UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

$4+5'5+(1'5) = 10$

Full 1 de 6

QUALIFICACIÓ 4

Assignatura:

Estudiant/a [redacted]

Data:

Problema 1 Teoria.

(a). Un estadístic és robust en presencia d'atípics si aquest no es veu afectat o és afectat molt poc pels valors atípics (outliers). És a dir, que si apareix un valor equivocat o exagerat, no modifica el seu valor gairebé.

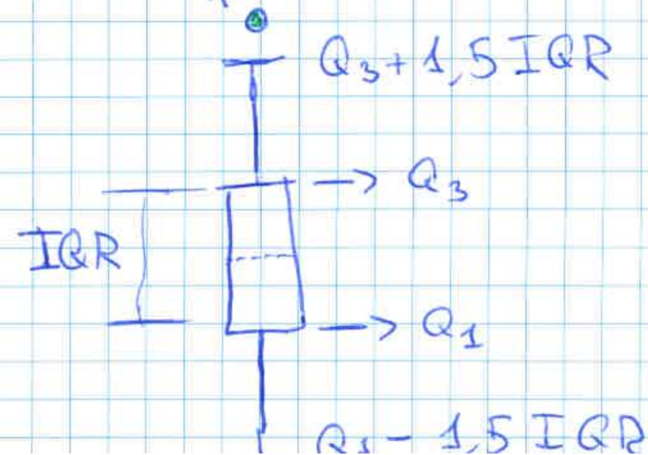
1

(b) Són robustos en presencia d'atípics:

[Mediana, Mitjana retallada, IQR, Q1, Percentil 95]

(c) Quan representem un boxplot, recordem que fem la següent representació

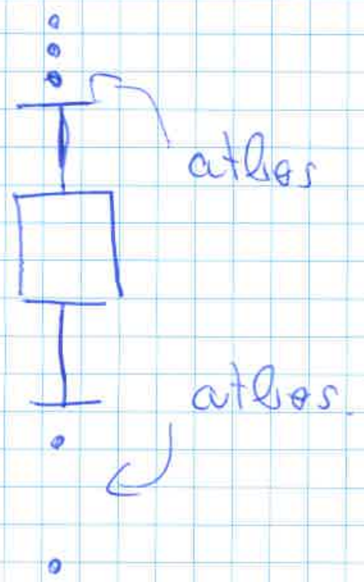
Dividim com en tres parts.
Una part central entre Q_1 i Q_3 on predomina la mostra



Una part simbolitzada en $\top$ on la mostra és més feble.

$\perp$

i a partir de les bores, són els atlers o valors atípics i el simbolitzem amb punts ja que no acostuma haver-hi masses i no ens podem fer una idea de lo precís que és la mostra.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 2 de 6

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant: [redacted]

Data:

2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X_1, \dots X_n$ una m.a.s.

(a) Sabem que $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.

i sabem que com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, llavors

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$. Per tant,

1

$$\left[K_1 \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}} = K_1 \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{(n-1)S^2}} = \frac{K_1}{\sqrt{n-1}} \frac{\bar{X}-\mu}{S} \right.$$

Per tant, volem que $\dfrac{K_1}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{n} \Rightarrow \left[\cancel{K_1 = \sqrt{n}\sqrt{n-1}} \right]$

$$\Rightarrow = \left. \sqrt{n} \frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1} \right]$$

$$\left[K_1 = \sqrt{n(n-1)} \right]$$

(b) $$K_2 \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} = K_2 \cdot \frac{(n-1)\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}{\sigma^2}}{n\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}{\sigma^2}} =$$

$$= K_2 \frac{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}{\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

Sabem que $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

Volem expressar-ho com una F de Snedecor, és a dir, el següent. $F_{v_1,v_2} = \dfrac{\chi^2_{v_1}/v_1}{\chi^2_{v_2}/v_2}$.

Per tant.

$$\frac{\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)\dfrac{1}{(n-1)}}{\left(\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)\dfrac{1}{n}} \cancel{\frac{n-1}{n}} \sim F_{n-1,n}$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{K_2 = \dfrac{n}{n-1}}$ $\boxed{\text{i seguirà una } F_{n-1,n}}$

Assignatura: [redacted]
Estudiant/a: [redacted]
Data:

(c) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\bar{X} - \mu \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} \sim \chi^2_1$

$\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} = n \cdot \frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$

i en el denominador.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 = n\hat{\sigma}^2$$

$\Rightarrow \left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n\right]$

Volem tenir un F de Snedecor de 1 i n. Cal afegir un n^2!!

