UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full de

QUALIFICACIÓ 1'5

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/ [redacted]

Data: H1

Problema 1

a) Pel teorema de Grassmann

$$\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim V\cap W = 4 - \dim V\cap W \leq 4-1 = 3$$

perque com $v \in V\cap W$, $V\cap W$ té com a mínim dimensió 1

~~La vors~~ Llavors, com $V \subset V+W$,

$$\dim (V+W)/V = \dim V+W - \dim V \leq 3 - \dim V = 3-2 = 1$$ 0'5

I com $(V+W)/V$ és no nul, $\dim (V+W)/V = 1$

Per tant, $\dim (V+W) = 3$ i $\dim V\cap W = 1$

Com u_2, u_3 i v són linealment independents, i pertanyen a $V+W$ i són tants com la dimensió de $V+W$, $\{u_2, u_3, v\}$ és una base de $V+W$.

Demostració de que u_2, u_3 i v són l.i.:

Suposem $0 = \lambda_1(1,0,0,0,1) + \lambda_2(2,1,0,0,1) + \lambda_3(0,0,0,1,1) = (\lambda_1+2\lambda_2, \lambda_2, 0, \lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = 0$

Com $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, u_2, u_3 i v són l.i.

Pertanyen a $V+W$ perquè les seves classes pertanyen a $(V+W)/V$ i tot element de tota classe de $(V+W)/V$ pertany a $V+W$ perquè $V \subset V+W$

Fabricat Ecològicament

(b) Com $\dim (V+W)/V = 1$, la dimensió del seu espai dual també serà 1. Llavors qualsevol element diferent de 0 d'aquest espai ~~serà~~ formarà una base. (igual que amb $(V+W)/V$)

La classe de u_3 és diferent de 0 perquè $u_3 \notin V$, ja que si $u_3 \in V$ com $u_3 - u_2 - 7v \in V$ i $v \in V$, u_2 també pertanyeria a V i com u_2, u_3 i v són linealment independents, V tindria dimensió 3.

Per tant ~~tot~~ ~~elem~~ $\{\bar{u}_3\}$ és una base de $(V+W)/V$ i tot element de $(V+W)/V$ es pot escriure com $\lambda \bar{u}_3$.

Sigui w l'element de l'espai dual de $(V+W)/V$ tal que $w(\lambda \bar{u}_3) = \lambda$. Llavors $\{w\}$ és una base d'aquest espai dual.

1

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ
2.4

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudi[redacted]

Data: H1

Problema 2

ⓐ La matriu de f en la base B és:

$$M_B(f) \cancel{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots\ 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

0.4

Com el polinomi ~~mínim~~ característic de f no depen de en quina base sigui representat, el podem calcular en aquesta base.

Demostraré per inducció sobre n que $|\underbrace{\cancel{A}}_{M_B(f)} - xI_n| = (-1)^n(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0)$

En el ~~cas~~ cas base $n=1$ tenim $|\underbrace{\cancel{A}}_{M_B(f)} - xI_1| = |a_0 - x| = (-1)^1(x - a_0)$

Suposem que és cert per $n=k-1$ i ho demostraré per $n=k$:

$$|M_B(f) - xI_k| = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & -x & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots\ -x & a_{k-2} \\ 0 & 0 & \cdots\ 1 & a_{k-1}-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & a_1 \\ 1 & -x & & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -x & a_{k-2} \\ 0 & \cdots & 1 & a_{k-1}-x \end{vmatrix} + (-1)^{k+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & -x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x(-1)^{k-1}(x^{k-1} - a_{k-1}x^{k-2} - \ldots - a_2x - a_1) + (-1)^k a_0 =$$

Per hipòtesi d'inducció

$$= (-1)^k(x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0)$$

Segueix a l'altre full

Per tant el polinomi ~~mínim~~ característic de f és $(-1)^n(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0)$

(b) $det(f) = m_f(0) = 0^n - a_{n-1} 0^{n-1} - \dots - a_1 0 - a_0 = -a_0$

Per tant $a_0 = 0 \Longleftrightarrow det(f) = 0$

I $a_0 = 0$ vol dir que $f^n(u) \in [f(u), f^2(u), \dots, f^{n-1}(u)]$ perquè a_0 és la coordenada de $f^n(u)$ en base $[u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)]$

Si $f^n(u) \in [f^2(u), \dots, f^{n-1}(u)]$, $a_0 = a_1 = 0$ per tant la matriu $M_B(f)$ és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

que té rang $n-1$ perquè les primeres $n-1$ columnes són linealment independents.

