Teoria de Probabilitat.

Grau de Matemàtiques, FME, UPC.

Final Gener 2015

---

1. Dos jugadors A i B llencen repetidament dos daus (de manera simultània i independent) fins que un dels dos daus mostra un resultat més gran que l'altre. Guanya el jugador que té el dau que ha mostrat aquest resultat més gran. El dau de A és equilibrat i el de B satisfà $\Pr(1) = \Pr(2) = \Pr(3) = \Pr(4) = \Pr(5) = \frac{1}{2}\Pr(6)$.

   (a) Calculeu la probabilitat p que guanyi el jugador A i q que guanyi B.

   (b) Calculeu el nombre mitjà de vegades que es repeteix el llençament dels dos daus. Quin és aquest nombre mitjà si sabem que ha guanyat A?

   (c) Sigui G l'esdeveniment que A guanyi r vegades consecutives abans que B guanyi s vegades consecutives, $r, s \geq 2$, al jugar repetidament el joc anterior. Doneu l'expressió de $\Pr(G)$ en termes de p i q. Particularitzeu el resultat obtingut pel cas $r = s = 2$.

   [Indicació: Es pot obtenir un sistema d'equacions per a $\Pr(G), \Pr(G|A_1)$ i $\Pr(G|B_1)$, on A_1 i B_1 són els esdeveniments que guanyi el primer joc A i B respectivament.]

Resolució:

(a) Diem D_A al dau del jugador A i D_B al del jugador B. Pel dau D_A tenim $\Pr(i) = 1/6$, $i = 1, 2, \ldots, 6$; mentre que per D_B, $\Pr(i) = 1/7$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, i $\Pr(6) = 2/7$. Així, la probabilitat que D_A mostri un resultat més gran que D_B val

$$\Pr(D_A > D_B) = \sum_{i=1}^{6} \Pr(D_A > i | D_B = i) \Pr(D_B = i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{6-i}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{15}{42}.$$

Anàlogament, la probabilitat que $D_B > D_A$ val

$$\Pr(D_B > D_A) = \sum_{i=1}^{6} \Pr(D_B > i | D_A = i) \Pr(D_A = i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{7-i}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{42}.$$

Per tant, la probabilitat que es produeixi empat és

$$\Pr(D_A = D_B) = 1 - \Pr(D_A > D_B) - \Pr(D_B > D_A) = \frac{7}{42}.$$

Sigui $p = \Pr(A)$ la probabilitat que A guanyi el joc. Condicionant pel fet que en el primer llençament dels daus es produeixi $\{D_A > D_B\}$, $\{D_B > D_A\}$, o $\{D_A = D_B\}$, tenim

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(A|D_A > D_B) \Pr(D_A > D_B) \\ &\quad + \Pr(A|D_B > D_A) \Pr(D_B > D_A) + \Pr(A|D_A = D_B) \Pr(D_A = D_B) \\ &= 1 \cdot \Pr(D_A > D_B) + 0 \cdot \Pr(D_B > D_A) + \Pr(A) \cdot \Pr(D_A = D_B) = \frac{15}{42} + \frac{7}{42}\Pr(A),\end{aligned}$$

d'on

$$p = \Pr(A) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

La probabilitat q que B guanyi el joc és la complementària de $\Pr(A)$,

$$q = 1 - \Pr(A) = \frac{4}{7}.$$

(b) El nombre N de vegades que es llencen els dos daus és una variable aleatòria geomètrica de paràmetre $1 - \Pr(D_A = D_B) = 35/42 = 5/6$. Per tant,

$$\mathbb{E}(N) = \frac{6}{5}.$$

D'altra banda, denotant per A l'esdeveniment "A guanya el joc",

$$\Pr(N = k|A) = \frac{\Pr(\{N = k\} \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{(\frac{7}{42})^{k-1} \cdot \frac{15}{42}}{\frac{3}{7}} = \left(\frac{7}{42}\right)^{k-1} \cdot \frac{5}{6}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Així doncs, N condicionada per A també és geomètrica de paràmetre $5/6$ i $\mathbb{E}(N|A) = \mathbb{E}(N) = 6/5$.

