COGNOM(s) (en majúscules!): ______________________ Nom: ______________________

Dilluns 02/11/2020 de 09:00 a 9:30

1. [2 punts] Considerem el polinomi $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, amb coeficients reals o complexes i amb $a_0 \neq 0$. Sigui $z \in \mathbb{C}$ una de les seves arrels. Demostreu que es verifiquen

   (a) [1 punt] La *regla de Lagrange:* $|z| \leq \text{màx}\left\{1, \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{a_0}\right|\right\}$.

   (b) [1 punt] La *regla de Cauchy:* $|z| \leq 1 + \text{màx}\left\{\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right|\right\}$.

   Solució: Vegeu les transparències de classe del tema *Zeros de Funcions*, pàgina 29.

COGNOM(s) (en majúscules!): ______________________________ Nom: ____________________

Dilluns 02/11/2020 de 9:30 a 10:15

1. [4 punts] Donada una xarxa $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ i una funció $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, denotem $f_i = f(x_i)$, $i = 0 \div n$, i considerem l'spline cúbic que compleix

$$\begin{aligned} s(x_i) &= f_i, \qquad i = 0 \div n, \\ s'(a) &= f'(a), \\ s'(b) &= f'(b). \end{aligned}$$

   (a) [2 punts] Demostreu que es té

$$\int_a^b (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x - \int_a^b (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

   Hint. $(A-B)^2 = A^2 - B^2 - 2(A-B)B$.

   (b) [2 punts] Deduïu que tota $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ que interpoli f (és a dir que $u(x_i) = f_i$, $i = 0, 1 \ldots, n$) i a més compleixi $u'(a) = f'(a)$, $u'(b) = f'(b)$, satisfà la desigualtat

$$\int_a^b (u''(x))^2 \, \mathrm{d}x \geq \int_a^b (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x,$$

   assolint-se la igualtat només si $u = s$. Aquesta és la propietat de *mínima energia* dels splines amb derivada fixada als extrems.

Solució:

(a) Desenvolupant el terme de la dreta de la igualtat s'obté,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2 \, \mathrm{d}x &= \int_a^b (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x + \int_a^b (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_a^b f''(x)s''(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x - \int_a^b (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_a^b (f''(x) - s''(x))\, s''(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x - \int_a^b (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ja que

$$\int_a^b (f''(x) - s''(x))\, s''(x) \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

Per comprovar-ho dividim la integral (1) en una suma d'integrals sobre els subintervals que defineixen l'spline: $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ i integrem per parts,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f''(x) - s''(x))\, s''(x) \, \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x) - s''(x))\, s''(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left((f'(x_{i+1}) - s'(x_{i+1}))\, s''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - s'(x_i))\, s''(x_i) \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x) - s'(x))\, s'''(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

i ens adonem que els termes de la primera suma a la dreta de la segona igualtat cancel·len dos a dos, conservant-se només el corresponents a $x_0 = a$ (al terme amb $i = 0$) i a $x_n = b$ (al terme amb $i = n-1$), i.e.,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1} \left((f'(x_{i+1}) - s'(x_{i+1}))\, s''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - s'(x_i))\, s''(x_i) \right) = \\ &\cancel{(f'(x_1) - s'(x_1))\, s''(x_1)} - (f'(a) - s'(a))\, s''(a) + \cancel{(f'(x_2) - s'(x_2))\, s''(x_2)} - \cancel{(f'(x_1) - s'(x_1))\, s''(x_1)} + \ldots \\ &\qquad \cdots + \cancel{(f'(x_{n-1}) - s'(x_{n-1}))\, s''(x_1)} + (f'(b) - s'(b))\, s''(b) - \cancel{(f'(x_{n-1}) - s'(x_{n-1}))\, s''(x_{n-1})}, \end{aligned}$$

llavors, per les propietats de l'spline donades a l'enunciat ($s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$; $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$) i, per tractar-se d'un spline cúbic: $s(x) = s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, $s'''(x) = s_i'''(x) = 6a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f''(x) - s''(x))\, s''(x)\, \mathrm{d}x &= \overbrace{(f'(b) - s'(b))}^{\substack{0\\ \parallel}}\, s''(b) - \overbrace{(f'(a) - s'(a))}^{\substack{0\\ \parallel}}\, s''(a) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x) - s'(x))\, s'''(x)\, \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} 6a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x) - s'(x))\, \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} 6a_i \Big(\underbrace{f(x_{i+1}) - s(x_{i+1})}_{\substack{\parallel\\ 0}} - \underbrace{(f(x_i) - s(x_i))}_{\substack{\parallel\\ 0}} \Big) = 0.
\end{aligned}$$

