

ALGEBRA LINEAL. FME

EXAMEN FINAL.

1. (1.5 pts) En l'espai $\mathbb{R}^5$ tenim dos subespais V, W de dimensió 2 i sabem que $v = (0, 0, 0, 1, 1) \in V \cap W$. En l'espai quocient $\mathbb{R}^5/V$, el subespai $(V + W)/V$ és no nul i està generat per les classes dels vectors $u_1 = v, u_2 = (1, 0, 0, 0, 1), u_3 = (2, 1, 0, 0, 1), u_4 = (1, 0, 0, 1, 2)$.

- a) (0.5 pts) Determineu les dimensions de $(V + W)/V$ i $V \cap W$ i doneu una base de $V + W$.
- b) (1 pt) Sabent que $u_3 - u_2 - 7v \in V$, descriuiu explícitament una base de l'espai dual de $(V + W)/V$.

Solució:

- a) Per la fórmula de Grassmann, $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) \leq 3$, ja que $\dim(V \cap W) \geq 1$. Per tant, $\dim(V + W)/V = \dim(V + W) - \dim V \leq 1$, i com ens diuen que aquest espai és no nul, ha de ser $\dim(V + W)/V = 1$. Anant endarrera traiem que $\dim(V + W) = 3$ i $\dim(V \cap W) = 1$. Si les classes dels vectors $u_1, \dots, u_4$ generen $(V + W)/V$, en particular aquests vectors pertanyen a $V + W$. Tenim que $u_4 = u_1 + u_2$, però $u_1 = v, u_2, u_3$ són linealment independents i per tant formen una base de $V + W$.

- b) Hem vist que $\dim(V + W)/V = 1$, així que per tenir una base d'aquest espai només ens en cal donar un vector no nul. Hem de trobar, doncs, un vector de l'espai $V + W$ que no sigui de V . Ens cal determinar prèviament l'espai V ; sabem que té dimensió 2 i que els vectors $v, u_3 - u_2 - v \in V$. Com $v = (0, 0, 0, 1, 1)$ i $v' = u_3 - u_2 = (1, 1, 0, 0, 0) = (u_3 - u_2 - 7v) + 7v \in V$ són linealment independents, formen una base de V . El vector $u_2 \in V + W$ no pot pertànyer a V , perquè llavors v, u_2, u_3 serien linealment dependents, i ja hem vist al primer apartat que no ho són. Per tant, la classe $\overline{u_2}$ del vector u_2 és una base de $(V + W)/W$.

L'espai dual de $(V + W)/W$ té la seva mateixa dimensió, així que una base estarà formada per un element no nul, és a dir, una forma lineal no nul·la $f : (V + W)/W \rightarrow \mathbb{R}$. Per definir una tal forma, només cal especificar la seva imatge sobre una base de $(V + W)/W$, és a dir, $f(\overline{u_2})$, i si la forma no és nul·la aquesta imatge ha de ser diferent de 0. Podem definir, per exemple $f(\overline{u_2}) = 1$, i així $f(\lambda \overline{u_2}) = \lambda$.

2. (2.5 pts) Sigui $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$. Fixat un vector $u \in \mathbb{R}^n$, suposem que $B := \{u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$. Denotarem $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ les coordenades de $f^n(u)$ en la base B .

- a) (1 pt) Proveu que el polinomi mínim de f és

$$m_f(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \dots - a_1x - a_0.$$

Expresseu la matriu de f en la base B i deduiu quin és el polinomi característic de f .

- b) (1 pt) Proveu que $\det(f) = 0$ si, i només si, $f^n(u) \in [f(u), \dots, f^{n-1}(u)]$. En aquest cas, justifiqueu que si $f^n(u) \in [f^2(u), \dots, f^{n-1}(u)]$ llavors f no diagonalitza.
- c) (0.5 pts) En els casos en què f sigui invertible, expresseu la inversa de f com a combinació lineal de potències de f .

Solució:

- a) Primer justifiquem que sota les condicions de l'enunciat, el polinomi mínim té grau n . Escrivim $m_f(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i$ el polinomi mínim, on k és el grau. Per teoria, sabem que el grau del polinomi mínim és menor que la dimensió de l'espai, és a dir, $k \leq n$. Com $m_f(f)(u) = 0$, deduïm que $f^k(u) = -\sum_{i=0}^{k-1} c_i f^i(u)$. Atès que $\{u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\}$ són linealment independents, necessàriament $k \geq n$. Així doncs, $k = n$.

Per tant, tenim que $f^n(u) = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i(u)$, així que $(-c_0, -c_1, \dots, -c_{n-1})$ són les coordenades de $f^n(u)$ en la base B : $-c_i = a_i$ per a $i = 0, 1, \dots, n-1$. Deduïm doncs que

$$m_f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

Ara bé, el polinomi mínim és un divisor del polinomi característic, i aquest sempre té grau n i terme líder $(-1)^n$. Per tant, $p_f(x) = (-1)^n m_f(x)$.

