QUALIFICACIÓ 5,5

Assignatura: Teoria de la probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/7/2015

Problema 1

Tirem moneda N vegades amb probabilitat de cara $p \in (0,1)$

$\mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda$

Denem S el nombre de cares que s'obtenen.

Considerem $X_1, X_2, \ldots$ successió de variables aleatòries independents i igualment distribuïdes amb funció generadora $G_X(t)$ i N variable aleatòria independent de les X_i's. Aleshores $S = X_1 + \ldots + X_N$ amb funció generadora $G_S(t) = G_N(G_X(t))$ ✓

a) $\mathbb{E}(S) = G_S'(t)\big|_{t=1} = G_N'(G_X(t)) \cdot G_X'(t)\big|_{t=1} =$

$= G_N'(G_X(1)) \cdot G_X'(1) =$

$= G_N'(1) \cdot \mathbb{E}(X) =$

$= \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X) \underset{X \sim B(p)}{=} \lambda p$ ✓

$Var(S) = G_S''(t)\big|_{t=1} - G_S'(t)(G_S'(t) - 1)\big|_{t=1} = \lambda^2 p^2 - \lambda p(\lambda p - 1) = \lambda p$ ✓ OK

$G_S''(t)\big|_{t=1} = \underbrace{G_N''(G_X(t))}_{G_N''(1)} \cdot \underbrace{G_X'(t)^2}_{= p^2}\big|_{t=1} + \underbrace{G_N'(G_X(t))}_{= \lambda} \cdot \underbrace{G_X''(t)}_{= 0}\big|_{t=1}$

$G_N''(1) = Var(N) + G_N'(1)(G_N'(1) - 1) = [\lambda + \lambda(\lambda - 1)] p^2 = \lambda^2 p^2$

b) Donat que $\mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda$ i N és variable aleatòria discreta, $N \sim Poiss(\lambda)$. No necessàriament

Sota aquesta condició, $G_S(t) = G_N(G_X(t)) = G_N(q+pt) = e^{\lambda(q+pt-1)} =$

$$= e^{\lambda p(t-1)} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda p(t-1))^k}{k!}}_{\text{desenvolupament de Taylor}}$$

i sabent que $G_S(t) = \sum_{k \geq 0} t^k \, Pr(S=k)$, amb tot tenim que $Pr(S=k) = \lambda^k p^k$

D'altra banda, $G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$ tq $G_N^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda(t-1)}$;

$G_N^{(k)}(q) = G_N^{(k)}(1-p) = \lambda^k e^{-\lambda p} =$

$$= \underbrace{\lambda^k \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda p)^k}{k!}}_{\text{desenvolupament de Taylor}}$$

~~Anàlogament al cas $G_S(t)$,~~

Així arribem a que $\underbrace{Pr(S=k)}_{= \lambda^k p^k} = c^k G_N^{(k)}(q) = \lambda^k \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda p)^k}{k!}$

En cas de no saber que $N \sim Poiss(\lambda)$, com que només coneixem els valors de l'esperança i variància de S i N, l'anterior relació prové de considerar la relació que es pot establir entre:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k \geq 1} k \cdot Pr(S=k)$$

Assignatura: Teoria de la probabilitat

Estudiant/a: [redacted]

Data: 3/7/2015

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr(N=k)$$

$$G_N(t) = \sum_{i \geq 0} t^i \cdot \Pr(N=i) \quad \text{on} \quad G_N^{(k)}(t) = \sum_{i \geq 0} i(i-1)\cdots(i-k+1)\, t^{i-k} \Pr(N=i)$$

Certament, però com?

c) S i N−S seran independents sii es satisfà la relació

$$G_{S,(N-S)}(s,t) = G_S(s)\, G_{N-S}(t) = (*)$$

$$G_S(s) = e^{p(s-1)}$$

$$G_{S,(N-S)}(s,t) = \mathbb{E}(s^S t^{N-S}) = \mathbb{E}(s^S t^N t^{-S}) = \mathbb{E}(s^S t^N t^{-X_1} \cdots t^{-X_N}) = \mathbb{E}(s^{X_1+\cdots+X_N} t^N t^{-X_1} \cdots t^{-X_N})$$

$$G_{N-S}(t) = \mathbb{E}(t^{N-S}) = \mathbb{E}(t^N t^{-S}) = \mathbb{E}(t^N t^{-X_1} \cdots t^{-X_N})$$

$$(*) = \mathbb{E}(s^S)\,\mathbb{E}(t^N t^{-X_1} \cdots t^{-X_N}) = \mathbb{E}(s^{X_1+\cdots+X_N})\,\mathbb{E}(t^N t^{-X_1} \cdots t^{-X_N}) =$$

$$= \mathbb{E}(s^{X_1+\cdots+X_N} t^N t^{-X_1} \cdots t^{-X_N})$$

X_i indeps i indeps respecte N

i...