(b) Agafant $f = u$ en l'equació de l'apartat (a) es segueix

$$\int_a^b (u''(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_a^b (s''(x))^2\, \mathrm{d}x + \int_a^b (u''(x) - s''(x))^2\, \mathrm{d}x \geq \int_a^b (s''(x))^2\, \mathrm{d}x$$

que és la desigualtat proposada. Comprovem que la igualtat es s'assoleix només quan $u = s$. En efecte; si es dona la igualtat, per l'apartat (a) —amb $f = u$—es té:

$$\int_a^b (u''(x) - s''(x))^2\, \mathrm{d}x = 0,$$

d'on, per la continuïtat de u'' i s'' en l'interval $[a, b]$, es segueix que $u''(x) = s''(x)$ i llavors $u(x) = s(x) + \alpha x + \beta$ per a cada $x \in [a, b]$ i amb α, $\beta \in \mathbb{R}$ constants que podem determinar imposant les condicions d'interpolació, i.e.: $u(a) = s(a)$ i $u(b) = s(b)$. Però llavors, del sistema

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta &= 0, \\
\alpha b + \beta &= 0,
\end{aligned}$$

es segueix (puix $a < b$) necessàriament que $\alpha = \beta = 0$, i aleshores $u = s$ en l'interval $[a, b]$. $\square$

COGNOM(s) (en majúscules!): ______________________ Nom: ______________

Dilluns 02/11/2020 de 10:15 a 11:30

2. [4 punts] Considerem la iteració de punt fix a la recta real

$$x_{k+1} = x_k(3 - 3ax_k + a^2x_k^2)$$

amb $a > 0$. Volem fer servir aquesta iteració per calcular $1/a$ amb una fórmula que només fa servir productes, sumes i restes. Aquest era un procediment habitual en els primers ordinadors per calcular quocients com $b/a = b(1/a)$.

(a) [1½ punts] Demostreu que els únics punts fixes són 0, $1/a$ i $2/a$.

(b) [1½ punts] Trobeu l'ordre de convergència i la constant d'error al voltant de l'arrel $\alpha = 1/a$. Comproveu que $x_{k+1} - \alpha = a^2(x_k - \alpha)^3$ (no únicament de forma aproximada en el límit $k \to \infty$).

(c) [½ punt] Demostreu que la successió $(x_k)_{k\geq 0}$ és monòtona creixent si $0 < x_0 < 1/a$ o si $x_0 > 2/a$, i que és monòtona decreixent si $1/a < x_0 < 2/a$. Quin és el límit de $(x_k)_{k\geq 0}$ en cada cas? Es poden veure el resultats d'aquest apartat gràficament?

(d) [½ punt] Si volem calcular $1/a$ a partir de $a > 0$ quin valor inicial x_0 podem agafar perquè la successió $(x_k)_{k\geq 0}$ sigui monòtona creixent? En aquest apartat s'entén que la resposta no pot incloure el càlcul de $1/a$.

Hint. Per als apartats (a) i (c) factoritzeu el polinomi $x(2 - 3ax + a^2x^2)$. Per a l'apartat (c) pot ser útil escriure la relació $x_{k+1} - \alpha = a^2(x_k - \alpha)^3$ com $(1 - ax_{k+1}) = (1 - ax_k)^3$ i fer servir això i la factorització anterior per veure el creixement o decreixement de $(x_k)_{k\geq 0}$.

Solució:

(a) Si α és un punt fix, $\alpha = \alpha(3 - 3a\alpha + a^2\alpha^2)$. Llavors $\alpha(2 - 3a\alpha + a^2\alpha^2) = 0$. Factoritzant el polinomi de segon grau tenim $\alpha(2 - a\alpha)(1 - a\alpha) = 0$.

(b) La funció d'iteració ($x_{k+1} = G(x_k)$) és

$$G(x) = x(3 - 3ax + a^2x^2)$$

i les seves derivades són $G'(x) = 3 - 6ax + 3a^2x^2$, $G''(x) = -6a + 6a^2x$, $G'''(x) = 6a^2$, i la resta són totes zero. Si $\alpha = 1/a$ tenim $G'(\alpha) = G''(\alpha) = 0$, $G'''(\alpha) = 6a^2$, i $G^{(n)}(\alpha) = 0$ per a $n > 3$. Llavors fent servir la serie (finita) de Taylor de G al voltant d'α tenim

$$x_{k+1} - \alpha = G(x_k) - \alpha = G(x_k) - G(\alpha) = \frac{1}{3!}G'''(\alpha)(x_k - \alpha)^3 = a^2(x_k - \alpha)^3.$$

Alternativament, restant $1/a$ a totes dues bandes de la iteració resulta,

$$x_{k+1} - \frac{1}{a} = x_k\left(3 - 3ax_k + a^2x_k^2\right) - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left(a^3x_k^3 - 3a^2x_k^2 + 3ax_k - 1\right) = \frac{1}{a}\left(ax_k - 1\right)^3 = a^2\left(x_k - \frac{1}{a}\right)^3,$$

d'on —de totes dues maneres—es veu que l'ordre de convergència és $p = 3$ i la constant de l'error és $L = a^2$.

