UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ: 0'75

Assignatura: Àlgebra

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Exercici 1

$\nexists$ $V \subseteq \mathbb{R}^5$ $W \subseteq \mathbb{R}^5$ $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} W = 2$

a) $v = (0,0,0,1,1) \in V \cap W$

$\operatorname{Dim}\left({(V+W)}/{V} \right) = \operatorname{Dim} V+W - \operatorname{Dim} V$

? $1 = \operatorname{Dim} V+W - 2$

$\operatorname{Dim} V+W = 3$

Grassmann

$\operatorname{Dim} V+W = \operatorname{Dim} V + \operatorname{Dim} W - \operatorname{Dim} V \cap W$

$3 = 2 + 2 - \operatorname{Dim} V \cap W$

$\operatorname{Dim} V \cap W = 1.$

0'25

Base $V+W \Rightarrow B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,0,0,0,1), (2,1,0,0,1), (1,0,0,1,2)\}$

b) $u_3 - u_2 - 7v \in V$ $(2,1,0,0,1) - (1,0,0,0,1) - 7(0,0,0,1,1) =$

$= (1,1,0,-7,-7) \in V$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -7 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } 2 \Rightarrow V = \{(1,1,0,-7,-7), (0,0,0,1,1)\}$$

complementari de V respecte $V+W$ (~~base del quocient~~ ${(V+W)}/{V}$)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 14 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 15 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 13 & 8 \end{array}\right)$$

Base de $\left(V+W/V\right) = \left\{ \overline{(1,0,0,0,1)} \right\} = \left\{ \bar{u}_1 \right\}$

Base de $\left(\frac{V+W}{V}\right)^* = \left\{ \overline{(1,0,0,0,1)}^* \right\} = \left\{ \bar{u}_1^* \right\}$ 0'5

on $\overline{(1,0,0,0,1)}^*$ envia a l'1 tots els element de la classe del $(1,0,0,0,1)$ i al 0 tots els altres

$$\bar{u}_1^*(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_1 - u \in V+W \\ 0 & \text{si } u_1 - u \notin V+W \end{cases}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 2

QUALIFICACIÓ
~~1.7~~
Rev.

Assignatura: Àlgebra

Estudiant: [redacted]

Data:

Exercici 2

$B := \{u, f(u), \dots, f^{m-1}(u)\}$ $(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ coordenada de $f^m(u)$

$f^m(u) = a_0 u + a_1 f(u) + \dots + a_{m-1} f^{m-1}(u)$

a) El polinomi mínim de f és el polinomi de grau més petit que anul·la f.

$f^m(u) = a_0 u + a_1 f(u) + \dots + a_{m-1} f^{m-1}(u)$

Observa que el vector $u \in \mathbb{R}^n$ està FIXAT !!

$\Rightarrow f^{(m)}(u) - a_0 u - a_1 f(u) - \dots - a_{m-1} f^{m-1}(u) = 0$

i d'aquest igualtat deduïm que **com ho dedueixes ?**

$p(x) = x^m - a_{m-1} x^{m-1} - \dots - a_1 x - a_0$ és un polinomi anul·lador de f.

Anem a veure que és el mínim, suposem que existeix un polinomi de grau més petit que anul·la f, i veurem que només hi ha el polinomi nul.

$q(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{m-1} x^{m-1}$

$q(f) = \lambda_0 + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{m-1} f^{m-1} = 0 \iff \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1}$

$\Rightarrow q(x) = 0$

Acabem de veure que l'únic polinomi de grau més petit que m que anul·la f és el polinomi 0

$\{u, f(u), \dots, f^{m-1}\}$ base i per tant l.i.

