| 0 | 1 | 0.9 | — | 0 |
33

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) — Examen final (part I)

(Durada: 2h 30min) — 12 de gener de 2015

Cognoms: Nom:

0

1. [2.5 punts] Un procés estacionari de difusió-convecció-reacció es pot modelitzar amb l'equació diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) + u(x) = f(x) \quad , \quad a < x < b \tag{1}$$

amb les condicions de contorn

$$u(a) = \alpha \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) = \beta \tag{2}$$

A les equacions (1) i (2), són dades els valors de a, b, α i β i la funció $f(x)$ (terme font), i és incògnita la funció $u(x)$. Estem interessats en resoldre aquest problema amb el mètode dels elements finits (MEF).

0 *a)* Dedueix la forma feble del problema. Discretitza la forma feble obtinguda utilitzant l'aproximació

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j N_j(x)$$

Indica clarament l'expressió de la matriu $\mathbf{A}$ i del vector $\mathbf{f}$ del sistema d'equacions $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ resultant.

El problema de contorn correspon, de fet, a una EDO de segon ordre. Es proposa ara resoldre el problema amb un mètode numèric per a EDOs de la forma $dy/dx = f(x, y)$

$$Y_{i+1} = Y_i + h(b_1k_1 + b_2k_2) \text{ amb } \begin{cases} k_1 = f(x_i, Y_i) \\ k_2 = f(x_i + ch, Y_i + hak_1) \end{cases}$$

on k_1, k_2, a, b_1, b_2 i c són paràmetres del mètode.

0

b) A quina família de mètodes pertany aquest esquema? Quin ordre pot arribar a tenir el mètode? Detalla com aplicaries el mètode a la EDO (1) i com tractaries les condicions de contorn del problema.

El problema es resol per $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 0$ i $f(x) = 1$ amb el mètode de segon ordre i s'obtenen les solucions numèriques

$$u(1) \simeq U_{10}^{h=0.1} = 0.279513, \quad u(1) \simeq U_{20}^{h=0.05} = 0.284332$$

on $U_i^{h=H}$ denota la solució al punt x_i amb pas $h = H$.

c) Calcula una estimació de l'error en l'aproximació de $u(1)$ per al càlcul amb $h = 0.1$, i fes una previsió de quants intervals caldria fer servir per tenir una aproximació de $u(1)$ amb 3 xifres significatives correctes.

1

2. [1.5 punts] Volem determinar les arrels de l'equació $2x - \exp(x-1) = 0$. A les taules següents es mostren els resultats obtinguts amb dos algoritmes iteratius, fent servir dues aproximacions inicials diferents.

Algoritme 1: $x^{k+1} = \dfrac{1}{2}\exp(x^k - 1)$

x^k	r^k	x^k	r^k
1.00000	1.00e + 00	3.0000e + 00	1.88e − 01
0.50000	6.49e − 01	3.6945e + 00	5.01e − 01
0.30327	2.17e − 01	7.3993e + 00	9.75e − 01
0.24910	5.57e − 02	3.0070e + 02	1.00e + 00
0.23597	1.32e − 02	7.2083e + 129	NaN
0.23289	3.08e − 03	Inf	NaN
0.23218	7.16e − 04	Inf	NaN
0.23201	1.66e − 04	Inf	NaN
0.23197	3.85e − 05	Inf	NaN
0.23196	8.94e − 06	Inf	NaN

Algoritme 2: $x^{k+1} = \ln(2x^k) + 1$

x^k	r^k	x^k	r^k
1.0000	4.09e − 01	3.0000	7.46e − 02
1.6931	2.37e − 01	2.7918	2.65e − 02
2.2197	1.09e − 01	2.7198	9.69e − 03
2.4905	4.42e − 02	2.6937	3.59e − 03
2.6056	1.70e − 02	2.6841	1.34e − 03
2.6508	6.44e − 03	2.6805	4.99e − 04
2.6680	2.42e − 03	2.6791	1.86e − 04
2.6745	9.04e − 04	2.6786	6.95e − 05
2.6769	3.38e − 04	2.6785	2.60e − 05
2.6778	1.26e − 04	2.6784	9.69e − 06

✓ 0.5 *a)* Per a cada un dels algoritmes i cada una de les aproximacions inicials, comenta el comportament del mètode: convergeixen els mètodes? En cas afirmatiu, quin és l'ordre de convergència? Explica com identifiques l'ordre de convergència.

