2.3 | 1,1 | 1,3

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) **Examen parcial (1a PART)**

(Durada: 1h30min) **10 de novembre de 2014**

Cognoms: **Nom:**

1. [3 punts] Es vol aproximar una funció $f(x)$, amb expressió analítica coneguda, per un polinomi de grau m amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar continu a l'interval $[-1,1]$.

0,5 a) Proposar detalladament[1] una metodologia per a calcular el polinomi aproximant fent servir la base natural de polinomis.

Tenim la base $\psi_0(x)=1,\ \psi_1(x)=x,\ \dots,\ \psi_m(x)=x^m$.

I volem $p(x)$ de la forma $p(x)=\sum_{i=0}^{m} c_i\psi_i(x)$ on c_i ctts.

Al aplicar MC busquem $\min_{c_0,\dots,c_m}\|f-p\|^2=\min_{c_0,\dots,c_m}\langle f-p,f-p\rangle$. Per tant, imposem $\frac{\partial\langle f-p,f-p\rangle}{\partial c_i}=0$. Si desenvolupem això tenim:

$$\frac{\partial(\langle f,f\rangle-2\langle f,p\rangle+\langle p,p\rangle)}{\partial c_i}=0 \quad i \quad \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\langle f,f\rangle}{\partial c_i}=0, \quad \frac{\partial\langle f,p\rangle}{\partial c_i}=\langle f,\psi_i\rangle \\ \frac{\partial\langle p,p\rangle}{\partial c_i}=2\langle p,\psi_i\rangle=2\sum_{j=0}^{m}c_j\langle\psi_j,\psi_i\rangle.\end{array}\right.$$

Així, obtenim les EQ. NORMALS: $\sum_{j=0}^{m}c_j\langle\psi_j,\psi_i\rangle=\langle f,\psi_i\rangle$, i per tant, el sistema lineal a resoldre és:

$$\begin{bmatrix}\langle\psi_0,\psi_0\rangle & \langle\psi_1,\psi_0\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_0\rangle\\ \langle\psi_0,\psi_1\rangle & \langle\psi_1,\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_1\rangle\\ \vdots & & & \vdots\\ \langle\psi_0,\psi_m\rangle & \langle\psi_1,\psi_m\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_m\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle f,\psi_0\rangle\\ \langle f,\psi_1\rangle\\ \vdots\\ \langle f,\psi_m\rangle\end{bmatrix} \quad \text{on} \quad \langle u,v\rangle=\int_{-1}^{1}u(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Un cop resolt haurem trobat la nostra aproximació $p(x)$.

0,5 b) Proposar detalladament una metodologia eficient per a calcular el polinomi aproximant fent servir la base de polinomis ortogonals de Legendre $\{P_i(x)\}_{i=0}^{m}$.

Ara la nostra base és $\psi_0(x)=P_0(x),\ \dots,\ \psi_m(x)=P_m(x)$.

Seguiríem exactament el mateix procediment que abans per arribar al sistema de les eq. normals, però, si aprofitem la ortogonalitat dels polinomis de Legendre ($P_n(x)\perp\mathbb{P}^{n-1}$), obtenim:

$$\begin{bmatrix}\langle\psi_0,\psi_0\rangle & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \langle\psi_1,\psi_1\rangle & 0\cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \langle\psi_m,\psi_m\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle f,\psi_0\rangle\\ \langle f,\psi_1\rangle\\ \vdots\\ \langle f,\psi_m\rangle\end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{c_i=\frac{\langle f,\psi_i\rangle}{\langle\psi_i,\psi_i\rangle}}$$

matriu diagonal.

on, com abans $\langle u,v\rangle=\int_{-1}^{1}u(x)\,v(x)\,dx$.

Així, $p(x)=c_0\cdot P_0(x)+\dots+c_m\cdot P_m(x)$ on $c_i=\frac{\langle f,P_i\rangle}{\langle P_i,P_i\rangle}$.

---

[1] L'algorisme proposat ha de ser prou detallat i tenir la informació necessària per que algú sense coneixements de mètodes numèrics pogués calcular el polinomi.

0.5

c) Suposem ara que es vol fer servir la base de polinomis ortogonals de Txebixov. Proposar detalladament una metodologia per a calcular el polinomi aproximant. S'obtindria el mateix polinomi que amb els mètodes proposats als apartats anteriors? Per què?

Fem servir ara $\varphi_i(x) = T_i(x)$ polinomis ortogonals de Txebixov.

Arribem al mateix sistema que a l'apartat anterior:

$c_i = \frac{\langle f, T_i \rangle}{\langle T_i, T_i \rangle}$, però, si tenim en compte una propietat (T_{2k} ≡ parells, T_{2k+1} ≡ imparells) dels polinomis de Txebixov, que és la seva paritat, si coneixem que f és parella, per exemple, tenim que els coeficients $c_{2k+1} = \frac{\langle f, T_{2k+1} \rangle}{\langle T_{2k+1}, T_{2k+1} \rangle} = 0$ ($\int$ en interval simètric de funció imp = 0), cosa que agilitza el càlcul, ja que hem de fer menys operacions.

~~Txebixov és un polinomi si considerem x = cosθ en [-1, 1], així que probablement, haurien de sortir un polinomi ...~~

Quan utilitzem Txebixov fem servir el p.e continu $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)dx$ que dóna més pes als extrems, així que pot ser que surti un polinomi diferent.

0.3

d) Suposem ara que es vol aproximar la funció $f(x)$ a un altre interval $[a, b]$ donat. Proposar una base de polinomis ortogonals a l'interval $[a, b]$ que es pugui calcular a partir de la base de Legendre. Justificar que la base proposada és ortogonal.

Volem passar de l'interval $[-1, 1]$ a un interval $[a, b]$, així, que hauriem de fer una transformació de variable als Polinomis de Legendre:

$$\gamma : [-1, 1] \longrightarrow [a, b]$$
$$x \longmapsto \tilde{x}$$

I consideraríem els polinomis $\tilde{P}(\tilde{x})$, obtinguts a partir dels de Legendre. ($P(x)$ Legendre)

Aquests són ortogonals ja que només hem aplicat un canvi de variable, el resultat de la integral (del producte escalar) ha de ser el mateix.

Si $\langle P_i, P_{i-1} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \tilde{P}_i, \tilde{P}_{i-1} \rangle = 0$ (no? $\Leftarrow$?)

Per tant, la base és ortogonal.

Falta la demostració

√0.5

e) Suposem ara que es vol aproximar la funció per un spline C^2 cúbic amb $m+1$ punts base equiespaiats a l'interval $[a, b]$. Quina és la dimensió de l'espai d'splines C^2 cúbics? I la de l'espai d'splines naturals? Justifica la teva resposta.

Volem aproximar per splines cúbics C^2. $S(x) = S_i(x)$ si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on $i = 0, \dots, m-1$
m splines.

Spline cúbic: $S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$ ← m eqs.

⇒ Tenim $4m$ incògnites (a_i, b_i, c_i, d_i).

