QUALIFICACIÓ
0'25

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

1.-a) Tenim que $(1,0,0,1,2) = (0,0,0,1,1) - (1,0,0,0,1) \Rightarrow$ són l. d.

A més, $\overline{(0,0,0,1,1)} = \overline{0}$. Per tant, ens podem quedar amb $\overline{(1,0,0,0,1)}$, $\overline{(2,1,0,0,1)}$ com a generadors. Aleshores,

$1 \leq \dim (V+W)/_V \leq 2$. Per tant, $\dim V+W = \dim (V+W)/_V + \dim V = \begin{cases} 3 \\ o \\ 4 \end{cases}$

és no nul. A més, per la fórmula de Grassmann.

$1 \leq \dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim (V+W) = 4 - \dim (V+W)$

0'25

Per tant, $\dim (V+W) \neq 4$ ja que $V \cap W$ és no nul ($v \in V$).

Aleshores, $\dim (V+W) = 3$, $\dim (V+W)/_V = 1$: $\dim V \cap W = 1$.

Com $\dim V+W = 1$, prenem $v = (0,0,0,1,1)$ ja que $v \in V$ i $v \in W$: ens queda $\{(0,0,0,1,1)\}$ com a base de $V+W$

b)

$u_3 - u_2 - 7v = (2,1,0,0,1) - (1,0,0,0,1) - 7(0,0,0,1,1) =$

$= (1,1,0,-7,-7) \in V$. Com només tenim un vector

podem prendre doncs la forma lineal que defineix aquest, vector com a base dual $u^* : (V+W)/_V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{(x,y,z,t,\alpha)} \longmapsto x - y - t + \alpha$$

??

QUALIFICACIÓ 3,5

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

3.- 1

a) · Bilineal

$$\langle \lambda p_1(x) + \mu p_2(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} (\lambda p_1(x) + \mu p_2(x)) \cdot q(x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \lambda p_1(x) q(x)\, dx + \int_{-1}^{1} \mu p_2(x) \cdot q(x)\, dx = \lambda \int_{-1}^{1} p_1(x) q(x)\, dx + \mu \int_{-1}^{1} p_2(x) q(x)\, dx =$$

$$= \lambda \langle p_1(x), q(x) \rangle + \mu \langle p_2(x), q(x) \rangle$$

$$\langle p(x), \lambda q_1(x) + \mu q_2(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot (\lambda q_1(x) + \mu q_2(x))\, dx =$$

$$= \lambda \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q_1(x)\, dx + \mu \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q_2(x)\, dx = \lambda \langle p(x), q_1(x) \rangle + \mu \langle p(x), q_2(x) \rangle$$

Aleshores, hem vist que és lineal en les dues components fent servir la linealitat de la integral.

· Simètrica

Volem veure que $\langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle \; \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.

En efecte, com el producte de polinomis és commutatiu tenim que $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx = \int_{-1}^{1} q(x) p(x)\, dx = \langle q(x), p(x) \rangle$.

· Definida positiva

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, dx$$

Tenim doncs que $p^2(x)$ és més gran que $0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, en qualsevol interval d'integració $\int_a^b p^2(x) \geq 0$. Aleshores, $\langle p(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, dx \geq 0$ i a més,

$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, dx = 0 \iff p(x) = 0$ per estar $p(x)$ elevat a 2.

Trobem ara la matriu en base canònica de $\varphi(x) = \langle p(x), q(x) \rangle$ que serà

$$M_{\underline{e}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,x \rangle & \langle 1,x^2 \rangle \\ \langle x,1 \rangle & \langle x,x \rangle & \langle x,x^2 \rangle \\ \langle x^2,1 \rangle & \langle x^2,x \rangle & \langle x^2,x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1,1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = [x]_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2$$

$$\langle 1,x \rangle = \int_{-1}^{1} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\langle 1,x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[x^3/3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\langle x,x \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle x,x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\langle x^2,x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

0.5

b) Volem $p(x)$ t.q. $\langle p(x), 1 \rangle = 0$ i $\langle p(x), x \rangle = 0$. Sigui $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$,

$$\int_{-1}^{1} p(x) \cdot 1 \, dx = \int_{-1}^{1} a_2x^2 + a_1x + a_0 \, dx = \left[\frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_0x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 - \left(-\frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} - a_0\right) = \frac{2a_2}{3} + 2a_0 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p(x) \cdot x \, dx = \int_{-1}^{1} a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x \, dx = \left[\frac{a_2x^4}{4} + \frac{a_1x^3}{3} + \frac{a_0x^2}{2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{a_2}{4} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{2} - \left(\frac{a_2}{4} - \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{2}\right) = \frac{2a_1}{3} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 2 de 2

QUALIFICACIÓ

Assignatura: [redacted]

Data:

A leshores, volem $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ t.q. $a_1 = 0$ i $\frac{2a_2}{3} + 2a_0 = 0$. Per exemple, $p(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

c) Ara tenim que $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ són l.i. (i base per ser $3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$) per ser de diferent grau. A més, són ortogonals entre ells ($x^2 - \frac{1}{3}$ ho és per l'apartat b) i 1 i x ho són per l'apartat a)). Per tant, només cal normalitzar-los per trobar la base ortonormal.

$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{2} \qquad \|x\| = \sqrt{2/3}$

$$\langle x^2 - \tfrac{1}{3}, x^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})^2 = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{1}{9}x \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \left(\frac{-1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right) =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{18-10}{45} = \frac{8}{45} \Rightarrow \|x^2 - \tfrac{1}{3}\| = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

Per tant,

$v_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\sqrt{2/3}}$ i $v_3 = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{8/45}}$ i aquesta és la base ortonormal de E.

d) Sabem per teoria que $E = F \oplus F^{\perp}$ i que $\dim E = \dim F + F^{\perp}$.

