UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Assignatura: Probabilitat

4'5 | 1 Full de

QUALIFICACIÓ 5'5

Estudiant/a:

Data: 3/11/2014

¿De dónde sale?

(1) a) C_n = # cicles en una permutació aleatòria de $\{1,\dots,n\}$.

Trobar $\mathbb{E}(C_n)$ i provar que assimptòticament és $\ln n$.

Prendre una permutació aleatòria de n elements és com prendre una permutació aleatòria de $n-1$ elements i afegir l'n-èssim element en un dels cicles de la permutació o posar que l'n-èssim element vagi a ell mateix.

Per cada permutació de $n-1$ elements ens surten n permutacions de n elements i si ho fem amb totes les permutacions de $n-1$ elements ens surten totes les de n elements.

Per tant, podem escriure $\mathbb{E}(C_n)$ com:

$$\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(C_{n-1})\left(\frac{n-1}{n}\right) + (\mathbb{E}(C_{n-1})+1)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\cdot\mathbb{E}(C_{n-1}) - \mathbb{E}(C_{n-1}) + \mathbb{E}(C_{n-1}) + 1}{n} = \mathbb{E}(C_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

¿Ley Esp iterada? Dilo!!

i a més, $\mathbb{E}(C_1) = 1$

Aleshores,

$$\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(C_{n-1}) + \frac{1}{n} = \mathbb{E}(C_{n-2}) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \dots = \mathbb{E}(C_1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = H_n$$

Per tant $\boxed{\mathbb{E}(C_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n \approx \ln n}$

b) Tenim n cordes (per tant, $2n$ extrems de corda). Triem n parelles d'extrems i nuem els extrems de cada parella.

L_n = # d'anelles que s'obtenen.

Calcular $\mathbb{E}(L_n)$

Podem obtenir $\mathbb{E}(L_n)$ fent el mateix que abans.

El nombre d'anelles que s'obtenen és el mateix que fer el mateix procediment amb $n-1$ cordes i després agafar una altra corda i, o bé afegir-la a una de les anelles o bé enllaçar-la amb ella mateixa.

Per tant ens queda el mateix que abans

$$\mathbb{E}(L_n) = \mathbb{E}(L_{n-1})\left(\frac{n-1}{n}\right) + (\mathbb{E}(L_{n-1})+1)\left(\frac{1}{n}\right) = \mathbb{E}(L_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

Per tant, $\boxed{\mathbb{E}(L_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n}$

NO

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

0,5

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/11/2014

(2) $X \sim U([1,2])$ X: l'instant d'arribada d'un usuari a un servidor

si $X=x$, $Y \sim Exp(x)$ Y: temps que dura el servei.

a) Calcular funció de densitat de probabilitat de Y.

$f(y) = xe^{-xy}$ on $y \in [0,\infty)$ i $x \in [1,2]$

Per trobar $f(y)$ hem de comprovar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$?

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = \int_0^{\infty} xe^{-xy}\,dy = x\int_0^{\infty} e^{-xy}\,dy = \lim_{a\to\infty} -e^{-xa} + 1 = 0+1=1$ no

Per tant $\boxed{f(y) = xe^{-xy}}$ és funció de densitat de Y on $y \in [0,\infty)$ i $x \in [1,2]$.

b) dem: $E(X^{\alpha} Y) = E(X^{\alpha-1})$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Sigui $f(x) = 1$ si $x \in [1,2]$ la funció de densitat de X

i $g(y) = xe^{-xy}$ si $y \in [0,\infty)$ i $x \in [1,2]$ la funció de densitat de Y. no

Volem trobar $h(x,y)$ funció de densitat conjunta de (X,Y)

busquem $H(x,y)$ la funció de distribució de (X,Y)

$H(x,y) = P_r(X \le x, Y \le y) = \underbrace{P_r(X \le x \mid Y \le y)}_{\text{l'instant d'arribada no depèn del temps que dura el servei}} \cdot P_r(Y \le y) = P_r(X \le x) \cdot P_r(Y \le y) =$

$= \int_1^x f(x)dx \cdot \int_0^y g(y)\,dy = \int_1^x dx \cdot \int_0^y xe^{-xy}\,dy = (x-1)(-e^{-xy}+1) =$

$= -xe^{-xy} + x + e^{-xy} - 1$

$\Rightarrow h(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^{-xy} + xye^{-xy} + 1 - ye^{-xy}\right) =$?

$= xe^{-xy} + xe^{-xy} - x^2ye^{-xy} - e^{-xy} + xye^{-xy} = e^{-xy}(2x - x^2y - 1 + xy)$

on $x \in [1,2]$
$y \in [0,\infty)$

Ara, sigui $K(X,Y) = X^{\alpha} Y$

$E(X^{\alpha} Y) = E(K(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)\cdot h(x,y)\,dx\,dy =$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha} y \cdot e^{-xy}(2x - x^2 y - 1 + xy)\,dx\,dy =$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}(2x^{\alpha+1} y - x^{\alpha+2} y^2 - x^{\alpha} y + x^{\alpha+1} y^2)\,dx\,dy =$

?