Imposem:

$$\left.\begin{array}{ll} C^0)\ S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) & \leftarrow m-1 \text{ eqs.} \\ C^1)\ S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) & \leftarrow m-1 \text{ eqs} \\ C^2)\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) & \leftarrow m-1 \text{ eqs} \end{array}\right\} 3(m-1) \Rightarrow 4m - 3(m-1) = 4m - 3m + 3 = m + 3 = (m+1) + 2.$$

⇒ $\boxed{\text{La dimensió dels splines } C^2 \text{ cúbics és } m+3.}$

Ara, un spline natural és un spline cúbic C^2 imposant, a més, que $S_0'' = S_m'' = 0$. Per tant, hem d'imposar dues restriccions més. Així,

$\boxed{\text{dim splines naturals} = \text{dim splines } C^2 \text{ cúbics} - 2 = m+3-2 = m+1}$

f) Proposar una metodologia per al càlcul de l'*spline natural* que s'ajusta a la funció amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar continu.

∅

Volem calcular $S(x) = S_i(x)$ si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ sabent que és de la forma $S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$.
i imposant que $S_0'' = S_m'' = 0$. ⟷ això ens dóna un altre sistema.
si ho volem fer utilitzant M.C., només cal considerar la base $\varphi_0^j(x) = (x-x_j)^0 = 1$, $\varphi_1^j(x) = (x-x_j)^1$, ..., en definitiva $\varphi_i^j(x) = (x-x_j)^i$ per a cada tros de l'spline i procedir com habitualment, resolent el sistema que donen les equacions normals.

NO

1.1

2. [1.5 punts] Per al disseny d'una muntanya russa es disposa de l'alçada de la muntanya a determinats punts del recorregut, $\{l_k, h_k\}_{k=0}^n$. A partir d'aquestes alçades es vol definir l'alçada a tot el recorregut $h(l)$ on, òbviament, $h(l)$ ha de ser una funció suau, amb derivada (pendent) i derivada segona (curvatura) contínues. A més, evidentment, es requereix que a l'inici i al final el pendent sigui zero.

0.7

a) Proposar raonadament un mètode per a definir la funció alçada $h(l)$ donades les dades $\{l_k, h_k\}_{k=0}^n$.

Com disposem de les dades $\{l_k, h_k\}_{k=0}^n$ i ens demanen condicions sobre la continuïtat de la nostra funció la qual volem aproximar, i, aquestes són, per tant, condicions sobre el nostre aproximant, l'ideal seria utilitzar splines. Ja que pots controlar la continuïtat i suavitat de la funció. ✓ suavitat màxima

En aquest cas demanen $h(l)$ suau i amb les dues primeres derivades contínues. Per tant, jo escolliria un spline C^2, cúbic, on això es compleix directament (C^0, C^1, C^2) i, a més, imposem que $h'(l_0) = h'(l_n) = 0$ i les dades. (Disposem de dues condicions extres a més de les dades als splines cúbics C^2 com he explicat al ex 1.e))

0.4

b) Explicar breument com es faria el càlcul de la funció aproximant.

Si utilitzem splines C^2 cúbics amb $h'(l_0) = 0$, $h'(l_n) = 0$, obtenim un aproximant a trossos de la forma:

$H(l) = H_i(l)$ si $l \in [l_i, l_{i+1}]$ amb $H_i(l) = a_i \cdot (l-l_i)^3 + b_i (l-l_i)^2 + c_i (l-l_i) + d_i$.

Aquestes incògnites es troben imposant les continuïtats, i resolent el sistema:

Convé utilitzar la formulació en pendents

$$\left\{\begin{array}{l} H_i(l_i) = h_i \\ H_i(l_{i+1}) = h_{i+1} \\ H_i''(l_i) = h_i'' \\ H_i''(l_{i+1}) = h_{i+1}'' \end{array}\right. \Longrightarrow \text{obtenim } a_i, b_i, c_i, d_i \text{ en funció de } h_i, h_{i+1}, h_i'', h_{i+1}'', \dots$$

notació, no són les derivades d'una h.

Ara, ens falta imposar C^1: $H_i'(l_{i+1}) = H_{i+1}'(l_{i+1})$ expressions en funció de $h_i, \dots$ conegudes.

obtenim un sistema d'eq. de l'estil $\boxed{e_i} \cdot h_{i-1}' + \boxed{d_i} \cdot h_i' + \boxed{f_i} h_{i+1}' = \boxed{g_i}$

Tenim un sistema de $n-1$ ~~incògn~~ eq amb $n+1$ incògnites, però tenim que imposem que $h_0' = h_n' = 0$, per tant, tenim $n-1$ eq, $n-1$ incògnites.

D'on acabem de trobar finalment els valors de les pendents.

I, per tant, ja tenim tota la informació necessària per definir el nostre aproximant.

1,3

3. [2 punts] L'evolució en el temps de la concentració amb que un dispositiu subministra un medicament per via intravenosa a un pacient es pot aproximar per una funció de la forma

$$c(t) = Cte^{-\alpha t}$$

amb C i α constants positives. Per al calibrat dels paràmetres C i α es disposa de mesures experimentals $\{t_k, c_k\}_{k=0}^{n}$.

a) Plantejar el problema de mínims quadrats no lineal per al calibrat dels paràmetres C i α i deduir el sistema d'equacions no lineal a resoldre.

b) Reduir el problema a la resolució d'una equació escalar amb una incògnita.

c) Proposar raonadament un mètode numèric per a la resolució del sistema d'equacions no lineals plantejat a *a)* i per a la resolució del problema de zeros de funcions plantejat a *b)*. Quina de les dues estratègies per a resoldre el problema no lineal aconsellaries? Per què?

1 a) Aprox: $c(t) = C_1 t \cdot e^{-\alpha t}$ i tenim les dades $\{t_i, c_i\}_{k=0}^{m}$. Per evitar problemes de notació direm que tenim les dades $\{t_i, \underset{c_i}{f(t_i)}\}$ i que f és la funció que volem aproximar. (o les dades que volem aproximar).