QUALIFICACIÓ

6

Assignatura: Teoria de la probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/7/2015

3. Qüestions

c) $X_n \sim \Gamma(1,n)$, de tal forma que podem interpretar X_n com la suma de n variables aleatòries Exp(1) idènticament distribuïdes indeps.:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i , \quad Y_i \sim Exp(1)$$

on $E(Y_i) = 1$ i $Var(Y_i) = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

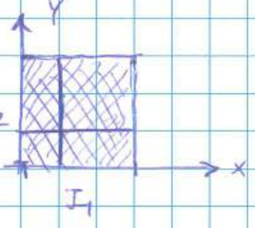
Podem doncs aplicar el teorema del límit central:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \text{quan } n \uparrow \infty$$

OK

3/3

b)



$f_{XY}(x,y) > 0$ si $(x,y) \in I_1 \times I_2$ i 0 altrament.

2.5/3

Volem provar $f_X(x) = I_{I_1}(x) \cdot \frac{1}{|I_1|}$, $f_Y(y) = I_{I_2}(y) \cdot \frac{1}{|I_2|}$ $\iff f_{Y|X=x}(y) = k \cdot f_{X|Y=y}(x)$

longitud dels intervals

$$\Longrightarrow) \quad f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x)\, f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y) = \frac{1}{|I_2|} I_{I_2}(y)$$

diferent de zero per hipòtesi

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\, f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) = \frac{1}{|I_1|}\, I_{I_1}(x)$$

diferent de zero per hipòtesi

Ara considerem

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{|I_2|} \cdot I_{I_2}(y) = \frac{|I_1|}{|I_2|} \cdot |I_1|^{-1} \cdot I_{I_1}(x) = \frac{|I_1|}{|I_2|}\, f_X(x) =$$

$$= \underbrace{\frac{|I_1|}{|I_2|}}_{=k} \cdot f_{X|Y=y}(x)$$

✓ ok

$\Leftarrow$) $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ $\Bigg\} \longrightarrow f_X(x)$ existeix, ja que existeix la funció de densitat condicionada, i és diferent de zero.

$f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $\Bigg\} \Rightarrow f_Y(y)$ existeix, ja que existeix la funció de densitat condicionada, i és diferent de zero.

Per hipòtesi, tenim la igualtat

$$\frac{f(x,y)}{f_X(x)} = k\,\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \iff f_Y(y) = k f_X(x)$$

✓

el valor de k l'obtenim de considerar el mòdul a l'equació anterior:

$$1/|I_2| = k \cdot \frac{1}{|I_1|} \iff k = \frac{|I_1|}{|I_2|}$$

El fet que $f_X(x) = 1/|I_1| \cdot I_{I_1}(x)$ i $f_Y(y) = 1/|I_2| \cdot I_{I_2}(y)$ ho deduim de manera inequívoca de l'existència de les funcions de

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 2 de 2

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Teoria de la probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/7/2015

densitat marginals i de la relació entre elles: $f_{Y|X=x}(y) = k\, f_{X|Y=y}(x)$

Però són uniformes ?

a) $\mathcal{A}$ la σ-àlgebra generada per $A_1, \dots, A_n, \dots$

Si $A \in \mathcal{A}$ independent de $A_1, \dots, A_n$ per a cada n, $Pr(A) \in \{0,1\}$

Considerem $C_n \in \mathcal{A}_n$, on $\mathcal{A}_n$ és la σ-àlgebra generada per $A_1, \dots, A_n$ i $A \,\Delta\, C_n$ la seva diferència simètrica.

Donat que $\lim_{n\uparrow\infty} Pr(A \,\Delta\, C_n) = Pr(A \,\Delta\, \lim_{n\uparrow\infty} C_n) = 0$,

(continuïtat de la probabilitat) (donat que $A \in \mathcal{A}$ i indep. de $A_1, \dots, A_n$ per a cada n)

això significa necessàriament que $A = \emptyset$ ó que $A = \Omega$ (i.e., tot l'espai mostral).

no necessàriament

On es fa servir la independència?

1/3

Com que $Pr(\emptyset) = 0$ i $Pr(\Omega) = 1$, llavors $Pr(A) \in \{0,1\}$.

✓

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

2

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/7/2015

(1) Tirem una moneda N vegades amb probabilitat de cara $p \in (0,1)$, on N v.a tq $E(N) = Var(N) = \lambda$

i funció generadora $G_N(t)$

X = # cares al tirar N cops

a) $E(X) = Var(X)$

Sigui $X_i = \begin{cases} 1 & \text{a la tirada } i \text{ surt cara} \\ 0 & \text{altrement} \end{cases}$

$X = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad X \sim Bin(N, p) \Rightarrow G_X(t) = \underbrace{((1-p)+pt)^N}_{} = (1+p(t-1))^N$

Això no es una funció: N es una v.a.