L'algoritme 1 tan sols convergeix per a la primera aproximació inicial. L'ordre de convergència és lineal ja que l'error relatiu es divideix aproximadament per S a cada iteració. $S = ?$

L'algoritme 2 convergeix per a les dues aproximacions inicials. També és lineal amb un factor asimptòtic de convergència que sembla estar entre 2 i 3. ✓

0.5

b) Fes una anàlisi de la consistència i convergència dels mètodes. Comenta si concorden les conclusions de l'anàlisi amb el comportament de cada un dels mètodes.

FALTA

Consistència:

Mètode 1: Consistent

$\phi_1(\alpha)=\alpha \iff \frac{1}{2}e^{\alpha-1}=\alpha \iff e^{\alpha-1}=2\alpha \iff 2\alpha-e^{\alpha-1}=0 \iff$ α és arrel ✓

Mètode 2: Consistent

$\phi_2(\alpha)=\alpha \iff \ln(2\alpha)+1=\alpha \iff \ln(2\alpha)=\alpha-1 \iff 2\alpha=e^{\alpha-1} \iff$

$\iff 2\alpha-e^{\alpha-1}=0 \iff \alpha$ és arrel. ✓

Convergència:

Mètode 1:

$\phi_1'(x)=\frac{1}{2}e^{x-1}=\phi_1(x) \Rightarrow |\phi_1'(\alpha)|=|\phi_1(\alpha)|\overset{\text{consistència}}{=}|\alpha|$

$\alpha\neq 0$ ja que $2\cdot 0\neq e^{-1}$. Per tant la convergència és lineal.

convergent si $|\alpha|<1$

Mètode 2:

$|\phi_2'(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\neq 0 \quad \forall x \Rightarrow$ La convergència és lineal.

convergent si $|\alpha|>1$

Falta acabar escribiendo la condición de convergència!

0.9

3. [1 punt] Es vol aproximar una funció f amb un spline cúbic $S \in \mathcal{C}^1$ amb $n+1 = 11$ punts base equiespaiats a l'interval $[0,1]$.

0.5 *a)* Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic) si es considera com a dada el valor de la funció f en els 11 punts base?

Els splines cúbics C^1 tenen $4n$ graus de llibertat per ser cúbics, en gastem $n-1$ per garantir la continuïtat, $n-1$ per la continuïtat de la derivada i $n+1$ per $S(x_i) = f(x_i)$. Ens queden $n+1$ gr. de ll.

En cas de conèixer $f'(x_i)$, aproximem els valors: prenem $f_i' = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ per a $i = 1, \dots, n$ i per als extrems: $f_0' = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ i $f_{n+1}' = \dfrac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}$. Imposant $S'(x_i) = f_i$ gastem els $n+1$ gr. de ll. restants

0.4 *b)* Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic amb els 11 punts base esmentats) si es considera com a dada el valor de la funció f en 101 punts equiespaiats a $[0,1]$?

Ajustem els S_i amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar discret $\langle f, S \rangle = \sum_{i=0}^{100} \| f(x_i) - S(x_i) \|^2$ (Gram)

~~Els n+1 graus de llibertat que cal resoldre els invertim en resoldre el sistema d'equacions lineal de les equacions normals:~~
~~per cada S_i:~~ $\cancel{\begin{pmatrix} \langle G_0, G_0 \rangle & \cdots & \langle G_0, G_3 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle G_3, G_0 \rangle & \cdots & \langle G_3, G_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle G_0, f \rangle \\ \vdots \\ \langle G_3, f \rangle \end{pmatrix}}$

Els $n+1$ graus de llibertat de que disposem els invertim en determinar les $S'(x_i)$ de tal manera que minimitzim $\sum_{i=0}^{n} \langle f, S_i \rangle$ on hem utilitzat el producte escalar de Gram: $\langle f, S_i \rangle = \sum_{j=0}^{100} \| f(x_j) - S_i(x_j) \|^2 \cdot \delta_{ij}$

on $\delta_{ij} = 1$ si $x_j \in \mathrm{Dom}\, S_i$

no, millor té ... $2(n+1)$!

