prod_{i=1}^n \frac{3\theta^3}{(x_i + \theta)^4} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\log(3\theta^3) - 4 \sum_{i=1}^n \log(x_i + \theta) \right)$$

$$= \frac{n \cdot 3\theta^2}{3\theta^3} - 4 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \theta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3n}{\theta} - 4 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{3n}{\theta} = 4 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \theta}$$

La seva distribució asimptòtica és $N\left(\theta, \frac{1}{I_n(\theta)}\right)$ on

$$I_n(\theta) = E_x \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x; \theta) \right] = E_x \left[\frac{3n}{\theta^2} - 4 \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i + \theta)^2} \right] =$$

$$= \frac{3n}{\theta^2} - 4 \prod_{i=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{3\theta^3}{(x_i + \theta)^2} \frac{dx}{(x + \theta)^4} =$$

4) (-0.5)

0.2