Teoria de Probabilitat.
Grau de Matemàtiques, FME, UPC.
Examen extraordinari, juliol 2015
Resolució

---

1. Tirem una moneda N vegades amb probabilitat de cara $p \in (0,1)$, on N és una variable aleatòria amb $\mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda$ i funció generadora de probabilitat $G_N(t)$. Diem X al nombre de cares que s'obtenen.

   (a) Proveu que $\mathbb{E}(X) = Var(X)$.

   (b) Proveu que $\Pr(X = k) = c_k G_N^{(k)}(q)$, $q = 1 - p$, i determineu la constant c_k.

   (c) Sigui $N \sim Poiss(\lambda)$. Determineu els valors de $p \in (0,1)$, si n'hi ha, pels quals X i $N - X$ són independents.

   Resolució:

   (a) Tenim $X|N = n \sim Bin(n,p)$ i

   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|N)) = \mathbb{E}(Np) = \lambda p.$$

   D'altra banda, per la fórmula de la variància iterada,

   $$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|N)) + Var(\mathbb{E}(X|N)) = \mathbb{E}(Npq) + Var(Np) = pq\mathbb{E}(N) + p^2 Var(N) = \lambda p.$$

   (b) La funció generadora de probabilitat de X satisfà

   $$\begin{aligned} G_X(t) &= G_N(q + pt) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pr(N = m)(q + pt)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k q^{m-k} t^k \Pr(N = m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} p^k q^{m-k} \Pr(N = m)) t^k, \end{aligned}$$

   d'on

   $$\begin{aligned} \Pr(X = k) &= \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} p^k q^{m-k} \Pr(N = m) \\ &= \frac{p^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1) q^{m-k} \Pr(N = m) \\ &= \frac{p^k}{k!} G_N^{(k)}(q). \end{aligned}$$

   A la darrera igualtat s'ha fet servir que $G_N(qt) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pr(N = m) q^m t^m$ té radi de convergència almenys 1.

(c) Si $N \sim Poiss(\lambda)$ aleshores $X \sim Poiss(\lambda p)$ i $Y \sim Poiss(\lambda q)$. D'una banda

$$\begin{aligned}
\Pr(X = k, Y = \ell) &= \Pr(X = k, Y = \ell | N = k + \ell) \Pr(N = k + \ell) \\
&= \Pr(X = k | N = k + \ell) \Pr(N = k + \ell) \\
&= \binom{k + l}{k} p^k q^\ell \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k + \ell)!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{p^k q^\ell \lambda^{k+\ell}}{k!\ell!} e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

D'altra banda

$$\begin{aligned}
\Pr(X = k) \Pr(Y = \ell) &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} e^{-\lambda q} \\
&= \frac{p^k q^\ell \lambda^{k+\ell}}{k!\ell!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

que coincideix amb l'expressió anterior epr a tot $p \in (0, 1)$.

2. Els temps de vida de n cèl.lules $c_1, \ldots, c_n$ són variables aleatòries independents $T_1, \ldots, T_n$ amb $T_i \sim Exp(\lambda_i)$, $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.
   (a) Quina és la probabilitat que la cèl.lula c_i sigui la primera en extingir-se.
   (b) Proveu que els esdeveniments $\{T_i = \min_j T_j\}$ i $\{\min_j T_j \geq t\}$ són independents.
   (c) Determineu el nombre mitjà de cèl.lules que queden vives quan s'extingeix la cèl.lula c_1. [Indicació: Podeu considerar les variables indicadores Y_i de l'esdeveniment que c_i sobrevisqui c_1.]

Resolució:

(a) La probabilitat és

$$p_i = \Pr(T_i = \min_j T_j) = \Pr(T_i < \min_{j \neq i} T_j).$$

La funció de distribució de probabilitat de $Z = \min_{j \neq i} T_j$ és

$$F_Z(t) = 1 - \Pr(Z > t) = 1 - \prod_{j \neq i} \Pr(T_j > t) = 1 - \prod_{j \neq i} e^{-\lambda_i t} = 1 - e^{-\sum_{j \neq i} \lambda_j t}$$

En altres paraules, Z segueix una llei exponencial $Exp(\lambda)$ amb $\lambda = \sum_{j \neq i} \lambda_j$. Ara, fent servir que Z i T_i són independents,

$$\begin{aligned}
p_i &= \int_{\mathbb{R}} \Pr(T_i < Z | Z = t) f_Z(t) dt \\
&= \int_0^\infty \Pr(T_i < t) \lambda e^{\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_i t}) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.
\end{aligned}$$

(b) Diem $T_i' = T_i - t$. Com que les variables exponencials no tenen memòria, $T_i'|T_i \geq t \sim Exp(\lambda_i)$. Per tant,

$$\Pr(T_i = \min_j T_j | \min_j T_j \geq t) = \Pr(T_i' = \min_j T_j' | T_1 \geq t, \ldots, T_n \geq t) = \Pr(T_i = \min_j T_j).$$