4. [1 punt] Els polinomis de Txebixov es poden definir com

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

per $x \in [-1, 1]$ i $n \geq 0$. Es a dir, $T_n(x) = \cos(n\theta)$ amb $x = \cos(\theta)$.

a) Demostra que $T_n(x)$ és un polinomi de grau n en x. Indicació: per $n \geq 2$ es verifica la identitat $\cos(n\theta) = 2\cos\big((n-1)\theta\big)\cos\theta - \cos\big((n-2)\theta\big)$.

b) Demostra que els polinomis de Txebixov són ortogonals amb el producte escalar

$$< u, v >= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)\, dx$$

5. [1 punt] En els mètodes quasi-Newton *inversos* per a resoldre sistemes no lineals $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ s'actualitza la *inversa* de l'aproximació secant de la matriu jacobiana. Considereu un mètode quasi-Newton invers amb un esquema d'actualització de la forma

$$(\mathbf{S}^k)^{-1} = \left[\mathbf{I} - \frac{(\Delta\mathbf{x})\mathbf{v}^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right](\mathbf{S}^{k-1})^{-1}\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right] + \frac{\Delta\mathbf{x}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}} \tag{3}$$

on $\Delta\mathbf{x} := \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ (diferència de les dues aproximacions més recents)

a) Té l'esquema (3) la propietat de *simetria hereditària* (és a dir, $(\mathbf{S}^{k-1})^{-1}$ simètrica $\Rightarrow (\mathbf{S}^k)^{-1}$ simètrica)?

b) Proposa raonadament una expressió pel vector $\mathbf{v}$ de manera que $(\mathbf{S}^k)^{-1}$ verifiqui l'equació quasi-Newton (és a dir, la condició de matriu secant)

0 | 0.7

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) | **Examen final (part II)**
(Durada: 1h) | 12 de gener de 2015

Cognoms: | Nom:

0. ~~6.~~ [1.5 punts] L'evolució temporal de la població es pot modelitzar mitjançant una llei

$$p(t) = \frac{L}{1 + c\exp(r(t - t_0))} \tag{4}$$

que depèn de tres paràmetres L, r i c (t_0 és un instant inicial fixat).

Es vol emprar la llei (4) per aproximar les dades de la taula

t_i	1910	1930	1950	1970	1990
p_i	19.99	23.68	28.12	33.96	39.43

que corresponen a la població d'Espanya (en milions d'habitants) en diferents anys.

a) En una primera anàlisi, se suposa que el paràmetre L és conegut. Transforma la llei (4) per poder realitzar un ajust lineal de mínims quadrats. Detalla el procediment que cal seguir per realitzar l'ajust.

b) Fes servir les dades de la taula per aproximar la població, suposant $L = 60$ i fent servir com a instant inicial $t_0 = 1900$. Escriu el sistema d'equacions que has resolt per trobar els coeficients i la solució obtinguda. Estima la població en l'any 2100 utilizant el resultat de l'apartat anterior.

c) Si L no fos conegut, es pot fer un ajust per mínims quadrats? En què canvia l'anàlisi?

---

7. [1.5 punts] Volem construir una quadratura per aproximar integrals en l'interval $[0, 1]$ que tingui el màxim ordre possible.

Si només coneixem el valor de la funció en un punt x_0,

0.2 *a)* Quin pes s'hauria d'emprar? Quin és l'ordre de la quadratura obtinguda?

Per a millorar l'aproximació, se'ns permet avaluar la funció en un altre punt x_1 que triarem nosaltres.

0 *b)* Determina la posició x_1 i els pesos w_0 i w_1 (en funció de x_0) que defineixen la millor quadratura possible. Quin és l'ordre de la quadratura que s'obté en aquest cas?

0.5 *c)* Particularitza la quadratura obtinguda en l'apartat anterior pel cas $x_0 = 0.2$ i fes-la servir per aproximar la integral $I = \int_0^1 \exp(x^2)\mathrm{d}x$.

---

7 a) Si només disposem d'un punt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 c\,dx + E_1(x) = \underset{f(x_0)}{c} \underbrace{\int_0^1 1\,dx}_{w_0} + \int_0^1 E_1(x)\,dx$$

El pes ha de ser 1.

$$\int_0^1 E_1(x) = \int_0^1 f'(\xi)\cdot(x - x_1)\,dx \quad \text{amb } \xi \in (0,1)$$

$$\int_0^1 E_1(x) = f'(\xi)\cdot\frac{-x_1}{2} \implies$$ ordre 0, ~~són~~ només integra exactament constants.