(c) $x_{k+1} - x_k = x_k(2 - ax_k)(1 - ax_k)$. Si $0 < x_0 < 1/a$ llavors $1 - ax_0 > 0$ i $2 - ax_0 > 0$. A més de $x_{k+1} - 1/a = a^2(x_k - 1/a)^3$ s'obté que $1 - ax_{k+1} = (1 - ax_k)^3$. Llavors $1 - ax_0 > 0$ implica $1 - ax_k > 0$ i $2 - ax_k > 0$ per a tot $k > 0$. En particular $x_k < 1/a$. Com que $x_{k+1} = x_k + x_k(2 - ax_k)(1 - ax_k)$, si $0 < x_0$ tots els x_k seran positius i, finalment $x_{k+1} - x_k = x_k(1 - 2ax_k)(1 - ax_k) > 0$, es a dir, la successió és monòtona creixent.

Si $1/a < x_0 < 2/a$ llavors $1 - ax_0 < 0$, $2 - ax_0 > 0$. A partir de $1 - ax_{k+1} = (1 - ax_k)^3$ totes les diferències $1 - ax_k$ seran negatives i $x_k > 1/a$. A més

$$\begin{aligned} 2 - ax_{k+1} &= 2 - ax_k(3 - 3ax_k + a^2x_k^2) = 2 - ax_k - ax_k(2 - 3ax_k + a^2x_k^2) \\ &= 2 - ax_k - ax_k(2 - ax_k)(1 - ax_k) = (2 - ax_k)(1 - ax_k(1 - ax_k)) \\ &= (2 - ax_k)(1 + ax_k(ax_k - 1)). \end{aligned}$$

Llavors si $1 - ax_0 < 0$ i $2 - ax_0 > 0$ totes les diferencies $2 - ax_k$ seran positives i $x_{k+1} - x_k = x_k(2 - ax_k)(1 - ax_k) < 0$ per a tot $k \geq 0$.

Anàlogament, si $x_0 > 2/a > 1/a$, $x_{k+1} - x_k = x_k(2 - ax_k)(1 - ax_k) > 0$ per a tot $k \geq 0$.

Per últim, hem vist que l'equació $x_{k+1} - \alpha = a^2(x_k - \alpha)^3$ s'escriu també com $1 - ax_{k+1} = (1 - ax_k)^3$. Llavors,

$$1 - ax_{k+1} = (1 - ax_k)^3 = (1 - ax_{k-1})^9 = \cdots = (1 - ax_0)^{3^{(k+1)}}.$$

Si $0 < x_0 < 2/a$, o equivalentment $|1 - ax_0| < 1$, tindrem $\lim_{k\to\infty}(1 - ax_k) = 0$ i $\lim_{k\to\infty} x_k = 1/a$. Si $x_0 > 2/a$ llavors $1 - ax_0 < -1$ i $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$.

La figura 1 mostra el cas $a = 5.6$ i tres iteracions amb $x_0 = 0.01$, $x_0 = 0.34$, i $x_0 = 0.37$.

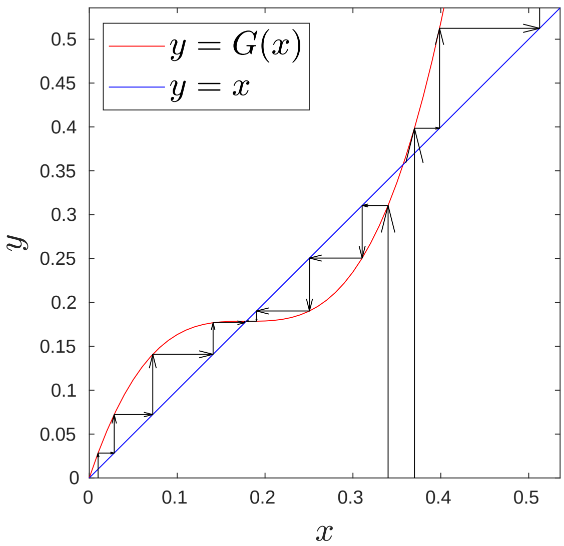

Figura 1

(d) Si $10^n \le a \le 10^{n+1}$ llavors $10^{-(n+1)} \le 1/a \le 10^{-n}$ i podem agafar $x_0 = 10^{-(n+1)} \le 1/a$ que com hem vist abans donaria lloc a una successió convergent cap a $1/a$ de forma monòtona creixent. *Nota:* si x_0 s'ha de representar en un ordinador binari, convindria "encaixar" a entre potències de 2 en comptes d'entre potències de 10, i.e., $2^n \le a \le 2^{n+1}$. Aleshores $2^{-(n+1)} \le 1/a \le 2^{-n}$ i podríem agafar $x_0 = 2^{-(n+1)} \le 1/a$. $\square$