- b) El determinant de f coincideix amb el terme independent de $p_f(x)$, és a dir, en funció de la paritat de n , tindrem que $\det(f) = a_0$ o bé $\det(f) = -a_0$. Fent servir que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ són les coordenades de $f^n(u)$ en la base B , tenim que $\det(f) = 0$ si i només si $f^n(u) \in [f(u), \dots, f^{n-1}(u)]$.

Observem també que del fet que $f(u), \dots, f^{n-1}(u)$ són linealment independents, deduïm que $\dim \text{Im}(f) \geq n-1$, per tant, $\text{rang}(f) \geq n-1$. Si $\det(f) = 0$, necessàriament $\text{rang}(f) = n-1$. Per tant, la multiplicitat geomètrica del VAP 0 és 1.

Ara bé, $f^n(u) \in [f^2(u), \dots, f^{n-1}(u)]$ és equivalent a $a_1 = 0$, i per tant, a què la multiplicitat algebraica del VAP 0 és ≥ 2 . Per tant, en aquest cas, f no diagonalitza.

- c) És una aplicació directa del teorema de Cayley-Hamilton: $f^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = 0$. D'aquí es dedueix directament que $f(f^{n-1} - a_{n-1}f^{n-1} - \dots - a_1 Id) = a_0 Id$ i per tant, de la unicitat de la inversa, obtenim que

$$f^{-1} = \frac{1}{a_0} f^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0} f^{n-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} Id.$$

3. (3.5 pts) Considereu l'espai vectorial $E = \mathbb{R}_2[x]$ amb el producte escalar definit per:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

- a) (1 pt) Comproveu que $\langle p(x), q(x) \rangle$ és una forma bilineal, simètrica i definida positiva i doneu-ne la seva matriu en la base canònica $\{1, x, x^2\}$ de E .
- b) (0.5 pts) Trobeu un element no nul de E ortogonal a $p_1(x) = 1$ i a $p_2(x) = x$ alhora.
- c) (1 pt) Doneu una base ortonormal de E .
- d) (1 pt) Trobeu el complement ortogonal de $F = [x^2]$ a E .

Solució:

a)

- Bilineal:

$$\begin{aligned} \langle p_1(x) + \lambda p_2(x), q(x) \rangle &= \int_{-1}^1 (p_1(x) + \lambda p_2(x)) q(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 p_1(x) q(x) dx + \lambda \int_{-1}^1 p_2(x) q(x) dx = \\ &= \langle p_1(x), q(x) \rangle + \lambda \langle p_2(x), q(x) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle p(x), q_1(x) + \lambda q_2(x) \rangle &= \int_{-1}^1 p(x) (q_1(x) + \lambda q_2(x)) dx = \\
&= \int_{-1}^1 p(x) q_1(x) dx + \lambda \int_{-1}^1 p(x) q_2(x) dx = \\
&= \langle p(x), q_1(x) \rangle + \lambda \langle p(x), q_2(x) \rangle.
\end{aligned}$$

- Simètrica:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle.$$

- Definida positiva

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)^2 dx.$$

$$p(x)^2 \geq 0 \quad \forall p(x), \text{ per tant, } \int_{-1}^1 p(x)^2 dx \geq 0 \quad \forall p(x).$$

A més, si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ i $\int_{-1}^1 p(x)^2 dx = 0$, s'ha de complir que $p(x) = 0 \quad \forall x$.

Ara:

- $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1 dx = 2$
- $\langle 1, x \rangle = \langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0$
- $\langle 1, x^2 \rangle = \langle x, x \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3$
- $\langle x, x^2 \rangle = \langle x^2, x \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$
- $\langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = 2/5$

Aleshores, la matriu del M producte escalar en la base canònica $\{1, x, x^2\}$ de E és:

$$M = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

b) Prenem $q(x) = a + bx + cx^2 \in E$. Tenim

$$\langle q(x), p_1(x) \rangle = 0 \iff 2a + 2/3c = 0 \iff c = -3a.$$

Prenem $q(x) = a + bx + cx^2 \in E$. Es té

$$\langle q(x), p_2(x) \rangle = 0 \iff 2/3b = 0 \iff b = 0.$$

Aleshores, $q_a(x) = a - 3ax^2 = a(1 - 3x^2)$ és ortogonal a $p_1(x)$ i $p_2(x)$ per qualsevol $a \in \mathbb{R}$ i si prenem $a \neq 0$ tenim un element no nul.

c) Observem que $\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, q_1(x) = 1 - 3x^2\}$ és ja una base ortogonal de E perquè $\langle 1, x \rangle = \langle 1, 1 - 3x^2 \rangle = \langle x, 1 - 3x^2 \rangle = 0$. Només cal normalitzar els tres elements de la base per obtenir una base ortonormal.