Una matriu diagonalitza si i només si la multiplicitat geomètrica i algebràica dels seus vectors propis és la mateixa. La multiplicitat algebraica de 0 és $a_0 = 2$ perquè $m_f(x) = x^2(x^{n-2} - a_{n-1}x^{n-3} - \dots - a_3 x - a_2)$ i la geomètrica és $g_0 = 1$ perquè

~~$g_0 = dim\ Nuc\ M_B(f) = n - \cancel{dim}$ rang $M_B(f) = n - (n-1) = 1$~~

(c) Sabem que $m_f(f) = 0$ per tant, si f és invertible:

$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(m(f)) = f^{n-1} - a_{n-1} f^{n-2} - \dots - a_2 f - a_1 I - a_0 f^{-1}$

?

I aïllant f^{-1} tenim $f^{-1} = \dfrac{+f^{n-1} + a_{n-1} f^{n-2} + \dots + a_2 f + a_1 I}{a_0}$

i $a_0 \neq 0$ perquè com f és invertible $0 \neq det(f) = -a_0$.

$\boxed{0.4}$

Problema 2

(a) El polinomi mínim de f serà el mateix que el polinomi característic si i només si $\dim \mathrm{Nuc}(f-\lambda I)=1$ per tot valor propi λ de f, (λ pot no ser real)

(multiplicant f^{-1} per λ^{-1} si cal)

$\dim \mathrm{Nuc}(f-\lambda I) = n - \mathrm{rang}(f-\lambda I) \leq n-(n-1) = 1$

~~això ve donat~~ perquè el ~~menor~~ menor obtingut en eliminar la primera fila i la última columna és

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, que té determinant 1.

ok

i com $\dim \mathrm{Nuc}(f-\lambda I) \geq 1$ perquè λ és valor propi, $\dim \mathrm{Nuc}(f-\lambda I)=1$.

(b) $\det(f) = (-1)^n (0^n - a_{n-1}\cdot 0^{n-1} - \ldots - a_1 \cdot 0 - a_0) = -a_0$

Perquè el polinomi característic de f és $(-1)^n(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0)$

~~perquè $m_f(x)$ és el polinomi característic de f~~

Per tant $a_0 = 0 \Leftrightarrow \det(f) = 0$

I $a_0 = 0$ és equivalent a $f^n(u) \in [f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u)]$ perquè a_0 és la primera coordenada de $f^n(u)$ en base $[u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)]$

Si $f^n(u) \in [f^2(u), \dots, f^{n-1}(u)]$, $a_0 = a_1 = 0$ per tant el polinomi mínim de f és $m_f(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_2 x^2 - 0 \cdot x - 0 =$
$= x^2 (x^{n-2} - a_{n-1}x^{n-3} - \dots - a_2)$

Pel segon teorema de diagonalització, sabem que f no diagonalitzarà si existeix algun valor propi λ de f tal que $\cancel{(x-\lambda)^2 \mid m_f(x)}$ $(x-\lambda)^2$ ~~divi~~ divideixi al polinomi mínim de f

Com $(x-0)^2 \mid m_f(x)$, f no diagonalitza.

divideix a

(l'apartat c està al final del primer full)

$\boxed{1}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ 3,4

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudiant: [redacted]

Data: H1

Problema 3:

a) — bilineal: ✓ per les propietats de les integrals

0,9 $<\lambda p_1(x)+\mu p_2(x), q(x)> = \int_{-1}^{1} (\lambda p_1(x)+\mu p_2(x)) q(x)\,dx = \lambda \int_{-1}^{1} p_1(x) q(x)\,dx + \mu \int_{-1}^{1} p_2(x) q(x)\,dx =$

