3 | 1.5 | 2

**CÀLCUL NUMÈRIC (GM)** **Examen parcial (1a PART)**

**(Durada: 1h30min)** **10 de novembre de 2014**

**Cognoms:** **Nom:**

1. [3 punts] Es vol aproximar una funció $f(x)$, amb expressió analítica coneguda, per un polinomi de grau $m$ amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar continu a l'interval $[-1, 1]$.

√0.5 *a)* Proposar detalladament[1] una metodologia per a calcular el polinomi aproximant fent servir la base natural de polinomis.

Lo ideal es usar una aproximación por mínimos cuadrados para resolver las ecuaciones normales. Queremos minimizar $\|f(x) - \sum_{i=0}^{m} c_i p_i(x)\|$, donde $p_i(x) = x^i$. Para hallar los $c_i$ óptimos, planteamos las ec. normales con el producto escalar dado por $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$.

$\int_{-1}^{1} x^{r+s}\, dx = \frac{x^{r+s+1}}{r+s+1} = \frac{1-(-1)^{r+s+1}}{r+s+1} = \frac{1+(-1)^{r+s}}{r+s+1}$

En la posición $a_{rs}$ de la matriz $A$ tendremos $\int_{-1}^{1} x^{r-1} x^{s-1}\, dx = \frac{1+(-1)^{r+s}}{r+s-1}$, con $1 \leq r,s \leq m+1$. Resolvemos ahora el sistema

$A\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, p_0\rangle \\ \langle f, p_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f, p_m\rangle \end{pmatrix}$, donde $\langle f, p_i\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) p_i(x)\, dx$, y con estas $c_i$ tenemos el polinomio $\sum_{i=0}^{m} c_i \overset{x^i}{p_i(x)}$ que es el mejor aproximand

√0.5 *b)* Proposar detalladament una metodologia eficient per a calcular el polinomi aproximant fent servir la base de polinomis ortogonals de Legendre $\{P_i(x)\}_{i=0}^{m}$.

Aquí hacemos lo mismo pero usando que los polinomios de Legendre son ortogonales, con lo que en las ecuaciones normales nos queda una matriz diagonal. Si $L_i$ es el i-ésimo polinomio de Legendre, el mejor aproximando posible es $\sum_{i=0}^{m} \frac{\langle f, L_i\rangle}{\langle L_i, L_i\rangle} L_i(x)$, donde nuevamente $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$.

[1] L'algorisme proposat ha de ser prou detallat i tenir la informació necessària per que algú sense coneixements de mètodes numèrics pogués calcular el polinomi.

✓0.5

*c)* Suposem ara que es vol fer servir la base de polinomis ortogonals de Txebixov. Proposar detalladament una metodologia per a calcular el polinomi aproximant. S'obtindria el mateix polinomi que amb els mètodes proposats als apartats anteriors? Per què?

En este caso, si bien la idea es la misma que en el apartado anterior (en las ecuaciones normales se obtiene una matriz diagonal), hay que tener en cuenta que el producto escalar de los polinomios de Txebixov es $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) g(x)$. ✓

De esta manera, si $T_i(x) = \cancel{arc}\cos(i \cos x)$ es el i-ésimo polinomio de Txebixov, el mejor aproximando será $\cancel{\sum_1} \sum_{i=0}^{m} \frac{\langle f, T_i \rangle}{\langle T_i, T_i \rangle} T_i(x)$; no se obtendría de entrada el mismo polinomio que antes pues estamos usando un producto escalar distinto, donde se le da un "peso" mayor a los extremos del intervalo que a los puntos centrales.

✓0.5

*d)* Suposem ara que es vol aproximar la funció $f(x)$ a un altre interval $[a, b]$ donat. Proposar una base de polinomis ortogonals a l'interval $[a, b]$ que es pugui calcular a partir de la base de Legendre. Justificar que la base proposada és ortogonal.

Se trata de aplicar una transformación lineal para convertir el intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[a, b]$. Si consideramos los polinomios $P_n(x) = L_n\left(\frac{2}{b-a}x + \frac{-b-a}{b-a}\right)$, donde $L_n$ es el n-ésimo polinomio de Legendre. Así

$P_n(a) = L_n\left(\frac{2a-b-a}{b-a}\right) = L_n(-1)$

$P_n(b) = L_n\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = L_n(1)$ $\quad L_n\left(\frac{2}{b-a}x + \frac{-b-a}{b-a}\right)$

Para ver son ortogonales, hallamos $\int_a^b P_n(x) P_m(x)\, dx$. Si hacemos el cambio de variable $\frac{2}{b-a}x + \frac{-b-a}{b-a} = t$, tendremos

$\int_a^b P_n(x) P_m(x)\, dx = \int_{-1}^{1} L_n(t) L_m(t)\, dt = 0$ por hipótesis, pues sabemos que $L_n$ y $L_m$ son ortogonales en $[-1, 1]$.