Si $x_0 = 1/2$, alshores és d'ordre 1 ?!

b) La millor quadratura possible és $x_1 = 1-x_0$ ~~(trapezi)~~, d'ordre 1. Newton-Cotes oberta. Per què?

~~[illegible]~~ =

~~w~~ =

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \int_0^1 f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x)\,dx =$$

$$= \frac{f_0}{x_0 - x_1}\int_0^1 x - x_1\,dx + \frac{f_1}{x_1 - x_0}\int_0^1 x - x_0\,dx = \frac{f_0}{x_0-(1-x_0)}\left(\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x_1\,dx\right) +$$

$$+ \frac{f_1}{(1-x_0)-x_0}\left(\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x_0\,dx\right) = \frac{f_0}{2x_0 - 1}\left(\frac{1}{2} - x_1\right) + \frac{f_1}{1-2x_0}\left(\frac{1}{2} - x_0\right) =$$

$$= \frac{f_0}{2x_0 - 1}\left(\frac{1}{2} - 1 + x_0\right) + \frac{f_1}{1-2x_0}\left(1/2 - x_0\right) = \underbrace{\frac{-f_0}{1-2x_0}\left(-1/2 + x_0\right)}_{-w_0} + \underbrace{\frac{f_1}{1-2x_0}\left(1/2 - x_0\right)}_{w_1}$$

? $$= \boxed{\frac{\frac{1}{2}(f_1 + f_0) - 2x_0}{1 - 2x_0}}$$

els pesos són : $w_0 = \frac{1}{x_0 - x_1}\int_0^1 x - x_1 \, dx = \frac{\frac{1}{2} - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1/2 - (1-x_0)}{x_0 - (1-x_0)} =$

$= \frac{x_0 - 1/2}{2x_0 - 1}$

Ok amb l'elecció $x_1 = 1 - x_0$

$w_1 = \frac{1/2 - x_0}{1 - 2x_0}$

c) $w_0 = \frac{-0,3}{-0,6} = 1/2$ $w_1 = \frac{0,3}{0,6} = 1/2$ x_1 ?

$I \simeq 1,4686$ Com has fet els càlculs ?

1.7 | 0.7 | 0 | 0 | 1 | –

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) **Convocatòria extraordinària**

(Durada: 3h) **6 de juliol de 2015**

Cognoms: Nom:

1. [2 punts] Es vol determinar l'angle amb què s'ha de disparar un projectil per arribar a un objectiu situat a 600 m. 400

El càlcul de la trajectòria del projectil és un problema de tir parabòlic amb fregament, que es pot plantejar com un sistema de 4 Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R||\mathbf{v}||\mathbf{v} + \mathbf{g} \tag{1}$$

on les funcions incògnita corresponen a les dues components de la posició $\mathbf{x} = (x(t), y(t))^T$ i de la velocitat $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$, $\mathbf{g} = (0, 9.8)^T$ m/s^2 és l'acceleració de la gravetat i R és coeficient de fregament. Aquest coeficient depèn principalment de l'àrea projectada de l'objecte i de la densitat de l'aire, i aquí es pren com $R = 0.00132$ m^{-1}. Per poder resoldre el problema de forma única cal donar condicions inicials, en aquest cas

$$\mathbf{x}(0) = (0,0)^T, \quad \mathbf{v}(0) = v_0(\cos\theta, \sin\theta)^T \tag{2}$$

on v_0 m/s és el mòdul de la velocitat inicial i θ és l'angle sobre l'horitzontal amb que es fa el llançament.

La funció `distancia.m`, donat un angle θ, resol numèricament el sistema d'EDOs, per una certa velocitat inicial v_0 i amb les condicions inicials, i retorna la distància horitzontal a la que el projectil toca terra. Aquesta funció, implementada en Matlab, es pot descarregar de la intranet de l'assignatura.

a) Quina equació s'ha de resoldre per a trobar l'angle de llançament? Avalua la funció corresponent per $\theta = 0.25$, $\theta = 0.5$, $\theta = 0.75$ i $\theta = 1$.

b) A la vista dels resultats anteriors, quantes solucions té el problema proposat? Justifica la teva resposta.

c) Fes servir Matlab per determinar l'angle θ amb què s'ha de disparar el projectil per arribar a l'objectiu situat a 600 m. 400 Explica quin mètode has emprat per solucionar el problema i com has triat l'aproximació inicial.

d) Si es vol resoldre el problema mitjançant el mètode de Newton, es pot fer servir la funció `distancia.m` per aproximar la derivada? Com?

