0.5 | 0,8 | —

CÀLCUL NUMÈRIC (GM)

Examen parcial (1a PART)

(Durada: 1h30min)

10 de novembre de 2014

Cognoms: **Nom:**

1. [3 punts] Es vol aproximar una funció $f(x)$, amb expressió analítica coneguda, per un polinomi de grau m amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar continu a l'interval $[-1, 1]$.

   a) Proposar detalladament[1] una metodologia per a calcular el polinomi aproximant fent servir la base natural de polinomis.

   ∅

   Volem min $\langle f(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot p(x)\,dx$ on $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$

   b) Proposar detalladament una metodologia eficient per a calcular el polinomi aproximant fent servir la base de polinomis ortogonals de Legendre $\{P_i(x)\}_{i=0}^{m}$.

   /

[1] L'algorisme proposat ha de ser prou detallat i tenir la informació necessària per que algú sense coneixements de mètodes numèrics pogués calcular el polinomi.

Ø *c)* Suposem ara que es vol fer servir la base de polinomis ortogonals de Txebixov. Proposar detalladament una metodologia per a calcular el polinomi aproximant. S'obtindria el mateix polinomi que amb els mètodes proposats als apartats anteriors? Per què?

S'obtindria el mateix polinomi perquè estem minimitzant la mateixa funció en tots els casos. FALS, depèn de si el $\langle \cdot , \cdot \rangle$ no és el mateix

d) Suposem ara que es vol aproximar la funció $f(x)$ a un altre interval $[a, b]$ donat. Proposar una base de polinomis ortogonals a l'interval $[a, b]$ que es pugui calcular a partir de la base de Legendre. Justificar que la base proposada és ortogonal.

$\sqrt{0.5}$

e) Suposem ara que es vol aproximar la funció per un spline C^2 cúbic amb $m+1$ punts base equiespaiats a l'interval $[a,b]$. Quina és la dimensió de l'espai d'splines C^2 cúbics? I la de l'espai d'splines naturals? Justifica la teva resposta.

Splines C^2 amb $m+1$ punts base:

$$\left.\begin{array}{l} S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \rightarrow m-1 \text{ eqs} \\ S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \rightarrow m-1 \text{ eqs} \\ S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \rightarrow m-1 \text{ eqs} \end{array}\right\} \rightarrow 3m-3 \text{ eqs}$$

Splines cúbics $\rightarrow$ $4m$ coeficients

Aleshores:

- spline cúbic C^2 $4m-3m+3 = m+3$

  $\hookrightarrow$ $\boxed{\text{Dimensió } m+3}$

- splines naturals $S'_0(x_0)=0$, $S'_n(x_n)=0$

  $4m-3m+3-2 = m+1$

  $\hookrightarrow$ $\boxed{\text{Dimensió } m+1}$

f) Proposar una metodologia per al càlcul de l'*spline natural* que s'ajusta a la funció amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar continu.

0.7

2. [1.5 punts] Per al disseny d'una muntanya russa es disposa de l'alçada de la muntanya a determinats punts del recorregut, $\{l_k, h_k\}_{k=0}^{n}$. A partir d'aquestes alçades es vol definir l'alçada a tot el recorregut $h(l)$ on, òbviament, $h(l)$ ha de ser una funció suau, amb derivada (pendent) i derivada segona (curvatura) contínues. A més, evidentment, es requereix que a l'inici i al final el pendent sigui zero.

0.7

a) Proposar raonadament un mètode per a definir la funció alçada $h(l)$ donades les dades $\{l_k, h_k\}_{k=0}^{n}$.

L'aproximació mitjançant splines cúbics naturals ($s_0' = s_n' = 0$) és la solució que més s'adapta al problema, doncs és la funció més suau que passa pels punts i amb primera i segona derivada contínues, a més a l'inici i al final el seu pendent és 0.

$s_0'' = s_n'' = 0$

0

b) Explicar breument com es faria el càlcul de la funció aproximant.

