Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P1** 1'3 **Nota P2** 2'4

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 9:00 a 10:30

1. [1½ punts] Sigui $y = Q(x)$ un polinomi de grau n. Demostreu que qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q és nul.la; és a dir, per a qualsevol conjunt de números $x, x_0, \dots, x_n$ es té que $Q[x, x_0, \dots, x_n] = 0$. *Hint:* quin grau té $Q[x, x_0]$?

~~Ho demostrarem per inducció sobre n.~~

~~Si $n=0 \Rightarrow Q(x) = ct \Rightarrow Q[x,x_0] = \frac{Q(x_0)-Q(x)}{x_0-x} = 0$ $Q(x_0)=Q(x)$~~

~~Suposem ara que $\forall j \leq n$ qualsevol diferència dividida d'ordre $j+1$ és zero.~~

~~És a dir, tenim que~~

~~Hipòtesi d'inducció: $\forall j \leq n$ donat un polinomi P d'ordre j, totes les diferències dividides~~

1'3

Tenim que $Q[x, x_0, \dots, x_n] = \dfrac{Q[x_0, x_1, \dots, x_n] - Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x}$ (1)

Si demostrem que $Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$ té grau 0 (és constant)

Aleshores, en particular, $Q[x_n, x_0, \dots, x_{n-1}] = Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$ $\forall x$

A classe hem vist que alterar l'ordre de les $\{x_i\}$ no canvia el resultat de la diferència dividida. Aleshores.

$\forall x$ $Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = Q[x_n, x_0, \dots, x_{n-1}] = Q[x_0, \dots, x_n] \Rightarrow Q[x, x_0, \dots, x_n] \overset{\text{per (1)}}{=} 0$

Volem veure doncs que $Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$ té grau 0.

Ho farem veient (per inducció) que cada diferència dividida que calculem baixa un grau.

Si $j = 1 \Rightarrow Q[x, x_0] = \dfrac{Q(x_0) - Q(x)}{x_0 - x} \begin{matrix} \to \text{grau} \leq n \\ \to \text{grau } 1 \end{matrix} \Big\}$ grau $\leq n-1$

$Q[x, x_0, x_1] = \dfrac{Q[x_0, x_1] - Q[x, x_0]}{x_1 - x} \begin{matrix} \to \text{grau} \leq n-1 \\ \to \text{grau } 1 \end{matrix} \Big\}$ grau $\leq n-2$

Hipòtesi d'inducció: $Q[x, x_0, \dots, x_{j-1}]$ té grau com a màxim $n-j$.
Aleshores,

$Q[x, x_0, \dots, x_j] = \dfrac{Q[x_0, \dots, x_j] - Q[x, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x} \begin{matrix} \to \text{grau} \leq n-j \\ \to \text{grau } 1 \end{matrix} \Big\}$ grau $n-j-1$

Per tant: $Q[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$ té, com a màxim, grau $n-(n-1)-1 = 0$

És a dir, és constant, tal i com buscàvem.

U!! problema 2 al darrere! ☞

2. Considerem el PVI $y' = -50y + 100$, $y(0) = y_0$.

(a) [½ punt] Calculeu la seva solució.

(b) [½ punt] Quant val $L := \lim_{x\to+\infty} y(x)$?

(c) [1 punt] Apliqueu el mètode d'Euler i deduïu una expressió per a y_j en funció només de y_0, h, j.

(d) [½ punt] Per a quins valors de la h es satisfà $\lim_{j\to+\infty} y_j = L$?

$y' = -50y + 100$

a) $y = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$ 0'5

b) $L = \lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} (y_0-2)e^{-50x} + 2 = 2$ 0'5

c)

$$\begin{cases} y'(x) = -50y + 100 = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Euler

$\Rightarrow \boxed{y_j} = y_{j-1} + h\, f(x_{j-1}, y_{j-1}) = y_{j-1} + h(-50y_{j-1} + 100) =$

$= y_{j-1}(1-50h) + 100h = (y_{j-2}(1-50h) + 100h)(1-50h) + 100h$

$= y_{j-2}(1-50h)^2 + 100h((1-50h)+1) = (y_{j-3}(1-50h) + 100h)(1-50h)^2 + 100h((1-50h)+1)$