$\boxed{K_3 = n^2}$

Per tant.

$$\left[K_3 \frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} = K_3 \frac{\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}}{\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \overset{?}{=} \frac{n\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}/1}{\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}/n} \sim F_{1,n}\right]$$

$x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

3) $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\quad P(X_i = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ $\quad \lambda \geq 0$

$X_1, \dots X_n$ número d'incidències en n dies.

Volem la prob de que hi hagi alguna incidència en un dia.

Es a dir, $\left[P(X_i > 0) = 1 - P(X_i = 0) \right.$

$$\left. = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} = 1 - e^{-\lambda} \right]$$

Per tant, volem estimar el valor $1 - e^{-\lambda}$.

Fem servir la propietat d'invariància del ML.

és a dir $\widehat{P(X_i > 0)}_{ML} = \widehat{1 - e^{-\lambda}}_{ML} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{ML}}$.

Anem a buscar $\hat{\lambda}_{ML}$.

$$\left[P(\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} \right.$$

$$\left. = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \right]$$

$$\Rightarrow L(\lambda \mid \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\Rightarrow \ell(\lambda \mid \underline{x} = \underline{x}) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \lambda + \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$$

Busqem el màxim $\Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0$.

$$\Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} = 0 \Rightarrow \left[\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}\right]$$

¿És màxim?

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ és l'únic màxim del interval.

1

$$\Rightarrow \left[\hat{\lambda}_{ML} = \bar{x}\right]$$

Per tant $\left[\hat{P}_{ML} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{ML}} = 1 - e^{-\bar{x}}\right]$

(b) Anem a fer la propietat.

$$I_n^*(f(\lambda)) = \frac{I_n(\lambda)}{f'(\lambda)^2}$$

Per això, calculem $I(\lambda)$

$$I_n(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2}\right] = +\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}\right] = \frac{1}{\lambda^2} n\,\mathbb{E}[x] = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \boxed{\frac{n}{\lambda}}$$

sabem que

$$f(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$$

$$f'(\lambda) = e^{-\lambda} \qquad (f'(\lambda))^2 = e^{-2\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n(P(x_i>0)) = I_n(1-e^{-\lambda}) = \frac{n}{\lambda e^{-2\lambda}}}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 5 de

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

4. L'estudi és modela com una distribució $B(p)$ on p és la probabilitat de que una persona compri el producte. ~~E~~Aplicant el TLC, podem modelar ~~[illegible]~~

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i(p)}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$ per n prou grans.

Llavors, podem treballar amb la quantitat pivotal.

$$\frac{\bar{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

1

i construir l'interval de confiança.

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left(\bar{p} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \bar{p} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

(a) L'article diu que treballem en un marge de confiança de dos sigmes (95,5%). Això vol dir que treballem amb la $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ associada la desviació de 2σ

a $N(0,1)$

respecte la mitjà, i en el cas que normalitzem, estem treballant en $\boxed{z_{1-\alpha} = 2}$, ja que $2\sigma = 2 \cdot 1 = 2$.

Veiem que això concorda a la perfecció amb el 95,5% ja que ~~...~~ si busquem

$$\left[z_{1-\frac{0{,}045}{2}} = z_{97{,}75} \simeq 2 \right]$$

taules.

(b) Si ens fixem, l'interval

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left(\bar{p} - \frac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{n}, \bar{p} + \frac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{n} \right)$$

depen del propi parametre p!!! Llavors, per poder treballar amb, la que fem es considerar el pitjor cas, es a dir el màxim de $\sqrt{p(1-p)}$, el qual es òbviament

$p = 1/2 = q = 1/2 = 50\%$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 6 de 6

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

(c) Per tant, amb a i b, sabem que l'interval serà.

$$IC_{1-0{,}05}(p) = \left(\bar{p} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n}},\ \bar{p} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$= \left(\bar{p} - \frac{1}{\sqrt{n}},\ \bar{p} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Segons l'enunciat, ens diu que el marge