MC: $\min_{C_1,\alpha} \|f - c\| = \min_{C_1,\alpha} \langle f-c, f-c\rangle = \langle f,f\rangle - 2\langle f,c\rangle + \langle c,c\rangle$. $\Longrightarrow$ Imposem $\begin{cases} \dfrac{\partial \langle f-c, f-c\rangle}{\partial C_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \langle f-c, f-c\rangle}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$

Tenim $\dfrac{\partial \langle f,f\rangle}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial \langle f,f\rangle}{\partial C_1} = 0$

$$\frac{\partial\langle f,c\rangle}{\partial C_1} = \frac{\partial \sum_{i=0}^{m} \underset{c_i}{f(t_i)} \cdot c(t_i)}{\partial C_1} = \frac{\partial \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot C_1 \cdot t_i \cdot e^{-\alpha t_i}}{\partial C_1} = \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot t_i \cdot e^{-\alpha t_i}$$

$$\frac{\partial\langle f,c\rangle}{\partial \alpha} = \dots = \frac{\partial \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot C_1 \cdot t_i \cdot e^{-\alpha t_i}}{\partial \alpha} = -\sum_{i=0}^{m} c_i \cdot C_1 \cdot (t_i)^2 \cdot e^{-\alpha t_i}.$$

$$\frac{\partial\langle c,c\rangle}{\partial C_1} = \frac{\partial \sum_{i=0}^{m} (c(t_i))^2}{\partial C_1} = \frac{\partial \sum_{i=0}^{m} C_1^2 \cdot t_i^2 \cdot e^{-2\alpha t_i}}{\partial C_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{m} C_1 t_i^2 e^{-2\alpha t_i}$$

$$\frac{\partial\langle c,c\rangle}{\partial \alpha} = \dots = \frac{\partial \sum_{i=0}^{m} C_1^2 t_i^2 \cdot e^{-2\alpha t_i}}{\partial \alpha} = (-2) \sum_{i=0}^{m} C_1^2 \cdot t_i^3 e^{-2\alpha t_i}$$

Per tant, ens queden les equacions:

$$\begin{cases} 0 - \cancel{2}\left(\sum_{i=0}^{m} c_i t_i e^{-\alpha t_i}\right) + \cancel{2} \cdot \sum_{i=0}^{m} C_1 \cdot t_i^2 \cdot e^{-2\alpha t_i} = 0 \\ 0 + \cancel{2} \cdot \left(+ \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot C_1 \cdot (t_i)^2 \cdot e^{-\alpha t_i}\right) - (+\cancel{2}) \sum_{i=0}^{m} C_1^2 t_i^3 \cdot e^{-2\alpha t_i} = 0. \end{cases}$$

SNL d'equacions.

(es pot continuar darrera)

b)

0

c) Per a la resolució del sistema no lineal trobat a l'apartat a podriem fer servir Newton-Rapshon directament, en comptes d'un mètode quasi-Newton per aproximar les derivades, ja que, treballem amb funcions ~~exponencials~~ que contenen exponencials i termes polinòmics, així que no ha de ser difícil de calcular a mà i així no perdem la convergència quadràtica.

Per a la resolució dels zeros de funcions

0,3

2.5

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) **Examen parcial (2a PART)**

(Durada: 1h) 10 de novembre de 2014

Cognoms: Nom:

4. [3.5 punts] Es vol fer servir el mètode de Newton

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

per trobar les arrels de la funció $f(x) = 3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 32x^2 + 12x - 32$.

a) Feu servir el mètode de Newton prenent com a aproximació inicial $x^0 = 3$. Té la convergència esperada? Per què? Quantes iteracions es necessiten per tenir la solució amb, com a mínim, 5 xifres significatives correctes? Justifiqueu la resposta.
Escriviu els resultats obtinguts en les dues primeres i les dues darreres iteracions que heu calculat.

b) Repetiu l'apartat anterior, prenent com a aproximació inicial $x^0 = 1$. S'observa alguna diferència en el comportament del mètode? A què és deguda?

Per millorar el comportament del mètode, es proposa emprar la següent modificació:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{2f(x^k)}{f'(x^k)}$$

c) Feu servir aquest mètode, prenent com a aproximació inicial $x^0 = 1$ i mostreu els resultats obtinguts en una taula. Com és la convergència en aquest cas?

d) Feu una anàlisi de la convergència asimptòtica de l'esquema iteratiu proposat, que permeti explicar el seu comportament.

e) Es pot fer servir aquest mètode per determinar l'arrel trobada en l'apartat *a*)? Per què?

---

a) $x^0 = 3$.
El mètode té els errors: $\left\{ \begin{array}{l} 7,6 \cdot 10^{-2} \\ 3.6 \cdot 10^{-2} \\ 8.2 \cdot 10^{-3} \\ 3.8 \cdot 10^{-4} \\ 8.4 \cdot 10^{-7} \end{array} \right.$

Veiem que al principi va una mica lent i només varia en un ordre el seu error, però a la última iteració es pot veure el comportament quadràtic de 10^{-4} a 10^{-7}.

Per tant, té convergència quadràtica que és el que esperàvem.

Tenim que x^k té 5 xifres significatives si $r^k = \left|\frac{x^k - \cancel{x^*}}{\cancel{x^*}}\right| \approx \left|\frac{x^k - x^{k+1}}{x^{k+1}}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Aquí tobem que $r^5 = 8.4 \cdot 10^{-7} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{5} \Rightarrow$ Triga 4 iteracions a obtenir 5 xifres significatives (x^4 té 5 xifres significatives).

Resultats obtinguts

$x^1 = 2.78\cancel{428}$

$x^2 = 2.\cancel{6}89665408922 95$

$x^4 = 2.6666689 0935833.$

$x^5 = 2.66666666667716.$ ← solució aproximada obtinguda.

b) $x^0 = 1.$

Si utilitzem com a aproximació inicial $x^0 = 1$, el mètode de Newton fa moltes més iteracions que abans, obtenim fins a x^{15}.

En aquest cas, als errors observem un comportament molt lent (lineal)

$1.7 \cdot 10^{-1}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$
$7.5 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$
$3.5 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$.
$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$6.77 \cdot 10^{-5}$	

La solució obtinguda és $x^{15} = 1.41420159105981.$

Si avaluem $f'(x^{15}) = 7.19 \cdot 10^{-4}$, que és prou proper a 0, així, pot ser que l'arrel a la que ens aproximem en aquest cas, que és diferent a l'anterior, sigui una arrel doble i, per a arrels dobles el mètode de Newton té convergència lineal, ~~fet~~ fet que quadra amb els resultats trobats.

c) Resultats obtinguts utilitzant el mètode proposat:

k	x^k	r^k
0	1	$0.\overline{30} \simeq 3.03 \cdot 10^{-1}$
1	1.43478260869565	$1.456\ldots \cdot 10^{-2}$
2	1.41419031 6543	$1.64372600 14\ldots \cdot 10^{-5}$
3	1.41423562 33904	—

En aquest cas tenim convergència quadràtica.

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Càlcul Numèric

Estudiant/a:

Data: 10/11/2014

d) e) junts.

Fer una anàlisi de la conv. asimptòtica de l'esquema iteratiu proposat.

Tenim $x^{k+1} = \phi(x^k)$ on $\phi(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$ en aquest cas.