$= y_{j-3}(1-50h)^3 + 100h((1-50h)^2 + (1-50h) + 1) = \dots =$

$$= \boxed{y_0(1-50h)^j + 100h\sum_{i=0}^{j-1}(1-50h)^i}$$

1

d) $\lim_{j\to\infty} y_j = \lim_{j\to\infty} y_0(1-50h)^j + 100h\sum_{j=0}^{j-1}(1-50h)^i$ 0'4

Si volem $\lim_{j\to\infty} y_j = L$ cal que $|1-50h| < 1 \Rightarrow \frac{1}{50} < h < \frac{2}{50}$ *

En tal cas, $\lim_{j\to\infty} y_j = 100h\sum_{i=0}^{\infty}(1-50h)^i = 100h\frac{1}{1-(1-50h)} = 2 = L$

Per tant, $\forall h$ tq $\frac{1}{50} < h < \frac{2}{50}$, $\lim_{j\to\infty} y_j = L$.

* La condició $|1-50h| < 1$ fa que $\lim_{j\to\infty}(1-50h)^j = 0$ i que la sèrie $\sum_{i=0}(1-50h)^i$ convergeix.

0.8+0.7+0.2=1.7

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P3**

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

3. Els polinomis de Jacobi de paràmetres (α,β), $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, on el subíndex n indica el grau del polinomi, són ortogonals relativament al pes $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Considerem el cas $\alpha = \beta = 1$ i simplifiquem la notació anomenant-los simplement $P_n(x) = P_n^{(1,1)}(x)$. Si s'agafa la normalització $P_n(1) = n+1$ aquests polinomis verifiquen: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 2x$, la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x^2)} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+1}\right],$$

i la recurrència

$$(n+3)(2n+2)P_{n+1}(x) = (2n+3)(2n+4)xP_n(x) - (n+1)(2n+4)P_{n-1}(x).$$

(a) [1 punt] Calculeu els polinomis $P_n(x)$ per a $n = 2, 3$.

(b) [1 punt] Trobeu la fórmula de quadratura gaussiana de tres punts associada a aquesta família de polinomis ortogonals

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, f(x)\, dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Hint: per a trobar els pesos w_0, w_1 i w_2 imposeu que la fórmula sigui exacta quan $f(x)$ és un polinomi de grau ≤ 2.

(c) [1 punt] Comproveu que la fórmula és exacta per a qualsevol monomi $f(x) = x^m$ de grau senar, i que ho és també per a $m = 4$ però no si $m = 6$.

a) $P_0(x) = 1$

$P_1(x) = 2x$

$P_2(x)$: $(1+3)(2\cdot 1+2)P_2(x) = (2\cdot 1+3)(2\cdot 1+4)x\cdot 2x - (1+1)(2\cdot 1+4)\cdot 1$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{60x^2-12}{16} = \frac{15x^2-3}{4}}$$ ✓

$P_3(x)$ $(2+3)(2\cdot 2+2)P_3(x) = (2\cdot 2+3)(2\cdot 2+4)xP_2(x) - (2+1)(2\cdot 2+4)P_{n-1}(x)$

$$\boxed{P_3(x)} = \frac{56xP_2(x) - 48x}{30} = \frac{1}{15}\cdot(105x^3 - 21x - 24x) =$$

$$= \boxed{(5x^3 - 3x)}$$ NO

b)

b) $\int_{-1}^{1} (1-x)^2 f(x) \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$ $\qquad (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$

Imposem exactitud per $f(x) = 1, x, x^2$

$f(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} 1-x^2 \, dx = \frac{4}{3} = w_0 + w_1 + w_2$$

$f(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)x = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)x^2 = -\frac{4}{15} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$$

Per trobar la quadratura de Gauss cal prendre com a abcisses els zeros del polinomi $P_3(x)$.

$$\boxed{x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} = w_0 + w_1 + w_2 \\ 0 = \sqrt{\frac{3}{5}}(-w_0 + w_2) \Rightarrow w_0 = w_2 \\ -\frac{4}{15} = (w_0 + w_2)\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\frac{-2}{15} = w_0 = w_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} = w_0 - \frac{4}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w_0 = \frac{24}{15}}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x)\, dx = \frac{1}{15}\left(-2 f(x_0) + 24 f(x_1) - 2 f(x_2)\right)$$

Amb $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$; $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $f(x) = x^m$ m senar

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) x^m \, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{x^m - x^{m+2}}_{\text{funció senar}} = 0 = \frac{1}{15}\left(+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{+m/2} + 24\cdot 0 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{-m/2}\right)$$

$m = 4$

$f(x) = x^4$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)x^4 \, dx = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{4}{35} = \frac{1}{15} \cdot (6 \cdot 3^2 -$$

No em dona exacta, dec haver fet un error.