és +/- 3,2 punts $= \pm 0{,}032$

$\Rightarrow \quad 0{,}032 = \frac{1}{n} \Rightarrow \left[\sqrt{n} = \frac{1}{0{,}032} = 31{,}25\right]^2$

$\Rightarrow$ llavors $n = 31^2$ (o $n = 32^2$)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Full 1 de 4

QUALIFICACIÓ 5.5/6

↑↑

+ + +

Problema 1. $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i \qquad i = 1:n.$

on $x_1, x_2, \dots x_n$ constants conegudes

i $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots \epsilon_n$ m.a.s. $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

i $\beta \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 \in [0, \infty)$ desconegudes

1. $\left[Y_i = \beta x_i + \epsilon_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2) \right]$

són v.a. independents. Volem un estadístic suficient de dues dimensions.

~~Volem estimar β i σ^2~~

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Si desenvolupem el quadrat veiem que

~~Anem a proposar el estadístic~~

$$\cancel{\left[T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} \right], \left[S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i} - T \right)^2}{(n-1)} \right]}$$

~~Veiem que podem descompondre $f_{\underline{Y}}(\underline{y})$~~

$$\cancel{f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2\left(\frac{y_i}{x_i} - \beta\right)^2}{2\sigma^2} =}$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2\left(\frac{y_i}{x_i} - T + T - \beta\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}{2\sigma^2}}$$

Per tant, si agafem
$$\boxed{T(\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \quad \text{i} \quad R(\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

tenim

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{\left(T(\underline{y}) + R(\underline{Y}) + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}{2\sigma^2}} = g(T, R \mid \beta, \sigma) \cdot 1$$

$$[h(\underline{y}) = 1]$$

descompresa en

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = g(T, R \mid \beta, \sigma) \cdot h(\underline{y}) \Rightarrow \text{són suficient}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 2 de

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a [redacted]

Data:

(2) Tenim

$$L(\beta, \sigma^2 \mid \underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\beta x_i)^2}{\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ell(\beta, \sigma^2 \mid \underline{y}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\beta x_i)^2}{\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta x_i)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2(y_i-\beta x_i)\cdot(-x_i)$$

Volem trobar el màxim.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta} x_i) x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i x_i - \hat{\beta} x_i^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

és màxim?

Fabricat Ecològicament

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial^2 \beta^2} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} -x_i^2 = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0 \quad \text{és màxim !!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

3. Sabem que $y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \quad y_i x_i \sim N(\beta x_i^2, \sigma^2 x_i^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sim N\left(\beta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \; \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)}$$

4. $\hat{\beta}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ Sabem que $y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \sim N\left(\beta \sum_{i=1}^{n} x_i, \; n\sigma^2\right) \Rightarrow$$

Assignatura: [redacted]

Estudiant: [redacted]

Data:

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \sim N\left(\beta, \frac{n\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\right)}$$

$\hat{\beta}_3$ Sobem $\frac{y_i}{x_i} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{x_i^2}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} \sim N\left(n\beta, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}}_{= \hat{\beta}_3} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right)}$$

5. Proposo infinits estimadors: $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$??

$\cancel{\hat{\beta}^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha}}$

Perquè

$y_i x_i^\alpha \sim N\left(\beta x_i^{\alpha+1}, \sigma^2 x_i^{2\alpha}\right)$

$$\boxed{\hat{\beta}^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{\alpha} \sim N\left(\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1},\ \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}} \sim N\left(\beta,\ \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}\right)^2}\right)$$

No té biaix !!! (Fixem-nos $\alpha = 1$ coincideix amb $\hat{\beta}_{ML}$)

és una generalització !! !! $\alpha = 0$ coincideix amb $\hat{\beta}_2$)

$\alpha = -1$ coincideix amb $\hat{\beta}_3$)

6. Quin escollim? Anem a comparar el seu MSE

Com tots tres ~~...~~ no tenen biaix.

$$MSE(\hat{\beta}_{ML}) = Var(\hat{\beta}_{ML}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$MSE(\hat{\beta}_2) = Var(\hat{\beta}_2) = \frac{n\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$MSE(\hat{\beta}_3) = Var(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$$

Volem el de mínim MSE.

