

TEORIA.

1.

a) Com que sabem que una X_K^Z és la suma de K variables $N(0,1)$ al quadrat, podem obtenir n observacions d'una X_K^Z fent

[observacions $\leftarrow$ NULL
for i in $1:n$ {

$obs_i \leftarrow \text{sum}(\text{rnorm}(K)^2)$

 observacions $\leftarrow c(\text{observacions}, obs_i)$

}

b) Com que sabem que una t_K és ~~una~~ el quocient entre una $N(0,1)$ i

l'arrel quadrada d'una X_K^Z , podem obtenir n observacions d'una t_K fent el següent: anemem n $X_K^Z(m)$ a la força que retornem observacions

d'una X_K^Z , i llavors, el següent procediment:

[observacions $\leftarrow$ NULL

 aux.ching $\leftarrow$ n $X_K^Z(m)$

 for i in $1:n$ {

 aux.norm $\leftarrow$ $\text{rnorm}(1)$; $obs_i \leftarrow \text{aux.norm} / (\text{aux.ching}[i]/K)^{1/2}$

 observacions $\leftarrow c(\text{observacions}, obs_i)$

}

em dona una mostra d' n observacions d'una t_K .

c) Com que sabem que el quocient entre una $\chi^2_{k_1}$ i una $\chi^2_{k_2}$ és una F_{k_1, k_2} procedim de la següent manera: anomenem $n\chi^2_k(m)$ a la funció que retorna m observacions d'una χ^2_k i obtenim, per el següent:

$observacions \leftarrow NULL$
 $aux \cdot chiq. k_1 \leftarrow n\chi^2_{k_1}(m)$
 $aux \cdot chiq. k_2 \leftarrow n\chi^2_{k_2}(m)$
 per i in $1:m$ {
 $obs \leftarrow (aux \cdot chiq. k_1[i]/k_1) / (aux \cdot chiq. k_2[i]/k_2)$
 $observacions \leftarrow c(observacions, obs)$
 }

$$3. \hat{\lambda} = k \sum_{i=1}^m x_i$$

a) Calculem $E[\hat{\lambda}]$:

$$E[\hat{\lambda}] = E\left[k \cdot \sum_{i=1}^m x_i\right] \stackrel{\text{linealitat}}{=} k \cdot \sum_{i=1}^m E[x_i] \stackrel{\text{m.o.v. de Poisson}}{=} k \cdot \sum_{i=1}^m \lambda = \lambda k \sum_{i=1}^m 1$$

Per tant, per veure que $\sum_{i=1}^m x_i = \frac{m(m+1)}{2} = \binom{m+1}{2}$, indiquem que $\hat{\lambda}$ no tingui bias hem de fer que $\lambda k \binom{m+1}{2} = E[\hat{\lambda}] = \lambda \iff k = \frac{1}{\binom{m+1}{2}} = \frac{2}{m(m+1)}$.

Per tant, tindrem $\hat{\lambda} = \frac{2}{m(m+1)} \sum_{i=1}^m x_i$ ✓

EST

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 31/05/2014

b) Calculem primer la fct de Cramer-Rao. Sabem que ho podem fer per veure la Variança (λ) de la família exponencial.

$$\begin{aligned} \bullet I_{\tilde{\mathbf{X}}_n}(\lambda) &= E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\tilde{\mathbf{X}}_n; \lambda) \right)^2 \right] \stackrel{\text{m.o.v.}}{=} E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) \right)^2 \right] \\ &= E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(x_i; \lambda) \right)^2 \right] \\ \bullet f(x_i; \lambda) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \Rightarrow \log f(x_i; \lambda) = -\lambda + x \log \lambda - \sum_{i=1}^x \log(i) \\ &= -\lambda + x \log \lambda - \log(x!) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_{\tilde{\mathbf{X}}_n}(\lambda) = E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \left(-1 + \frac{x_i}{\lambda} \right) \right)^2 \right] =$$

$$\begin{aligned} &= E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right)^2 + \sum_{i \neq j} \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right) \left(\frac{x_j}{\lambda} - 1 \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\frac{(x_i - \lambda)^2}{\lambda^2} \right] + \sum_{i \neq j} \frac{1}{\lambda^2} E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} [(x_i - \lambda)(x_j - \lambda)] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^2} E_{\tilde{\mathbf{X}}_n} \left[\cancel{(x_i - \lambda)^2} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^2} \lambda = \frac{n}{\lambda} \\ &\stackrel{\text{m.o.v.}}{\Rightarrow} \text{incondade} \quad \text{Var}(\Sigma_i) = \lambda \quad (\text{m.o.v. de } \text{Poi}(\lambda)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Sabem per tant que el VV estimador no biaixat de λ a to que