$E^k := x^k - \alpha \quad E^{k+1} := x^{k+1} - \alpha. \quad \phi(\alpha) = \alpha - \frac{2 \cdot f(\alpha)}{f'(\alpha)}^{=0} = \alpha$ ✓ (MÈTODE CONSISTENT)

$\Rightarrow x^{k+1} = \phi(\alpha + E^k) \underset{\text{des. Taylor}}{=} \underset{\alpha}{\phi(\alpha)} + \phi'(\alpha) E^k + \frac{1}{2}\phi''(\alpha)(E^k)^2 + O((E^k)^3).$

$\Rightarrow E^{k+1} = \phi'(\alpha) E^k + \frac{1}{2}\phi''(\alpha)(E^k)^2 + O((E^k)^3).$

$\Rightarrow |E^{k+1}| \leq |\phi'(\alpha)|\,|E^k| + \frac{1}{2}|\phi''(\alpha)|\,(E^k)^2 + O((|E^k|^3))$

Calculem $|\phi'(\alpha)|$:

$\phi(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \phi'(x) = 1 - 2\left(\frac{f'(x)f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right) =$

$= 1 - 2 + 2\frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2} = -1 + 2\frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$

$f'(\alpha) = 0.$

$\Rightarrow \phi'(\alpha) = -1 + 2\cdot\cancel{\frac{f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2}} = -1 \Rightarrow |\phi'(\alpha)| = 1$ ✗

$\Rightarrow$ Tenim $|\phi'(\alpha)| = 1 \leftarrow$ El mètode no tindria ni perquè convergir: $|E^{k+1}| \leq |E^k| + O(|E^k|^2) \simeq |E^{k+1}| \leq |E^k|$

podríem tenir igualtat en algun punt i perdre la convergència

En el cas en que la nostra aproximació inicial és 1, el mètode arriba molt ràpidament a l'arrel 1.414235..., però això pot ser per "sort", en el sentit de que, justament, aplicant 1/2 del valor de la derivada de f'(x), en comptes de 1 com al mètode de Newton, aconseguim arribar a la resposta, però per a altres aproximacions, com la de l'apartat a) $x^0 = 3$, no convergeix. Per tant, podrem arribar a trobar l'arrel de l'apartat a) 2.666...?, doncs potser tenim sort i trobem algun altre punt x^0 que hi arriba, però en principi, no tindríem per què arribar-hi. ✗

e)

| 2.1 | 1.3 | 0.5 | 1 | 0,5 | 36

CÀLCUL NUMÈRIC (GM) — Examen final (part I)

(Durada: 2h 30min) — 12 de gener de 2015

Cognoms: Nom:

2,1

1. [2.5 punts] Un procés estacionari de difusió-convecció-reacció es pot modelitzar amb l'equació diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) + u(x) = f(x) \quad , \quad a < x < b \tag{1}$$

amb les condicions de contorn

$$u(a) = \alpha \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) = \beta \tag{2}$$

A les equacions (1) i (2), són dades els valors de a, b, α i β i la funció $f(x)$ (terme font), i és incògnita la funció $u(x)$. Estem interessats en resoldre aquest problema amb el mètode dels elements finits (MEF).

1

a) Dedueix la forma feble del problema. Discretitza la forma feble obtinguda utilitzant l'aproximació

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j N_j(x)$$

Indica clarament l'expressió de la matriu $\mathbf{A}$ i del vector $\mathbf{f}$ del sistema d'equacions $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ resultant.

Tenim la EDO: $-u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x) \implies r(u(x)) = -u''(x) + u'(x) + u(x) - f(x)$

Busquem $u(x)$ tq $u(a)=\alpha$, $u'(b)=\beta$ tal que

$$0 = \int_a^b r(u(x))\cdot v(x) \quad \forall\, v(x) \text{ funció tal que } \boxed{v(a) = 0.}$$

$$0 = \int_a^b r(u(x))\cdot v(x)dx = \int_a^b v(x)\cdot\left(-u''(x) + u'(x) + u(x) - f(x)\right) dx = \int_a^b -v(x)\cdot u''(x) + v(x)u'(x) + v(x)\cdot u(x)$$

$$- f(x)\cdot v(x)\, dx = \underbrace{-\int_a^b v(x)\cdot u''(x)\, dx}_{} + \int_a^b v(x)\left(u'(x) + u(x)\right)dx - \int_a^b f(x)\cdot v(x)$$

$$= -\left[v u'\right]_a^b + \int_a^b u'(x)\cdot v'(x) = \underbrace{-v(b)\cdot u'(b)}_{= -v(b)\cdot\beta} + \underbrace{\cancel{v(a)\cdot u'(a)}}_{(v(a)=0)} + \int_a^b u'(x)\cdot v'(x)\, dx.$$

FORMA FEBLE: Busquem una funció $u(x)$ tal que $u(a)=\alpha$, $u'(b)=\beta$ que compleixi:

$$\int_a^b u'(x)\cdot\left(v(x) + v'(x)\right) + u(x)\cdot v(x)\, dx = \int_a^b f(x)\cdot v(x)\, dx + v(b)\cdot\beta.$$

$\forall\, v(x)$ funció que compleixi $v(a)=0$.

Considerem la discretització $u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=0}^{m} u_j N_j(x) = \underbrace{\alpha \cdot N_0(x)}_{\Psi(x)} + \sum_{j=1}^{m} u_j \cdot N_j$

Considerem a més, $v(x) = N_i(x)$, $i = 1, \dots, m$. $\Rightarrow u'(x) \approx (u^h)'(x) = \underbrace{\Psi'(x)}_{\alpha \cdot N_0'(x)} + \sum_{j=1}^{m} u_j N_j'(x)$

Així: $\int_a^b u'(x)(v'(x) + v(x)) + u(x) \cdot v(x)\, dx = \int_a^b f(x) v(x) dx + v(b) \cdot \beta$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(\Psi'(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j \cdot N_j'(x)\right)\left(N_i'(x) + N_i(x)\right) + \left(\Psi(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j N_j\right) \cdot N_i(x)\, dx = \int_a^b f(x) \cdot N_i(x)\, dx + N_i(b) \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \int_a^b \Psi'(x) \cdot (N_i'(x) + N_i(x)) dx + \sum_{j=1}^{m} \left[\int_a^b N_j'(x) \cdot (N_i'(x) + N_i(x)) dx\right] u_j + \int_a^b \Psi(x) \cdot N_i(x) dx + \sum_{j=1}^{m} \left[\int_a^b N_j(x) \cdot N_i(x) dx\right] u_j =$$

$$= \int_a^b f(x) \cdot N_i(x) dx + N_i(b) \cdot \beta.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left[\int_a^b N_j'(x)\left(N_i'(x) + N_i(x)\right) + N_j(x) N_i(x) dx\right]}_{A_{ij}} u_j = \underbrace{\int_a^b f(x) N_i(x) - \Psi'(x)(N_i'(x) + N_i(x)) - \Psi(x) \cdot N_i(x) dx + N_i(b) \cdot \beta}_{f_i}$$

Tenim un sistema $\underset{\sim}{A} \bar{u} = \bar{F}$ on:

$\underset{\sim}{A} = (A_{ij})$ on $A_{ij} = \int_a^b N_j'(x)(N_i'(x) + N_i(x)) + N_j(x) \cdot N_i(x)\, dx$

$m \times m$. $\hookrightarrow$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$

$$\bar{u} = (u_j) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} = (f_i) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad f_i = \int_a^b f(x) N_i(x) - \Psi'(x)(N_i'(x) + N_i(x)) - \Psi(x) \cdot N_i(x) dx + N_i(b) \cdot \beta$$

El problema de contorn correspon, de fet, a una EDO de segon ordre. Es proposa ara resoldre el problema amb un mètode numèric per a EDOs de la forma $dy/dx = f(x, y)$

$$Y_{i+1} = Y_i + h(b_1k_1 + b_2k_2) \text{ amb } \begin{cases} k_1 = f(x_i, Y_i) \\ k_2 = f(x_i + ch, Y_i + hak_1) \end{cases}$$

on k_1, k_2, a, b_1, b_2 i c són paràmetres del mètode.