Anem a comparar tots tres

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 4 de 4

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Farem servir les desigualtats entre les diferents mitjanes. Sabem que (resultat conegut demostrat)

$$\underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right)^{1/2}}_{\text{mitjana quadràtica}} \geq \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}_{\text{mitjana clàssica}} \geq \underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}{n}\right)^{-1/2}}_{\text{mitjana quadràtica inversa.}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}\right]$$

Per tant,
$$\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \frac{n\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \leq \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{MSE(\hat{\beta}_{ML}) \leq MSE(\hat{\beta}_2) \leq MSE(\hat{\beta}_3)}$$

$\boxed{\text{Per tant, clarament agafem el } \hat{\beta}_{RL}}$ ∎

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Problema 2.

~~b = # cares color negre~~

~~# cares color blanc~~

1.

~~b = # cares color blanc~~

~~# cares color negre = $6-b$~~

~~probabilitat en una tirada blanc es $\frac{b}{6} = 1-p$~~

~~" " " negre $\frac{6-b}{6} = p$~~

Tirem 10 vegades (p = prob de sortir cara negre)

Y = # nombre cares negres. Surt $y=7$.

1. Clarament, $\left[Y \sim Bin(n, p) = Bin(10, p) \right]$

ja que estem fent 10 tirades independents de una Bernoulli $B(p)$ on p es la probabilitat que sortir negre. $\left[Y = \sum_{i=1}^{10} B_i(p) \sim Bin(10, p) \right]$

i l'espai de paràmetres? -0.25

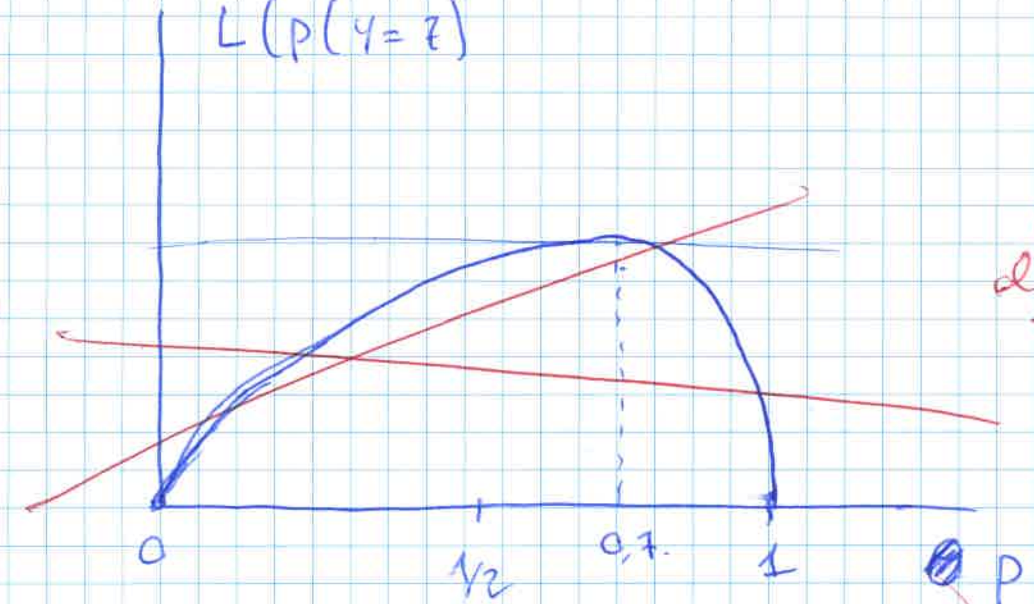
2. $y = 7$, Volem calcular la funció de versemb.