A leshores, $\dim F^{\perp} = 3 - 1 = 2$. Per tant busquem dos polinomis linealment independents que siguin ortogonals a x^2.

Un d'ells serà x perquè per a) $\langle x, x^2 \rangle = 0 \Rightarrow x \perp x^2$

Ara cal un $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ t.q. $\langle p(x), x^2 \rangle = 0$.

$$\int_{-1}^{1} p(x)x^2 = \int_{-1}^{1} a_2x^4 + a_1x^3 + a_0x^2\,dx = \left[\frac{a_2x^5}{5} + \frac{a_1x^4}{4} + \frac{a_0x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1a_2}{5} + \frac{1a_1}{4} + \frac{1a_0}{3} - \left(-\frac{a_2}{5} + \frac{a_1}{4} - \frac{a_0}{3}\right) = \frac{2a_2}{5} + \frac{2a_0}{3} = \frac{6a_2 + 10a_0}{15} = 0$$

$\Rightarrow 6a_2 + 10a_0 = 0$. Si $a_2 = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{-6a_2}{10} = \frac{-6}{10}$

A leshores, podem prendre $p(x) = x^2 - \frac{6}{10}$

Per tant, $F^\perp = [x, x^2 - \frac{6}{10}]$ i en efecte aquests dos polinomis són l.i per ser de diferent grau.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 2

QUALIFICACIÓ: 1'75

Assignatura: [redacted]

Estudiant/a:

Data:

4.-

$$f(w_1) = A w_1 = \begin{pmatrix} a+b+2c \\ a+b+2c \\ a+b+2c \\ a+b+2c \end{pmatrix} = (a+b+2c)\, w_1$$

$$f(w_2) = A w_2 = \begin{pmatrix} a+b-2c \\ a+b-2c \\ 2c-a-b \\ 2c-a-b \end{pmatrix} = (a+b-2c)\, w_2$$

0'5

$$f(w_3) = A w_3 = \begin{pmatrix} a-b+c-c \\ b-a+c-c \\ c-c+a-b \\ c-c+b-a \end{pmatrix} = (a-b)\, w_3$$

Aleshores, tenim que $\lambda_1 = a+b+2c$, $\lambda_2 = a+b-2c$, $\lambda_3 = a-b$ són valors propis de A. Per trobar l'altre valor propi farem servir la traça de A.

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \Rightarrow \lambda_4 = 4a - a - b - 2c - a - b + 2c - a + b =$

$= a - b$. Per tant, $\lambda_3 = \lambda_4$ i té multiplicitat 2.

Sabem que $w_3 = (1,-1,1,-1)$ ara cal trobar un altre vector propi de valor propi $a-b$. Notem que $w_4 = (-1,1,-1,1)$ és vep de vap $a-b$. En efecte,

$w_4 = -w_3$

$$A w_4 = \begin{pmatrix} -a+b-c+c \\ -b+a-c+c \\ -c+c-a+b \\ -c+c-b+a \end{pmatrix} = a-b\,(-1,1,-1,1).$$

A més, $\cancel{\langle w_3, w_4\rangle = 0}$ $\Rightarrow$ w_3 i w_4 són ortagonals. Els altres veps també són ortagonals i l.i. per ser de diferent vap. Aleshores, només cal normalitzar els vectors per obtenir la base ortonormal.

Tots els vector tenen norma 2. Alehores, la base ortonormal de vectors propis és $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}),(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2})\}$

b) Observem que A és simètrica, per tant $S = A^t A = A^2$. Per tant, tenim que si λ és vap de $A \Rightarrow \lambda^2$ és vap de A^2. Alehores, com $a > b > c > 0$ tenim que tots els valors propis de A són positius. Només cal ordenar-los per ordre decreixent i prendre'ls com a valors singulars.

$\lambda_1 = a + b + 2c \Rightarrow \lambda_1^2 = (a+b+2c)^2 \Rightarrow \sigma_1 = a+b+2c$

notem que $\lambda_2 > \lambda_3 \Leftrightarrow a+b-2c > a-b \Leftrightarrow a+b-2c-a+b > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2b > 2c \Leftrightarrow b > c$.

Alehora, $\lambda_2 = a+b-2c \Rightarrow \lambda_2^2 = (a+b-2c)^2 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2^2} = a+b-2c$

$\lambda_3 = \lambda_4 = a-b \Rightarrow \lambda_3^2 = \lambda_4^2 = (a-b)^2 \Rightarrow \sigma_3 = \sigma_4 = a-b$.

Ara cal prendre les columnes de V com els vectors d'una base de valors propis de $S = A^t A = A^2$, podem prendre doncs la base que hem trobat a l'apartat a) que a més és ortonormal, com és necessari. De fet, l'únic que estem fent és un canvi de base prenent com a bases la canònica i la base de veps ortonormals.

Per tant, només cal prendre $U = V$.

Alehora, $A = A_{\underline{v}\to\underline{e}}\, D\, A_{\underline{e}\to\underline{v}} = V D V^{-1} \overset{V \text{ ortogonal}}{=} V D V^t = U D V^t$

on $\underline{v}$ és la base de veps, $\underline{e}$ és la base canònica i

$$U = V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b+2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} = D$$

1'4

Assignatura:

Estudiant/a: [redacted]

Data:

c) Si $a=4$, $b=2$, $c=1$. Aleshores,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

. Pel Teorema d'Eckhart-Young,

la millor aproximació de A a una matriu de rang 2 és

$$U \begin{pmatrix} a+b+2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

0'25