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}\cdot(2x^{\alpha+1} y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}(-x^{\alpha+2} y^2)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}(-x^{\alpha} y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}(x^{\alpha+1} y^2)\,dx\,dy$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}(2x^{\alpha+1} y) = 2\int_{0}^{\infty} y \int_{1}^{2} e^{-xy} x^{\alpha+1}\,dx\,dy = 2\int_{0}^{\infty} y\left(\frac{-x^{\alpha+1}}{y} e^{-xy} - \right.$

$u = x^{\alpha+1}$ $\quad du = (\alpha+1)x^{\alpha}\,dx$

$dv = e^{-xy}dx$ $\quad v = \int e^{-xy}dx = \frac{-1}{y} e^{-xy}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/11/2014

(2-)

c) Valor mitjà del temps transcorregut des de l'instant inicial fins que l'usuari surt del servidor.

És a dir, volem calcular l'esperança de Y, $E(Y)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y e^{-xy}\, dy = \int_{0}^{\infty} x \cdot y e^{-xy}\, dy = x \int_{0}^{\infty} y\, e^{-xy}\, dy \overset{\text{indicació}}{=}$$

$$= x\left(\lim_{y \to \infty} \frac{-e^{-xy}(1+xy)}{x^2} - \frac{-1}{x^2} \right) = \frac{1}{x}$$

$E(Y|X=x)$

Per tant $E(Y) = \frac{1}{x}$ i depèn de l'instant d'arribada

0,5

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

2

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data: 3/11/2014

(5) b) X, Y v.a. discretes independents

dem: $\forall h, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables, les v.a. $g(X)$ i $h(Y)$ són independents.

Com que X i Y són independents $\Rightarrow P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$.

Volem veure que $P_{r\,g(X)h(Y)}(x,y) = P_{g(X)}(x) \cdot P_{h(Y)}(y)$ ✓

$P_{r\,g(X)h(Y)}(x,y) = P_r(g(X)=x, h(Y)=y) = ⊛$

Aleshores com que g i h són mesurables, podem aplicar el teorema de la funció implícita ?, que ens assegura que podem aïllar X i Y de g i h de manera que ens quedi $X = \alpha$, $Y = \varphi$.

Per tant, tenim

$$⊛ = P_r(X = x+\alpha, Y = y+\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ i } Y \\ \text{independents}}}{=} P_{r_X}(x+\alpha) \cdot P_{r_Y}(y+\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si tornem} \\ \text{a com estàvem} \\ \text{abans}}}{=} P_{r\,g(X)}(x) \cdot P_{r\,h(Y)}(y)$$

vols dir?

1/3

c) Si A, B són independents i $Pr(C) > 0 \Rightarrow Pr(A \cap B |_C) = Pr(A|C) Pr(B|C)$

Si es satisfà la igualtat, podem dir que A i B són independents?

Comencem veient si $Pr(A \cap B |C) = Pr(A|C) \cdot Pr(B|C)$

$$Pr(A \cap B |_C) = \frac{Pr(A \cap B \cap C)}{Pr(C)} = \frac{Pr(A \cap (B \cap C))}{Pr(C)} \overset{A \setminus B \text{ indeps}}{=} \frac{P(A) \cdot P(B \cap C)}{Pr(C)} = P(A) \cdot Pr(B|C)$$

NO és cert Perquè?

$A, B \cap C$ independents?

Anem a veure si podem assegurar que són independents si tenim la igualtat.

$$Pr(A \cap B) = Pr(A|B) \cdot Pr(B) = Pr(A|B) \frac{Pr(B \cap C)}{Pr(C|B)} = Pr(A|B) \frac{Pr(B|C) Pr(C)}{Pr(C|B)} =$$

$$= \frac{Pr(A \cap B) Pr(B|C) Pr(C)}{Pr(B) Pr(C|B)} = \frac{Pr(A \cap B) Pr(B|C) \cdot Pr(C)}{Pr(B \cap C)} = Pr(A|B) Pr(B|C$$

Volem veure $Pr(A \cap B) = Pr(A) \, Pr(B)$

$$Pr(A \cap B) = Pr(A|B) \cdot Pr(B) = P(A|B) \frac{Pr(B \cap C)}{Pr(C|B)} =$$

1/3

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ 3

3 | —

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data:

1)

a) C_n = "nre de cicles a $\{1,\dots,n\}$ permutació"

buscarem $\mathbb{E}(C_n)$ en funció de $\mathbb{E}(C_{n-1})$

considerem els casos en que $\sigma(i)=i$ i els que no. Sigui

~~X la variable aleatòria que pren valor i quan σ(i)~~

Llavors, pel PIE i el T^a de la prob total

$$\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(C_n|_{\sigma(n)=n})\, Pr(\sigma(n)=n) + \dots + \mathbb{E}(C_n|_{\sigma(1)=1})\, Pr(\sigma_1=1) -$$

$$- \mathbb{E}(C_n|_{\substack{\sigma(i)=i \\ \sigma(j)=j}}) \cdot Pr(\sigma(i)=i, \sigma(j)=j) - \dots + \mathbb{E}(C_n|_{\sigma(i)\neq i \forall i}) \cdot Pr(\sigma(i)\neq i \forall i) =$$

$$= n\left(\mathbb{E}(C_{n-1})+1\right)\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\left(\mathbb{E}(C_{n-2})+2\right)\frac{1}{n(n-1)} + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{1}{i!}(-1)^{i+1}\left(\mathbb{E}(C_{n-i})+i\right)\right] + \mathbb{E}(C_n|_{\sigma(i)\neq i \forall i}) \cdot P(\sigma(i)\neq i \forall i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i-1)!}(-1)^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}(-1)^{i+1}\mathbb{E}(C_{n-i}) + \mathbb{E}(C_n|_{\sigma(i)\neq i \forall i})$$

quan fixo K elements que ~~...~~ són invariants per la perm, el nombre de cicles esperats és el de una perm de long n-K més tots els elements fixes que són cicles per si mateixos

$$\downarrow n\to\infty$$

$\ln n$

potser seria més adient

$$\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(C_n \mid \sigma(n)=n) \cdot P_r(\sigma(n)=n) + \mathbb{E}(C_n \mid \sigma(n) \neq n) \, P_r(\sigma(n) \neq n) =$$

$$= \left(\mathbb{E}(C_{n-1}) + 1\right) \frac{1}{n} + \left(\mathbb{E}(C_{n-1})\right) \frac{n-1}{n}$$

b)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ 7,5

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a:

Data:

2.