$$P(Y = y \mid p) = \binom{10}{y} p^y (1-p)^{10-y}, \quad p \in (0,1)$$

$$L(p \mid Y = y) = \binom{10}{y} p^y (1-p)^{10-y} \quad i \quad y \in \{0, 1, \dots 10\}$$

$$\boxed{L(p \mid Y = 7) = \binom{10}{7} p^7 (1-p)^3} \quad p \in (0,1)$$

Anem a dibuixar-la aprox ~~(màxim en 0,7)~~



és dual

-0.25

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 2 de

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

3. Anem a triar una posteriori amb sentit.

Veiem que realment p està discretitzat i només pot prendre 6 valors

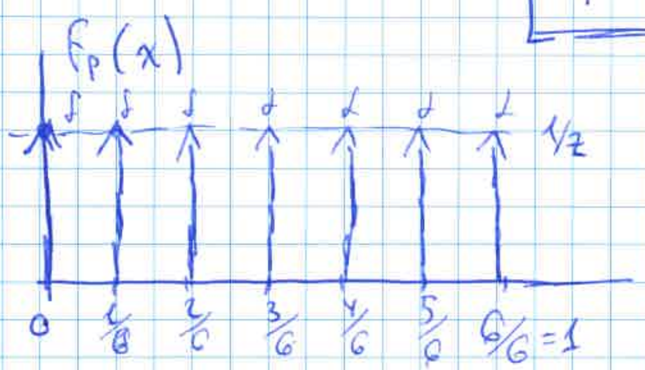
$$\boxed{p = \frac{K}{6}} \quad \text{on} \quad K \in \{0, 1, \ldots 6\}$$

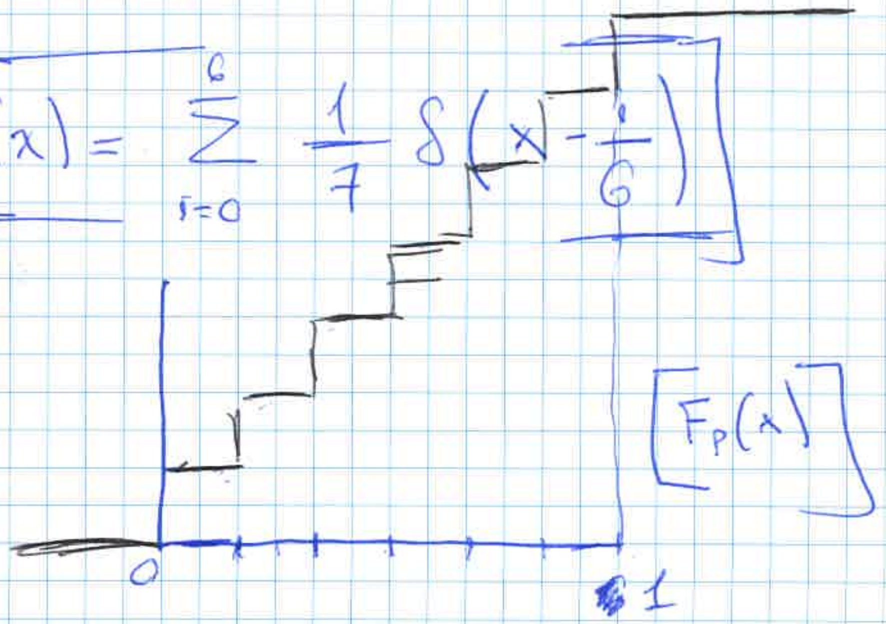
Per tant, anem a suposar que ~~cada valor~~ és uniforme. i triem

$$\boxed{P\left(p = \frac{i}{6}\right) = \frac{1}{7}} \quad \text{i} \quad \boxed{P\left(p \neq \frac{i}{6}\right) = 0}$$

$i \in \{0, 1, \ldots 6\}$

on en densitats. $$\boxed{f_p(x) = \sum_{i=0}^{6} \frac{1}{7} \delta\left(x - \frac{i}{6}\right)}$$





Fabricat Ecològicament

Per calcular la posteriori

$$\pi(p \mid 7) = \frac{P(P=p,\ Y=7)}{P(Y=7)} =$$

$$= \frac{P(Y=7 \mid p)\, P(P=p)}{P(Y=7)}$$

agafem $p = \frac{i}{6}$ $\left(p \neq \frac{i}{6} \Rightarrow \pi(p) = 0 \right)$

$$\pi\left(\frac{i}{6} \,\middle|\, 7\right) = \frac{\binom{10}{7}\left(\frac{i}{6}\right)^7\left(1-\frac{i}{6}\right)^3 \cdot \cancel{\frac{1}{7}}}{\sum_{k=0}^{6} P\left(Y=7 \,\middle|\, \frac{k}{6}\right)\cancel{\frac{1}{7}}}$$

$$= \frac{\cancel{\binom{10}{7}}\left(\frac{i}{6}\right)^7\left(1-\frac{i}{6}\right)^3}{\cancel{\binom{10}{7}}\sum_{k=0}^{6}\left(\frac{k}{6}\right)^7\left(1-\frac{k}{6}\right)^7} = \boxed{\frac{i^7\,(1-i)^3}{\sum_{k=0}^{6} k^7\,(1-k)^7}}$$

Anem a dibuixar el posterior $\pi(p \mid 7)$.