---

2. [2 punts] Es vol construir una funció polinòmica a trossos (spline) amb punts base $\{x_i\}_{i=0}^n$. Es disposa del valor de la funció $\{f_i\}_{i=0}^n$ i de les derivades $\{f'_i\}_{i=0}^n$ als punts base. En primer lloc es planteja construir un spline amb polinomis de grau 4.

a) Donades les $2(n+1)$ dades, fins a quin ordre es pot imposar continuïtat de les derivades? Cal imposar condicions addicionals per determinar l'spline de manera única? En cas afirmatiu, quantes?

$4n$
$-(n+1)$
$-n-1$
$2n$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$5n$

$4n - (n+1) - (n-1) = 2n$

b) Proposa un algorisme per al càlcul de l'spline. Tria les dades addicionals de la manera que et resulti més convenient i de forma que no calgui resoldre un sistema lineal d'equacions per al càlcul de l'spline.

En segon lloc es planteja construir un spline amb polinomis de grau 5 i continuïtat C^2, fent servir un cop més les $2(n+1)$ dades.

c) Cal imposar condicions addicionals per a determinar l'spline de manera única? En cas afirmatiu, quantes?

d) Proposa un algorisme per al càlcul de l'spline. Tria les dades addicionals de la manera que et resulti més convenient i de forma que no calgui resoldre un sistema lineal d'equacions per al càlcul de l'spline.

e) Quina és la dimensió de l'espai d'splines C^2 de grau 5? Proposa una base de l'espai d'splines que permeti escriure l'spline com

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f_i' \hat{\phi}_i(x) + \dots$$

Quines condicions compleixen les funcions de la base? Dibuixa les funcions de la base associades a un punt interior x_i: ϕ_i, $\hat{\phi}_i$, ...

---

3. [1 punt] En aquest problema es planteja com definir bases de polinomis ortogonals en 2 dimensions.

a) Proposa una base de polinomis $\psi_{ij}(x,y)$ ortogonals al quadrat $S = (-1,1) \times (-1,1)$ amb el producte escalar continu

$$< u, v >_S = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} u(x,y) v(x,y) \, dy \, dx$$

fent servir la base de polinomis de Legendre en 1 dimensió $\{P_i(x)\}_i$. Justifica que la base proposada és ortogonal.

Els polinomis de Jacobi $P_i^{\alpha,\beta}(x)$ són ortogonals a l'interval $(-1,1)$ amb el producte escalar

$$< u, v > = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} u(x) v(x) \, dx,$$

i, per al cas particular $\beta = 0$, compleixen

$$< P_i^{\alpha,0}, P_i^{\alpha,0} > = \frac{2}{\alpha + 2n + 1}.$$

Es consideren les funcions en dues variables

$$\psi_{ij}(x,y) = \left(\frac{1-s}{2} \right)^i P_j^{2i+1,0}(s) P_i^{0,0}(r)$$

amb

$$s = y, \quad r = 2\frac{1+x}{1-y} - 1$$

o, equivalentment,

$$x = (1-s)(1+r)/2 - 1, \quad y = s.$$

Observa que el canvi de variable anterior passa del quadrat $S = \{(r,s) \mid r,s \in (-1,1)\}$ al triangle $T = \{(x,y) \mid x > -1,\ y > -1,\ x+y < 0\}$.

b) Justifica que $\psi_{ij}(x,y)$ és un polinomi en x i y. Quin grau té en cadascuna de les variables?

c) Calcula el producte escalar al triangle T de dos polinomis de la família

$$< \psi_{ij}, \psi_{kl} >_T = \int_T \psi_{ij}(x,y)\psi_{kl}(x,y)\, dy\, dx.$$

d) Què es pot dir de la família $\{\psi_{ij}(x,y) \mid i+j \le m\}$? Són una base de l'espai de polinomis de grau menor o igual que m en (x,y)? Són ortogonals? Justifica les respostes.