Per a calcular l'spline natural s'ha de prendre una base de splines cúbics i imposar

$$S_k(l_k) = h_k \quad \forall k$$

$$\left.\begin{array}{l} S_k(l_{k+1}) = S_{k+1}(l_{k+1}) \\ S_k'(l_{k+1}) = S_{k+1}'(l_{k+1}) \\ S_k''(l_{k+1}) = S_{k+1}''(l_{k+1}) \end{array}\right\} \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$$

$$S_0'(0) = 0$$

$$S_n'(0) = 0$$

que té solució única.

Resolent el sistema s'obté l'spline natural

- Cúbica $S_i(x)$ en funció de S_i', S_{i+1}'
- Continuïtat C^2
- Sistema lineal de dimensió $n+1$

---

3. [2 punts] L'evolució en el temps de la concentració amb que un dispositiu subministra un medicament per via intravenosa a un pacient es pot aproximar per una funció de la forma

$$c(t) = Cte^{-\alpha t}$$

amb C i α constants positives. Per al calibrat dels paràmetres C i α es disposa de mesures experimentals $\{t_k, c_k\}_{k=0}^{n}$.

a) Plantejar el problema de mínims quadrats no lineal per al calibrat dels paràmetres C i α i deduir el sistema d'equacions no lineal a resoldre.

b) Reduir el problema a la resolució d'una equació escalar amb una incògnita.

c) Proposar raonadament un mètode numèric per a la resolució del sistema d'equacions no lineals plantejat a *a)* i per a la resolució del problema de zeros de funcions plantejat a *b)*. Quina de les dues estratègies per a resoldre el problema no lineal aconsellaries? Per què?

(es pot continuar darrera)

0.9

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) — Examen parcial (2a PART)

(Durada: 1h) — 10 de novembre de 2014

Cognoms: — **Nom:**

4. [3.5 punts] Es vol fer servir el mètode de Newton

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

per trobar les arrels de la funció $f(x) = 3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 32x^2 + 12x - 32$.

a) Feu servir el mètode de Newton prenent com a aproximació inicial $x^0 = 3$. Té la convergència esperada? Per què? Quantes iteracions es necessiten per tenir la solució amb, com a mínim, 5 xifres significatives correctes? Justifiqueu la resposta.
Escriviu els resultats obtinguts en les dues primeres i les dues darreres iteracions que heu calculat.

b) Repetiu l'apartat anterior, prenent com a aproximació inicial $x^0 = 1$. S'observa alguna diferència en el comportament del mètode? A què és deguda?

Per millorar el comportament del mètode, es proposa emprar la següent modificació:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{2f(x^k)}{f'(x^k)}$$

c) Feu servir aquest mètode, prenent com a aproximació inicial $x^0 = 1$ i mostreu els resultats obtinguts en una taula. Com és la convergència en aquest cas?

d) Feu una anàlisi de la convergència asimptòtica de l'esquema iteratiu proposat, que permeti explicar el seu comportament.

e) Es pot fer servir aquest mètode per determinar l'arrel trobada en l'apartat *a*)? Per què?

---

a) Si la funció no presenta problemes per al mètode prop del punt triat.

5 iteracions

no sé com aconseguir més xifres significatives

$x_1 = 2{,}7879$, $x_2 = 2{,}6897$ $x_4 = 2{,}6667$ x_5 $2{,}6667$

$f_1 = 12{,}1160$ $f_2 = 1{,}8904$ $f_4 = 0{,}0002$ $f_5 = 0{,}000$

- Com és la conv. esperada?

b) ~~Calen 10.~~

- S'observa el comportament esperat?
- Quantes iteracions calen per tenir 5 xifres sign. correctes?

b) Calen 10 iteracions?. A més convergeix al punt $x = 1,4138$.

~~El pri~~ La primera diferència s'explica pel fet que el nombre d'iteracions sempre depèn del comportament de la derivada al apropar-nos a la solució, a vegades calen més i a vegades menys iteracions.

