

ALGEBRA LINEAL. FME

EXAMEN PARCIAL. 2 de novembre 2020

1. Sigui $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matriu amb coeficients en un cos $\mathbb{K}$, amb $m \leq n$. Sabem que:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \text{ si } i \leq n-j, \\ a_{i,n+1-i} &\neq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(a) (1 p.) Demostreu que A té rang m .

(b) (1 p.) Demostreu que, en el cas $m = n$, el valor absolut del determinant de A és

$$|\det A| = \left| \prod_{i=1}^n a_{i,n+1-i} \right|.$$

Resolució. La matriu té la forma següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m-1,n+2-m} & \dots & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,n+1-m} & \dots & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

(a) Capgirant l'ordre de totes les files, obtenim directament la forma esglaonada de la matriu; els pivots són justament els elements $a_{i,n+1-i}$ de la matriu original, que no són nuls per hipòtesi. Això ens diu ja que el rang de la matriu és m .

(b) Si la matriu és quadrada ($m = n$), no tenim cap columna de zeros a l'esquerra i la matriu esglaonada és una matriu triangular superior, de forma que el seu determinant és el producte dels elements de la diagonal, és a dir, el producte dels $a_{i,n+1-i}$. Com hem fet permutacions de files, el determinant de la matriu original i el de la seva forma esglaonada podran diferir només en un signe i, per tant, coincidiran en valor absolut.

2. (a) (1,5 p.) Considerem els dos subespais següents de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b = c - d = 0 \right\}, \quad F = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Doneu una base de $E + F$ i una base de $E \cap F$. Estan en suma directa E i F ? Si no ho estan, doneu una base del complementari de $E + F$.

(b) (1 p.) Donats tres subespais F , G i H d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial E , demostreu la igualtat següent si és certa i, si no, doneu-ne un contraexemple:

$$\dim(F+G+H) = \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).$$

Resolució. (a) De les equacions que defineixen els elements de E obtenim que $b = -a$ i $d = c$. Aleshores, tot element de E es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ c & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

és a dir, com una combinació lineal de dues matrius que són linealment independents. Per tant, una base de E és

$$\mathcal{B}_E = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Els elements de F vénen donats per combinacions lineals de dues matrius que són linealment independents. Una base de F és, directament

$$\mathcal{B}_F = \left\{ N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per definició de l'espai suma, $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ genera $E + F$. Ara, observem que $M_1 + M_2 - N_1 = N_2$, per tant $\mathcal{B}_+ = \{M_1, M_2, N_1\}$ també genera $E + F$. Com que N_1 no es pot generar amb combinacions de M_1 i M_2 , veiem que $\mathcal{B}_+$ és una base de $E + F$.

Amb la fórmula de Grassmann trobem que

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

N'hi ha prou amb trobar una matriu no nul·la de $E \cap F$ per obtenir-ne una base. Com que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M_1 + M_2 = N_1 + N_2,$$

deduïm que

$$\Lambda \in E \cap F$$

i, així, $\{\Lambda\}$ és una base de $E \cap F$.

Els subespais E i F no estan en suma directa perquè la seva intersecció no té dimensió 0. Un complementari de $E + F$ és qualsevol subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimensió $4 - 3 = 1$ que no estigui dins de $E + F$. Hi ha infinitud de matrius que serveixen en aquest cas com a base del complementari, només cal comprovar que no siguin combinacions lineals dels elements de $\mathcal{B}_+$. Per exemple, qualsevol de les quatre matrius de la base canònica serveix com a base del complementari.

(b) La igualtat no és certa. Prenem $E = \mathbb{R}^2$ i F, G, H tres rectes diferents que passen per l'origen de $\mathbb{R}^2$. La dimensió de $F + G + H$ és 2, mentre que la dimensió de les rectes és 1 i la dimensió de qualsevol intersecció és 0. La igualtat ens estaria dient que $2 = 3$, és a dir que no és certa en general.

3. A l'espai $\mathbb{R}_n[x]$, considerem un polinomi de grau n , $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.

- (a) (1,5 p.) Proveu que $\{p(x), p'(x), \dots, p^{(n)}(x)\}$ és base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (b) (1 p.) Per a $n = 3$, considereu $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Trobeu les coordenades del polinomi $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 6$ en la base $B_p = \{p(x), p'(x), p''(x), p^{(3)}(x)\}$.
- (c) (1 p.) Per al polinomi $q(x) = x^2 + 1$, doneu una base i la dimensió de

$$G = [q(x), xq'(x), x^2q''(x) - 1] \subset \mathbb{R}_3[x].$$

Resolució. (a) Calculem les derivades del polinomi $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \\ p'(x) &= nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 \\ p''(x) &= n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots + 2a_2 \\ &\vdots \\ p^{(n)}(x) &= n! \end{aligned}$$

Si escrivim les coordenades d'aquests polinomis en la base canònica $B = \{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$, tenim

$$\begin{aligned} p_B &= (1, a_{n-1}, \dots, a_0) \\ (p')_B &= (0, n, (n-1)a_{n-1}, \dots, a_1) \\ (p'')_B &= (0, 0, n(n-1), (n-1)(n-2)a_{n-1}, \dots, 2a_2) \\ &\dots \\ (p^{(n)})_B &= (0, 0, \dots, n!) \end{aligned}$$

Escrivint aquests vectors coordenats com columnes d'una matriu, obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & n(n-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0 & a_1 & 2a_2 & \dots & n! \end{pmatrix}$$

que és una matriu triangular inferior de rang n . Així doncs els polinomis $\{p(x), p'(x), \dots, p^{(n)}(x)\}$ són base de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b) Plantegem una combinació lineal dels vectors de la base B_p igual al polinomi $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= ap(x) + bp'(x) + cp''(x) + dp^{(3)}(x) \\ x^3 - 2x^2 - x + 6 &= a(x^3 + x^2 + x + 1) + b(3x^2 + 2x + 1) + c(6x + 2) + d \cdot 6 = \\ &= ax^3 + (a + 3b)x^2 + (a + 2b + 6c)x + (a + b + 2c + 6d) \end{aligned}$$

d'on obtenim el sistema:

$$\begin{cases} a &= 1 \\ a + 3b &= -2 \\ a + 2b + 6c &= -1 \\ a + b + 2c + 6d &= 6 \end{cases}$$

Aquest sistema és compatible determinat i la solució és $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ i $d = 1$. Així doncs $q_{B_p} = (1, 1, 0, 1)$.