$$\text{Var}(V(\tilde{x})) \geq \frac{1}{I_{\tilde{x}}(\lambda)} = \frac{1}{n\lambda} = \frac{\lambda^2}{n}$$

$$E[X] = \lambda$$

Per tant, podem veure la variància del nostre estimador, $\hat{\lambda}$: $\text{Var}(\hat{\lambda}) =$

$$= E_{\tilde{x}}[(\hat{\lambda} - \lambda)^2] = E_{\tilde{x}}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i X_i - \lambda\right)^2\right] =$$

$$= E_{\tilde{x}}\left[\frac{4}{n^2(n+1)^2} \left(\sum_{i=1}^n i X_i\right)^2 - \frac{4}{n(n+1)} \lambda \sum_{i=1}^n i X_i + \lambda^2\right] =$$

m.a.s. $\Rightarrow$ irrelevants

$$= -2\lambda^2 + \lambda^2 + E_{\tilde{x}}\left[\frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 X_i^2 + \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i \neq j} i j X_i X_j\right] =$$

$$= \cancel{-2\lambda^2} - \lambda^2 + \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 E[X_i^2] = \left[\text{per saber que } E[X_i^2] = \lambda + \lambda^2 \right]$$

$$= -\lambda^2 + \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \cdot (\lambda + \lambda^2) = -\lambda^2 + \frac{4}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (\lambda + \lambda^2)$$

$$= \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} \lambda = \left(1 - \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\right) \lambda^2 = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} \lambda + \left(\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} - 1\right) \lambda^2$$

En o dir, no és eficient, ja que no aconsegueix la fita de Cramér-Rao.

0,75

EST

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 31/05/2021

4.

a) Es tracta de dues mostres aparellades. Per tant, volem ~~decidir si el~~ tractament ha tingut algun efecte. L'estadístic de contrast per aquest test és

$$T = \frac{\bar{D} - \delta}{\frac{SD}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \text{ sota } H_0, \text{ que en diu que } \begin{cases} H_0: \delta = \mu_S - \mu_T \leq 5 \\ H_1: \delta = \mu_S - \mu_T > 5 \end{cases}$$

$\bar{D}$ és la mitjana del vector $D = \{D_i = X_i - Y_i\}$, i $SD^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i - \bar{X} + \bar{Y})^2$.

b.) El fet que $\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{X-Y}} = 1$ en "confirma" que no mostres aparellades. llavors, l'estadístic amb aquesta dada és $T = \frac{5.27 - 5}{0.88/\sqrt{15}} = \frac{0.27}{0.88/\sqrt{15}} = 1.18830$. Amb un coeficient de confiança de 0.95, $t_{14,0.95} = 1.761$. Com que en la sortida $T \leq t_{14,0.95}$ ~~podem acceptar~~ ~~no~~ rebutgem H_0 i $\delta = \mu_S - \mu_T > 5$.

1

EST

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 31/05/2021

Problema 1.

a) La funció de versemblança és:

$$\begin{aligned} L(\theta; \Sigma) &= L(\theta; \Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = \prod_{i=1}^n P_{\theta}(Y_i = x_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{Y_i-1}{n-1} \theta^{n-1} (1-\theta)^{Y_i-n} = \\ &= \theta^{n \cdot n} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n (Y_i-n)} \prod_{i=1}^n \binom{Y_i-1}{n-1}. \end{aligned}$$

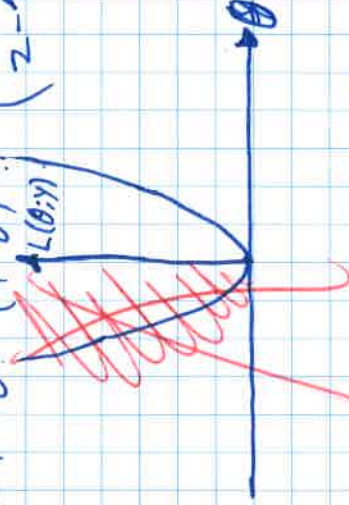
La log-versemblança resultant és

$$\ell(\theta; \Sigma) = n \ln \log \theta + \left(\sum_{i=1}^n (Y_i - n) \right) \log(1-\theta) + \sum_{i=1}^n \log \binom{Y_i-1}{n-1}.$$

Per $n=2, n=1, Y=2$, la funció de versemblança és

$$L(\theta; \Sigma) = \theta^2 (1-\theta)^{2-2} \binom{2-1}{2-1} = \theta^2$$

$\Rightarrow$



b) Fent servir $E_{\theta}[\Sigma] = \frac{n}{\theta}$, podem veure que substituint el moment tècnic per el moment ~~total~~ ~~total~~, tenim $\bar{Y} = \frac{n}{\theta} \rightarrow \hat{\theta}_{ML}^1 = \frac{n}{\bar{Y}}$.

