0,6

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P1** 1 **Nota P2** X4

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

1. [1½ punts] Sigui $y = Q(x)$ un polinomi de grau n. Demostreu que qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q és nul.la; és a dir, per a qualsevol conjunt de números $x, x_0, ..., x_n$ es té que $Q[x, x_0, ..., x_n] = 0$. *Hint:* quin grau té $Q[x, x_0]$?

Sabem que $y = Q(x)$ és un polinomi de grau n. I volem veure que qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q és nul·la; és a dir, ~~per a~~ volem veure que $\forall\, x, x_0, \dots, x_n$ $Q[x, x_0, \dots, x_n] = 0$. Anem a veure el grau de $Q[x, x_0]$

diferència dividida

$$\begin{matrix} x & Q(x) \\ x_0 & Q(x_0) \end{matrix} \Big> \frac{\overset{\text{grau } n}{Q(x_0) - Q(x)}}{\underset{\text{grau } 1}{x_0 - x}} = Q[x, x_0]$$

observem que el numerador té grau n i el denominador té grau ~~ -- ~~ $1 \Rightarrow Q[x, x_0]$ té grau $n-1$

No!! Contraexemple $\frac{x^2+1}{x+1}$

Anem a observar què passa si afegim un altre punt x_1

$$\begin{matrix} x & Q(x) \\ x_0 & Q(x_0) \\ x_1 & Q(x_1) \end{matrix} \quad \frac{Q(x_0) - Q(x)}{x_0 - x} = Q[x, x_0], \quad \frac{Q(x_1) - Q(x_0)}{x_1 - x_0} = Q[x_0, x_1] \Big> \frac{\frac{Q(x_1) - Q(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{Q(x_0) - Q(x)}{x_0 - x}}{x_1 - x} =$$

$$= \frac{(Q(x_1) - Q(x_0))(x_0 - x) - (Q(x_0) - Q(x))(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_0 - x)(x_1 - x)} = \frac{Q(x_1)\overbrace{(x_0 - x)}^{\text{grau } 1} - Q(x_0)\overbrace{(x_0 - x + x_1 - x_0)}^{\text{grau } 1} + \overbrace{Q(x)(x_1 - x_0)}^{\text{grau } n}}{\underbrace{(x_1 - x_0)(x_0 - x)(x_1 - x)}_{\text{grau 2 per l'} x^2}} =$$

desenvolupem

$= Q[x, x_0, x_1]$

Per tant, clarament el numerador té grau n pel $Q(x)(x_1 - x_0)$ i el denominador té grau 2 per l'$x^2 \Rightarrow Q[x, x_0, x_1]$ té grau $n-2$.

observant aquesta recurrència veiem que $Q[x, x_0, x_1, x_2]$ tindrà grau $n-3$ ja que dividirem per $(x_2 - x)$ un polinomi de grau $n-2$.

$\Rightarrow Q[x, x_0, \dots, x_n]$ tindrà grau $n - (n+1) = -1 \Rightarrow$ serà nul $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q, polinomi de grau n, és nul·la.

Ull! problema 2 al darrere! ☞

2. Considerem el PVI $y' = -50y + 100$, $y(0) = y_0$.

(a) [½ punt] Calculeu la seva solució.

(b) [½ punt] Quant val $L := \lim_{x \to +\infty} y(x)$?

(c) [1 punt] Apliqueu el mètode d'Euler i deduïu una expressió per a y_j en funció només de y_0, h, j.

(d) [½ punt] Per a quins valors de la h es satisfà $\lim_{j \to +\infty} y_j = L$?

$\boxed{(c)}$ ~~El~~ mètode d'Euler consisteix en aplicar Taylor d'ordre 1 al nostre sistema.

~~Desenvo~~ Tenim $\begin{cases} y' = -50y + 100 = f(x,y) \\ y(0) = y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Desenvolupem Taylor al voltant de x_0 en $y(x_1)$ on x_1 serà el següent punt de la recurrència. $(x_1 = x_0 + h)$ en el nostre cas

$y_1 = y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(\underbrace{x_1 - x_0}_{h}) = y_0 + f(x_0, y_0)h = y_0 + (-50y_0 + 100)h$

Amb això busquem una recurrència del tipus $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h \end{cases}$

que en el nostre cas serà:

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \text{ on } x_0 = 0 \\ \cancel{y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h = y_n + (-50y_n + 100)h} \\ y_{j+1} = y_j + f(x_j, y_j) \cdot h = y_j + (-50y_j + 100)h = y_j(1 - 50h) + 100h \end{cases}$$

$\boxed{(a)}$ Tenim $\begin{cases} y' = -50y + 100 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ hem de trobar solució y_h del sistema homogeni $y_h' = -50y$ i sumar-li una solució particular y_p del sistema.