(c) Calculem els generadors del subespai G :

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2 + 1 \\ q'(x) &= 2x \Rightarrow xq'(x) = 2x^2 \\ q''(x) &= 2 \Rightarrow x^2q''(x) - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

Així doncs, $G = [x^2 + 1, 2x^2, 2x^2 - 1] = [x^2, 1]$. Donat que $\{x^2, 1\}$ són linealment independents, són una base de G i $\dim(G) = 2$.

4. Siguin E i F dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Considerem el conjunt L de totes les aplicacions lineals de E en F .

(a) (1 p.) Donades dues aplicacions lineals $f, g \in L$ i un escalar $c \in \mathbb{K}$, definim dues noves aplicacions: l'aplicació suma $h = f + g$ (on $h(u) = f(u) + g(u)$, $\forall u \in E$) i el producte de f per c , cf (on $(cf)(u) = cf(u)$, $\forall u \in E$). Demostreu que són aplicacions lineals i useu-ho per a demostrar que L és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

(b) (1 p.) Considerem un vector $v \neq 0$ de E i el subconjunt $V = \{f \in L \mid f(v) = \vec{0}\}$. Demostreu que V és un subespai vectorial de L .

Resolució. (a) Siguin $u, v \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ qualssevol. Per veure que h és lineal, cal veure que $h(u + v) = h(u) + h(v)$ i $h(\lambda u) = \lambda h(u)$. Vegem-ho: per definició de h tenim $h(u + v) = (f + g)(u + v) = f(u + v) + g(u + v)$, i per linealitat de f i g això és igual a $f(u) + g(u) + f(v) + g(v)$, que coincideix amb $(f + g)(u) + (f + g)(v) = h(u) + h(v)$ per definició de l'aplicació suma. D'altra banda $h(\lambda u) = (f + g)(\lambda u) = f(\lambda u) + g(\lambda u) = \lambda f(u) + \lambda g(u) = \lambda(f(u) + g(u)) = \lambda(h(u))$ (usant la definició de h i la linealitat de f i g), i per tant h és una aplicació lineal.

Vegem ara que $c \cdot f$ també és una aplicació lineal: es té

$$(c \cdot f)(u + v) = cf(u + v) = c(f(u) + f(v)) = cf(u) + cf(v) = (c \cdot f)(u) + (c \cdot f)(v),$$

$$(c \cdot f)(\lambda u) = cf(\lambda u) = c\lambda f(u) = \lambda(cf(u)) = \lambda(c \cdot f)(u)$$

i per tant $c \cdot f$ és lineal.

Anem a veure ara que L és un $\mathbb{K}$ -e.v. amb aquestes operacions de suma i producte per escalars, que acabem de veure donen aplicacions també de L .

- la suma és commutativa: cal veure que les aplicacions $f + g$ i $g + f$ són la mateixa, és a dir que per a tot $u \in E$ es té $(f + g)(u) = (g + f)(u)$. Això és evident perquè la suma en F és commutativa: $(f + g)(u) = f(u) + g(u) = g(u) + f(u) = (g + f)(u)$.
- la suma és associativa: com abans, és evident perquè la suma en F és associativa.
- la suma té element neutre: l'aplicació lineal 0 que envia cada vector al $\vec{0} \in E$ és l'element neutre per a la suma d'aplicacions lineals, $f + 0 = f$.
- la suma té element oposat: si $f \in L$, definim $-f$ com l'aplicació $(-f)(u) = -f(u)$. Llavors $-f$ és l'element oposat de f : $(f + (-f))(u) = f(u) + (-f)(u) = f(u) - f(u) = \vec{0} = 0(u)$, $\forall u \Rightarrow f + (-f) = 0$.
- distributiva del producte per escalars i la suma: $c \cdot (f + g) = c \cdot f + c \cdot g$ i $(c + d) \cdot f = c \cdot f + d \cdot f$. En efecte, per les propietats de F com a espai vectorial, tenim

$$(c \cdot (f + g))(u) = c(f + g)(u) = c(f(u) + g(u)) = (c \cdot f)(u) + (c \cdot g)(u) = (c \cdot f + c \cdot g)(u), \forall u,$$

$$((c + d) \cdot f)(u) = (c + d)f(u) = cf(u) + df(u) = (c \cdot f)(u) + (d \cdot f)(u) = (c \cdot f + d \cdot f)(u) \forall u.$$

(b) V és no buit perquè l'aplicació 0 hi pertany. Si $f, g \in V$ i $c \in \mathbb{K}$, aleshores es té

- $f + g \in V$: $(f + g)(v) = f(v) + g(v) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow f + g \in V$,
- $c \cdot f \in V$: $(c \cdot f)(v) = cf(v) = c\vec{0} = \vec{0}, \Rightarrow c \cdot f \in V$.

Per tant, V és subespai.