$E(X) = G'_X(1)$

$Var(X) = G''_X(1) - G'_X(1)(G'_X(1) - 1)$

$G'_X(t) = N(1+p(t-1))^{N-1}p \qquad G'_X(1) = Np$

$G''_X(t) = N(N-1)(1+p(t-1))^{N-2}p^2 \qquad G''_X(1) = N(N-1)p^2$

$Var(X) = N(N-1)p^2 - Np(Np-1) = Np((N-1)p - Np + 1) = Np(1-p)$

b) $\Pr(X=k) = c_k G_N^{(k)}(q)$ i determinar c_k

$\Pr(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

c) $N \sim Pois(\lambda)$

$p \in (0,1)$ pels quals X i $N-X$ independents

Si N és una Poisson(λ) aleshores la seva funció generadora és $G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$

~~(Aleshores si X i $N-X$ són independents, $G_{X+N-X}(t) = G_N(t) = G_X(t) \cdot G_{N-X}(t)$)~~

$G_{N-X} = \mathbb{E}(t^{N-X}) = \sum_{i\geq 0} t^i \Pr(N-X=i) = \sum_{i\geq 0} t^i \Pr(N=i+x \mid X=x) =$

?

$= \sum_{i\geq 0} t^i \frac{\Pr(N=i+x)}{\Pr(X=x)} = \sum_{i\geq 0} t^i \frac{\frac{\lambda^{i+x}}{(i+x)!} e^{-i-x}}{\binom{i+x}{x} p^x (1-p)^{i+x-x}} = \sum_{i\geq 0} \frac{x!\, i!}{(i+x)!\,(i+x)!} \frac{e^{-i-x} \lambda^{i+x}}{p^x (1-p)^i}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

2

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/7/2015

(3)

a) $\mathcal{A}$ σ-àlgebra generada per $A_1, \dots, A_n, \dots$

dem: $A \in \mathcal{A}$ independent de $A_1, \dots, A_n$ per cada n $\Rightarrow Pr(A) \in \{0,1\}$.

$$Pr(A_1 \cup A) = Pr(A_1) + Pr(A) \Rightarrow Pr(A) = Pr(A_1 \cup A) - Pr(A_1)$$
$$Pr(A) = Pr(A_2 \cup A) - Pr(A_2)$$
$$\vdots$$
$$\oplus\ Pr(A) = Pr(A_n \cup A) - Pr(A_n)$$
$$n Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i \cup A) - \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i \cup A) - 1$$

$$Pr(A_1 \cap A) = Pr(A_1) Pr(A)$$
$$Pr(A_2 \cap A) = Pr(A_2) \cdot Pr(A)$$
$$\oplus\ Pr(A_n \cap A) = Pr(A_n) Pr(A)$$
$$\sum_{i=1}^{n} Pr(A_i \cap A) = Pr(A) \cdot \sum_{i=1}^{n} Pr(A_n) = Pr(A)$$

b) (X,Y) v.a. bidimensional contínua amb $f_{XY}(x,y) > 0$ si $(x,y) \in I_1 \times I_2$, I_1, I_2 intervals i $f_{XY}(x,y) = 0$ altrament.

dem: $X \sim U(I_1)$, $Y \sim U(I_2)$ $\Leftrightarrow$ $f_{Y|X=x}(y) = k f_{X|Y=y}(x)$ per algun k. k?

$\Rightarrow$) Suposem $X \sim U(I_1)$, $Y \sim U(I_2)$ $\Rightarrow$ $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = f_{XY}(x,y) \cdot \ell(I_1)$

on $\ell(I)$ denota la longitud de l'interval

$f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(x)} = f_{XY}(x,y) \cdot \ell(I_2)$

1.5/3

Com que $\ell(I_1)$ i $\ell(I_2)$ són constants, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\ell(I_1) = k \ell(I_2)$

Per tant $f_{Y|X=x}(y) = k \cdot f_{X|Y=y}(x)$ per algun k. quin?

$\Leftarrow$) Suposem $f_{Y|X=x}(y) = k f_{X|Y=y}(x)$ per algun k.

$x \in$? $y \in$?

$f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$

$f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(x,y)}$

$\Rightarrow \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = k \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(x)} \Rightarrow f_Y(x) = k f_X(x)$

Perquè?

Això passa només si les dues variables són uniformes, $X \sim U(I_1)$, $Y \sim U(I_2)$

c) $X_n \sim \Gamma(1, n)$

<u>dem</u> : $\dfrac{(X_n - n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

$X_n \sim \Gamma(1, n) \quad E(X_n) = n \;,\; Var(X_n) = n$

Sigui $\underline{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$ no és això el que es vol obtenir

Aleshores pel teorema del límit central

$$\frac{S_n - n^2}{\sqrt{n^2}} \longrightarrow N(0,1)$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_i)}$$

Si veig que $X_n \xrightarrow{D} N(n, n) \Rightarrow \dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

Sigui $Z \sim N(n, n)$ $\qquad\qquad X \sim N(0,1)$

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^2}} e^{-\frac{1}{2n^2}(x-n)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2n^2}(x-n)^2} \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}$$

Com es calculen aquests límits?