0,6

b) A quina família de mètodes pertany aquest esquema? Quin ordre pot arribar a tenir el mètode? Detalla com aplicaries el mètode a la EDO (1) i com tractaries les condicions de contorn del problema.

Aquest esquema pertany a la família de mètodes Runge-Kutta explícits. En aquest cas, tenim que és un mètode amb $s=2$ (# $s+1$ punts d'integració a cada subinterval), per tant, tenim ordre $p=s=2$.

$\Rightarrow$ Ordre quadràtic. V

Per aplicar el mètode RK explícit, el primer que hem de fer és passar d'una EDO de segon ordre a un sistema de dues EDOs de primer ordre mitjançant un canvi de variables: Tenim el probl. de contorn $\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x) \\ u(a) = \alpha, \ u'(b) = \beta. \end{cases}$

Considerem $\quad u_{(1)} \equiv u_{(1)}(x), \quad u_{(2)} \equiv u_{(2)}(x)$

$$\begin{aligned} u_{(1)} &= u \\ u_{(2)} &= u' \end{aligned} \implies \begin{aligned} u'_{(1)} &= u' = u_{(2)} \\ u'_{(2)} &= u'' = -f(x) + u' + u = -f(x) + u_{(2)} + u_{(1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \begin{pmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dx} = \begin{pmatrix} u'_{(1)} \\ u'_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{(2)} \\ u_{(1)} + u_{(2)} - f(x) \end{pmatrix} =: f(x, \bar{u})$$

$\Rightarrow$ Tenim el sistema d'EDOs de 1r ordre $\quad \dfrac{d\bar{u}}{dx} = f(x, \bar{u})$.

Així, aplicarem el mètode: si $\bar{u}_i^h \approx \bar{u}_i$,

$$\bar{u}_{i+1}^h = \bar{u}_i^h + h \cdot (b_1 \bar{k}_1 + b_2 \cdot \bar{k}_2) \text{ on } \begin{cases} \bar{k}_1 = \bar{f}(x_i, \bar{u}_i^h) \\ \bar{k}_2 = \bar{f}(x_i + ch, \bar{u}_i^h + h \cdot a \cdot \bar{k}_1) \end{cases}$$

V

Per a les condicions de contorn:

$$\text{Tenim} \quad \bar{u}(a) = \begin{pmatrix} u_{(1)}(a) \\ u_{(2)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \underbrace{u_{(2)}(a)}_{\text{no conegut}} \end{pmatrix} \qquad \bar{u}(b) = \begin{pmatrix} u_{(1)}(b) \\ u_{(2)}(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{u_{(1)}(b)}^{\text{no conegut}} \\ \beta \end{pmatrix}$$

Tenim una condició de Dirichlet a a i una condició de Neumann a b (condicions de contorn mixtes).

+ condicions de contorn per al problema [illegible] ?

El problema es resol per $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 0$ i $f(x) = 1$ amb el mètode de segon ordre i s'obtenen les solucions numèriques

$$u(1) \simeq U_{10}^{h=0.1} = 0.279513, \quad u(1) \simeq U_{20}^{h=0.05} = 0.284332$$

on $U_i^{h=H}$ denota la solució al punt x_i amb pas $h = H$.

0,5 c) Calcula una estimació de l'error en l'aproximació de $u(1)$ per al càlcul amb $h = 0.1$, i fes una previsió de quants intervals caldria fer servir per tenir una aproximació de $u(1)$ amb 3 xifres significatives correctes.

Sabem que el mètode té 2n ordre, per tant, si $m = \frac{b-a}{h}$

$$E_m = \frac{C}{m^2} \quad \text{Però com } h = \frac{b-a}{m}$$

$$E_h = \frac{C}{\left(\frac{b-a}{h}\right)^2} = \frac{C \cdot h^2}{(b-a)^2} \underset{b-a=1}{=} C \cdot h^2.$$

Calculem l'error comès amb $h = 0.1$, per a això, utilitzarem com a aprox. a la solució $\alpha \approx U_{20}^{0.05}$ (al tenir h més petita, serà més precisa)

1 x.s correcta.

$$\boxed{E_{0.1} \approx \frac{|U_{10}^{0.1} - U_{20}^{0.05}|}{|U_{20}^{0.05}|} = \frac{|0.279513 - 0.2843321|}{|0.2843321|} = 0.1695 \cdot 10^{-1}}$$

Ara, $E_h = C \cdot h^2 \rightarrow 0.1695 \cdot 10^{-1} = E_{0.1} = C \cdot (0.1)^2 \Rightarrow C = \frac{0.1695 \cdot 10^{-1}}{(0.1)^2} = 1,695.$

Per tenir 3 x.s. correctes necessitem que $E_h \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$.

$$0.5 \cdot 10^{-3} \geq E_h = C \cdot h^2 \Rightarrow h \leq \sqrt{\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{C}} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{1.695}} = 0.01718$$

$$h \leq 0.01718 \Rightarrow \frac{b-a}{m} \leq 0.01718 \Rightarrow m \geq \frac{1}{0.01718} = 58,2237 \Rightarrow \boxed{\text{Necessitem almenys 59 intervals.}}$$

1,3

2. [1.5 punts] Volem determinar les arrels de l'equació $2x - \exp(x-1) = 0$. A les taules següents es mostren els resultats obtinguts amb dos algoritmes iteratius, fent servir dues aproximacions inicials diferents.

Algoritme 1: $x^{k+1} = \dfrac{1}{2}\exp(x^k - 1)$

x^k	r^k	x^k	r^k
1.00000	1.00e + 00	3.0000e + 00	1.88e − 01
0.50000	6.49e − 01	3.6945e + 00	5.01e − 01
0.30327	2.17e − 01	7.3993e + 00	9.75e − 01
0.24910	5.57e − 02	3.0070e + 02	1.00e + 00
0.23597	1.32e − 02	7.2083e + 129	NaN
0.23289	3.08e − 03	Inf	NaN
0.23218	7.16e − 04	Inf	NaN
0.23201	1.66e − 04	Inf	NaN
0.23197	3.85e − 05	Inf	NaN
0.23196	8.94e − 06	Inf	NaN

Algoritme 2: $x^{k+1} = \ln(2x^k) + 1$

x^k	r^k	x^k	r^k
1.0000	4.09e − 01	3.0000	7.46e − 02
1.6931	2.37e − 01	2.7918	2.65e − 02
2.2197	1.09e − 01	2.7198	9.69e − 03
2.4905	4.42e − 02	2.6937	3.59e − 03
2.6056	1.70e − 02	2.6841	1.34e − 03
2.6508	6.44e − 03	2.6805	4.99e − 04
2.6680	2.42e − 03	2.6791	1.86e − 04
2.6745	9.04e − 04	2.6786	6.95e − 05
2.6769	3.38e − 04	2.6785	2.60e − 05
2.6778	1.26e − 04	2.6784	9.69e − 06

0.4

a) Per a cada un dels algoritmes i cada una de les aproximacions inicials, comenta el comportament del mètode: convergeixen els mètodes? En cas afirmatiu, quin és l'ordre de convergència? Explica com identifiques l'ordre de convergència.

