Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P1** 1'5 **Nota P2** 2'5

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 9:00 a 10:30

1. [1½ punts] Sigui $y = Q(x)$ un polinomi de grau n. Demostreu que qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q és nul.la; és a dir, per a qualsevol conjunt de números $x, x_0, ..., x_n$ es té que $Q[x, x_0, ..., x_n] = 0$. *Hint:* quin grau té $Q[x, x_0]$?

Ho demostrarem per reducció a l'absurd! Siguin $x, x_0, \dots, x_n$ $n+2$ abscisses ~~d'...~~ diferents. Suposem que $Q[x, x_0, \dots, x_n] \neq 0$. 1'5

Considerem el polinomi $P(t) = Q[x] + Q[x,x_0](t-x) + Q[x,x_0,x_1](t-x)(t-x_0) + \dots + Q[x,x_0,\dots,x_n](t-x)(t-x_0)\cdots(t-x_{n-1})$. Aquest polinomi té grau $n+1$ (perquè $(t-x)(t-x_0)\cdots(t-x_k)$ té grau $k+2$ * i, com que $Q[x,x_0,\dots,x_n] \neq 0$, $Q[x,x_0,\dots,x_n](t-x)(t-x_0)\cdots(t-x_{n-1})$ és l'únic polinomi de grau $n+1$ dins l'expressió de $P(t)$ i cap altre pot anul·lar el terme de grau $n+1$), i interpola Q en les abscisses $x, x_0, \dots, x_n$. Prenem ara $R(t) = P(t) - Q(t)$. $R(t)$ té com a molt grau $n+1$ i té $n+2$ zeros, ja que $R(x) = P(x) - Q(x) = Q(x) - Q(x) = 0$, i $R(x_i) = 0$ pel mateix argument. No obstant, $n+2$ punts determinen de manera unívoca ~~els~~ coeficients d'un polinomi de grau $\leq n+1$, de manera que, com que el polinomi $T(t) \equiv 0$ compleix $T(x) = 0$ i $T(x_i) = 0$, tenim $R(x) \equiv 0$. Però això vol dir $P(x) - Q(x) = 0$ i, per tant, $P(x) = Q(x)$, cosa que és impossible perquè P té grau $n+1$ i Q té grau n.

* Per si no es veu clar, diu "i, com que $Q[x,x_0,\dots,x_n] \neq 0$,"

Ull! problema 2 al darrere! ☞

2. Considerem el PVI $y' = -50y + 100$, $y(0) = y_0$.

(a) [1/2 punt] Calculeu la seva solució.

(b) [1/2 punt] Quant val $L := \lim_{x\to+\infty} y(x)$?

(c) [1 punt] Apliqueu el mètode d'Euler i deduïu una expressió per a y_j en funció només de y_0, h, j.

(d) [1/2 punt] Per a quins valors de la h es satisfà $\lim_{j\to+\infty} y_j = L$?

a) En primer lloc, trobem la solució general de $y' = -50y + 100$. La solució de l'EDO homogènia és ce^{-50t} per a $c \in \mathbb{R}$ i una solució particular és $y = 2$ (en efecte, $0 = 2' = -50\cdot 2 + 100$). Per tant, la solució general serà $\{2 + ce^{-50t} \mid c \in \mathbb{R}\}$. Imposem ara que $y(0) = y_0$: obtenim $y_0 = 2 + c \Rightarrow c = y_0 - 2$. Així doncs, la solució és $y(t) = 2 + (y_0 - 2)e^{-50t}$.

0'5

b) Si $y_0 = 2$, aleshores $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$. Si $y_0 \neq 2$, tenim $\lim_{x\to+\infty} 2 + (y_0-2)e^{-50t}$

$= 2 + \lim_{x\to+\infty} (y_0 - 2)\underbrace{e^{-50t}}_{0} = 2$.