$X \sim \mathcal{U}([1,2])$

$f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[1,2]}$ $\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ x-1 & x \in [1,2] \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$

$Y \sim exp(x)$

$f_{Y|X}(y|x) = xe^{-xy}$ dom.

a) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_Y(y) = \dfrac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{f_{X|Y}(x|y)}$ (en realitat $f_Y(y) = \int f_{XY}(x,y)\, dx = \int f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$)

2

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)\, dx = \int_1^2 xe^{-xy} dx =$

$= \left[-e^{-yx}(1+yx)/y^2\right]_1^2 = \left[\dfrac{e^{-y}(1+y) - e^{-2y}(1+2y)}{y^2} \right]$ *

$y>0$

*

b)

$$\mathbb{E}(X^{\alpha}Y) = \iint x^{\alpha} y \cdot \cancel{\mathbb{1}_{[1,2]}(x)}\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{1}^{2} x^{\alpha} y\, x e^{-xy}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{1}^{2} x^{\alpha+1} y\, e^{-xy}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{1}^{2} x^{\alpha} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x y e^{-xy}\,dy}_{\mathbb{E}(Z) \text{ amb } Z \sim \exp(x)}\,dx = \cancel{\int_{1}^{2} x^{\alpha}\left[\frac{e^{-xy}(1+\dots)}{x^2}\right]} = \int_{1}^{2} x^{\alpha}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

taula d'esperances

2,5

$$= \int_{1}^{2} x^{\alpha-1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}\,\mathbb{1}_{[1,2]}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1} f_X(x)\,dx = \mathbb{E}(X^{\alpha-1})$$

~~d)~~

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) =$$

$$= \mathbb{E}(X^{1-1}) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 1 - \frac{3}{2}\,\mathbb{E}(X^{-1}) =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\,dx = 1 - \frac{3}{2}\ln 2$$

2,5

c) Ens demanen $\mathbb{E}(X+Y)$ (començant a l'instant x i trigant y segons més estàs esperant x+y segons)

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\,dx = \int_{1}^{2} x e^{-x(z-x)}\,dx$$

0,5

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \int_{1}^{2} x e^{-x(z-x)}\,dx\,dz =$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

6

Assignatura: Probabilitat

Estudiant/a: _

Data:

3.

c) $P_r(A\cap B \mid C) = P_r(A\mid C)\cdot P_r(B\mid C)$?

Sabem $P_r(A\cap B) = P_r(A)\cdot P_r(B)$

Si: A = al llançar un dau, el nº obtingut és multiple de 2

B = al llançar un dau, el nº obtingut és multiple de 3

$C = A$

$P_r(A\cap B\mid C) = 1/3 \qquad P_r(A\mid C) = 1 \qquad P_r(B\mid C) = \frac{1}{\cancel{6}\, 2}$ 1.5/3

i A, B són indeps:

$P(A\cap B) = \frac{1}{6} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$.

No, es pot dir que $A|C$ i $B|C$ són independents.

i el recíproc

ok

a) (X,Y) $\rho_{XY} = \frac{CoVar(X,Y)}{\sigma_x\,\sigma_y} = 1$

$\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)\left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right)^2 = \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$

Assumeixes que $Y = aX+b$?

$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(aX+b-\mathbb{E}(aX+b))\right) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(aX-a\,\mathbb{E}(X))\right) =$

$= a\,\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = a\,Var(X) = a\left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right)$

$\mathbb{E}(X^2)\cdot\mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) = \mathbb{E}(X^2)\cdot\left[a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right]$ ⊛

Fabricat Ecològicament

$$\left(a\,\mathrm{Var}(X)\right)^2 = \left[a\left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right)\right]^2 =$$

$$= a^2\,\mathbb{E}(X^2)^2 - 2a^2\,\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X)^2 + a^2\,\mathbb{E}(X)^2 = \circledast$$

$$= a^2\,\mathbb{E}(X^2)^2 + 2ab\,\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X) + b^2\,\mathbb{E}(X^2)$$

$$a^2\,\mathbb{E}(X)^2 - b^2\,\mathbb{E}(X^2) = 2a\,\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X)\left(a\mathbb{E}(X) + b\right)$$

$$a\mathbb{E}(X) + b = \mathbb{E}(Y) \Rightarrow a = \frac{\mathbb{E}(Y) - b}{\mathbb{E}(X)}$$

resolent

què es troba? 1/3

b)

$$\Pr(g(X) = k) = \sum_{x = g^{-1}(k)} \Pr(X = x)$$

$$\Pr(h(Y) = \ell) = \sum_{y \in g^{-1}(\ell)} \Pr(Y = y)$$

$$P_{g(X)h(Y)}(k,\ell) = P_{XY}(x,y) \overset{\text{indeps}}{=} P_X(x)\,P_Y(y)$$ ✓

$$\Pr(g(X) = k)\cdot\Pr(h(Y) = \ell) = \sum_{x \in g^{-1}(k)} \Pr(X=x) \sum_{y \in h^{-1}(\ell)} \Pr(Y=\ell) =$$

$$= \sum_{x \in g^{-1}(k)} \sum_{y \in h^{-1}(\ell)} \Pr(X=k)\Pr(Y=\ell) = \sum_{x \in g^{-1}(k)} \sum_{y \in h^{-1}(\ell)} \Pr(X=k, Y=\ell) =$$

$$= \sum_{x \in g^{-1}(k)} \Pr(X=k, h(Y)=\ell) = \Pr(g(X)=k, h(Y)=\ell)$$ ✓ ok 3/3