$= \lambda <p_1(x), q(x)> + \mu <p_2(x), q(x)>$

$<p(x), \lambda p_1(x)+\mu p_2(x)> = \int_{-1}^{1} p(x)(\lambda q_1(x)+\mu q_2(x))\,dx = \lambda \int_{-1}^{1} p(x) q_1(x)\,dx + \mu \int_{-1}^{1} p(x) q_2(x)\,dx =$

$= \lambda <p(x), q_1(x)> + \mu <p(x), q_2(x)>$

— simètrica ✓ per la propietat commutativa dels polinomis en $\mathbb{R}$

$<p(x), q(x)> = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} q(x) p(x)\,dx = <q(x), p(x)>$

— definida positiva: ✓

$<p(x), p(x)> = \int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx > \int_{-1}^{1} 0\,dx = 0$ i $<0, 0> = \int_{-1}^{1} 0\,dx = 0$

si $p(x) \neq 0$

— La matriu de E en la base canònica és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$ ✓

$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$ $\quad \int_{-1}^{1} x^3 = 0$

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} x^4 = \frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$

0.5

b) Sigui $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ aquest element, tenim que

$$0 = \langle 1, q(x)\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 2/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix} = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \to a_2 = -3a_0$$

$$0 = \langle x, q(x)\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 2/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}a_1 \to a_1 = 0$$

Per tant $-3x^2+1$ és un element de E ortogonal a 1 i x alhora

posant $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ i $a_2 = -3$ tenim que

c) Com hem vist a l'apartat anterior, $-3x^2+1$ és ortogonal a x i a 1 i com aquests dos són ortogonals entre ells, $\{1, x, -3x^2+1\}$ és una base ortogonal de E. Normalitzant-la obtindrem una base ortonormal. (fent servir que $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$)

$\|1\| = \sqrt{2}$ $\quad \|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad \|-3x^2+1\| = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$

Per tant la base $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{-3x^2+1}{2}\right\}$ és ortonormal

d) $F^\perp = \left\{q(x) \in E \,\middle|\, \int_{-1}^{1} q(x)x^2dx = 0\right\} = [x, \cancel{5-3x^2}\ 3-5x^2]$

això és $\langle q(x), x^2\rangle$

com aquests dos vectors son l.i., compleixen la restricció del subespai vectorial formen una base de $F^\perp$

perquè $\dim F^\perp = 3 - \dim F = 2$

$$\int_{-1}^{1} x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 \qquad \int_{-1}^{1} 3x^2 - 5x^4dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\langle x, x^2\rangle \qquad\qquad \langle x^2, 3-5x^2\rangle$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ: 2

Assignatura: Algebra lineal

Estudiant: [redacted]

Data: H1

Problema 4

a) $$AW_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b+2c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b+2c)W_1$$

$$AW_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a+b-2c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a+b-2c)W_2$$

$$AW_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b)W_3$$

0'75

Sigui $W_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ? Veiem que W_4 és ortogonal a W_1, W_2 i W_3

$$AW_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a-b)W_4$$

Per tant els valors propis de A són $a+b+2c$, $a+b-2c$ i $a-b$ perque W_1, W_2, W_3 i W_4 són linealment independents.

amb ~~...~~ multiplicitat algebraica 2.

Com W_1, W_2, W_3 i W_4 són una base ortogonal de VEP, normalitzant-la n'obtenim una ortonormal:

$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ és una base ortonormal de vectors propis

(b) Com acabem d'obtenir una base ortonormal de VEPs de A_r, la seva descomposició en valors singulars serà igual que la seva diagonalització:

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b+2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

0'75

$$U=P=\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 & \vec{w}_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \qquad D \qquad P^{-1}=P^T=V^T$$

ordre?

perquè P és una matriu ~~ortonormal~~ ortogonal

(c) Tenim $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

I sabem pel teorema d'Eckart-Young que ~~per trobar~~ la matriu més propera de grau K d'una matriu és la que s'obté si en la seva descomposició en valors singulars es ~~canvien~~ deixen iguals els K valors singulars més grans i es canvien els altres per 0_s. Per tant la resposta és:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

0'5