Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P1** 0'75 **Nota P2** 1

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

15 de gener de 9:00 a 10:30

1. [1½ punts] Sigui $y = Q(x)$ un polinomi de grau n. Demostreu que qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q és nul.la; és a dir, per a qualsevol conjunt de números $x, x_0, \dots, x_n$ es té que $Q[x, x_0, \dots, x_n] = 0$. *Hint:* quin grau té $Q[x, x_0]$?

$Q[x, x_0] = \dfrac{Q(x_0) - Q(x)}{x_0 - x}$. Això és un quocient entre un polinomi de grau n $(Q(x_0) - Q(x))$ i un ~~gr~~ de grau 1 $(x_0 - x)$, així que dóna un polinomi de grau $n-1$.

$Q[x, x_0, x_1] = \dfrac{Q[x_0, x_1] - Q[x, x_0]}{x_1 - x}$ és un polinomi de grau $n-1$ entre un de grau 1, així que $Q[x, x_0, x_1]$ és de grau $n-2$, ... Per inducció veiem que $Q[x, x_0, \dots, x_j]$ és de grau $n-(j+1)$: Suposem que $Q[x, x_0, \dots, x_{j-1}]$ té grau $n-j$.

0'75

$Q[x, x_0, \dots, x_j] = \dfrac{\overbrace{Q[x_0, \dots, x_j]}^{\text{un nombre}} - \overbrace{Q[x, x_0, \dots, x_{j-1}]}^{\text{grau } n-j}}{x_j - x}$ és un polinomi de grau $n-j$ entre un de grau 1, així que té grau $n-j-1 = n-(j+1)$.

Per tant, $Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$ és un polinomi de grau $n - (n) = 0$, i $Q[x_0, \dots, x_n]$ també. Només fa falta demostrar que són iguals.

1

Ull! problema 2 al darrere! ☞

2. Considerem el PVI $y' = -50y + 100$, $y(0) = y_0$.

(a) [1/2 punt] Calculeu la seva solució.

(b) [1/2 punt] Quant val $L := \lim_{x \to +\infty} y(x)$?

(c) [1 punt] Apliqueu el mètode d'Euler i deduïu una expressió per a y_j en funció només de y_0, h, j.

(d) [1/2 punt] Per a quins valors de la h es satisfà $\lim_{j \to +\infty} y_j = L$?

a) Observem que y ha de tenir una exponencial, ja que si $y = e^x$, $y' = e^x = y$

~~$y = (a + be^{2x})^2 = a^2 + 2abe^{2x} + b^2e^{2x\cdot 2}$~~ ~~$y' = 2(a+be^{2x}) \cdot be^{2x} \cdot 2 = 2abe^x + 2b^2e^x$~~

~~$y' = 2(a+be^{2x}) \cdot 2be^{2x} = 2 2 a be^{2x} +$~~

0

$y = ax + b(c-x)e^{dx} \rightarrow y' = a + b\left(-e^{dx} + (c-x)\cdot de^{dx}\right) = a - be^{dx} + bcde^{dx} - bxde^{dx}$

c) El mètode d'Euler és $y_{K+1} = y_K + h \cdot f(x_K, y_K)$, on $f(x,y) = -50y + 100$ en aquest cas. Per tant tindrem $y_{K+1} = y_K + h(-50y_K + 100) = y_K - 50hy_K + 100h =$

$= (1-50h)y_K + 100h.$

Tenim $y_j = (1-50h)y_{j-1} + 100h = (1-50h)\left((1-50h)y_{j-2} + 100h\right) + 100h =$

$(1-50h)^2 y_{j-2} + (1-50h)100h + 100h = (1-50h)^2\left[(1-50h)y_{j-3} + 100h\right] + (1-50h)100h + 100h$