3 Full de

QUALIFICACIÓ 3

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

$\boxed{1}$ $E(C_n) = \cancel{P_{a}}$

Partimos de una permutación aleatoria de $\{1,2,\dots,n-1\}$, de longitud $\cancel{E}(C_{n-1})$ y añadimos el elemento n aleatoriamente para generar una permutación de $\{1,2,\dots,n\}$

¡Hay Esp. Iterada? ¡Dilo!

$$E(C_n) = P_r(A)\left[E(C_{n-1})-1\right] + P_r(B)\left[E(C_{n-1})\right] + P_r(C)\left[E(C_{n-1})+1\right]$$

Este cambio es complicado

C = "romper un ciclo en dos al añadir n" (el element)

B = "mantener el número de ciclos"

A = "unir dos ciclos al añadir n"

$P_r(A)+P_r(B)+P_r(C)=1$

$P_r(B) = \frac{1}{n-1}$

$P_r(C) = \frac{1}{2}$

~~No es magia, son cosas que dedujo haciendo dibujitos~~ ✓ ~~HAL~~

~~Suponemos que~~

$$P_r(A) = -P_r(C) - P_r(B) + 1 = \frac{2n-2-n+1-2}{2n-2} = \frac{n-3}{2(n-1)}$$

Por tanto: $E(C_n) = \frac{n-3}{2(n-1)}\left[E(C_{n-1})-1\right] + \frac{1}{n-1}E(C_{n-1}) + \frac{1}{2}\left[E(C_{n-1})+1\right] =$

$$= E(C_{n-1}) + \frac{1}{2} - \frac{n-3}{2(n-1)} = E(C_{n-1}) + \frac{n-1-n+3}{2(n-1)} =$$

$$= E(C_{n-1}) + \frac{1}{\cancel{n-1}} \quad \frac{1}{n}$$

Cálculos hechos con unos valores de P(A), P(B) y P(C) que creo que están mal

Teniendo en cuenta que $\mathbb{E}(C_1) = \cancel{0}\ 1$ y resolvería la recurrencia que encontraría si supiese $Pr(A)$, $Pr(B)$ y $Pr(C)$.

Haciendo $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(C_n)$ vería que se obtiene $\ln n$.

~~Imagino que será el~~ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

La $\mathbb{E}(C_n)$ debe de ser

~~Supongo que esto será lo que~~ tiene que dar

Assignatura:

Estudiant/

Data:

$\boxed{2}$ $X \sim \mathcal{U}([1,2]) \Rightarrow f_X(x) = 1_{[1,2]}(x)$

$Y|_X \sim Exp(x) \Rightarrow f_{Y|X}(y|x) = x e^{-xy} 1_{[0,\infty)}(y)$ ✓

ⓐ $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$ Densidad conjunta. 1,5

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_1^2 x e^{-xy} 1_{[0,\infty)}(y)\,dx =$$

1,5

$$= 1_{[0,\infty)}(y) \left[-e^{-yx} \frac{1+yx}{y^2}\right]_1^2 = \frac{1}{y^2} 1_{[0,\infty)}(y) \left[e^{-y}(1+y) - e^{-2y}(1+2y)\right]$$

ⓑ $E(X^\alpha Y)$

Definimos $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x,y) = x^\alpha y$ Es medible

Entonces, por el teorema de la esperanza:

$$E(X^\alpha Y) = E(g(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} x^\alpha y f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} x^\alpha y x e^{-xy} 1_{[0,\infty)}(y) f_X(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y=0}^{\infty} x^{\alpha+1} y e^{-xy} f_X(x)\,dy\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}} x^{\alpha+1} f_X(x) \left(\int_{y=0}^{\infty} y e^{-xy}\,dy\right) dx$$

$$\rightarrow \int_0^\infty y e^{-xy}\,dy = \left[-e^{-xy} \frac{1+xy}{x^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{x^2}$$

3,5

Por tanto, sustituyendo:

$$E(X^\alpha Y) = \int_{x\in\mathbb{R}} x^{\alpha+1} f_X(x) \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}} x^{\alpha-1} f_X(x)\,dx = E(X^{\alpha-1})$$

bricat Ecològicament

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

OBJETIVO: Determinar las tres esperanzas

$\rightarrow$ $E(XY) = E(X^{1-1}) \underset{0 \notin Sup X}{=} E(1) = 1$

$\rightarrow$ $E(Y) = E(X^0 Y) = E(X^{-1})$

Usamos el teorema de la esperanza con $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx = \int_1^2 x^{-1}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 = E(Y)$$

$\rightarrow$ $E(X) = \frac{3}{2}$ (porque $X \sim \mathcal{U}([1,2])$)