Sabem que $\pi(p \mid 7) \propto P(Y=7 \mid p) \cdot \pi(p)$

$$= L(p \mid Y=7) \cdot \pi(p)$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 3 de 3

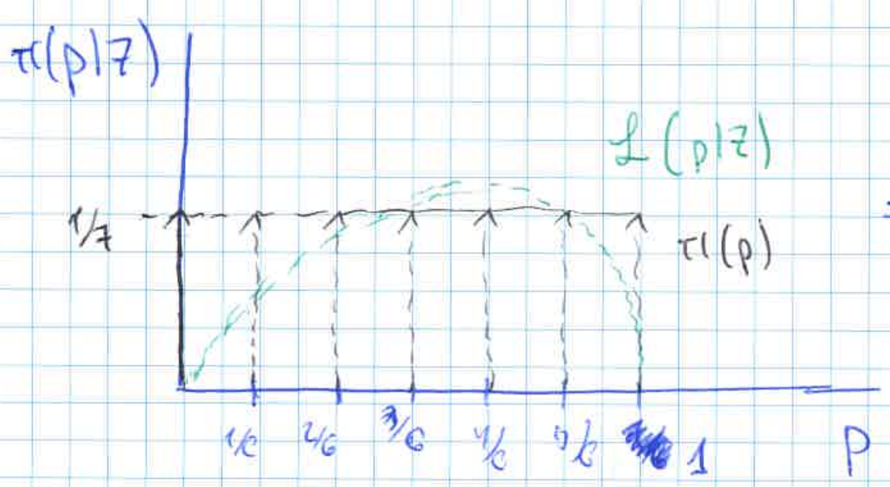
QUALIFICACIÓ

Assignatura:

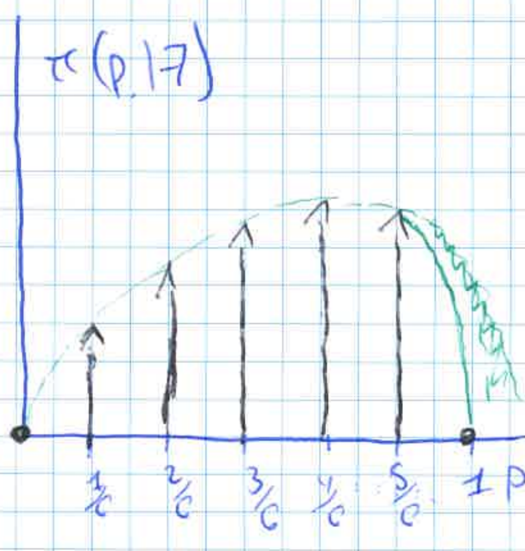
Estudiant/a: [redacted]

Data:

~~Això~~ Per tant, serà el producte dels dos gràfics ~~llevat~~ de un factor escalar.



$\Rightarrow$



Veiem que es una distribució discreta, però no uniforme i proporcional a $f(p|7)$ ✓.

4. Ara per cada cara tirem una ~~dau~~ moneda per saber si serà blanca o negra. Llavors, la quantitat de cares negres ja no seguirà una probabilitat uniforme, sino una Binomial de 6 intents a prob 1/2.