ALGORITME 1: L'algoritme 1, donada $x^0 = 1$, convergeix cap a la solució, però amb $x^0 = 3$ divergeix. El que ens fa veure ~~passar~~ que no és un mètode convergent per a tota aproximació inicial. Quan convergeix té una convergència aproximadament lineal (baixa "d'un en un" l'exponent de l'error en cada iteració).

no, + lent

ALGORITME 2: En aquests cas, per a les dues aprox. inicials donades el mètode convergeix, però no sabem si divergeix o no per a la resta de condicions inicials. Podria passar.
En aquests casos, té una convergència aproximadament lineal. (pel mateix motiu que a l'algorisme 1, encaraque aquest sembla més lent, triga més iteracions en disminuir l'exponent de 10 de l'error).
Per veure l'ordre de convergència em fixo en la variació de l'exponent de l'error, que indica el ritme de decreixement (o creixement quan divergeix) d'aquest.

$\frac{r^{k+1}}{r^k} \approx \lambda$ FAC

0.9

b) Fes una anàlisi de la consistència i convergència dels mètodes. Comenta si concorden les conclusions de l'anàlisi amb el comportament de cada un dels mètodes. FALTA

* ALGORITME 1: $x^{k+1} = \frac{1}{2}\cdot e^{x^k - 1} \Rightarrow \phi(x^k) = x^{k+1} \quad \phi(x) = \frac{1}{2} e^{x-1}$.

Consistència: $\phi(\alpha) \stackrel{?}{=} \alpha$. ✓

$\phi(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot e^{\alpha-1} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$ ✓ El mètode és consistent.

com a arrel $\Rightarrow 2\alpha = e^{\alpha-1}$

Convergència: $x^{k+1} = \phi(x^k) = \phi(\alpha + E^k) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)\cdot E^k + \frac{\phi''(\alpha)}{2}\cdot (E^k)^2 + O((E^k)^3)$

$E^k = x^k - \alpha$

$\Rightarrow |E^{k+1}| \leq |\phi'(\alpha)||E^k| + \frac{|\phi''(\alpha)|}{2}|E^k|^2 + O(|E^k|^3)$

Tenim que $\phi'(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{x-1}\cdot 1$. $\quad \phi'(\alpha) = \frac{1}{2} e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Si $|\phi'(\alpha)| = |\alpha| < 1$ convergeix. i té conv. lineal ja que $\alpha \neq 0$.

Si $|\phi'(\alpha)| = |\alpha| > 1$ divergeix.

* ALGORITME 2: $x^k = \ln(2x^k) + 1 \longrightarrow \phi(x) = \ln(2x) + 1$.

Consistència: $\phi(\alpha) \stackrel{?}{=} \alpha \qquad 2\alpha = e^{\alpha-1}$

$\phi(\alpha) = \ln(2\alpha) + 1 = \ln(e^{\alpha-1}) + 1 = \alpha - 1 + 1 = \alpha$ ✓

$\Rightarrow$ El mètode és consistent. $\qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Convergència: $|E^{k+1}| \leq |\phi'(\alpha)|\cdot|E^k| + \frac{|\phi''(\alpha)|}{2}|E^k|^2 + O(|E^k|^3)$

$\phi'(x) = (\ln(2x)+1)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow |\phi'(\alpha)| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$

Convergeix si $|\phi'(\alpha)| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} < 1 \Leftrightarrow 1 < |\alpha|. \Rightarrow$ converg. lineal ja que $\frac{1}{|\alpha|} \neq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Divergeix si $|\phi'(\alpha)| > 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$.

0.5

3. [1 punt] Es vol aproximar una funció f amb un spline cúbic $S \in \mathcal{C}^1$ amb $n+1 = 11$ punts base equiespaiats a l'interval $[0, 1]$.

a) Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic) si es considera com a dada el valor de la funció f en els 11 punts base?

Tenim $n+1 = 11$ punts. $x_0, \dots, x_n$ i sabem $f(x_0), \dots, f(x_n)$.

~~Els splines~~ Dividiriem l'interval $[0,1]$ en n subintervals i a cadascún calcularíem l'spline cúbic $\mathcal{C}^1$ corresponent de la següent forma:

$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$. → $4n$ coefs a determinar.

Imposem: $\mathcal{C}^0$ $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ → $n-1$ imposicions.

$\mathcal{C}^1$ $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ → $n-1$ imposicions.

$4n - 2(n-1) = 2n+2 = \underbrace{2\cdot(n+1)}_{\text{graus de llibertat.}}$ → $n+1$ dades $(f(x_i))$

→ Ens queden $n+1$ graus de llibertat per als valors de $S_i'(x_i)$. El que podríem fer, en comptes de posar nombres qualsevol, és fer una aproximació de les derivades de f, com per exemple, una aprox. endavant

$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Coneixem tant els punts com el valor de la funció en ells.

b) Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic amb els 11 punts base esmentats) si es considera com a dada el valor de la funció f en 101 punts equiespaiats a $[0, 1]$?

Tenim el mateix cas que abans, però ara no tenim com a imposició els punts base, sinó que podem escollir-ne 11 de 101 donats.

En aquest cas tenim 101 punts de f en un interval $[0,1]$ equiespaiats, és a dir, tenim un punt avaluat de f cada 0.01.

Això són moltíssims punts per a un interval ($[0,1]$) relativament petit per a 101 punts d'avaluació. Jo faria un gràfic amb aquests 101 punts avaluats a $[0,1]$ i això em podria donar una idea aproximada força bona del comportament de la funció f i distribuiria els 11 punts base, que ara no tenen que ser equiespaiats, segons la forma que vegi als gràfic. A zones amb oscil·lacions més marcades posaria més punts junts (és a dir, splines $\mathcal{C}^1$ més petits) que a zones amb oscil·lacions més suaus.

4. [1 punt] Els polinomis de Txebixov es poden definir com

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

per $x \in [-1, 1]$ i $n \geq 0$. Es a dir, $T_n(x) = \cos(n\theta)$ amb $x = \cos(\theta)$.

a) Demostra que $T_n(x)$ és un polinomi de grau n en x. Indicació: per $n \geq 2$ es verifica la identitat $\cos(n\theta) = 2\cos\left((n-1)\theta\right)\cos\theta - \cos\left((n-2)\theta\right)$.

Considerem $n=0 \Rightarrow T_0(x) = \cos(0) = 1$ (polinomi de grau 0) ✓.