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P4** 2

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

4. Sigui $f(x)$ una funció de la qual coneixem la taula següent:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	3	1
1	2	-2

Taula 1

0 3
0 3 > 1 > -2 > +1
1 2 > -1 > -1
1 2 > -2

(a) [1 punt] Trobeu l'abscissa del màxim, x_M, de $f(x)$ en l'interval $I=[0,1]$, aproximant-la per l'abscissa del màxim, $\widetilde{x}_M$, del polinomi interpolador d'Hermite $p_3(x)$ obtingut a partir de les dades de la taula 1.

(b) [1 punt] Suposant $f \in \mathcal{C}([x_0,x_1])$, $x_0 < x_1$, sigui $p_3(x)$ el polinomi interpolador d'Hermite en els punts x_0, x_1. Si definim l'error d'aquesta interpolació com $e_3(x) := f(x) - p_3(x)$, deduïu **directament** —sense aplicar cap fórmula de l'error a la interpolació— que, per a $x \in (x_0,x_1)$:

$$e_3'(x) = f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi),$$

on $\xi, \eta(x) \in (x_0,x_1)$.

(c) [1 punt] Si $|f^{(4)}(x)| < A$ i $|f^{(2)}(x)| > B$ $\forall x \in (0,1)$ amb $A, B > 0$ fiteu, en funció d'A i B, l'error comès en l'aproximació de l'abscissa del màxim trobada a l'apartat (a). *Nota:* podeu fer servir el resultat de l'apartat (b).

(a) Polinomi interpolador d'Hermite:

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2$$
$$+ f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$

1

$$= 3 + x - 2x^2 + x^2(x-1) = 3 + x - 3x^2 + x^3$$

Busquem el màxim:

$$p_3'(x) = 1 - 6x + 3x^2$$
$$p_3'(x) = 0 = 1 - 6x + 3x^2 \qquad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \to 3 - \sqrt{6}$$

És l'única solució entre 0 i 1

~~$p_3(1) = 3 + 1 - 1 - 1 = 2$~~
~~$p_3(0) = 3$~~
~~Com que la derivada no s'anul·la~~

$$p_3''(x) = -6 + 6x$$

$$p_3''(3 \pm \sqrt{6}) = -6 + 6(3-\sqrt{6}) < 0$$

Per tant tenim $x_M = 3 - \sqrt{6}$ com a abcissa del màxim.

b) Sabem que $f'(x)$ i $p_3'(x)$ coincideixen almenys en 0 i 1. Vegem que també coincideixen en un tercer punt ξ.

?

Aleshores, $p_3'(x)$ és el polinomi interpolador de grau 3 de $f'(x)$.

Per tant, l'error $e_3' = f'(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi)$

0

c) Tenim $|f^{(4)}(x)| < A$ i $|f^{(2)}(x)| > B$

Per l'apartat (b):

$$\varepsilon_3'(x) = f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi)$$

Avaluem: $$|\varepsilon_3'(x_M)| = |f'(x_M) - \cancel{p_3'(x_M)}^{\to 0}| = \frac{|f^{(4)}(\eta)|}{3!}\underbrace{|(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi)|}_{\leq 1} \leq \frac{A}{3!}$$

Volem saber $|x^* - x_M|$ on x^* compleix $f'(x^*) = 0$ ~~per~~ ~~[illegible]~~ per ser un màxim.

$$\frac{A}{3!} \geq |f'(x_M) - \cancel{f'(x^*)}^{\to 0}| = f''(c)\,|x^* - x_M| \quad \text{on } c \in (x_M, x^*)$$

Per tant, $|x^* - x_M| \leq \frac{A}{3!}\,\frac{1}{f''(c)} \leq \frac{A}{6B}$

1