La segona s'explica pel fet de que el polinomi té arrels múltiples (pot tindre'n fins a 5)

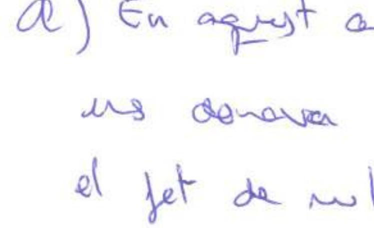
c)

iteració	0	1	2
x	1	1,4348	1,4142
f	-5	-0,0127	-0,000

La convergència és molt més ràpida.

d) En aquest cas com que el mètode de Newton ens donava una longitud de pas massa petita el fet de multiplicar aquesta longitud per 2 ha millorat molt la convergència del mètode ✗ Anàlisi ?

e) No. En aquest cas el mètode de Newton dona longituds de pas adequades i multiplicar-les per 2 fa que anem "saltant" d'un costat a l'altre de l'arrel ✗



0.2 0.4 1 0.5 0.5 18

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) Examen final (part I)

(Durada: 2h 30min) 12 de gener de 2015

Cognoms: Nom:

0.2

1. [2.5 punts] Un procés estacionari de difusió-convecció-reacció es pot modelitzar amb l'equació diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}(x)+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)+u(x)=f(x) \quad , \quad a<x<b \tag{1}$$

amb les condicions de contorn

$$u(a)=\alpha \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b)=\beta \tag{2}$$

A les equacions (1) i (2), són dades els valors de a, b, α i β i la funció $f(x)$ (terme font), i és incògnita la funció $u(x)$. Estem interessats en resoldre aquest problema amb el mètode dels elements finits (MEF).

0 *a)* Dedueix la forma feble del problema. Discretitza la forma feble obtinguda utilitzant l'aproximació

$$u(x)\approx u^h(x)=\sum_{j=0}^{n}u_jN_j(x)$$

Indica clarament l'expressió de la matriu $\mathbf{A}$ i del vector $\mathbf{f}$ del sistema d'equacions $\mathbf{Au}=\mathbf{f}$ resultant.

$u'' = u' + u - f(x) = g(x)$

$\int_a^b g(x)\, v(x)\, dx = \int_a^b u''\, v\, dx = u' \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b u' v'\, dx$

El problema de contorn correspon, de fet, a una EDO de segon ordre. Es proposa ara resoldre el problema amb un mètode numèric per a EDOs de la forma $dy/dx = f(x, y)$

$$Y_{i+1} = Y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \text{ amb } \begin{cases} k_1 = f(x_i, Y_i) \\ k_2 = f(x_i + ch, Y_i + hak_1) \end{cases}$$

on k_1, k_2, a, b_1, b_2 i c són paràmetres del mètode.

0.2 *b)* A quina família de mètodes pertany aquest esquema? Quin ordre pot arribar a tenir el mètode? Detalla com aplicaries el mètode a la EDO (1) i com tractaries les condicions de contorn del problema.

El mètode pertany a la família Runge-Kutta ✓

amb $s=2$. Òptim: $s=p=2$

Fem $w(x) = \frac{du}{dx}(x)$, aleshores $\frac{dw}{dx}(x) = \frac{d^2u}{dx^2}(x) = w'(x)$

Ens queda el sistema:

$$\begin{cases} w'(x) = u(x) + w(x) - f(x) \underset{\text{not}}{=} g(x) \\ u'(x) = w(x) \end{cases}$$

$u(a) = \alpha$

$w(b) = \beta$

Al qual aplicar el mètode Runge Kutta

Com que les condicions de contorn són a extrems oposats de l'interval i el sistema no es pot desacoblar, ~~aproximant~~ $\cancel{u(b) \simeq u(a) + (a-b) \cdot w'(b)}$ ~~(Euler, aproximant) i començant a iterar des de B~~

¿ intentaria resoldre el problema de manera implícita ?