0'5

c) El mètode d'Euler diu $y_j = y_{j-1} + h f(x_{j-1}, y_{j-1})$, $j>0$. En el nostre cas, $y_j = y_{j-1} + h(-50 y_{j-1} + 100) = y_{j-1} + (-50h) y_{j-1} + 100h =$

$= (1 - 50h) y_{j-1} + 100h$. Vegem que $y_j = (1-50h)^j y_0 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} (1-50h)^i\right) 100h$:

En efecte, per inducció:

- Si $j = 1$, $y_1 = (1-50h) y_0 + 100h = y_0 + h(-50y_0 + 100)$
- Si $j > 1$, $y_j = (1-50h) y_{j-1} + 100h = (1-50h)\left[(1-50h)^{j-1} y_0 + 100h \sum_{i=0}^{j-2} (1-50h)^i\right]$ $+ 100h = (1-50h)^j y_0 + 100h\left(1 + \sum_{i=0}^{j-2} (1-50h)^{i+1}\right) = (1-50h)^j y_0 + 100h \sum_{i=0}^{j-1} (1-50h)^i$

Si $h \neq \frac{1}{50}$, tenim $y_j = (1-50h)^j y_0 + 100h \sum_{i=0}^{j-1} (1-50h)^i = (1-50h)^j y_0 + 100h \dfrac{1-(1-50h)^j}{50h} =$

$= (1-50h)^j y_0 + 2(1 - (1-50h)^j) = (1-50h)^j (y_0 - 2) + 2$

1

Si $h = \frac{1}{50}$, tenim $y_j = 2 \ \forall j$.

d) Si $y_0 = 2$, per l'apartat anterior, $y_j = 2 \ \forall j$ i tenim $y_j \xrightarrow[j\to\infty]{} L \ \forall h$. 0'5

Si $y_0 \neq 2$, si $h \in (0, \frac{2}{50})$, tenim $|1 - 50h| < 1$ i per tant $(1-50h)^j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, així que $y_j \xrightarrow[j\to\infty]{} L$. Si $h = \frac{2}{50}$, tenim $y_j = (-1)^j (y_0 - 2) + 2$ i la successió va alternant. Si $h > \frac{2}{50}$, $|1 - 50h| > 1$ i la successió divergeix.

La única manera que tendís al límit seria $\begin{cases} (y_0 - 2) + 2 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \text{ !! (estem suposant } y_0 \neq 2) \\ (2 - y_0) + 2 = 2 \end{cases}$

1+1+1=3

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P3**

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

3. Els polinomis de Jacobi de paràmetres (α,β), $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, on el subíndex n indica el grau del polinomi, són ortogonals relativament al pes $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Considerem el cas $\alpha=\beta=1$ i simplifiquem la notació anomenant-los simplement $P_n(x) = P_n^{(1,1)}(x)$. Si s'agafa la normalització $P_n(1) = n+1$ aquests polinomis verifiquen: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=2x$, la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x^2)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^{n+1}\right],$$

i la recurrència

$$(n+3)(2n+2)P_{n+1}(x) = (2n+3)(2n+4)xP_n(x) - (n+1)(2n+4)P_{n-1}(x).$$

(a) [1 punt] Calculeu els polinomis $P_n(x)$ per a $n=2,3$.

(b) [1 punt] Trobeu la fórmula de quadratura gaussiana de tres punts associada a aquesta família de polinomis ortogonals

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Hint: per a trobar els pesos w_0, w_1 i w_2 imposeu que la fórmula sigui exacta quan $f(x)$ és un polinomi de grau ≤ 2.

(c) [1 punt] Comproveu que la fórmula és exacta per a qualsevol monomi $f(x)=x^m$ de grau senar, i que ho és també per a $m=4$ però no si $m=6$.

a) Sabem que $P_0(x)=1$, $P_1(x)=2x$. Amb això,

• Si $n=1$:

$(n+3)(2n+2)P_{n+1}(x) = 4\cdot 4\, P_2(x) = (2n+3)(2n+4)xP_n(x) - (n+1)(2n+4)P_{n-1}(x)$

$= 5\cdot 6\, x P_1(x) - 2\cdot 6\, P_0(x) \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{16}(30x\cdot 2x - 12\cdot 1) = \frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{4}$

• Si $n=2$: $5\cdot 6\, P_3(x) = 7\cdot 8\, x P_2(x) - 3\cdot 8\, P_1(x) = 56\left(\frac{15}{4}x^3 - \frac{3}{4}x\right) - 24\cdot 2x$

$\Rightarrow P_3(x) = \frac{1}{30}\left(56\left(\frac{15}{4}x^3 - \frac{3}{4}x\right) - 24\cdot 2x\right) = \frac{1}{15}\left(28\left(\frac{15}{4}x^3 - \frac{3}{4}x\right) - 24x\right) =$