0.2

$\Rightarrow m_f(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - a_{m-2}x^{m-2} - \dots - a_1 x - a_0$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}$$
$\quad f(u) \quad f(f(u)) \quad \dots \quad f^{m-1}(u) \quad f^m$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}$$

0.4

$$P_c(x) = \begin{vmatrix} 0-x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0-x & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0-x & a_{m-1} \\ 0 & 0 & & 1 & a_{m-1}-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 0-x & 0 & \cdots & a_1 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0-x & a_{m-2} \\ 0 & \cdots & 1 & a_{m-1}-x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & 0-x & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & a_{m-1}-x \end{vmatrix} =$$

desenvolupem per la primera columna

Calculem per separat els determinants.

$$-x \begin{vmatrix} 0-x & 0 & \cdots & a_1 \\ 1 & 0-x & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{m-1} \\ \cdots & 0 & 1 & a_{m-1}-x \end{vmatrix} = -x^2 \begin{vmatrix} 0-x & \cdots & a_2 \\ 1 & 0-x & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 1 \; a_{m-1}-x \end{vmatrix}$$

primera fila

Sabem que el $P_c(x)$ d'una matriu ha de ser un polinomi anul·lador i si la matriu A de $m \times n$ el polinomi ha de tenir grau m, per tant

$(-1)^m$

$P_c(x) = m_j(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \cdots - a_1 x - a_0$. **0.2** $\boxed{0.8}$

b) $\det f = 0 \iff f^{(m)}(u) \in [f(u), \ldots, f^{m-1}(u)]$

$\Leftarrow$

$f^{(m)}(u) = \lambda_1 f(u) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(u) \Rightarrow$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots 0 & \lambda_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 & \lambda_{m-1} \end{pmatrix} \qquad \det(M_B(f)) = 0$$

si desenvolupem per la primera fila.

$\Rightarrow$

$$\det(M_B(f)) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 & a_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} a_0 \Rightarrow$$

desenvolupem primera fila

$\det(M_B(f)) = 0 \Rightarrow (-1)^{m+1} a_0 = 0$

$\Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow f^m(u) \in [f(u), \ldots, f^{m-1}(u)]$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 2 de 2

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Àlgebra

Estudiant/a [redacted]

Data:

Exercici 2

b) Si $f^{(m)}(u) \in [f^2(u), \dots, f^{m-1}(u)] \Rightarrow \det(f) = 0$ → $a_0 = a_1 = 0$

$P_c(\lambda) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \dots - a_3x^2 - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_2}\, x = x(m^{m-1} - a_{m-1}x^{m-2} \dots - a_3 x - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_2})$

$\Rightarrow 0$ VAP de $a_0 = 1$

$P_c(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\dots)$
i el VAP 0 té m. alg ≥ 2

$Nuc(A) = Nuc\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 1 & 0 & — & & 0 \\ 0 & \ddots & & & a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & - & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}$

NO!

Agafem el menor de dimensió $m-1$ següent $\begin{vmatrix} 0 & — & 0 \\ 1 & — & a_2 \\ 0 & \ddots & \\ 0 - 0 & 1 & a_{m-1} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Rang $A \leq m-2$

0.8 $\qquad$ ~~0.7~~

$\Rightarrow$ Dim Nuc $\geq 2 \Rightarrow g_0 \geq 2 \neq a_0 = 1 \Rightarrow f$ no diagonalitza.

c) f és invertible $\Leftrightarrow f_m \in [u, f(u), \dots, f^{m-1}(u)] \Leftrightarrow \det \neq 0$

$f^{-1} = \dfrac{1}{\det(f)} (Adj)^t$ $\quad$ calculem $\det(f) = (-1)^{m+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & \ddots & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & - & 0 & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} a_0$

calculem adjunta:

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$ $\quad$ $a_{11} = |A_{11}| = a_1$
$a_{21} = |A_{12}| = a_0$
$a_{21} = |A_{21}| = a_0 a_1$

... ?

0.1

QUALIFICACIÓ 3,5

Assignatura: Àlgebra

Estudiant/ [redacted]

Data:

Exercici 3.