$y' = -50y$ una solució general és $y = e^{-50x} + c$, c constant

observem que una solució particular de $y' = -50y + 100$ és $y_p = 2$ ja que $0 = -50 \cdot 2 + 100 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ solució general del sistema és $y_g = e^{-50x} + c + 2$ i imposant condició inicial de $y(0) = y_0 \rightarrow$

$\rightarrow y_0 = e^{-50 \cdot 0} + c + 2 \rightarrow y_0 = c + 3 \Rightarrow c = y_0 - 3$

0'25

Per tant la solució del sistema és $y = e^{-50x} + y_0 - 3 + 2 = e^{-50x} + y_0 - 1$

$\boxed{(b)}$ $\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-50x} + y_0 - 1 = \boxed{y_0 - 1} = L$

0

~~El~~ $\boxed{(d)}$ està a un altre full

COGNOM(S): [redacted]

② (d) Per a quins valors de h es satisfà $\lim_{j\to+\infty} y_j = L$?

C) 0

Recordem que tenim

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \\ y_{j+1} = y_j + f(x_j, y_j)\cdot h = y_j + (-50\cdot y_j + 100)h = y_j(1-50h) + 100h \end{cases}$$

$$\lim_{j\to+\infty} y_j = \lim_{j\to+\infty} y_{j-1} + \cancel{f}\,(-50\cdot y_{j-1} + 100)h = 100h + \lim_{j\to+\infty} y_{j-1}(1-50h) =$$

$$= 100h + \lim_{j\to+\infty} (y_{j-2}(1-50h) + 100h)(1-50h) =$$

$$= 100h + \lim_{j\to+\infty} y_{j-2}(1-50h)^2 + 100h(1-50h) =$$

$$= 100h(2-50h) + \lim_{j\to+\infty} y_{j-2}(1-50h)^2$$

~~0'15~~

0,35

Observem que si anem fent la recurrència $(1-50h)$ enrrerè ~~pue~~ pujant de grau i si $j\to+\infty$ acabarem ~~tenim~~ tenint $(1-50h)^n$ amb n molt gran $\Rightarrow$ l'única manera que el límit anterior existeix és que $h\in[0,1]$ i d'aquesta manera h^n no tendeix a ∞ i $\lim_{j\to\infty} y_j = L$ ✓

~~1+0.2+0=1.2~~

1+0.3+0.3=~~1.8~~ 1.6

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P3**

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

3. Els polinomis de Jacobi de paràmetres (α,β), $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, on el subíndex n indica el grau del polinomi, són ortogonals relativament al pes $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Considerem el cas $\alpha=\beta=1$ i simplifiquem la notació anomenant-los simplement $P_n(x)=P_n^{(1,1)}(x)$. Si s'agafa la normalització $P_n(1)=n+1$ aquests polinomis verifiquen: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=2x$, la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x^2)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^{n+1}\right],$$

i la recurrència

$$(n+3)(2n+2)P_{n+1}(x)=(2n+3)(2n+4)xP_n(x)-(n+1)(2n+4)P_{n-1}(x).$$

(a) [1 punt] Calculeu els polinomis $P_n(x)$ per a $n=2,3$.

(b) [1 punt] Trobeu la fórmula de quadratura gaussiana de tres punts associada a aquesta família de polinomis ortogonals

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,f(x)\,\mathrm{d}x\approx w_0f(x_0)+w_1f(x_1)+w_2f(x_2).$$

Hint: per a trobar els pesos w_0, w_1 i w_2 imposeu que la fórmula sigui exacta quan $f(x)$ és un polinomi de grau ≤ 2.

(c) [1 punt] Comproveu que la fórmula és exacta per a qualsevol monomi $f(x)=x^m$ de grau senar, i que ho és també per a $m=4$ però no si $m=6$.