$n=1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(\theta) = \cos(\arccos x) = x$ (polinomi de grau 1) ✓

Demostrem-ho per inducció: suposem que $T_m(x)$ és un polinomi de grau m $\forall m < n$. Aleshores:

$T_n(x) = \cos(n\theta) = 2(\cos(n-1)\theta)\cdot\cos\theta - \cos((n-2)\theta) \overset{\cos(\theta)=x}{=}$

$= 2\cdot T_{n-1}(x)\cdot x - T_{n-2}(x)$.

Ara $T_{n-1}(x) \in \mathcal{P}^{n-1} \Rightarrow T_{n-1}(x)\cdot x \in \mathcal{P}^n$.

per hipòtesi $T_{n-2}(x) \in \mathcal{P}^{n-2}$

$\Rightarrow \underbrace{2T_{n-1}(x)x}_{\mathcal{P}^n} - \underbrace{T_{n-2}(x)}_{\mathcal{P}^{n-1}} \in \mathcal{P}^n \Rightarrow T_n(x)$ és un polinomi de grau n.

b) Demostra que els polinomis de Txebixov són ortogonals amb el producte escalar

$$< u, v > = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)\, dx$$

Volem veure que $< T_n(x), q(x) > = 0 \quad \forall q(x) \in \mathcal{P}^{n-1}$, $\{T_n(x)\}$ família de polinomis ortogonals.

Ens és suficient amb veure que, considerant $q_m(x) = x^m$:

$< T_n(x), q_m(x) > = 0 \quad \forall m = 1 \div n-1$. És a dir, $0 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) q_m(x)\, dx$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)\cdot q_m(x)\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \cdot \cos(n\theta)\cdot(\cos\theta)^m (-\sin\theta) d\theta =$

canvi variable
$x = \cos\theta$
$x = 1 \to \theta = 0$
$x = -1 \to \theta = -\pi$
$dx = -\sin\theta\, d\theta$

funció imparella en interval simètric

$= \int_{-\pi}^{0} \frac{-1}{\sin\theta} \cdot \cos(n\theta)(\cos\theta)^m \cdot (+\sin\theta) d\theta \underset{\uparrow}{=} 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta)(\cos(\theta))^m\, d\theta = 0$

$-\cos(n\theta)(\cos\theta)^m$ f. imparella per ser $\cos(\theta)$ imparella.

$\Rightarrow T_n(x)$ amb el producte $< u, v > = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x) v(x)\, dx$ són una família de polinomis ortogonals.

0,5

5. [1 punt] En els mètodes quasi-Newton *inversos* per a resoldre sistemes no lineals $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ s'actualitza la *inversa* de l'aproximació secant de la matriu jacobiana. Considereu un mètode quasi-Newton invers amb un esquema d'actualització de la forma

$$(\mathbf{S}^k)^{-1} = \underbrace{\left[\mathbf{I} - \frac{(\Delta\mathbf{x})\mathbf{v}^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right]}_{A} (\mathbf{S}^{k-1})^{-1} \underbrace{\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right]}_{B} + \frac{\Delta\mathbf{x}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}} \qquad (3)$$

on $\Delta\mathbf{x} := \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ (diferència de les dues aproximacions més recents)

0,5 *a)* Té l'esquema (3) la propietat de *simetria hereditària* (és a dir, $(\mathbf{S}^{k-1})^{-1}$ simètrica $\Rightarrow (\mathbf{S}^k)^{-1}$ simètrica)?

Si $\Delta x = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ tenim:

$$(S^k)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \Delta x^i v^i} \begin{pmatrix} 1-\Delta x^1 v_1 & \Delta x^1 v_2 & \dots & \Delta x^1 v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta x^n v_1 & \Delta x^n v_2 & \dots & 1-\Delta x^n v_n \end{pmatrix}}_{A} \underset{\uparrow \text{ simètrica}}{S^{k-1}} \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \Delta x^i v_i} \begin{pmatrix} 1-v_1\Delta x^1 & v_1\Delta x^2 & \dots & v_1\Delta x^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_n\Delta x^1 & v_n\Delta x^2 & \dots & 1-v_n\Delta x^n \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} (\Delta x^1)^2 & \Delta x^1\Delta x^2 & \dots & \Delta x^1\Delta x^n \\ \Delta x^2\Delta x^1 & (\Delta x^2)^2 & \dots & \Delta x^2\Delta x^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta x^n\Delta x^1 & \Delta x^n\Delta x^2 & \dots & (\Delta x^n)^2 \end{pmatrix}}_{\text{simètrica}}$$

simètrica ja que $A^T = B$, i S^{k-1} simètrica.

$\Longrightarrow$ Donada $(S^{k-1})^{-1}$ simètrica $\Rightarrow (S^k)^{-1}$ simètrica.

0 *b)* Proposa raonadament una expressió pel vector $\mathbf{v}$ de manera que $(\mathbf{S}^k)^{-1}$ verifiqui l'equació quasi-Newton (és a dir, la condició de matriu secant)

0.5 | 0.5

CÀLCUL NUMÈRIC (GM)

Examen final (part II)

(Durada: 1h)

12 de gener de 2015

Cognoms: Nom:

6. [1.5 punts] L'evolució temporal de la població es pot modelitzar mitjançant una llei

$$p(t) = \frac{L}{1 + c\exp(r(t - t_0))} \tag{4}$$

que depèn de tres paràmetres L, r i c (t_0 és un instant inicial fixat).

Es vol emprar la llei (4) per aproximar les dades de la taula

	0	1	2	3	4
t_i	1910	1930	1950	1970	1990
p_i	19.99	23.68	28.12	33.96	39.43

que corresponen a la població d'Espanya (en milions d'habitants) en diferents anys.

0.5 *a)* En una primera anàlisi, se suposa que el paràmetre L és conegut. Transforma la llei (4) per poder realitzar un ajust lineal de mínims quadrats. Detalla el procediment que cal seguir per realitzar l'ajust.

0 *b)* Fes servir les dades de la taula per aproximar la població, suposant $L = 60$ i fent servir com a instant inicial $t_0 = 1900$. Escriu el sistema d'equacions que has resolt per trobar els coeficients i la solució obtinguda. Estima la població en l'any 2100 utilizant el resultat de l'apartat anterior.

0 *c)* Si L no fos conegut, es pot fer un ajust per mínims quadrats? En què canvia l'anàlisi?

7. [1.5 punts] Volem construir una quadratura per aproximar integrals en l'interval $[0, 1]$ que tingui el màxim ordre possible.

Si només coneixem el valor de la funció en un punt x_0,

0.5 *a)* Quin pes s'hauria d'emprar? Quin és l'ordre de la quadratura obtinguda?

Per a millorar l'aproximació, se'ns permet avaluar la funció en un altre punt x_1 que triarem nosaltres.

0.5 *b)* Determina la posició x_1 i els pesos w_0 i w_1 (en funció de x_0) que defineixen la millor quadratura possible. Quin és l'ordre de la quadratura que s'obté en aquest cas?