(c) Sigui N el nombre de cèl.ules que sobreviuen a la cèl.lula c_1. Diem Y_i la variable indicadora que la cèl.lula c_i sobrevisqui quan s'ha extingit la cèl.lula c_1. Tenim

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(Y_i),$$

amb

$$\mathbb{E}(Y_i) = \Pr(T_i > T_1).$$

Fent servir que les variables $T_1, \ldots, T_n$ són independents,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_i) &= \int_{\mathbb{R}} \Pr(T_1 < T_i | T_i = t) f_{T_i}(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} \Pr(T_1 \leq t) \lambda_i e^{-\lambda_i} dt \\
&= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 t}) \lambda_i e^{-\lambda_i} dt \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_i}.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\mathbb{E}(N) = \lambda_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_i}.$$

3. Qüestions.

(a) Sigui $\mathcal{A}$ la σ–àlgebra generada per $A_1, \ldots, A_n, \ldots$. Proveu que, si $A \in \mathcal{A}$ és independent de $A_1, \ldots, A_n$ per a cada n, aleshores $\Pr(A) \in \{0, 1\}$.
[Indicació: Podeu fer servir que existeix $C_n \in \mathcal{A}_n$, tal que $\lim_{n\to\infty} \Pr(A \Delta C_n) = 0$, on $\mathcal{A}_n$ és la σ-àlgebra generada per $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $A\Delta C_n$ denota la diferència simètrica.]
Resolució:
Fent servir la indicació i la independència de A amb $A_1, \ldots, A_n$ per a cada n tenim

$$\Pr(A) = \lim_{n\to\infty} \Pr(A \cap C_i) = \lim_{n\to\infty} \Pr(A) \Pr(C_i) = \Pr(A)^2,$$

d'on $\Pr(A) \in \{0, 1\}$.

(b) Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional contínua amb densitat conjunta $f_{XY}(x, y) > 0$ si $(x, y) \in I_1 \times I_2$, on I_1 i I_2 són dos intervals, i $f_{XY}(x, y) = 0$ altrament. Proveu que X i Y són uniformes en I_1 i I_2, respectivament, si i només si $f_{Y|X=x}(y) = k f_{X|Y=y}(x)$, per a alguna constant k. Quan val k?
Resolució:
Si X i Y són uniformes en I_1 i I_2, respectivament, aleshores per a tot $x \in I_1$ i $y \in I_2$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{|I_1|^{-1}}, \; f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{|I_2|^{-1}}.$$

Aleshores

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X|Y=y}(x)|I_1|}{|I_2|}$$

i $k = |I_1|/|I_2|$.

Suposem ara que $f_{Y|X=x}(y) = kf_{X|Y=y}(x)$ per a $x \in I_1, y \in I_2$. Sabem que la densitat conjunta és

$$f(x,y) = f_{Y|X=x}(y)f_X(x) = f_{X|Y=y}(x)f_Y(y).$$

Per tant, per a tot $x \in I_1$ i $y \in I_2$

$$\frac{f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X|Y=y}(x)}{f_{Y|X=x}(y)} = \frac{1}{k}.$$

Integrant respecte de x sobre I_1 tenim que per a tot $y \in I_2$

$$\frac{1}{f_Y(y)} = \frac{|I_1|}{k} \Longrightarrow f_Y(y) = \frac{k}{|I_1|},$$

que és una funció de densitat constant. Per tant $Y \sim U(I_2)$ i $k/|I_1| = 1/|I_2|$, d'on es segueix que $k = |I_1|/|I_2|$. De la mateixa forma es prova que $X \sim U(I_1)$.

(c) Sigui X_n una successió de variables aleatòries $\Gamma(1,n)$. Proveu que $(X_n - n)/\sqrt{n}$ convergeix en distribució a una variable aleatòria $N(0,1)$.

Resolució:

La funció de densitat de X_n és $f_{X_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-x}$ i la seva funció característica,

$$\phi_{X_n}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-x}e^{itx}dx = \frac{1}{\Gamma(n)(1-it)^n}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy = \frac{1}{(1-it)^n}.$$

La funció característica de $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$ és

$$\phi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{it(X-n)/\sqrt{n}}) = e^{-it\sqrt{n}}\phi_{X_n}(t/\sqrt{n}) = e^{-it\sqrt{n}}\frac{1}{(1-it/\sqrt{n})^n} = e^{-it\sqrt{n}-n\ln(1-it/\sqrt{n})}$$

Fent servir que, per a cada $t \in \mathbb{R}$, $n\ln(1-it/\sqrt{n}) = it\sqrt{n} - t^2/2 + O(t^3/\sqrt{n}), (n \to \infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(t) = e^{-t^2/2},$$

que és la funció característica d'una variable aleatòria normal $N(0,1)$. Pel teorema de continuitat, Y_n convergeix en distribució a una variable aleatòria normal $N(0,1)$. Una solució alternativa passa per veure que X_n es pot escriure com a suma de n variables aleatòries independents $Exp(1)$ i aplicar el Teorema Central del Límit.