(a) Per $m=2$

$$P_2(x)=\frac{(-1)^2}{2^2\cdot 2!(1-x^2)}\frac{d^2}{dx^2}\left[(1-x^2)^3\right]=\frac{1}{8(1-x^2)}\cdot\frac{d}{dx}\left[3(1-x^2)^2\cdot(-2x)\right]=$$

$$=\frac{1}{8(1-x^2)}\cdot\frac{d}{dx}\left[-6x(1-x^2)^2\right]=\frac{1}{8(1-x^2)}\cdot\left(-12x(1-x^2)\cdot(-2x)-6(1-x^2)^2\right)=$$

$$=\frac{24x^2-6(1-x^2)}{8}=\boxed{\frac{12x^2-3(1-x^2)}{4}}$$ ✓

$P_3(x)$ el calcularem amb la recurrència

$$(2+3)(2\cdot2+2)P_3(x)=(2\cdot2+3)(2\cdot2+4)x\,P_2(x)-(2+1)(2\cdot2+4)\cdot P_1(x)$$

$$5\cdot6P_3(x)=7\cdot8x\cdot\frac{12x^2-3(1-x^2)}{4}-3\cdot8\cdot P_1(x)$$

$$30P_3(x)=14x(12x^2-3(1-x^2))-24P_1(x)$$

$$15P_3(x)=7x(12x^2-3+3x^2)-12P_1(x)$$

$$15P_3(x)=7x(15x^2-3)-12\cdot2x$$

$$15P_3(x)=7\cdot15x^3-21x-24x=7\cdot15x^3-3\cdot15x$$

$$\Rightarrow \boxed{P_3(x)=7x^3-3x}$$ ✓

(b)

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x)\, dx \approx w_0 \cdot f(x_0) + w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2)$$

Imposem fórmula per a polinomis de grau ≤ 2

$g_1(x) = 1$

$g_2(x) = x$

$g_3(x) = x^2$

g_1:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) \cdot 1\, dx = w_0 + w_1 + w_2$$

$$\int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = w_0 + w_1 + w_2 \Leftrightarrow [x]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = w_0 + w_1 + w_2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2 - \frac{2}{3} = w_0 + w_1 + w_2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3} = w_0 + w_1 + w_2$$

g_2:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) x\, dx = w_0 \cdot x_0 + w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2$$

$$\int_{-1}^{1} x - x^3\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

g_3:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$$

Agafem $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$$2 - \frac{2}{3} = w_0 + w_1 + w_2 \longrightarrow \frac{4}{3} = 2w_0 + w_1$$

$$0 = -w_0 + w_2 \Rightarrow w_0 = w_2$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = w_0 + w_2 \longrightarrow \frac{10-6}{15} = 2w_0 \Rightarrow \frac{4}{15} = 2w_0 \Rightarrow \boxed{w_0 = \frac{4}{30}} = w_2$$

$$\frac{4}{3} - 2w_0 = w_1 \Rightarrow w_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{15} \Rightarrow w_1 = \frac{20-4}{15} = \frac{16}{15}$$

COGNOM(S) : [redacted]

3)

(b)

Per tant tenim que:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)f(x)\,dx \approx \frac{2}{15}\cdot f(-1)+\frac{16}{15}f(0)+\frac{2}{15}\cdot f(1)$$

I per ara sabem que és exacta almenys fins a polinomis de grau ≤ 2.

(c)

~~$m=4$~~

~~$f(x)=x^4$~~

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^4\,dx=\int_{-1}^{1}x^4-x^6\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}=$$

$$=\frac{14-10}{35}=\frac{4}{35}$$

$$\frac{2}{15}\cdot(-1)^4+\frac{16}{15}\cdot 0+\frac{2}{15}\cdot 1^4=$$

$m=6$

$f(x)=x^6$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^6\,dx=\int_{-1}^{1}x^6-x^8\,dx=\frac{2}{7}-\frac{2}{9}=\frac{4}{63}\neq\frac{2}{15}+\frac{2}{15}$$

Si $f(x)=x^{2m+1}$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^{2m+1}\,dx=\int_{-1}^{1}x^{2m+1}-x^{2m+3}\,dx=\left[\frac{x^{2m+2}}{2m+2}\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{x^{2m+4}}{2m+4}\right]_{-1}^{1}=0$$

Aleshores, amb la fórmula trobada $\frac{2}{15}\cdot(-1)^{2m+1}+\frac{16}{15}\cdot 0^{2m+1}+\frac{2}{15}\cdot(1)^{2m+1}=0$

Per tant veiem que es compleix per polinomis de grau senar

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P4** 1

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

4. Sigui $f(x)$ una funció de la qual coneixem la taula següent:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	3	1
1	2	-2

Taula 1

(a) [1 punt] Trobeu l'abscissa del màxim, x_M, de $f(x)$ en l'interval $I = [0, 1]$, aproximant-la per l'abscissa del màxim, $\tilde{x}_M$, del polinomi interpolador d'Hermite $p_3(x)$ obtingut a partir de les dades de la taula 1.