(c) Sigui G l'esdeveniment "A guanya r vegades consecutives abans que B guanyi s vegades consecutives", sigui A_n l'esdeveniment "A guanya els n primers jocs" i B_n l'esdeveniment "B guanya els n primers jocs". Tenim

$$\Pr(G) = \Pr(G|A_r)p^r + \Pr\left(G|\overline{A_r}\right)(1 - p^r) = p^r + \Pr(G|B_1)(1 - p^r). \tag{1}$$

Intercanviant A per B i p per q, a partir de l'equació anterior podem escriure

$$1 - \Pr(G) = q^s + (1 - \Pr(G|A_1))(1 - q^s),$$

d'on

$$\Pr(G) = \Pr(G|A_1)(1 - q^s). \tag{2}$$

També

$$\Pr(G) = \Pr(G|A_1)p + \Pr(G|B_1)q. \tag{3}$$

Resolent el sistema definit per les equacions (1), (2) i (3) s'obté

$$\Pr(G) = \frac{p^{r-1}(1 - q^s)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}}.$$

Per $r = s = 2$, $p = 3/7$ i $q = 4/7$, la probabiltat $\Pr(G)$ val

$$\Pr(G) = \frac{(3/7)(1 - (4/7)^2)}{3/7 + 4/7 - 3/7 \cdot 4/7} = \frac{99}{259} \approx 0.3822.$$

2. Un dispositiu consta d'un sistema principal S_p i d'un sistema auxiliar S_a que s'activa quan s'atura S_p. El temps T_p de durada de S_p és una variable aleatòria exponencial de paràmetre 1, i el temps T_a de durada de S_a és una variable aleatòria uniforme en $[0, 1]$. Les variables aleatòries T_p i T_a són independents. Sigui $T = T_p + T_a$ el temps total de durada del dispositiu.

   (a) Calculeu les funcions de distribució i de densitat de la variable aleatòria T.

   (b) Trobeu $\mathbb{E}(T_p \mid T)$.

   (c) Calculeu les probabilitats $\mathrm{Pr}_p(t)$, $\mathrm{Pr}_a(t)$, i $\mathrm{Pr}_{\mathrm{off}}(t)$ que en l'instant t estigui, respectivament, funcionant el sistema principal S_p, el sistema auxiliar S_a, o el dispositiu ja estigui del tot aturat.

Resolució:

(a) La funció de densitat conjunta de les variables aleatòries T_p i T_a val:

$$f_{T_pT_a}(u, v) = f_{T_p}(u)f_{T_a}(v) = \begin{cases} e^{-u}, & u > 0,\ 0 < v < 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}.$$

La funció de distribució de $T = T_p + T_a$ s'obté integrant $f_{T_pT_a}(u, v)$ en la regió $u + v < t$ del pla u, v:

$$F_T(t) = \mathrm{P}(T \le t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t dv \int_0^{t-v} e^{-u}\, du = t - 1 + e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ \displaystyle\int_0^1 dv \int_0^{t-v} e^{-u}\, du = 1 - e^{-t}(e-1), & t > 1 \end{cases}.$$

Derivant el resultat anterior,

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ (e-1)e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

També, directament,

$$f_T(t) = f_{T_p}(t) * f_{T_p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_a}(\tau) f_{T_p}(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^1 f_{T_p}(t-\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)}\, d\tau = 1 - e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ \displaystyle\int_0^1 e^{-(t-\tau)}\, d\tau = (e-1)e^{-t}, & t > 1 \end{cases}.$$

(b) Calcularem primer la densitat conjunta de (T, T_p) fent el canvi de variable

$$\left.\begin{array}{rcl} T & = & T_p + T_a \\ T_p & = & T_p \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} t & = & u+v \\ u & = & u \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} v & = & t-u \\ u & = & u \end{array}\right\}$$

fent servir t, u i v pels valors de T, T_p i T_a, respectivament. El Jacobià del canvi és 1. Per tant,

$$f_{TT_p}(t,u) = f_{T_pT_a}(u, t-u) = f_{T_p}(u) f_{T_a}(t-u) =$$

$$e^{-u} I_{[0,\infty)}(u) I_{[0,1]}(t-u) = e^{-u} I_{[0,\infty)}(u) I_{[t-1,t]}(u) = e^{-u} I_{[(t-1)^+,t]}(u),$$

on $(t-1)^+ = \max\{0, t-1\}$. Ja coneixem la densitat marginal de T (l'hem calculada a l'apartat (a)) però la podríem calcular ara a partir de la densitat conjunta de (T, T_p). Per a $t \geq 0$,

$$f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{TT_p}(t,u) du = \int_{(t-1)^+}^{t} e^{-u} du = -e^{-u}\Big|_{(t-1)^+}^{t} = e^{-(t-1)^+} - e^{-t}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ e^{1-t} - e^{-t} & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Ara calculem la densitat condicionada de $T_p | T = t$, per a $t > 0$:

$$f_{T_p|T=t}(u) = \frac{f_{TT_p}(t,u)}{f_T(t)} = \frac{e^{-u}}{e^{-(t-1)^+} - e^{-t}} I_{[(t-1)^+,t]}(u).$$