Mètode del tret

El problema es resol per $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 0$ i $f(x) = 1$ amb el mètode de segon ordre i s'obtenen les solucions numèriques

$$u(1) \simeq U_{10}^{h=0.1} = 0.279513, \quad u(1) \simeq U_{20}^{h=0.05} = 0.284332$$

on $U_i^{h=H}$ denota la solució al punt x_i amb pas $h = H$.

0 c) Calcula una estimació de l'error en l'aproximació de $u(1)$ per al càlcul amb $h = 0.1$, i fes una previsió de quants intervals caldria fer servir per tenir una aproximació de $u(1)$ amb 3 xifres significatives correctes.

0.4

2. [1.5 punts] Volem determinar les arrels de l'equació $2x - \exp(x-1) = 0$. A les taules següents es mostren els resultats obtinguts amb dos algoritmes iteratius, fent servir dues aproximacions inicials diferents.

Algoritme 1: $x^{k+1} = \dfrac{1}{2}\exp(x^k - 1)$

x^k	r^k	x^k	r^k
1.00000	1.00e + 00	3.0000e + 00	1.88e − 01
0.50000	6.49e − 01	3.6945e + 00	5.01e − 01
0.30327	2.17e − 01	7.3993e + 00	9.75e − 01
0.24910	5.57e − 02	3.0070e + 02	1.00e + 00
0.23597	1.32e − 02	7.2083e + 129	NaN
0.23289	3.08e − 03	Inf	NaN
0.23218	7.16e − 04	Inf	NaN
0.23201	1.66e − 04	Inf	NaN
0.23197	3.85e − 05	Inf	NaN
0.23196	8.94e − 06	Inf	NaN

Algoritme 2: $x^{k+1} = \ln(2x^k) + 1$

x^k	r^k	x^k	r^k
1.0000	4.09e − 01	3.0000	7.46e − 02
1.6931	2.37e − 01	2.7918	2.65e − 02
2.2197	1.09e − 01	2.7198	9.69e − 03
2.4905	4.42e − 02	2.6937	3.59e − 03
2.6056	1.70e − 02	2.6841	1.34e − 03
2.6508	6.44e − 03	2.6805	4.99e − 04
2.6680	2.42e − 03	2.6791	1.86e − 04
2.6745	9.04e − 04	2.6786	6.95e − 05
2.6769	3.38e − 04	2.6785	2.60e − 05
2.6778	1.26e − 04	2.6784	9.69e − 06

0.1

a) Per a cada un dels algoritmes i cada una de les aproximacions inicials, comenta el comportament del mètode: convergeixen els mètodes? En cas afirmatiu, quin és l'ordre de convergència? Explica com identifiques l'ordre de convergència.

L'equació te dues arrels.

L'algorisme 1 convergeix a l'arrel $x \approx 0,23196$ quan $x_0 = 1$ i divergeix quan $x_0 = 3$

L'algorisme 2 convergeix a $x = 2,67$ en ambdós casos.

Algorisme 1:

Algorisme 2:

0.3

b) Fes una anàlisi de la consistència i convergència dels mètodes. Comenta si concorden les conclusions de l'anàlisi amb el comportament de cada un dels mètodes.

▲ Consistència $x^{k+1} = x^k \iff f(x) = 0$

OK

∘ Algorisme 1: $x^{k+1} = \frac{1}{2}\exp(x^k - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^{k+1} - \exp(x^k - 1) = 0$ ✓

∘ Algorisme 2 $x^{k+1} = \ln(2x^k) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exp(x^{k+1} - 1) - 2x^k = 0$ ✓

$\longrightarrow$ Ambdós són consistents

▲ Convergència. Siguin $z_1 < z_2$ les arrels

$x^{k+1} = \phi(x^k)$

• 1 $\phi_1(x^k) = \frac{1}{2}\exp(x^k - 1)$ $\phi_1'(x^k) = \frac{1}{2}e^{(x^k-1)}$