- $\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 2$
- $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 2/3$
- $\|1 - 3x^2\|^2 = \langle 1 - 3x^2, 1 - 3x^2 \rangle = 8/5$

Llavors, una base ortonormal és $\{\tilde{p}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tilde{p}_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \tilde{q}_1(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(1 - 3x^2)\}$.

d) Observem que $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 3 - 1 = 2$. Busquem dos elements que siguin ortogonals a $p_3(x) = x^2$ i linealment independents entre ells. Ja sabem que $p_2(x) = x$ és ortogonal a x^2 . Un element $r(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ ortogonal a x^2 ha de satisfer

$$\langle a + bx + cx^2, x^2 \rangle = 2/3a + 2/5c = 0 \iff -5a = 3c.$$

Aleshores, els elements de la forma $r_{a,b}(x) = 3a + bx - 5ax^2 = a(3 - 5x^2) + bx$ són ortogonals a x^2 per qualsevol $a, b \in \mathbb{R}$. En particular, $3 - 5x^2$ i x són elements ortogonals a x^2 i són linealment independents. Així doncs, una base de $F^\perp$ és $\{3 - 5x^2, x\}$.

4. (2.5 pts) Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & a & b \\ c & c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}),$$

amb $a > b > c > 0$.

- (1 pt) Sabent que $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (1, 1, -1, -1)$ i $w_3 = (1, -1, 1, -1)$ són vectors propis de A , doneu els valors propis de A i una base ortonormal de vectors propis.
- (1 pt) Calculeu una descomposició en valors singulars de A . *Indicació:* No cal que calculeu $A^t A$.
- (0.5 pts) Doneu la matriu de rang 2 més propera a A en el cas particular $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$.

Solució:

- Com que A és una matriu simètrica, el Teorema espectral ens diu que diagonalitza i que existeix una base ortonormal de vectors propis. Calculem els valors propis dels vectors que ens han donat:

$$Aw_1 = (a + b + 2c)w_1, \quad Aw_2 = (a + b - 2c)w_2, \quad Aw_3 = (a - b)w_3$$

i per tant $a + b + 2c, a + b - 2c, a - b$ són valors propis de A . Amb la hipòtesi $a > b > c > 0$ els podem ordenar de major a menor: $\lambda_1 = a + b + 2c > \lambda_2 = a + b - 2c > \lambda_3 = a - b$. Per a trobar l'altre valor propi λ usem que la traça de A és invariant per canvis de base:

$$4a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda$$

i obtenim que $\lambda = a - b$ (és a dir, λ_3 té multiplicitat algebraica i geomètrica igual a 2).

Com que

$$[w_1, w_2, w_3]^\perp = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = 0, x + y - z - t = 0, x - y + z - t = 0\},$$

una base de $[w_1, w_2, w_3]^\perp$ és $(1, -1, -1, 1)$ (resolent el sistema si cal). Pel Teorema espectral aquest vector ha de ser un VEP de VAP λ_3 (ho és) i per tant, podem prendre la base ortonormal de VEP's següent:

$$v_1 = \frac{1}{2}w_1, \quad v_2 = \frac{1}{2}w_2, \quad v_3 = \frac{1}{2}w_3, \quad v_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1).$$

Alternativa: calculeu una base ortonormal del subespai de vectors propis de valor propi λ_3 (dimensió 2).

- b) Com que A és simètrica, $S := A^t A = A^2$ i per tant els VAPs de S són λ_i^2 , $i = 1, 2, 3$, amb la mateixa base ortonormal de VEPs que abans (perquè si v és VEP de VAP μ de A , aleshores v és VEP de VAP μ^2 de A^2). La matriu V de la SVD està formada pels vectors v_1, v_2, v_3, v_4 en columna.

Els valors singulars de A són per tant $\sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$. Com ja hem ordenat els λ_i i són tots positius, obtenim que els valors singulars coincideixen amb els valors propis de A :

$$\sigma_1 = \lambda_1 = a + b + 2c, \quad \sigma_2 = \lambda_2 = a + b - 2c, \quad \sigma_3 = \lambda_3 = a - b, \quad \sigma_4 = \lambda_4 = a - b$$

i la matriu

$$D = \begin{pmatrix} a + b + 2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a + b - 2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - b \end{pmatrix}$$

en la SVD de A coincideix amb la matriu de valors propis de A . Per tant, la descomposició $A = V D V^t$ que ens diagonalitza A (notem que $V^t = V^{-1}$ ja que V és una matriu ortogonal perquè és un canvi de base entre base ortonormal) ja ens dona una SVD de A amb $U = V$. De fet, si calculem $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ obtenim $u_i = \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i v_i = v_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

- c) La matriu de rang 2 més propera a A s'obté considerant només els dos primers valors singulars $\sigma_1 = a + b + 2c = 8$ i $\sigma_2 = a + b - 2c = 4$ en la SVD de A i és

$$V \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$