Per tant, la funció esperança condicionada és

$$m(t) = \mathbb{E}(T_p | T = t) = \frac{1}{e^{-(t-1)^+} - e^{-t}} \int_{(t-1)^+}^{t} u e^{-u} du = \frac{1}{e^{-(t-1)^+} - e^{-t}} \left(-(u+1)e^{-u}\right)\Big|_{(t-1)^+}^{t}$$

$$= \frac{((t-1)^+ + 1)e^{-(t-1)^+} - (t+1)e^{-t}}{e^{-(t-1)^+} - e^{-t}} = \begin{cases} 1 - t/(e^t - 1) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ t - 1/(e-1) & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Finalment, $\mathbb{E}(T_p \mid T) = m(T)$.

(c) Suposem $t > 0$,

$$\mathrm{P}_p(t) = \Pr(T_p > t) = 1 - F_{T_p}(t) = e^{-t}.$$

També,

$$\mathrm{P}_{\text{off}}(t) = \mathrm{P}(T < t) = \begin{cases} t - 1 + e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 1 - e^{-t}(e-1), & t > 1 \end{cases}.$$

Per tant,

$$\mathrm{P}_a(t) = 1 - (\mathrm{P}_p(t) + \mathrm{P}_{\text{off}}(t)) = \begin{cases} 2 - 2e^{-t} - t, & 0 < t < 1 \\ -2e^{-t} + e^{-(t-1)}, & t > 1 \end{cases}.$$

3. Qüestions.

   (a) Sigui (X, Y) una variable per la que existeixen tots els moments de segon ordre. Proveu que, si $X - Y$ i X són independents i $X - Y$ i Y són independents, aleshores $X - Y$ és constant quasibé segurament. Proveu el mateix resultat si X i Y segueixen una llei de Cauchy estàndard.

   (b) Sigui $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatori que segueix una llei normal $N(\mathbf{m}, \Sigma)$ i A una matriu $n \times n$ no singular. Proveu que $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ segueix una llei normal $N(A\mathbf{m}, A\Sigma A^T)$.

   (c) Sigui $Y_n \sim Geom(\lambda/n)$, $n \geq 1$. Fent servir funcions característiques proveu que la successió Y_n/n convergeix en distribució a una variable aleatòria X que segueix una llei exponencial de valor mitjà $1/\lambda$.

(a) Tenim

$$\mathbb{E}((X-Y)^2) = \mathbb{E}(X(X-Y)) - \mathbb{E}(Y(X-Y)) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X-Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X-y) = \mathbb{E}(X-Y)^2,$$

de manera que $Var(X-Y) = 0$ i $X - Y$ és constant (igual a $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$) amb probabilitat 1.

Si X i Y segueixen una llei de $Cau(1)$ aleshores no tenen moments i l'argument anterior no es pot fer servir. En general, si X i Y tenen la mateixa distribució,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(e^{it(Y+(X-Y))}) = \phi_Y(t)\phi_{X-Y}(t),$$

de manera que $\phi_{X-Y}(t) = 1$, el que implica que $X - Y = 0$ amb probabilitat 1.

(b) Fent servir funcions característiques,

$$\phi_{A\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}^T A\mathbf{X}}) = \mathbb{E}(e^{i(A^T\mathbf{t})^T\mathbf{X}}) = \phi_{\mathbf{X}}(A^T\mathbf{t}).$$

Fent servir que $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{m}, \Sigma)$,

$$\phi_{\mathbf{X}}(A^T\mathbf{t}) = e^{i(A^T\mathbf{t})\mathbf{m}} e^{-\frac{1}{2}(A^T\mathbf{t})^T\Sigma(A^T\mathbf{t})} = e^{i\mathbf{t}^T(A\mathbf{m})} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{t}^T(A\Sigma A^T)\mathbf{t})},$$

que és la funció característica d'una normal $N(A\mathbf{m}, A\Sigma A^T)$.

(c) Tenim

$$\phi_{Y_n/n}(t) = \phi_{Y_n}(t/n) = \frac{(\lambda/n)e^{it/n}}{1 - (1 - \lambda/n)e^{it/n}}.$$

Desenvolupant l'exponencial fins a primer ordre,

$$e^{it/n} = 1 + (it/n) + o(t/n), \ (n \to \infty)$$

obtenim

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n/n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda/n)(1 + (it/n) + o(t/n))}{1 - (1 - \lambda/n)(1 + (it/n) + o(t/n))} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

que és la funció característica d'una variable X amb distribució $Exp(\lambda)$. Pel teorema de continuitat,

$$Y_n/n \xrightarrow{D} X.$$