Por tanto: $\boxed{Cov(X,Y) = 1 - \frac{3}{2}\ln 2}$ 2,5

ⓒ $E(X + E(Y|X)) = E(X) + E(E(Y|X)) = E(X) + E(Y) = \frac{3}{2} + \ln 2$ 2

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

9

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

3 ⓐ TEOREMA $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

→ Lo demuestro. Defino la v.a $Z = (\alpha X + \beta Y)^2 \geq 0$

Su esperanza es: $E(Z) = \alpha^2 E(X^2) + 2\alpha\beta E(XY) + \beta^2 E(Y^2) \geq 0$

Como la esperanza es ≥ 0 ~~, el polinomio en β puede~~

el discriminante del polinomio en β es ≤ 0.

$$(2\alpha E(XY))^2 - 4\alpha^2 E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

La igualdad se da sii $E(Z) = 0 \overset{Z \geq 0}{\Leftrightarrow} Z = 0 \Leftrightarrow \alpha X = -\beta Y$

Con $\beta = \dfrac{-2\alpha E(XY) \pm 0}{2E(Y^2)} = -\alpha \dfrac{E(XY)}{E(Y^2)}$. ~~Es decir igualdad ⇔~~ $\dfrac{-\alpha}{\beta} = \dfrac{E(Y^2)}{E(XY)}$

→ Aplicando este teorema a las v.a $X - EX$ e $Y - EY$:

$$(E((X-EX)(Y-EY)))^2 \leq E((X-EX)^2)\,E((Y-EY)^2)$$

Haciendo la raíz cuadrada y dividiendo a ambos lados entre el término de la derecha

$$\left|\frac{E((X-EX)(Y-EY))}{\sqrt{E((X-EX)^2)}\sqrt{E((Y-EY)^2)}}\right| = \left|\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right| \leq 1$$

Y el término de la izquierda es exactamente $|\rho_{XY}|$

La igualdad se da sii:

$\alpha(X - EX) = -\beta(Y - E(Y))$ con las α y β del teorema.

$$\alpha X - \alpha E(X) = -\beta Y + \beta E(Y) \Leftrightarrow Y = \frac{1}{\beta}\left[\beta E(Y) + \alpha E(X) - \alpha X\right] =$$

$\underline{\alpha X + \beta Y}$

$$= \frac{-\alpha}{\beta} X + E(Y) + \frac{\alpha}{\beta} E(X).$$

→ Si $\rho_{XY} = 1$ entonces $|\rho_{XY}| = 1$ y entonces pasa eso

La a y la b del enunciado son

$$a = \frac{-\alpha}{\beta}$$

$$b = E(Y) + \frac{\alpha}{\beta} E(X)$$

Sustituimos $\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{E((Y-EY)^2)}{\cancel{E(XY)}\ E((X-EX)(Y-EY))} = \frac{Var(Y)}{Cov(X,Y)} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ✓

OK

CONTINUACIÓN DEL $\boxed{3}$

ⓑ X, Y independientes $\iff \Pr(X=x, Y=y) = \Pr(X=x)\Pr(Y=y)$

$\Pr(g(X)=\alpha, h(Y)=\beta) = \Pr(X \in g^{-1}(\alpha), Y \in h^{-1}(\beta)) =$

$= \sum_{x_i \in g^{-1}(\alpha)} \sum_{y_i \in h^{-1}(\beta)} \Pr(X=x_i, Y=y_i) = \sum_{x_i \dots} \sum_{y_i \dots} \Pr(X=x_i)\Pr(Y=y_i) =$

$= \sum_{x_i \in g^{-1}(\alpha)} \Pr(X=x_i) \sum_{y_i \in h^{-1}(\beta)} \Pr(Y=y_i) = \Pr(X \in g^{-1}(\alpha)) \Pr(Y \in h^{-1}(\beta)) =$

$= \Pr(g(X)=\alpha) \Pr(h(Y)=\beta) \Rightarrow g(X)$ y $h(Y)$ independientes.

ok

3/3

~~ⓒ A y B independientes $\iff \Pr(A\cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$~~

~~$\Pr(A\cap B \mid C) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(C)}$~~

~~$\Pr(A\mid C)\Pr(B\mid C) = \frac{\Pr(A)}{\Pr(C)} \frac{\Pr(B)}{\Pr(C)}$~~

~~No se tiene ~~que cum~~ por qué cumplir la igualdad.~~

~~(La igualdad se cumple sólo si $\Pr(C)=1$ ó $\Pr(A)=0$ ó $\Pr(B)=0$~~

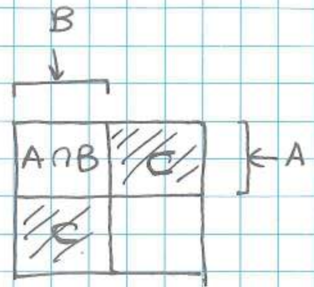
ⓒ SEGUNDA PREGUNTA: SÍ. Basta coger $C=\Omega$ y tenemos que:

$\Pr(A\cap B) = \Pr(A\cap B \mid \Omega) = \Pr(A\mid\Omega)\Pr(B\mid\Omega) = \Pr(A)\Pr(B)$

(c) A, B independientes $\Rightarrow P(A)P(B) = P(A\cap B)$

$$Pr(A\cap B|C) = \frac{Pr(A\cap B\cap C)\,Pr(C)}{Pr(C)\;Pr(C)}$$

$$Pr(A|C)\,Pr(B|C) = \frac{Pr(A\cap C)}{Pr(C)} \cdot \frac{Pr(B\cap C)}{Pr(C)}$$



(c) PRIMERA PREGUNTA No es cierto.