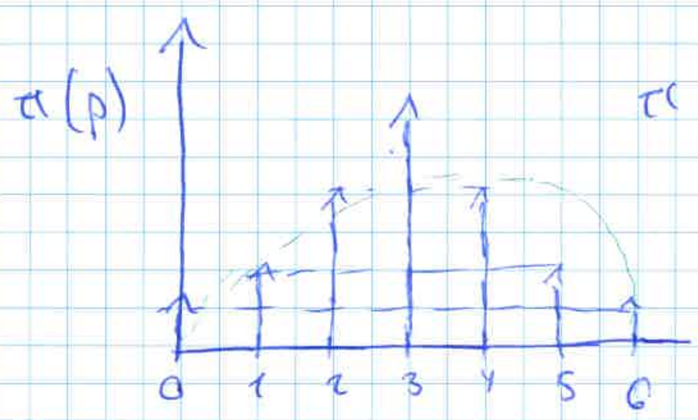
És a dir, si associem a cada cara la $B_i(1/2)$

$\Rightarrow$ ~~$P(...)$~~ $Y = \sum_{i=1}^{6} B_i(1/2) \sim Bin(6, 1/2)$ ✓

+

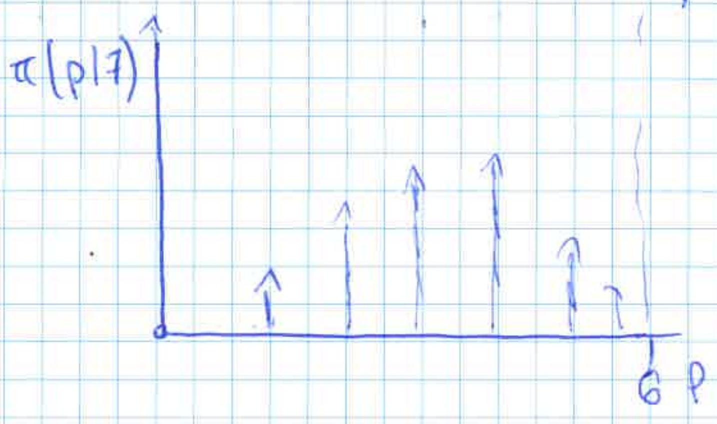
Po tant, agafaria com a priori la

$$\left[\pi\left(\frac{i}{6}\right) = \binom{6}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-i} = \binom{6}{i}\frac{1}{2^6}\right]$$



$\pi\left(\frac{k}{6}\right)$

$$\left[\pi(p) \sim Bin\left(6, \frac{1}{2}\right)\right]$$



posterior dibuix igual que
dues modificat
per $f(p|7)$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 3

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Problema 3. $X_1, \dots, X_n$ amb $\left[f(x,\theta) = \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4} I_{(0,\infty)}(x) \right]$

on $x > 0$ i $\theta > 0$.

1. Anem a calcular

$$E(x+\theta) = \int_0^\infty \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4}(x+\theta)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^3}\,dx = 3\theta^3 \left[\frac{1}{-2}(x+\theta)^{-2} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{3\theta^3}{2} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{3}{2}\theta.$$

$$\Rightarrow E[x] + \theta = E[x+\theta] = \frac{3}{2}\theta \Rightarrow \left[E[x] = \frac{\theta}{2} \right]$$

Per tant, $\mu_1 = \frac{\theta}{2} \underset{MM}{\Rightarrow} m_1 = \frac{\hat{\theta}_{MM}}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MM} = 2m_1 = 2\bar{X}}$

2. $Var[\hat{\theta}_{MM}] = 4\, Var[\bar{X}] = 4\, \frac{Var[X_i]}{n}$

$$E[(x+\theta)^2] = \int_0^\infty \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4}(x+\theta)^2\,dx = \int_0^\infty \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^2}\,dx$$

$$= 3\theta^3 \left[-\frac{1}{(x+\theta)} \right]_0^\infty = \frac{3\theta^3}{\theta} = 3\theta^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(x+\theta)^2] = \mathbb{E}[x^2] + 2\mathbb{E}[x]\theta + \theta^2 = 3\theta^2$$

$$\Rightarrow \left[\mathbb{E}[x^2] = 3\theta^2 - \theta^2 - 2\frac{\theta}{2}\theta = \theta^2 \right]$$

$$\Rightarrow \left[Var[x] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \theta^2 - \frac{\theta^2}{4} = \frac{3}{4}\theta^2 \right]$$

~~Si apliquem el Teorema de Límit Central~~

$$\cancel{\frac{\hat{\theta}_{MM} - \theta}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)}$$

$$\left[Var[\hat{\theta}_{MM}] = \frac{4}{n} Var[x] = \frac{4}{n}\frac{3}{4}\theta^2 = \frac{3}{n}\theta^2 \right]$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MM}] = \theta.$$

Si apliquem el teorema del límit central

$$\frac{\hat{\theta}_{MM} - \theta}{\sqrt{\frac{3}{n}}\,\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MM} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(\theta, \frac{3}{n}\theta^2\right)}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

QUALIFICACIÓ

Assignatura: [redacted]

Estudiant/a: [redacted]

Data:

És eficient?