$\longrightarrow y_j = (1-50h)^j y_0 + \sum_{i=0}^{j-1} (1-50h)^i \cdot 100h$

1

1+1+0.=2.2

1+1+0.4=2.4

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P3**

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

[redacted]ner de 10:30 a 12:00

3. Els polinomis de Jacobi de paràmetres (α, β), $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, on el subíndex n indica el grau del polinomi, són ortogonals relativament al pes $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Considerem el cas $\alpha = \beta = 1$ i simplifiquem la notació anomenant-los simplement $P_n(x) = P_n^{(1,1)}(x)$. Si s'agafa la normalització $P_n(1) = n+1$ aquests polinomis verifiquen: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 2x$, la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x^2)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^{n+1}\right],$$

i la recurrència

$$(n+3)(2n+2)P_{n+1}(x) = (2n+3)(2n+4)xP_n(x) - (n+1)(2n+4)P_{n-1}(x).$$

(a) [1 punt] Calculeu els polinomis $P_n(x)$ per a $n = 2, 3$.

(b) [1 punt] Trobeu la fórmula de quadratura gaussiana de tres punts associada a aquesta família de polinomis ortogonals

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Hint: per a trobar els pesos w_0, w_1 i w_2 imposeu que la fórmula sigui exacta quan $f(x)$ és un polinomi de grau ≤ 2.

(c) [1 punt] Comproveu que la fórmula és exacta per a qualsevol monomi $f(x) = x^m$ de grau senar, i que ho és també per a $m = 4$ però no si $m = 6$.

a) $n=1$: $(1+3)(2\cdot 1+2)\,P_2(x) = (2\cdot1+3)(2\cdot1+4)\,x\cdot P_1(x) - (1+1)(2\cdot1+4)P_0(x) \rightarrow$

$\rightarrow 16\,P_2(x) = 30x\cdot 2x - 12\cdot 1 \rightarrow P_2(x) = \frac{60}{16}x^2 - \frac{12}{16} = \boxed{\frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{4}}$ ✓

$n=2$: $(2+3)(2\cdot2+2)\,P_3(x) = (2\cdot2+3)(2\cdot2+4)\,x\,P_2(x) - (2+1)(2\cdot2+4)P_1(x) \rightarrow$

$\rightarrow 30\,P_3(x) = 4\cdot 14\,x\cdot\left(\frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{4}\right) - 3\cdot 8\cdot 2x \rightarrow$

$\rightarrow P_3(x) = \frac{14\cdot 15x^3 - 14\cdot 3x - 3\cdot 8\cdot 2\cdot x}{30} = 7x^3 - \frac{7}{5}x - \frac{8}{5}x = \boxed{7x^3 - 3x}$ ✓

b) Imposem que sigui exacta per polinomis de grau ≤ 2.

$f(x)=1$: $\int_{-1}^{1}(1-x^2)1\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - (-1) - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = w_0 + w_1 + w_2$

$f(x)=x$: $\int_{-1}^{1}(1-x^2)x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 = w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2$

$f(x)=x^2$; $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^2\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}=w_0x_0^2+w_1x_1^2+w_2x_2^2$

~~Agafem, per exemple, $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$:~~

$$\left.\begin{aligned} w_0+w_1+w_2&=\frac{4}{3}\\ -w_0+w_2&=0\\ w_0+w_2&=\frac{4}{15}\end{aligned}\right\}\ w_0=w_2,\quad 2w_0=\frac{4}{15}\to w_0=w_2=\frac{2}{15}$$

$w_1+\frac{4}{15}=\frac{4}{3}$ $\quad w_1=\frac{16}{15}$

(el b) segueix a baix)

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^m\,dx=\int_{-1}^{1}(x^m-x^{m+2})\,dx=\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{x^{m+3}}{m+3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\begin{cases}0 & \text{si } m \text{ senar}\\ \frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+3} & \text{si } m \text{ parell}\end{cases}$

Hem de veure que $w_0f(x_0)+w_1f(x_1)+w_2f(x_2)=w_0x_0^m+w_1x_1^m+w_2x_2^m=0$

Com hem utilitzat els zeros d'un polinomi ortogonal, per Gauss-Legendre sabem que és exacte per polinomis de grau $\leq \underset{2n+1}{5}$, així que sabem que per a $m=4$ és exacte.