(Conservem els estimadors $\hat{\theta}_{ML}^i, i=1,2,3$)

Si on a $V_{\theta}(Y) = \frac{\pi(1-\theta)}{\theta^2}$, substitution itérative:

$$S^2 = \frac{\pi(1-\hat{\theta}_{MM}^2)}{(\hat{\theta}_{MM}^2)^2} \Leftrightarrow S^2(\hat{\theta}_{MM}^2)^2 + \pi\hat{\theta}_{MM}^2 - \pi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_{MM}^2 = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4\pi S^2}}{2S^2}$$

$$\hat{\theta}_{MM}^2 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 4\pi S^2}}{2S^2}$$

Comme que $\theta \in (0,1)$, prenons

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

Puis on a $E_{\theta}[Y^2]$, puis on l'a de calculer: sachant que

$$V_{\theta}(Y) = E_{\theta}[Y^2] - E_{\theta}[Y]^2 \Rightarrow E_{\theta}[Y^2] = \frac{\pi(1-\theta)}{\theta^2} + \frac{\pi^2}{\theta^2} =$$

$$\frac{\pi^2 + \pi(1-\theta)}{\theta^2}$$

Alors,

l'espérance d'ailleurs $\hat{\theta}_{MM}^3$ équivaut à moment ~~central~~ de second ordre:

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = \frac{\pi^2 + \pi(1-\theta)}{\theta^2} \leadsto \theta^2 \sum_{i=1}^n Y_i^2 + \pi\theta - \pi^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_{MM}^3 = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4(\sum_{i=1}^n Y_i^2)(\pi^2 + \pi)}}{2 \sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

Comme que $\theta \in (0,1)$,

$$\hat{\theta}_{MM}^3 = \frac{-\pi + \sqrt{(1+4 \sum_{i=1}^n Y_i^2) \pi^2 + 4\pi \sum_{i=1}^n Y_i^2}}{2 \sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

0.2

EST

Assignatura:

Estudiant/a

Data:

31/05/2021

 En donar $n=2$, $n=2$, $\underline{Y} = \{2, 3\}$, tenim:

$$\rightarrow \hat{\theta}_{MM}^1 = \frac{\pi}{\bar{Y}} = \frac{2}{\frac{2+3}{2}} = \frac{4}{5} \approx 0.8$$

$$\rightarrow \hat{\theta}_{MM}^2 = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4n\bar{Y}^2}}{2S_Y^2} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 8 \cdot (2 - \frac{5}{2})^2 + (3 - \frac{5}{2})^2}}{2 \cdot ((2 - \frac{5}{2})^2 + (3 - \frac{5}{2})^2)}$$

$$= \frac{-2 + \sqrt{4 + 8 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})}}{2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})}$$

$$= -2 + \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \text{max}$$

$$-2 = 2(\sqrt{2}-1) \in (0,1)$$

 ss
0.8284...

$$\rightarrow \hat{\theta}_{MM}^3 = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4(\sum_{i=1}^n y_i^2)(n^2 + n)}}{2 \sum_{i=1}^n y_i^2 / n} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4(4+9)(4+2)}}{2 \cdot (4+9)}$$

$$= \frac{-2 + \sqrt{4 + 4 \cdot 13 \cdot 6}}{26} = \frac{-2 + \sqrt{4+312}}{26} = \frac{-1 + \sqrt{79}}{13} \approx 0.60678...$$

 c) Descriem la log-versemblança respecte θ , i obtenim la funció score,

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta; \underline{X}) = \frac{n\pi}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \pi)}{1-\theta} = 0 \Leftrightarrow n\pi(1-\theta) - \theta \sum_{i=1}^n (y_i - \pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow n\pi - n\pi\theta - n\bar{Y}\theta = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{n\pi}{n\pi + n\bar{Y}} = \frac{\pi}{\pi + \bar{Y}}$$

 La seva distribució asimptòtica és una normal de mitjana θ ; de variància

~~la~~ σ^2 de Graney-Poc, que procedim a calcular:

l'ínica de la

$$E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta; Y) \right] = E \left[+\frac{m\pi}{\theta^2} + \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{(1-\theta)^2} \right] = \frac{m\pi}{\theta^2} + \frac{\frac{m\pi}{\theta}}{(1-\theta)^2} =$$

$$= \frac{m\pi(1-\theta)^2 + m\pi\theta}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{m\pi(1-\theta)^2 + \theta}{\theta^2(1-\theta)^2}$$