Cal calcular la informació de Fisher. $I(\theta)$

$$L(\theta \mid x) = \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

$$\ell(\theta \mid x) = \log 3 + 3\log\theta - 4\log(x+\theta)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\theta \mid x) = \frac{3}{\theta} - \frac{4}{x+\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}(\theta \mid x) = -\frac{3}{\theta^2} + \frac{4}{(x+\theta)^2}$$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{3}{\theta^2} - \frac{4}{(x+\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{3}{\theta^2} - 4\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{(x+\theta)^2}\right] = \frac{3}{\theta^2} - \frac{12}{5\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}\frac{3}{5}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(x+\theta)^2}\right] = \int_0^\infty \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^6}\,dx = 3\theta^3\left[-\frac{1}{5}\frac{1}{(x+\theta)^5}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{3}{5}\theta^3\frac{1}{\theta^5} = \frac{3}{5\theta^2}$$

$$\Rightarrow I_n(\theta) = n\,I(\theta) = \frac{3}{5}\frac{n}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow \left[CRLB(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{5}{3}\frac{\theta^2}{n} \right]$$

Veiem que $\underbrace{\frac{3\theta^2}{n}}_{= Var[\hat{\theta}_{MM}]} > \frac{5}{3}\frac{\theta^2}{n} \Rightarrow$ no és eficient!!!

(3). Tal com hem vist a classe.

$$\hat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(\theta, \frac{1}{I_n(\theta)}\right) \quad \text{o} \quad \frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\sqrt{\frac{5}{3}}\,\theta}\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \left[\hat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(\theta, \frac{5}{3}\frac{\theta^2}{n}\right) \right]$$

(4). Anem a buscar la funció de distribució

$$\left[F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \frac{3\theta^3}{(y+\theta)^4}\,dy = 3\theta^3 \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(y+\theta)^3} \right]_0^x \right.$$

$$\left. = \theta^3 \left(\frac{1}{\theta^3} - \frac{1}{(x+\theta)^3} \right) = 1 - \frac{\theta^3}{(x+\theta)^3} \right]$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Anem a buscar $F(m) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{\theta^3}{(m+\theta)^3}$

$$\Rightarrow \frac{\theta^3}{(m+\theta)^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{(m+\theta)} = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

$$2^{1/3}\theta = m+\theta. \Rightarrow \boxed{m = \theta(2^{1/3}-1)}$$

Anem a aplicar la propietat d'invariancia del MC.

$$\boxed{\hat{m}_{MC} = f(\hat{\theta}_{MC}) = \hat{\theta}_{MC}(2^{1/3}-1)}$$

Anem a calcular l'info de Fisher de

$$\boxed{I_n(m) = I_n(\theta(2^{1/3}-1)) = \frac{I_n(\theta)}{(2^{1/3}-1)^2}}$$

$$= \frac{3}{5(2^{1/3}-1)^2}\frac{n}{\theta^2} = \frac{3}{5}\frac{n}{m^2}$$

Finalment, la distribució assimptòtica serà.

$$\hat{m}_{MC} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(m, \frac{5}{3}\frac{m^2}{n}\right)$$

$$= N\left(\theta(2^{1/3}-1), \frac{5(2^{1/3}-1)^2}{3}\frac{\theta^2}{n}\right)$$

5. Volem construir un estimador de θ basat en la mediana mostral.

Sabem que $m = \theta(2^{1/3}-1)$

Llavors, la que podem fer és estimar m amb la mediana mostral $\hat{m} = X_{(n/2)}$

i després estimar $\hat{\theta}$ com

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\hat{m}}{(2^{1/3}-1)} = \frac{X_{[n/2]}}{(2^{1/3}-1)}}$$

+