$x_0=-\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3/7}=-x_0$ i $w_0=w_2$ (apartat b))

$w_0x_0^m+w_1x_1^m+w_2x_2^m=w_0x_0^m+0+w_0(-x_0)^m=0$ si m senar, $=w_0x_0^m-w_0x_0^m$

* b) Busquem els zeros de $P_3(x)=7x^3-3x=$
$=x(7x^2-3)$

$P_3(x)=0 \Rightarrow x=0$ o $7x^2-3=0\to x^2=\frac{3}{7}\to x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

Utilitzem $x_0=-\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_1=0$, $x_2=+\sqrt{3/7}$:

$$\left.\begin{aligned} w_0+w_1+w_2&=\frac{4}{3}\\ -\sqrt{\tfrac{3}{7}}\,w_0+\sqrt{\tfrac{3}{7}}\,w_2&=0\\ \frac{3}{7}w_0+\frac{3}{7}w_2&=\frac{4}{15}\end{aligned}\right\}\ w_0=w_2,\quad w_0=\frac{4\cdot7}{15\cdot6}=w_2$$

$\frac{2\cdot4\cdot7}{15\cdot6}+w_1=\frac{4}{3}\to w_1=\frac{4\cdot15\cdot2}{15\cdot6}-\frac{2\cdot4\cdot7}{15\cdot6}=\frac{120-56}{15\cdot6}=\frac{64}{90}=\frac{32}{45}$ ✓

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P4** 2

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

4. Sigui $f(x)$ una funció de la qual coneixem la taula següent:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	3	1
1	2	-2

Taula 1

(a) [1 punt] Trobeu l'abscissa del màxim, x_M, de $f(x)$ en l'interval $I = [0,1]$, aproximant-la per l'abscissa del màxim, $\tilde{x}_M$, del polinomi interpolador d'Hermite $p_3(x)$ obtingut a partir de les dades de la taula 1.

(b) [1 punt] Suposant $f \in \mathcal{C}([x_0, x_1])$, $x_0 < x_1$, sigui $p_3(x)$ el polinomi interpolador d'Hermite en els punts x_0, x_1. Si definim l'error d'aquesta interpolació com $e_3(x) := f(x) - p_3(x)$, deduïu **directament** —sense aplicar cap fórmula de l'error a la interpolació—que, per a $x \in (x_0, x_1)$:

$$e_3'(x) = f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - \xi),$$

on $\xi, \eta(x) \in (x_0, x_1)$.

(c) [1 punt] Si $|f^{(4)}(x)| < A$ i $|f^{(2)}(x)| > B$ $\forall x \in (0,1)$ amb $A, B > 0$ fiteu, en funció d'A i B, l'error comès en l'aproximació de l'abscissa del màxim trobada a l'apartat (a). *Nota:* podeu fer servir el resultat de l'apartat (b).

1

a) $p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad p_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tals que

$p_3(0) = d = 3$ $\quad p_3(1) = a + b + c + d = a + b + 4 = 2 \longrightarrow a + b = -2$

$p_3'(0) = c = 1$ $\quad p_3'(1) = 3a + 2b + c = 3a + 2b + 1 = -2 \longrightarrow 3a + 2b = -3$

$a = 1, \quad b = -3$

$\longrightarrow p_3(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3, \quad p_3'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$$3x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 3}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6} = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

	0	$(0, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3})$	$1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$	$(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$	1
f		creixent	màxim	decreixent	
f'	>0	>0	0	<0	<0

Per tant, en $[0,1)$ només hi ha un màxim de $p_3(x)$,

$\tilde{x}_M = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$