$= \frac{28}{4}x^3 - \frac{28\cdot 3}{4\cdot 15}x - \frac{24}{15}x = 7x^3 - \frac{21x + 24x}{15} = 7x^3 - 3x$

b) Els zeros de $P_3(x)$ són $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{7}}$. En efecte, $P_3(x) = x(7x^2-3)$ i les arrels de $7x^2-3$ són $x^2 = \frac{3}{7} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$. Aquestes són les abscisses que haurem de prendre. Si imposem igualtat per a polinomis de grau ≤ 2, tindrem igualtat per als polinomis 1, x i x^2:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = w_0 + w_1 + w_2$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)x\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 = w_0\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + w_2\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^2\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}-\frac{2}{5} = \frac{4}{15} = \frac{3}{7}w_0 + \frac{3}{7}w_2.$$

de la segona equació tenim $w_0 = w_2$. De la tercera,

$$\frac{4}{15} = \frac{3\cdot 2}{7}w_0 \Rightarrow w_0 = \frac{28}{6\cdot 15} = \frac{14}{45} = w_2$$ i, de la primera,

$$w_1 = \frac{4}{3} - \frac{28}{45} = \frac{60-28}{45} = \frac{32}{45}.$$

c) si $f(x) = x^m$ amb m senar, aleshores $(1-x^2)x^m$ és una funció senar i, per tant, $\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^m\,dx = 0$.

tindrem, a més, $0 = w_0(-1)^m\left(\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right)^{m-1} + \left(\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right)^{m} w_2 = 0$, ja que $w_0 = w_2$.

Per a $m=4$: $$\int_{-1}^{1} x^4 - x^6\,dx = \frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}-\frac{2}{7} =$$

$$= \frac{4}{35} = \frac{9}{49}\cdot\frac{14}{45} + \frac{9}{49}\cdot\frac{14}{45} = \frac{2\cdot 14}{49\cdot 5} = \frac{4}{7\cdot 5} = \frac{4}{35}$$

Per a $m=6$, $$\int_{-1}^{1} x^6 - x^8\,dx = \frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{7}-\frac{2}{9} =$$

$$= \frac{4}{63} \neq \frac{27}{7^3}\cdot\frac{14}{45} + \frac{27}{7^3}\cdot\frac{14}{45} = \frac{2\cdot 14\cdot 27}{7^3\cdot 45} = \frac{2\cdot 2\cdot \overset{=3^3}{27}}{7^2\cdot 3^2\cdot 5} =$$

$= \frac{4\cdot 3}{49\cdot 5}$ * ~~...~~ no són iguals perquè $\frac{2^2}{7\cdot 3^2} \neq \frac{3\cdot 2^2}{7^2\cdot 5}$

(és a dir, les fraccions irreductibles són diferents).

Càlcul Numèric (200153). Examen Final Curs 2020-21. **Nota P4** 2.25

COGNOM(s) (en majúscules!): [redacted]

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

4. Sigui $f(x)$ una funció de la qual coneixem la taula següent:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	3	1
1	2	-2

Taula 1

(a) [1 punt] Trobeu l'abscissa del màxim, x_M, de $f(x)$ en l'interval $I=[0,1]$, aproximant-la per l'abscissa del màxim, $\widetilde{x}_M$, del polinomi interpolador d'Hermite $p_3(x)$ obtingut a partir de les dades de la taula 1.

(b) [1 punt] Suposant $f \in \mathcal{C}([x_0,x_1])$, $x_0 < x_1$, sigui $p_3(x)$ el polinomi interpolador d'Hermite en els punts x_0, x_1. Si definim l'error d'aquesta interpolació com $e_3(x) := f(x) - p_3(x)$, deduïu **directament** —sense aplicar cap fórmula de l'error a la interpolació—que, per a $x \in (x_0,x_1)$:

$$e_3'(x) = f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi),$$

on $\xi, \eta(x) \in (x_0,x_1)$.