$E = \mathbb{R}_2[x]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx.$$

a) Busquem la matriu.

$$M_e(\langle\rangle) = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dx = [x]_{-1}^{1} = 2$$

$$\langle 1,x\rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 = \langle x,1\rangle$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3 = \langle x^2,1\rangle$$

$$\langle x,x\rangle \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3$$

$$\langle x,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right] = 0 = \langle x^2,x\rangle$$

$$\langle x^2,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 2/5$$

A través de la matriu del producte escalar podem veure que és simètrica ja que $M_e(\langle\rangle) = (M_e(\langle\rangle))^t$

Si apliquem el criteri de Sylvester, podem veure que és definida positiva

$$|2| > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{vmatrix} > 0$$

~~També que és bilineal.~~

I amb la matriu directament, ja veiem que és bilineal. Faltaria algun argument del producte i la suma de matrius

b) 0,5

Valem:

$\langle (1,0,0), (a,b,c) \rangle = 0$

$\langle (0,a,c), (0,b,c) \rangle = 0$

$$\langle (1,0,0),(a,b,c) \rangle = (1,0,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (2,0,2/3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2/3\, c + 2a$$

$$\frac{2}{3}c + 2a = 0 \Rightarrow a = -1/3\, c$$

$$\langle (0,1,0),(a,b,c) \rangle = (0,1,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (0, 2/3, 0) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2/3\, b$$

$$2/3\, b = 0 \Rightarrow b = 0$$

~~Un element ortogonal a $p_1(x)$ i $p_2(x)$, podria ser qualsevol constant k, per exemple $q(x) = 1$, $q(x) \perp p_1(x)$ $q(x) \perp p_2(x)$~~

$(a,b,c) = c\left(-\frac{1}{3}, 0, 1\right)$

Un element ortogonal a $p_1(x)$ i $p_2(x)$ podria ser $q(x) = -1 + 3x^2$

c) $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2/3}}, \frac{-1+3x^2}{\sqrt{8/5}} \right\}$

$$\langle (-1,0,3), (-1,0,3) \rangle = (-1,0,3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (0, 0, 8/15) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8}{5}$$

d) Complement ortogonal de $F = [x^2]$

$\langle (0,0,1), (a,b,c) \rangle = 0$

$$\langle (0,0,1),(a,b,c) \rangle = (0,0,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (2/3, 0, 2/5) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2/3\, a + 2/5\, c$$

$$\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}c$$

$(a,b,c) = c\left(-\frac{3}{5}, 0, 1\right) + b\,(0,1,0)$

complement ortogonal: $B' = \left\{ \left(-\frac{3}{5}, 0, 1\right), (0,1,0) \right\}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ 1'75

Assignatura: Àlgebra

Estudiant/a: [redacted]

Data:

Exercici 4.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}$$

a)

$$f(w_1) = \lambda_1 w_1 \iff \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 w_1 \iff \begin{pmatrix} a+b+2c \\ b+a+2c \\ 2c+a+b \\ 2c+b+a \end{pmatrix} = \lambda_1 w_1$$

$$\iff \lambda_1 = a+b+2c$$

$$f(w_2) = \lambda_2 w_2 \iff \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 w_2 \iff \begin{pmatrix} a+b-2c \\ a+b-2c \\ 2c-a-b \\ 2c-a-b \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a+b-2c = \lambda_2 \\ 2c-a-b = -\lambda_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_2 = a+b-2c$$

$$f(w_3) = \lambda_3 w_3 \iff \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_3 w_3 \iff \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ a-b \\ b-a \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \lambda_3 = a-b$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \Rightarrow 4a = a+b+\cancel{2c}+a+\cancel{b}-\cancel{2c}+a-b+\lambda_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = a-b$$

$$\operatorname{Nuc}(A-(a-b)Id) = \operatorname{Nuc}\begin{pmatrix} b & b & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & b & b \\ c & c & b & b \end{pmatrix} = [(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)]$$

$$\begin{pmatrix} b & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2-c^2 & b^2-c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} b & b & c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2-c^2 & b^2-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} t = \dfrac{-(b^2+c^2)z}{b^2-c^2} = -z \\ y = \dfrac{-cz-ct-bx}{b} = -x \end{matrix}$$

$$(x,y,z,t) = x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1)$$

Base ortonormal $\Rightarrow B$
de vep's

$$B = \left\{ \frac{1}{2}(1,1,1,1),\ \frac{1}{2}(1,1,-1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1) \right\}$$ 1

?

b) $A = V \cdot D V^t$ on $V = A_{B \to e}$ $V^{-1} = V^t = A_{e \to B}$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b+2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b+2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$ ordre?

0'75

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Volem X tq $\|A - X\|$ sigui mínima

Fabricat Ecològicament