0 *c)* Particularitza la quadratura obtinguda en l'apartat anterior pel cas $x_0 = 0.2$ i fes-la servir per aproximar la integral $I = \int_0^1 \exp(x^2)\,dx$.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Càlcul Numèric

Estudiant/a:

Data: 12/01/2015

6) $p(t) = \dfrac{L}{1 + c\exp(r(t-t_0))}$ L, r, c paràmetres

$t_0 \equiv$ instant inicial

Dades: t_i $i = 0, \dots, 4$.

$\langle u, v\rangle = \sum_{i=0}^{n}$

a) L conegut

Volem tenir $p(t) = c \cdot \Psi_0(t) + r \cdot \Psi_1(t)$

En el nostre cas $n = 4$.

Com no he sapigut linealitzar, ho faré amb la funció no lineal.

Per aproximar l'ajust no lineal en mínims quadrats hem d'imposar:

$$\frac{\partial \langle p(t) - p_i, p(t) - p_i\rangle}{\partial c} = \frac{\partial \langle p(t) - p_i, p(t) - p_i\rangle}{\partial r} = 0.$$

$$\frac{\partial \langle p(t), p(t)\rangle}{\partial c} = \frac{\partial \left(\sum_{i=0}^{4} p^2(t_i)\right)}{\partial c} = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{4} \frac{L^2}{(1+ce^{r(t_i-t_0)})^2}\right)}{\partial c} =$$

$$= \sum_{i=0}^{4} \frac{-L^2 \cdot 2(1+ce^{r(t_i-t_0)}) \cdot e^{r(t_i-t_0)}}{(1+ce^{r(t_i-t_0)})^4}$$

$$\frac{\partial \langle p(t), p_i\rangle}{\partial c} = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{4} \frac{p_i L}{1+ce^{r(t_i-t_0)}}\right)}{\partial c} = \sum_{i=0}^{4} \frac{-p_i L \, e^{r(t_i-t_0)}}{(1+ce^{r(t_i-t_0)})^2}$$

$$\frac{\partial \langle p(t), p(t)\rangle}{\partial r} = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{4} \frac{L^2}{(1+ce^{r(t_i-t_0)})^2}\right)}{\partial r} =$$

$$= \sum_{i=0}^{4} \frac{-L^2 \cdot 2(1+ce^{r(t_i-t_0)}) \cdot c \cdot (t_i - t_0) e^{r(t_i-t_0)}}{(1+ce^{r(t_i-t_0)})^4}.$$

$$\frac{\partial \langle p(t), p_i\rangle}{\partial r} = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{4} \frac{p_i L}{1+ce^{r(t_i-t_0)}}\right)}{\partial r} =$$

$$= \frac{-p_i L \cdot c(t_i - t_0) \cdot e^{r(t_i-t_0)}}{(1+ce^{r(t_i-t_0)})^2}$$

OBS. $\dfrac{\partial \langle p_i, p_i\rangle}{\partial c} = \dfrac{\partial \langle p_i, p_i\rangle}{\partial r} = 0.$

Fabricat Ecològicament

$< p(t)-p_i , p(t)-p_i > = < p(t_2), p(t) > -2 < p(t), p_i > + < p_i, p_i >$.

Tenim el sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{-L^2\, 2\, \cancel{(1+c\, e^{r(t_i-t_0)})}\cdot e^{r(t_i-t_0)}}{(1+c\, e^{r(t_i-t_0)})^3} + \frac{2\, p_i L\, e^{r(t_i-t_0)}}{(1+e^{r(t_i-t_0)})^2} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{-L^2\cdot 2\, c\,(t_i-t_0)\, e^{r(t_i-t_0)}}{(1+c\, e^{r(t_i-t_0)})^3} + \frac{2\, p_i\, L\,(t_i-t_0)c\, e^{r(t_i-t_0)}}{(1+c e^{r(t_i-t_0)})^2} = 0. \end{cases}$$

✓

b) En aquest cas, per trobar r i c, hem de resoldre el sistema no lineal, utilitzarem Newton-Rapshon.

Solució ?

c) Si L no fos conegut, podríem fer un ajust per mínims quadrats però aquest cop tindríem

$$p = L\cdot \Psi_0(x) + c\cdot \Psi_1(x) + r\cdot \Psi_2(x)$$ ✗

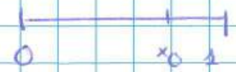
Aproximaríem per polinomis de grau major.

Si no coneixem L, el problema no es pot realitzar

Assignatura: càlcul numèric

Estudiant/a:

Data: 12/01/2014.

7) a)  Només coneixem $f(x_0)$.

$L_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$

Aleshores, Aproximem $f(x) \simeq p_n(x) + R_n(x)$ on $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_i(x)$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq w_0 \cdot f(x_0)$$ Aleshores, si prenem $L_0(x) = 1$,

$$w_0 = \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow \boxed{w_0 = 1}$$

Ordre de la quadratura:

$$E_0 = \int_0^1 R_0(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f'(\xi)}{1!}(x-x_0)\,dx = \int_0^1 f'(\xi)\cdot(x-x_0)\,dx =$$

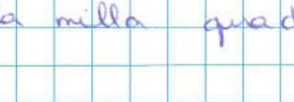
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{L^n(x)}_{=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$$

$$= \frac{f'(\xi)}{1!}\int_0^1 x - x_0\,dx = f'(\xi)\cdot\frac{1}{2} - f'(\xi)\cdot x_0 = f'(\xi)\left(\frac{1}{2} - x_0\right)$$

$$\Rightarrow E_0 = C\, f^{1)}(\xi) \text{ on } C = \left(\frac{1}{2} - x_0\right) \Rightarrow \text{Ordre } 0.$$

si $x_0 = 1/2$, té ordre 1

b) Ara podem escollir un altre x_1. Determinar x_1, w_0, w_1 per a tenir la millor quadratura possible



En aquest cas tenim una quadratura de Newton-Cotes (Trapezi) ?

Demanem ordre 2: perquè tenim 3 incògnites.

$$1 = \int_0^1 1 = w_0 + w_1$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 x = w_0 \cdot \underset{\text{fixat.}}{x_0} + w_1 x_1$$

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 = w_0 \cdot \underset{\text{fixat.}}{x_0^2} + w_1 x_1^2$$

sist eq. no lineals.

$$w_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2} - w_0 x_0$$

Tenim $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot w_i$ on $w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$

Ara $w_0 = \int_0^1 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\,dx = \frac{1}{(x_0-x_1)} \cdot \left(\frac{1}{2} - x_1\right)$

$$w_1 = \int_0^1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\,dx = \frac{1}{(x_1-x_0)} \cdot \left(\frac{1}{2} - x_0\right)$$

Ens falta trobar el x_1 òptim segons x_0.

Per a això minimitzarem l'error:

$$\min_{x_1,\xi} E_n = \min_{x_1,\xi} \int \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_1)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow$$

De fet, podem fer que la quadratura sigui d'ordre 2 imposant

$$\int_0^1 (x-x_0)(x-x_1)\,dx = 0$$