(b) [1 punt] Suposant $f \in \mathcal{C}([x_0, x_1])$, $x_0 < x_1$, sigui $p_3(x)$ el polinomi interpolador d'Hermite en els punts x_0, x_1. Si definim l'error d'aquesta interpolació com $e_3(x) := f(x) - p_3(x)$, deduïu **directament** —sense aplicar cap fórmula de l'error a la interpolació—que, per a $x \in (x_0, x_1)$:

$$e_3'(x) = f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - \xi),$$

on $\xi, \eta(x) \in (x_0, x_1)$.

(c) [1 punt] Si $|f^{(4)}(x)| < A$ i $|f^{(2)}(x)| > B$ $\forall x \in (0, 1)$ amb $A, B > 0$ fiteu, en funció d'A i B, l'error comès en l'aproximació de l'abscissa del màxim trobada a l'apartat (a). *Nota:* podeu fer servir el resultat de l'apartat (b).

(a) Construïm el polinomi interpolador d'Hermite

1

$$\begin{array}{llllll}
0 & 3 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
0 & 3 & & \frac{-1-1}{1-0} = -2 & & \\
 & & \frac{2-3}{1-0} = -1 & & \frac{-1-(-2)}{1} = 1 & \\
1 & 2 & & \frac{-2-(-1)}{1-0} = -1 & & \\
 & & -2 & & & \\
1 & 2 & & & &
\end{array}$$

Aleshores $P_3(x) = 3 + 1(x-0) - 2(x-0)^2 + 1(x-0)^2(x-1)$

$= 3 + x - 2x^2 + x^2(x-1)$

$P_3'(x) = 1 - 4x + 3x^2 - 2x = 1 - 6x + 3x^2$

Observem que $P_3(0) = 3$, $P_3(1) = 2$, $P_3'(0) = 1$ i $P_3'(1) = -2$

$P_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6}$

$= 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

Tercer

$$P_3(x) = 3+x-2x^2+x^2(x-1)$$

$$P_3\left(1+\frac{\sqrt6}{3}\right) = 3+1+\frac{\sqrt6}{3}-2\cdot\left(1+\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt6}{3}\right)^2\left(1+\frac{\sqrt6}{3}-1\right)$$

$$= 4+\frac{\sqrt6}{3}-2\left(1+\frac{2\sqrt6}{3}+\frac{6}{9}\right)+\left(1+\frac{2\sqrt6}{3}+\frac{6}{9}\right)\left(\frac{\sqrt6}{3}\right)$$

$$= 4+\frac{\sqrt6}{3}-2-\frac{4\sqrt6}{3}-\frac{12}{9}+\frac{\sqrt6}{3}+\frac{2\cdot6}{9}+\frac{6\cdot\sqrt6}{27}$$

$$= \left(4-2-\frac{12}{9}+\frac{12}{9}\right)+\sqrt6\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{6}{27}\right) =$$

$$= \left(4-2\cancel{+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}\right)+\sqrt6\left(\cancel{\frac{4}{3}}-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right) =$$

$$= \left(\frac{12-6\cancel{+4}+4}{3}\right)+\sqrt6\left(-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}\right) = \frac{6\cancel{14}}{3}+\sqrt6\cdot\left(\frac{-4}{9}\right) = 2+\sqrt6\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)$$

$$P_3\left(1-\frac{\sqrt6}{3}\right) = 3+1-\frac{\sqrt6}{3}-2\left(1-\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt6}{3}\right)^2\left(1-\frac{\sqrt6}{3}-1\right) =$$

$$= 4-\frac{\sqrt6}{3}-2\left(1-\frac{2\sqrt6}{3}+\frac{6}{9}\right)+\left(1-\frac{2\sqrt6}{3}+\frac{6}{9}\right)\frac{\sqrt6}{3} =$$

$$= 4-\frac{\sqrt6}{3}-2+\frac{4\sqrt6}{3}-\frac{12}{9}+\frac{\sqrt6}{3}-\frac{2\cdot6}{9}+\frac{6\sqrt6}{27} =$$

$$= \left(4-2-\frac{12}{9}-\frac{12}{9}\right)+\sqrt6\left(-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}+\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{6}{27}\right)$$

$$= \left(\frac{18-12-12}{9}\right)+\sqrt6\left(\cancel{\frac{4}{3}}\ \frac{12}{9}+\frac{3}{9}\right) = -\frac{6}{9}+\sqrt6\cdot\frac{15}{9}$$