$|\phi_1'(x)| > 1 \quad \forall x > \ln 2 + 1 \Rightarrow$ divergeix per a $x > \ln 2 + 1$

convergeix altrament ($\phi_1'(x) = 0 \iff \ldots \neq 0$)

1.5

• 2 $\phi_2(x^k) = \ln(2x^k) + 1$ $\phi_2'(x) = \frac{1}{2x}$

• 1 Convergeix a z_1 si $x_0 < z_2$, divergeix altrament

• 2 Convergeix a z_2 si $x_0 > z_1$, divergeix altrament

3. [1 punt] Es vol aproximar una funció f amb un spline cúbic $S \in \mathcal{C}^1$ amb $n+1 = 11$ punts base equiespaiats a l'interval $[0,1]$.

0.5 *a)* Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic) si es considera com a dada el valor de la funció f en els 11 punts base?

splines cúbics, 10 intervals ⇒ 40 coefs

C^0 continuitat → 9 coefs

C^1 continuitat de la derivada → 9 coefs

$S_i(x_i) = f_i$ → 11 coefs

I ens queden 11 coeficients per a determinar. Fixarem les derivades, que les aproximarem per diferència central als punts interiors

$S'_i(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ ($h = \frac{1}{10} = 0{,}1$), diferència cap endavant a x_0 $S'_0(0) = \frac{f_1 - f_0}{h}$; cap enrere a x_{11} $S'_{11}(1) = \frac{f_{11} - f_{10}}{h}$,

0.5 *b)* Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic amb els 11 punts base esmentats) si es considera com a dada el valor de la funció f en 101 punts equiespaiats a $[0,1]$?

Com a l'apartat anterior: 40 coefs

C^0, C^1 → 18 coefs

(no s'entén de l'enunciat si es demana que es faci servir tan sols l'abcisa o l'ordenada i l'abcisa dels punts base, en el segon cas 11 coefs més ens queden fixats).

Queden 22 (o 11) NO coefs per a fixar. OK

Donades les dades de que disposem, en aquest cas el millor sistema per a fixar els coeficients és utilitzar mínims quadrats discrets

$$\min \sum_{i=0}^{100} (f_i - S(x_i))^2$$

4. [1 punt] Els polinomis de Txebixov es poden definir com

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

per $x \in [-1, 1]$ i $n \geq 0$. Es a dir, $T_n(x) = \cos(n\theta)$ amb $x = \cos(\theta)$.

0.5

a) Demostra que $T_n(x)$ és un polinomi de grau n en x. Indicació: per $n \geq 2$ es verifica la identitat $\cos(n\theta) = 2\cos\left((n-1)\theta\right)\cos\theta - \cos\left((n-2)\theta\right)$.

ho demostrem per inducció sobre n

$n=0 \quad T_0(x) = \cos(0) = 1 \in P_0(x)$

$n=1 \quad T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x \in P_1(x)$

Suposem $T_{n-1}(x), T_{n-2}(x) \ldots T_0(x)$
$\in P_{n-1}(x) \quad \in P_{n-2}(x) \quad \in P_0(x)$

Aleshores

$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = 2\cos[(n-1)\arccos x] \cdot x - \cos[(n-2)\arccos x] =$

$$= \underbrace{\underbrace{2\underbrace{T_{n-1}(x)}_{\in P_{n-1}(x)} \cdot \underbrace{x}_{\in P_1(x)}}_{\in P_n(x)} - \underbrace{T_{n-2}(x)}_{\in P_{n-2}(x)}}_{\in P_n(x)}$$

0

b) Demostra que els polinomis de Txebixov són ortogonals amb el producte escalar

$$< u, v >= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)\,dx$$

Cal provar que $\langle T_i, T_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x)\, T_j(x)\, dx =$