CONTRAEJEMPLO $C = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$

$\longrightarrow Pr(A\cap B \mid C) = 0$ porque $(A\cap B)\cap C = \emptyset$

$\longrightarrow Pr(A|C) \neq 0$ porque $Pr(A\cap C) = Pr(A\setminus B) = Pr(A) - Pr(A\cap B) =$

$\longrightarrow Pr(B|C) \neq 0$ $= Pr(A)(1 - Pr(B))$

OK

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

4'75 | 5'75 ~~4'~~ Full de

QUALIFICACIÓ
9'5

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

(1) Tenemos que $\mathbb{E}(C_n) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(C_{n-1})+1\right) + \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(C_{n-1})$ y que $\mathbb{E}(C_1)=1$, así que podemos resolver ahora la recurrencia. Para abreviar los cálculos, escribiremos $\mathbb{E}(C_n)=f(n)$. $f(n) = \frac{1}{n}(f(n-1)+1) + \frac{n-1}{n}f(n-1) = f(n-1)+\frac{1}{n}$, de donde tendremos que $f(2)=1+\frac{1}{2}$, $f(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots$, y por trivial inducción $f(n)=H_n$. Ahora bien, en el curso de variable compleja se demostró que $\lim_{n\to\infty} H_n - \ln n = \gamma$, con γ la constante de Euler (un ejercicio era ver γ irracional)

(alternativamente $\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n+1}{\ln(1+1/n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n+1}{1/n+1} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\ln n} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\gamma}}{\ln n}$
0

se cumplen las hip. de Stolz H_n creciente, $\ln n$ tb. con bo límite ∞.

Justificación de la recurrencia: con probabilidad $\frac{1}{n}$, $\sigma(1)=1$ $(\sigma\in S_n)$ ya que $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$. Si $\sigma(1)=1$, el número esperado de ciclos son los que habría en un elemento de S_{n-1} más este nuevo de un solo elemento. Si $\sigma(1)=a$, con $a\neq 1$, podemos entender que el 1 y el a son ahora un solo elemento, el primero de un ciclo cuyo ~~primer~~ siguiente elemento será $\sigma(a)$ y que se cerrará al volver a 1. De esta forma, el número esperado de ciclos es el mismo que si estuviése en S_{n-1}, y tendremos $\mathbb{E}(C_n)=\frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(C_{n-1})+1\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(C_{n-1})$

¿Ley Esp. Total? ¡Dilo!

b) Planteamos una recurrencia análoga a la anterior $E(L_n) = \frac{1}{2n-1}(E(L_{n-1})+1) + \frac{2n-2}{2n-1}E(L_{n-1}) = E(L_{n-1}) + \frac{1}{2n-1}$.

Como $E(L_1) = 1$, tendremos que $E(L_n) = \sum_{i=1}^{n} 1/_{2i-1} =$
$= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$, que asintóticamente tenderá a

$\ln(2n) - \frac{1}{2}\ln n = \ln\left(\frac{2n}{\sqrt{n}}\right) = \ln(2\sqrt{n}) \to \ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\ln n$

<u>Justificación</u>: es más de lo mismo, repetir lo de antes: si el primer extremo de la primera cuerda va al segundo extremo de esa misma cuerda, el número esperado es $E(L_{n-1})+1$ (como hay $2n-1$ opciones eso pasa con probabilidad $1/_{2n-1}$). Por el contrario, si el primer extremo de la 1ª cuerda (cuyos extremos serán a_1 y b_1) va a c_i, con $c \in \{a,b\}$, $i>1$, entonces consideramos que las cuerdas $1, i$ son la misma, de extremos los 2 que no han sido usados, con lo que el número esperado de nudos será $E(L_{n-1})$. Por consiguiente

$E(L_n) = \frac{1}{2n-1}\left(E(L_{n-1})+1\right) + \frac{2n-2}{2n-1}E(L_{n-1})$,

¿Ley Esp. Desarrolla?

~

NOTACIÓN: $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

10 Full ___ de ___ Revisat 10?

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

② a) Tenemos que $f_{Y|X}(y|x) = xe^{-xy}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$ Por tanto **1,5**

$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x) = xe^{-xy}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\, \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$, pues $x \neq 0$ en $[1,2]$.

Portanto, hay que hallar la marginal:

si $y \geq 0$ $\quad f_Y(y) = \int_1^2 xe^{-xy}dx = -\dfrac{e^{-xy}(1+xy)}{y^2}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \dfrac{-e^{-2y}(1+2y)+e^{-y}(1+y)}{y^2}$ **1,5**

si $y < 0$ $\quad f_Y(y) = 0$

Portanto $f_Y(y) = \left[\frac{1}{y^2}(e^{-y}-e^{-2y}) + \frac{1}{y}(e^{-y}-2e^{-2y})\right]\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

teo de la esperanza $\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}\mathbb{1}_{[1,2]} = \int_1^2 x^{\alpha-1}$

b) Tendremos que $\mathbb{E}(X^{\alpha-1}) = \int_1^2 x^{\alpha-1}\,dx = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}\Bigg|_1^2 = \dfrac{2^\alpha-1}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$

Por su parte $\mathbb{E}(X^\alpha Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha y x e^{-xy}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\,\mathbb{1}_{[1,2]}(x)\,dx\,dy =$

$= \int_1^2 x^{\alpha+1}\int_0^\infty ye^{-xy}\,dy\,dx = \int_1^2 x^{\alpha+1}\left[\dfrac{-e^{-xy}(1+xy)}{x^2}\right]_0^\infty dx =$ **2,5**

$\alpha = 0$?