---

4. [1.5 punts] Es vol construir una quadratura de dos punts per aproximar integrals en un interval $[a,b]$. El primer punt és $x_0 = a$, mentre que el segon punt x_1 i els pesos es calcularan per tal d'aconseguir el màxim ordre possible.

a) Quin ordre tindrà, com a mínim, la quadratura plantejada? Per què?

b) Proposa detalladament una estratègia per determinar la posició del punt x_1 i el valor dels pesos w_0 i w_1.

c) Considera el cas $a = 0$, $b = 1$ i determina completament la quadratura.

d) Té la quadratura ordre superior a la predicció de l'apartat *a)*? Justifica la teva resposta fent servir la quadratura per al càlcul de la integral d'una funció adient. Escriu el valor exacte i el valor numèric de la integral.

---

5. [2 punts] L'estudi del moviment en caiguda lliure d'un paracaidista (és a dir, amb el paracaigudes tancat) es realitza mitjançant l'equació diferencial

$$m\dot{v} = mg - kv^2, \tag{3}$$

on m és la massa del paracaigudista, v la velocitat, $\dot{v}$ l'acceleració, g l'acceleració de la gravetat i k el coeficient de fregament.

a) Planteja la resolució de l'equació diferencial (3) mitjançant el mètode d'Euler. Calcula la velocitat del paracaigusdita en l'instant $t = 1\,\text{s}$, realizant $n = 10$ i $n = 20$ passes de temps, i considerant $m = 80\,\text{kg}$, $g = 9.8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ i $k = 0.5\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$. Pren com a velocitat inicial $v_0 = 0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b) Calcula una estimació de l'error comès en el càlcul de la velocitat en l'instant $t = 1\,\text{s}$. A quina de les dues aproximacions correspon l'error estimat? Estima quantes passes de temps cal fer per obtenir una aproximació amb 6 xifres significatives correctes.

---

6. [1.5 punts] Considera l'equació de transport

$$k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a(x)u(x)\right] + s(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \tag{4}$$

amb condicions de contorn

$$u(0) = 0 \quad , \quad -k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) + a(1)u(1) = q. \tag{5}$$

La incògnita $u(x)$ és la concentració d'una substància en un fluid, k és la constant de difusivitat, $a(x)$ és un camp conegut de velocitat del fluid, $s(x)$ és un terme font conegut, i q és un flux prescrit de la substància a l'extrem dret del domini.

Volem abordar la resolució d'aquest problema amb el mètode dels elements finits (MEF).

a) Dedueix la forma feble del problema (4)–(5). Indica clarament com es tenen en compte en la forma feble les condicions de contorn, el terme convectiu amb $a(x)$ i el term font $s(x)$. *Pista:* para atenció a si és convenient o no integrar per parts el terme convectiu.

b) Discretitza la forma feble deduïda a l'apartat *a)* amb una malla de N elements finits lineals (és a dir, amb nodes x_0, x_1, ..., x_{N-1}, x_N), per a obtenir un sistema lineal d'equacions $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Mostra clarament les fórmules per calcular k_{ij} i f_i en termes de les funcions de forma $N_i(x)$.

c) Discuteix raonadament les propietats de la matriu $\mathbf{K}$. És una matriu plena? És una matriu simètrica?

Problema 1 (1,7)

0,8 a)

Cal resaldre l'equació

$\text{distancia}(\theta) = \cancel{600}\ 400 \iff \text{distancia}(\theta) - \cancel{600}\ 400 = 0$

θ	distancia(θ)
0,25	349,2802
0,5	504,4464
0,75	536,7286
1	467,9496

✓

b)

Té dues solucions. Supasem que la funció distancia és contínua, s'observa que

$400 \in \big(\text{distancia}(0{,}25), \text{distancia}(0{,}5)\big)$ i

$400 \in \big(\text{distancia}(0{,}5), \text{distancia}(1{,}2)\big)$

Per tant, hi haurà dos angles que siguin solució.

0,5 c) Tenint en compte els intervals on hi ha les dues solucions, utilitzo les aproximacions inicials $x_0 = 0{,}25$ i $x_1 = 1{,}2$.

Per què?