~~0~~

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} \xrightarrow{D} N \left(\theta, \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{m\pi(1-\theta+\theta^2)} \right)$$

d) L'intervall de confiança de nivell α per θ veia

~~0~~

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \hat{\theta}_{MV} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}_{MV}(1-\hat{\theta}_{MV})}{\sqrt{m\pi(1-\hat{\theta}_{MV}+\hat{\theta}_{MV}^2)}}$$

~~Per $H_0: \theta \geq \frac{1}{2}$, per $H_1: \theta < \frac{1}{2}$~~ Per per-la UMP, per el test de signe de Pearson i la seva generalització

$$C = \left\{ Y: \frac{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y)}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y)} \leq A_\alpha \right\}$$

amb A_α tal que $P_\pi(X \in C | H_0) \leq \alpha$

~~• $\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y)$~~

$$L(\theta; Y) = L(\hat{\theta}_{MV}; Y) = L\left(\frac{\pi}{\pi+Y}; Y\right) = \left(\frac{\pi}{\pi+Y}\right)^m \prod_{i=1}^m \left(\frac{Y_i}{\pi+Y}\right)^{Y_i}$$

$$C = \left\{ Y: \frac{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y)}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Y)} \leq A_\alpha \right\}$$

EST

Assignatura:

Estudiant/a

Data: 31/05/2021

e) -0.5
8) -0.5

e) $H_0: \theta \geq \frac{1}{2}$. Per fer un test UMP per servir Heyman Perovsk per
 $H_1: \theta < \frac{1}{2}$ *Què és el comportament*

g) $\pi = 1, \Sigma_i$ amb f.d. $f(y; \theta) = \binom{y-1}{1-1} \theta^1 (1-\theta)^{y-1}$.

L'estimador $\hat{\theta}_{MV}$ resultant $\hat{\theta}_{MV} = \frac{\pi}{\pi + y} = \frac{1}{1 + y}$, i *si no es pot*

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$, llavors $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{1 + \bar{y}} = \frac{1}{1 + \frac{360}{127}} = \frac{1}{1 + \frac{487}{127}} = \frac{127}{127 + 487} = \frac{127}{614} \approx 0.2068$

L'interval de confiança aproximat de coeficient de confiança 0.95 és

$$\theta \in \left[0.26078 \pm 0.975 \sqrt{\frac{\hat{\theta}_{MV} (1 - \hat{\theta}_{MV})}{n \hat{\theta}_{MV} (1 - \hat{\theta}_{MV})^2}} \right] = \left[0.26078 \pm 1.96 \cdot \frac{0.19277}{10.12510} \right]$$

$$= \left[0.26078 \pm 1.96 \cdot 0.0190392 \right] = \left[0.26078 \pm 0.0373168 \right]$$

$$\approx [0.22346, 0.298097].$$

h) Voldria fer un test de bondat d'ajust de la mostra a la distribució conjunta.

Aquest test es fa de la manera següent: $\begin{cases} H_0: X \sim F_0 \\ H_1: X \not\sim F_0 \end{cases}$

1. Es porten R en intervals disjunts I_k en l'observació. Aquesta partició
es fa tenint en compte que $(N = \# \{I_i\}) N \cdot P_k (X \in I_k | H_0) = n_k$ mitjançant tot d'un
ordre creixent.

2. Llavors, es calcula $\chi^2 = \sum_{k=1}^R \frac{(n_k - n p_k)^2}{n p_k}$ les proporcions observades,

$$p_k = \# \{Y \in I_k : Y \in I_k\} / N.$$

3. Ara calculem l'estadística $\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(p_i - p_i^0)^2}{p_i}$ $\sim \chi^2_{K-p-1}$ on $p=1$
 perquè hem hagut d'estimar un paràmetre ($\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n+1}$). ✓

4. En última, veiem que a la ~~probabilitat~~ probabilitat d'observar un χ^2 més extrem que el que hem calculat; és a dir, això és calcular el p-valor de l' χ^2 calculat suposant que requereix aquest una χ^2_{K-p-1} . ✓

4. Si el p-valor en sort < 0.05 , podem rebutjar $H_0: Y \sim F_\theta$ amb un 95% de confiança. En cas contrari, hem de acceptar que $Y \sim F_\theta$. ✓

(P1) a) Tént me val! (-0.1)

b) ✓

(P2) a) Perquè no tnen model? (-0.4)
 b) Entengueu subinaccions i efecte insectes! (-0.5)