$= \int_1^2 x^{\alpha-1}\,dx = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}\Bigg|_1^2 = \dfrac{2^\alpha-1}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$ *. Para encontrar la

covariancia, tendremos que $E(XY) = E(\mathbb{1}_{[1,2]}) = 1$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - \frac{3}{2}E(Y)$

2,5

Ahora bien $E(Y) \overset{\text{esp. iterada}}{=} E(E(Y|X)) \overset{\text{esp. de gam. es } 1/x}{=} E\left(\frac{1}{X}\right) = \ln 2$, y portanto

$Cov(X,Y) = 1 - \frac{3}{2}\ln 2$ (será negativo, cuanto + tarde llego + prisa se dan)

c) Si entra en un cierto instante x, la esperanza de Y es

$\frac{1}{x}$ así que la esperanza del momento en que saldrá del

servidor es $x + 1/x$. Nuevamente, por el teorema de

* Si $\alpha = 0$, en los dos casos la integral vale $\int_1^2 \frac{1}{x} = \ln 2$. **OK**

Fabricat Ecològicament

Z valor medio desde $t=1$ hasta que salgo $E(Z)=E\left(E(Z|X)\right)=E\left(\cancel{X}+\frac{1}{x}\cancel{-}1\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$

la esperanza iterada, $\mathbb{E}$(momento sale servidor contando desde el instante inicial) = $\mathbb{E}(\mathbb{E}$(momento sale servidor contado desde instante inicial $|X|)$ =

$$= E\left(X+\frac{1}{x}-1\right) = \int_1^2 \left(x+\tfrac{1}{x}-1\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \ln 2 - 1 = \frac{1}{2}+\ln 2$$

$\to \frac{3}{2}$

1

Esto un estadístico lo interpretaría así: un señor va al supermercado entre la 1 y las 2, y a las 2 cierran; a la hora de atenderlo, siempre puede surgir cierta problemática que haga que el servicio se demore, y eso se modela con una exponencial; ahora bien, la voluntad del dependiente de solucionar el problema es mayor según se acerca la hora de cerrar, y ahí van más rápido. Así y todo, la hora a la que todo acabará será aproximadamente (en media) $1+\left(\frac{1}{2}+\ln 2\right)\approx 1+1{,}2=2{,}2$, es decir, que hasta poco antes de las 2:15 no cierran.

NO SALE BIEN

Me estoy entreteniendo ahora en las comprobaciones rutinarias de calcular $E(Y)$ a partir de $f_Y(y)$, y me queda $\int e^{-y}-2e^{-2y} + \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-2y}}{y}\,dy$, y lo que estaba pensando es de las integrales dependientes de parámetros $F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xy}-e^{-2xy}}{y}\,dy$

$$F'(x)=\int_0^\infty\left(-e^{-xy}+2e^{-2xy}\right)dy = \frac{1}{x}-\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} \neq 0 \Rightarrow$$

¡no me vale!

Ya pensaré cómo hacerla, supongo que con variable compleja!

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

10

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Amb quin producte escalar?

(la medida que me determina la v.a. por medio de la corresp. entre F y μ)

(3) a) Comenzamos haciendo notar que $L^2(X,\mu)$ es un espacio de Hilbert, tal y como vimos en la asignatura de Análisis Real, y tenemos la desigualdad de Hölder (y en particular la de Cauchy-Schwarz). Dado que $\rho_{XY} = \frac{E((X-E(X))(Y-E(Y)))}{\sqrt{E((X-E(X))^2)E((Y-E(Y))^2)}}$, tendremos que si $\rho_{XY} = 1 \Rightarrow \rho_{XY}^2 = 1$, y por tanto $E((X-E(X))^2)\,E((Y-E(Y))^2) = \left(E((X-E(X))(Y-E(Y)))\right)^2$ ✓ Ahora bien, recuérdese que en un espacio de probabilidad arbitrario $E(X) = \int X\,d\mu$ (y en este caso concreto por ser la v.a. con función de distribución abs. continua, el teorema de Radon-Nykodin me permite poner $E(X) = \int x f(x)\,dx$),

δ absolutament contínua respecte de la

és aquí que fa de $E(X)$ un producte escalar

por lo que tendremos que la desigualdad de Cauchy nos dice que si $f = X - E(X)$, $g = Y - E(Y)$, entonces $\left(\int f^2\,d\mu\right)\left(\int g^2\,d\mu\right) \geq \left(\int fg\,d\mu\right)^2$ con igualdad si y solo si $f = \lambda g \Leftrightarrow X - E(X) = \lambda Y - \lambda E(Y)$ ✓ OK. De aquí tenemos que si $\lambda \neq 0$, $Y = \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{a} X + \underbrace{\left(E(Y) - \frac{E(X)}{\lambda}\right)}_{b}$, y si $\lambda = 0$, entonces $f = X - E(X) = 0$ $\Rightarrow X = E(X)$, y eso querría decir que ρ no está bien definido pues se asume $\sigma_X > 0$. Por tanto $Y = aX + b$ en L^2, esto es, en un espacio donde trabajamos con clases de equivalencias de forma que 2 funciones se consideran iguales si lo son c.p.t. Por ende, $Pr(Y = aX+b) = 1$. Si $Y = aX+b$ $E(Y) = a\,E(X) + b$