0,5

5. [1 punt] En els mètodes quasi-Newton *inversos* per a resoldre sistemes no lineals $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ s'actualitza la *inversa* de l'aproximació secant de la matriu jacobiana. Considereu un mètode quasi-Newton invers amb un esquema d'actualització de la forma

$$(\mathbf{S}^k)^{-1} = \left[\mathbf{I} - \frac{(\Delta\mathbf{x})\mathbf{v}^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right](\mathbf{S}^{k-1})^{-1}\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right] + \frac{\Delta\mathbf{x}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}} \tag{3}$$

on $\Delta\mathbf{x} := \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ (diferència de les dues aproximacions més recents)

0,5 *a)* Té l'esquema (3) la propietat de *simetria hereditària* (és a dir, $(\mathbf{S}^{k-1})^{-1}$ simètrica $\Rightarrow (\mathbf{S}^k)^{-1}$ simètrica)? $\boxed{\text{Sí}}$

$$((S^k)^{-1})^T = \left(\left[I - \frac{(\Delta x)v^T}{(\Delta x)^T v}\right](S^{k-1})^{-1}\left[I - \frac{v(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right] + \frac{\Delta x(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right)^T =$$

$$= \left[I - \frac{v(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right]^T (S^{k-1})^{-1^T}\left[I - \frac{\Delta x\, v^T}{(\Delta x)^T v}\right]^T + \left[\frac{\Delta x(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right]^T =$$

$$= (S^k)^{-1}$$

$(S^{k-1})^{-1^T} = (S^{k-1})^{-1}$ (simètrica) ✓

0 *b)* Proposa raonadament una expressió pel vector $\mathbf{v}$ de manera que $(\mathbf{S}^k)^{-1}$ verifiqui l'equació quasi-Newton (és a dir, la condició de matriu secant)

Mètode quasi-Newton

$\Delta x = (S^k)^{-1} \cdot f^k$

NO

1.4 | 0.0

CÀLCUL NUMÈRIC (GM)

(Durada: 1h)

Examen final (part II)

12 de gener de 2015

Cognoms:

Nom:

6. [1.5 punts] L'evolució temporal de la població es pot modelitzar mitjançant una llei

$$p(t) = \frac{L}{1 + c\exp(r(t - t_0))} \tag{4}$$

que depèn de tres paràmetres L, r i c (t_0 és un instant inicial fixat).

Es vol emprar la llei (4) per aproximar les dades de la taula

t_i	1910	1930	1950	1970	1990
p_i	19.99	23.68	28.12	33.96	39.43

que corresponen a la població d'Espanya (en milions d'habitants) en diferents anys.

0.6 *a)* En una primera anàlisi, se suposa que el paràmetre L és conegut. Transforma la llei (4) per poder realitzar un ajust lineal de mínims quadrats. Detalla el procediment que cal seguir per realitzar l'ajust.

0.6 *b)* Fes servir les dades de la taula per aproximar la població, suposant $L = 60$ i fent servir com a instant inicial $t_0 = 1900$. Escriu el sistema d'equacions que has resolt per trobar els coeficients i la solució obtinguda. Estima la població en l'any 2100 utilitzant el resultat de l'apartat anterior.

0.2 *c)* Si L no fos conegut, es pot fer un ajust per mínims quadrats? En què canvia l'anàlisi?

7. [1.5 punts] Volem construir una quadratura per aproximar integrals en l'interval $[0, 1]$ que tingui el màxim ordre possible.

Si només coneixem el valor de la funció en un punt x_0,

0.1 *a)* Quin pes s'hauria d'emprar? Quin és l'ordre de la quadratura obtinguda?

Per a millorar l'aproximació, se'ns permet avaluar la funció en un altre punt x_1 que triarem nosaltres.

0.5 *b)* Determina la posició x_1 i els pesos w_0 i w_1 (en funció de x_0) que defineixen la millor quadratura possible. Quin és l'ordre de la quadratura que s'obté en aquest cas?