He utilitzat la funció $\boxed{\text{fsolve}}$ de Matlab

A quin mètode correspon?

per trobar les solucions de la funció
$f(x) = \text{distancia}(x) - 400$.

aproximació inicial	θ solució
0,25	0,3100
1,2	1,1234

0,4 d)

Notació: $\text{distancia}(\theta) = d(\theta)$

Tenim $d'(\theta) = \lim_{h \to 0} \dfrac{d(\theta+h) - d(\theta-h)}{2h} \simeq \dfrac{d(\theta+\varepsilon) - d(\theta-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

per a algun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fixat i prou petit.
Utilitzaria l'aproximació centrada de la derivada perquè té un ordre de convergència major, de l'ordre de ε^2.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: ___

Estudiant/a: ___

Data: ___

Problema 2 (0,7)

a) (0,4) Dels $5n$ graus de llibertat, n'hem d'utilitzar

- $n+1$ per imposar que $S(x_i) = f_i$, això és, $S_i(x_i) = f_i$ $i = 1, \dots, n$ i $S_1(x_0) = f_0$.
- $n-1$ per imposar continuïtat sobre S $(S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$ $i = 1, \dots, n)$
- $n+1$ per imposar $S'(x_i) = f_i'$ i $n-1$ per la continuïtat de S'.

Ens queden $5n - (n+1) - (n-1) - (n+1) - (n-1) = n$ graus de llibertat. Per tant podrem imposar continuïtat només fins a C^2 i ens quedarà un grau de llibertat que haurem de resoldre amb una condició addicional.

(0) b) ~~Utilitzant la base dels polinomis de Lagrange, tenim que~~ $\cancel{S_i = \sum_{j=0}^{4}}$

Fabricat Ecològicament

0.2

c) Tenim ara $6n$ graus de llibertat. Com en l'apartat a), si imposem $S(x_i) = f_i$, $S'(x_i) = f'_i$ i continuïtat C^2 3
ens queden $6n - 2(n+1) - \cancel{2}(n-1) = 2n$ graus de llibertat.
Per tant caldrà imposar $2n$ condicions addicionals.

$$6n - 2(n+1) - 3(n-1) = n+1$$

0 d)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Problema 2

e)

0.1

~~Tenim 8n graus de llibertat i (n+1)+(1-2) restriccions~~

6n

Temim ~~5n~~ graus de llibertat i $n-1$ restriccions per assegurar la continuïtat i $n-1$ restriccions per assegurar continuïtat C^1 ~~...~~ i finalment $n-1$ restriccions per la continuïtat C^2 $\Rightarrow$ $2n+3$ graus de llibertat $\Rightarrow$ dimensió ~~2n+3~~

3n+3

Sigui la base ϕ_i, $\hat{\phi}_i$, $\bar{\phi}_i$:

base de 3n+3 elements per un espai de dimensió 2n+3? No quadra...

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'_i \hat{\phi}_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f''_i \bar{\phi}_i(x)$$

$$S'(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \phi'_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f' \hat{\phi}'_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f''_i \bar{\phi}'_i(x)$$

$$S''(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \phi''_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f' \hat{\phi}''_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f''_i \bar{\phi}''_i(x)$$

Volem que $S(x_i) = f_i$, per tant $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

$\hat{\phi}_i(x_j) = \bar{\phi}_i(x_j) = 0$

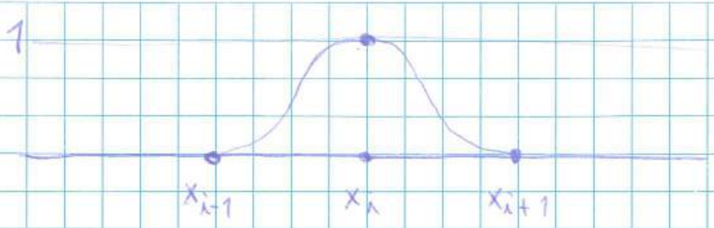
$S'(x_i) = f'_i \Rightarrow \hat{\phi}'_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$

$\phi'_i(x_j) = \bar{\phi}'_i(x_j) = 0$

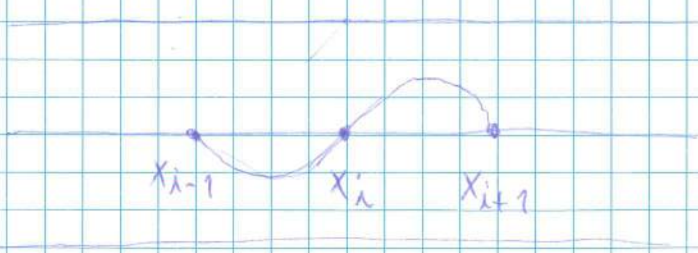
$S''(x_1) = f''_i \Rightarrow \bar{\phi}''_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$