Observem que la imatge de $1-\frac{\sqrt6}{3}$ és major a la de $1+\frac{\sqrt6}{3}$. Per tant l'abscissa màxima és $1-\frac{\sqrt6}{3}$

COGNOMS: [redacted]

4.

(b)

Sabem que $e_3(x) := f(x) - P_3(x)$ ~~$f^{(4)}(\xi(x))$~~

Amb P_3 polinomi interpolador d'Hermite

Està clar que $e_3'(x) = f'(x) - P_3'(x)$

Fem Taylor a $f'(x)$ centrat a x_0

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$P_3(x) = f(x_0) + \underbrace{f[x_0,x_0]}_{f'(x_0)}(x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$

$$P_3'(x) = f'(x_0) + 2f[x_0,x_0,x_1](x-x_0) + 2f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2$$

Si restem $f'(x) - P_3'(x)$ es cancel·laran termes, fins arribar a terme que: $e_3'(x) = f'(x) - P_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi)$ després de desenvolupar.

(c)

Sigui x l'abscissa que hem trobat a l'apartat (a)

En aquest cas $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$

$$e_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x)(x-1)(x-\xi)$$

$$|e_3'(x)| = \frac{|f^{(4)}(\eta(x))|}{3!}|x|\cdot|x-1|\cdot|x-\xi| < \frac{A}{3!}|x|\cdot|x-1|\,|x-\xi|$$

Notem que si $x \in (0,1) \Rightarrow |x| = x$,
$\xi \in (0,1)$ $|x-1| = 1-x$
$|x-\xi| = (x-\xi)$

Per tant, $\Rightarrow$ (segueix al ~~darre~~ darrere)

et demanen una fita de $|x_M + \tilde{x}_M|$ ''!

$$\Rightarrow |e'_3(x)| < \frac{A}{3!} x(1-x)(x-\xi)\Big]$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)x^2\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} = \frac{3}{7}w_0 + \frac{3}{7}w_2.$$

de la segona equació tenim $w_0 = w_2$. De la tercera,

$$\frac{4}{15} = \frac{3\cdot 2}{7}w_0 \Rightarrow w_0 = \frac{28}{6\cdot 15} = \frac{14}{45} = w_2$$ i, de la primera,

$$w_1 = \frac{4}{3} - \frac{28}{45} = \frac{60-28}{45} = \frac{32}{45}.$$

c) si $f(x) = x^m$ amb m senar, aleshores $(1-x^2)x^m$ és una funció senar i, per tant, $\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^m dx = 0$.

tindrem, a més, $0 = w_0(-1)^m\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^{m-1} + \left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^m w_2 = 0$,

ja que $w_0 = w_2$.

Per a $m=4$: $\int_{-1}^{1} x^4 - x^6\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} =$

$$= \frac{4}{35} = \frac{9}{49}\cdot\frac{14}{45} + \frac{9}{49}\cdot\frac{14}{45} = \frac{2\cdot 14}{49\cdot 5} = \frac{4}{7\cdot 5} = \frac{4}{35}$$

Per a $m=6$, $\int_{-1}^{1} x^6 - x^8\,dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{7} - \frac{2}{9} =$

$$= \frac{4}{63} \neq \frac{27}{7^3}\cdot\frac{14}{45} + \frac{27}{7^3}\cdot\frac{14}{45} = \frac{2\cdot 14\cdot 27}{7^3\cdot 45} = \frac{2\cdot 2\cdot 27}{7^2\cdot 3^2\cdot 5} =$$

$= \frac{4\cdot 3}{49\cdot 5}$ * no són iguals perquè $\frac{2^2}{7\cdot 3^2} \neq \frac{3\cdot 2^2}{7^2\cdot 5}$

(és a dir, les fraccions irreductibles són diferents).