$E(Y^2) - E(Y)^2 = Var(Y) = Var(aX+b) = E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2 = a^2E(X^2) + 2ab\,E(X) + b^2 - E(Y)^2$

$E(Y) = aE(X) + b$

$E(Y^2) = a^2E(X^2) + 2ab\,E(X) + b^2 = a^2E(X^2) + 2a(E(Y) - aE(X))E(X) + (E(Y) - aE(X))^2$

sigue atrás

b) Al ser variables discretas el hecho de que sean independientes se escribe como $Pr(X=a, Y=b) = Pr(X=a)Pr(Y=b)$, $\forall a,b$ aunque naturalmente se ~~cumple que~~ puede reescribir como $Pr(X \leq c, Y \leq d) = Pr(X \leq c)Pr(Y \leq d)$, $\forall c,d$ y para ver ahora que $g(X)$ y $h(Y)$ son independientes, el objetivo es probar $Pr(g(X) \leq a, h(Y) \leq b) = Pr(g(X) \leq a)Pr(h(Y) \leq b)$ $\forall a,b$

Pero $Pr(g(X) \leq a, h(Y) \leq b) = Pr(X \in g^{-1}(-\infty, a], Y \in h^{-1}(-\infty, b])$. Pero por ser g y h medibles, $g^{-1}(-\infty,a]$, $h^{-1}(-\infty, b]$ son medibles (de la σ-alg!) y se cumple para ellos la condición de independencia, con lo que la expresión anterior es igual a $Pr(X \in g^{-1}(-\infty,a]) Pr(Y \in h^{-1}(-\infty, b]) = Pr(g(X) \leq a) Pr(h(Y) \leq b)$, como queríamos. ✓ OK 3/3

imp. { (Básicamente la independencia es, si σ es la σ-álgebra $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$ $\forall A,B \in \sigma$, y llega verlo para una "base", como $(-\infty, a]$), pero para X, Y usamos el para todo.

Continuación de a)

$$E(Y^2) = a^2 E(X^2) + \cancel{2aE(X)E(Y)} - 2a^2 E(X)^2 + E(Y)^2 - \cancel{2aE(X)E(Y)} + a^2 E(X)^2 =$$

$$= a^2(E(X^2) - E(X)^2) + E(Y)^2 \Rightarrow \frac{E(Y^2) - E(Y)^2}{E(X)^2 - E(X)^2} = a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$$

(por ser el coef. de corr. 1 y no -1, $a > 0$) $\Rightarrow a = \sigma_Y / \sigma_X$ ✓

es trivial comprobar que si $Y = -aX + b$, con $a > 0$, $\rho = -1$, lo comentamos en clase, que el $a > 0$ es corr. pos. y - corr. negativa.

$E(XY) - E(X)E(Y) = aE(X^2) + bE(X) - aE(X)^2 - bE(X) = a(E(X^2) - E(X)^2)$

positivo, así que depende del signo de a.

$$b = E(Y) - aE(X) = E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X)$$ ✓

donde σ_X, σ_Y son los momentos centrales, que solo dependen de $E(X)$, $E(X^2)$, $E(Y)$, $E(Y^2)$.

OK

4/4

c) Es mentira. Consideramos el espacio de prob. discreto formado por los números naturales de $[1,9]$, con la prob. usual Laplaciana. Sea $A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,4,5\}$
$C = \{2,4,6\}$

A y B son independientes pues $Pr(A\cap B) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = Pr(A)Pr(B)$, pero $Pr(A\cap B|C) = \frac{Pr(A\cap B\cap C)}{Pr(C)} = 0 \neq \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1/9}{1/3}\cdot\frac{1/9}{1/3} = \frac{Pr(A\cap C)}{Pr(C)}\cdot\frac{Pr(B\cap C)}{Pr(C)} =$
$= Pr(A|C)\cdot Pr(B|C)$. OK

Si esta última ~~dem~~ igualdad se da para un cierto C, A y B no tienen que ser independientes. Ahora el espacio de prob. es el que forman los 10 primeros naturales (en $[1,10]$)

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,4,5\}$
$C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$Pr(A\cap B|C) = \frac{1/10}{9/10} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3/10}{9/10}\cdot\frac{3/10}{9/10} = Pr(A|C)Pr(B|C)$

Ahora bien $Pr(A\cap B) = \frac{1}{10}$, $Pr(A) = \frac{3}{10}$, $Pr(B) = \frac{3}{10}$, $Pr(A)\cdot Pr(B) = \frac{9}{100} \neq \frac{1}{10}$

Ahora bien, si $Pr(A\cap B|C) = Pr(A|C)Pr(B|C)$ $\forall C$ tq $Pr(C) > 0$, entonces sí serían independientes simplemente cogiendo $C = \Omega$ (el total). Intuitivamente, ya se ve la falsedad de los dos resultados, pues que $\int_{A\cap B} 1 = \int_A 1 \int_B 1$ no se relaciona con el hecho que $\frac{1}{C}\int_{A\cap B\cap C} 1 = \int_{A\cap C} 1 \int_{B\cap C} 1$. Resumiendo, que una cosa es la probabilidad en el espacio total y otra la condicionada, y no hay relación entre que unos sucesos sean independientes en un sitio y en otro.

OK 5/3