(c) [1 punt] Si $|f^{(4)}(x)| < A$ i $|f^{(2)}(x)| > B$ $\forall x \in (0,1)$ amb $A,B>0$ fiteu, en funció d'A i B, l'error comès en l'aproximació de l'abscissa del màxim trobada a l'apartat (a). *Nota:* podeu fer servir el resultat de l'apartat (b).

a) Calculem, en primer lloc, el polinomi interpolador d'Hermite. Apliquem diferències dividides generalitzades:

$$\begin{array}{llllll} 0 & -\ 3 & & & & \\ & & 1 & & & \\ 0 & -\ 3 & & \frac{-1-1}{1}=-2 & & \\ & & \frac{2-3}{1}=-1 & & \frac{-1+2}{1}=1 & \\ 1 & -\ 2 & & \frac{-2+1}{1}=-1 & & \\ & & -2 & & & \\ 1 & -\ 2 & & & & \end{array}$$

$\Rightarrow H(x) = 3 + x - 2x^2 + x^2(x-1)$

1

Derivem el polinomi i busquem zeros: $H'(x) = 1 - 4x + 2x(x-1) + x^2$
$= 1 - 4x - 2x + 2x^2 + x^2 = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{\cancel{3}\,6} = 2 \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$

$2+\sqrt{\frac{8}{3}} \notin [0,1]$, però $2-\sqrt{\frac{8}{3}} = 2-2\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3}$ i tenim $2-2\sqrt{\frac{2}{3}} \in [0,1]$.

Vegem que és un màxim: fent la segona derivada, obtenim
$H''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$ i tenim $H''\left(2-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6\left(1-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, que és menor que 0 ja que $1-2\sqrt{\frac{2}{3}} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$, fet que hem vist abans. Per tant, és un màxim de $p_3(x)$.

b) Com que $f-p$ té dos zeros en 0 i 1, existeix $\xi \in (0,1)$ tal que $(f'-p')(\xi)=0$. Així doncs, per a demostrar la fórmula, ~~per~~ considerem l'expressió $f'(t)-P_3'(t)-\alpha(x)(t-x_0)(t-x_1)(t-\xi)$, on $\alpha(x)$ és una constant tal que l'expressió és 0 quan $t=x$. Aquesta expressió té 4 zeros: x, x_0, x_1 i ξ. Per tant, té quatre canvis de signe, cosa que implica que la seva derivada té 3 zeros. Això ho podem repetir fins que ho haguem derivat 3 vegades, on tindrem que

1

$f^{4)}(t) - 3!\,\alpha(x)$ té un zero en $(0,1)$. Si denotem $\eta(x) \in (0,1)$ com aquest zero, tindrem $f^{4)}(\eta(x)) = 3!\,\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = \frac{f^{4)}(\eta(x))}{3!}$

Així doncs, tenim $f'(x) - P_3'(x) - \frac{f^{4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi) = 0$

$$\Rightarrow f'(x) - P_3'(x) = \frac{f^{4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi).$$

c) Per a calcular ~~una~~ fita de l'error, fem

$$|f(x)-P_3(x)| = |f(x)-f(0)-P_3(x)+P_3(0)| = \left|\int_0^x f'(t)-P_3'(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^x |f'(t)-P_3'(t)|\,dt = \int_0^x \left|\frac{f^{4)}(\eta(t))}{3!}\right| |(x-0)(x-1)(x-\xi)|\,dx \leq \frac{A(x-0)}{3!}\int_0^x |t(t-1)(t-\xi)|\,dt$$

$$\leq \frac{A}{3}\int_0^x |t(t-1)(t-\xi)|\,dt = \frac{A}{3}\left(\int_0^\xi t(t-1)(t-\xi)\,dt - \int_\xi^x t(t-1)(t-\xi)\,dt\right) \leq$$

$$\overset{*}{\leq} \frac{A}{3}\left(\alpha(\alpha-1)\int_0^\xi (t-\xi)\,dt\right) \overset{*}{\leq} \frac{A}{12}\left.\frac{(t-\xi)^2}{2}\right|_0^\xi = \frac{A\,\xi^2}{24} < \frac{A}{24}$$

$t-\xi$ no canvia de signe a les integrals

$\Rightarrow \exists \alpha$ tq $\int_0^\xi t(t-1)(t-\xi)\,dt = \alpha(\alpha-1)\int_0^\xi (t-\xi)\,dt$

$|\xi| \leq 1$

0.25

$*$ $x(x-1)$ té un màxim a $x=\frac{1}{2}$

fiteu l'error comès en l'aproximació de l'abscissa del màxim