$\hat{\phi}''_i(x_j) = \phi''_i(x_j) = 0$

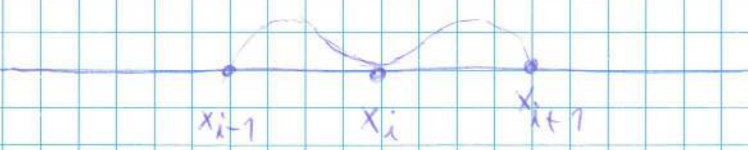
ϕ_i:



$\hat{\phi}_i$:



$\bar{\phi}_i$:



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Problema 3 | 0

0 a) Tenim que $< P_i, P_j > = 0 = \int_{-1}^{1} P_i(x) P_j(x)\, dx$

Sigui $\Psi_{ij}(x,y) = P_i(x) + P_j(x)$

$$<\Psi_{ij}, \Psi_{mn}> = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Psi_{ij} \cdot \Psi_{mn}\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (P_i(x)+P_j(x))(P_m(x)+P_n(x))\, dx =$$

falta la variable y.

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_i(x)\cdot P_m(x) + P_i(x) P_n(x) + P_j(x)\cdot P_m(x) + P_j(x) P_n(x)\, dx = \circledast$$

① Si $i \neq m$ $\quad j \neq m$
$i \neq n$ $\quad j \neq n$

$$\circledast = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_i P_m + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_i P_n + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_j P_m + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_j P_n =$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{< P_i, P_m >}_{0} + \int_{-1}^{1} \underbrace{< P_i, P_n >}_{0} + \int_{-1}^{1} \underbrace{< P_j, P_m >}_{0} + \int_{-1}^{1} \underbrace{< P_j, P_n >}_{0} = 0 \quad \checkmark$$

② Si un index és igual, suposo $i = m$ $\quad j \neq n$
$i \neq n$

$$\circledast = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} P_i(x)P_i(y) + \underbrace{\int_{-1}^{1} P_i P_n + \int_{-1}^{1} P_j P_m + \int_{-1}^{1} P_j P_n}_{0} \right] =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_i(x) P_i(y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} P_i(y) \int_{-1}^{1} P_i(x)\, dx\, dy$$

Fabricat Ecològicament

Si P_i es ~~[illegible]~~ parell la integral de dins serà zero, i per tant també la de fora

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: ____

Estudiant/a: ____

Data: ____

Problema 4

0

$x_0 = a$: no és una quadratura de Legendre.

0 b) En una quadratura de Gauss-Legendre, els punts òptims d'integració han de ser arrels dels polinomis de Legendre ~~P_1 P_2~~.

$P_0 = 1$

$P_1 = x$ $\qquad P_2 = q - x \cdot \frac{\langle q, x \rangle}{\langle x, x \rangle} - \frac{\langle q, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$ (Gramm-Schmidt)

(q polinomi grau 2)

on $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$.

~~$P_2 = q - x$~~

Volem trobar un q de manera que P_2 tingui x_0 com a arrel.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

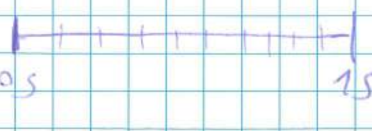
Estudiant/a:

Data:

Problema 5 (1)

$m\dot{v} = mg - kv^2$

1 a)



Prenem $h_1 = \frac{1s}{10} = 0,1 s$

$h_2 = \frac{1s}{20} = 0,2 s$

Discretitzem l'interval $[0,1]$ en 10 i 20 passos respectivament: $\{x_i\}_{i=0,..,10}$ i $\{y_i\}_{i=0,..,20}$

amb $x_{i+1} = x_i + h_1$ i $y_{i+1} = y_i + h_2$

$x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 0$.

Tenim $\dot{v} = g - \frac{k}{m} v^2 = f(v)$ amb $f(v) = g - \frac{k}{m} v^2$

Per al mètode d'Euler, fem $v_0 = 0$ i $\dot{v}_0 = g = f(v_0)$.

Per cada pas de temps: $v_{i+1} = v_i + h \cdot f(v_i)$

Resultats:

$v(1)$	n
9,6319	10
9,6185	20

Fabricat Ecològicament

0

b) Tenim que

$$\cancel{V_{i+1} = V_i + f(v) \cdot h}$$

$$V_{i+1} = V_i$$