0 *c)* Particularitza la quadratura obtinguda en l'apartat anterior pel cas $x_0 = 0.2$ i fes-la servir per aproximar la integral $I = \int_0^1 \exp(x^2)\mathrm{d}x$.

7 a) $w_0 = 1$, $\int_0^1 f(x)\,dx \simeq f(x_0)\cdot 1$

Es tracta d'una quadratura d'ordre ~~1~~ 0. (integra const.)
Si $x_0 = 1/2$, aleshores sí és d'ordre 1.

b) $$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq w_0 \cdot f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

(Quadratura de Gauss, excepte que x_0 és fix)

fent $f = 1$ $\qquad w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 = \int_0^1 1\,dx = 1 \qquad (1)$

fent $f = x$ $\qquad w_0 x_0 + w_1 x_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad (2)$

fent $f = x^2$ $\qquad w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \qquad (3)$

~~$f = x^3$ $\quad w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$~~

~~$(1) \Rightarrow w_0 = 1 - w_1$~~

~~$(3) \Rightarrow (1-w_1)\cdot x_0^2 + w_1 x_1^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1/3 - w_0 x_0^2}{w_1}}$~~

~~$(2) \Rightarrow (1-w_1) x_0 + \sqrt{1/3 - w_0 x_0^2}\,\sqrt{w_1} = 0$~~

~~$t = \sqrt{w_1}$~~

~~$x_0 - t^2 x_0 + \sqrt{1/3 - w_0 x_0^2}$~~

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 1 \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = 1/2 \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = 1/3 \end{cases} \qquad (x_0 \text{ ja donat})$$

quadratura d'ordre ~~3~~ 2

c) Només és d'ordre 3 si x_0 coincideix amb un dels punts de Gauss

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONA**TECH**
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Càlcul Numèric

Estudiant/a:

Data:

6 a) i b)

$$p(t) = \frac{L}{1 + c\cdot \exp(r(t-t_0))}$$

$$1 + c\cdot \exp(r(t-t_0)) = \frac{L}{p(t)}$$

$$c\cdot \exp(r\cdot(t-t_0)) = \frac{L}{p(t)} - 1$$

$$\ln c + r(t-t_0) = \ln\left(\frac{L}{p(t)} - 1\right), \quad \text{fem } K = \ln c, \ \tau_i = t_i - t_0$$

$$f(t) = K + r\,\tau_i = \ln\left(\frac{L}{p(t)} - 1\right)$$

Es vol min $\sum_{i=0}^{n} \left[(K + r\,\tau_i) - \left(\ln\left(\frac{L}{p_i} - 1\right)\right)\right]^2 = \Phi(r,K)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial K} = \sum 2\left[(K + r\,\tau_i) - \left(\ln\left(\frac{L}{p_i} - 1\right)\right)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = \sum 2\,\tau_i \left[(K + r\,\tau_i) - \ln\left(\frac{L}{p_i} - 1\right)\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum r\,\tau_i + n\cdot K = \sum \left(\ln \frac{L}{p_i} - 1\right) \\ \sum \tau_i\cdot K + r\,\tau_i^2 = \sum \tau_i \left(\ln \frac{L}{p_i} - 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum \tau_i \\ \sum \tau_i & \sum \tau_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln\left(\frac{L}{p_i} - 1\right) \\ \sum \tau_i \cdot \ln\left(\frac{L}{p_i} - 1\right) \end{bmatrix}$$

$K = 0{,}9118$

$\cancel{K = 0{,}9118} \Rightarrow c = 2{,}4888$

$r = -6{,}0169$

Estimació Any 2100 $\longrightarrow$ 55,3236 M hab

c) amb λ desconegut, linealitzar és impossible.
De tota manera, sempre es pot buscar el mínim mitjançant altres mètodes com per exemple "gradient descent".

Es pot plantejar l'ajust per mínims quadrats, però conduirà a un sistema d'equacions no lineals