$n \neq m$

1,5

**2.** [1.5 punts] Per al disseny d'una muntanya russa es disposa de l'alçada de la muntanya a determinats punts del recorregut, $\{l_k, h_k\}_{k=0}^{n}$. A partir d'aquestes alçades es vol definir l'alçada a tot el recorregut $h(l)$ on, òbviament, $h(l)$ ha de ser una funció suau, amb derivada (pendent) i derivada segona (curvatura) contínues. A més, evidentment, es requereix que a l'inici i al final el pendent sigui zero.

0,8

*a)* Proposar raonadament un mètode per a definir la funció alçada $h(l)$ donades les dades $\{l_k, h_k\}_{k=0}^{n}$.

En este caso no podemos usar el spline natural pues al imponer derivadas 0 en los extremos y los valores en $(n+1)$ puntos ya no nos quedan más grados de libertad. Así y todo, vimos en clase que fijadas las derivadas en los extremos, la función con menor curvatura que pasa por los $(n+1)$ puntos es el spline cúbico $C^2$ (con menor curvatura en el sentido de minimizar el funcional $\int_a^b |f''(x)|^2 dx$. Por tanto, mi método es usar como aproximando el spline cúbico $C^2$ con derivadas primeras nulas en los extremos.

0,7

*b)* Explicar breument com es faria el càlcul de la funció aproximant.

Para hallar el spline cúbico $C^2$ hallo las derivadas en los puntos intermedios imponiendo la continuidad de las segundas derivadas. Es decir, si $H_i = l_{k+1} - l_k$, $T_i = h_{k+1} - h_k$, yo tengo que: $S_i(x) = (H_i(s'_i + s'_{i+1}) - 2T_i)\left(\frac{x-x_i}{H_i}\right)^3 + (3T_i - H_i(2s'_i + s'_{i+1}))\left(\frac{x-x_i}{H_i}\right)^2 + s'_i(x-x_i) + h_i$. Lo que hago es imponer que $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ $\forall i = 0, \dots, n-2$. Así obtendré $n-1$ ecuaciones y tengo también como incógnitas $n-1$, las derivadas $s'_1, \dots, s'_{n-1}$, pues $s'_0 = s'_n = 0$.

0'jo...

Si planteamos el sistema nos quedaría una matriz tridiagonal Toeplitz con 2's en la diagonal de $(n-1)\times(n-1)$ de una forma similar a

$\lambda_i, \mu_i$ distintos

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_2 & & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & & \lambda_{n-2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ s'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{pmatrix}$$

, donde $\lambda_i, \mu_i, e_i$ tienen una expresión más o menos complic. en función de las $H_i, T_i$.

Hallaría $s'_1, \dots, s'_{n-1}$ y sustituiría después en las expresiones de $S_i(x)$, teniendo así las $n$ cúbicas que forman mi spline.

√0.5

*e)* Suposem ara que es vol aproximar la funció per un spline $C^2$ cúbic amb $m+1$ punts base equiespaiats a l'interval $[a, b]$. Quina és la dimensió de l'espai d'splines $C^2$ cúbics? I la de l'espai d'splines naturals? Justifica la teva resposta.

- De entrada tenemos $4m$ grados de libertad ($m$ cúbicas); hay que imponer 3 condiciones de contorno en cada uno de los $(m-1)$ puntos intermedios, con lo que me queda que la dimensión de la base será $m+3$: $(m+1)$ grados de libertad se usan para fijar los valores en los puntos dados, y quedan 2 grados adicionales (generalmente para fijar las derivadas o las curvaturas en los extremos). Dimensión $m+3$.
- El spline natural se caracteriza por tener curvatura (derivada segunda) nula en los extremos, con lo que eso fija dos condiciones más, por lo que la dimensión ahora es de $m+1$ (se suelen usar los grados de libertad para fijar los valores en los puntos dados).

Nótese que las bases en los dos casos son no locales, pero con amortiguamiento rápido.

√0.5 *f)* Proposar una metodologia per al càlcul de l'*spline natural* que s'ajusta a la funció amb el criteri de mínims quadrats amb el producte escalar continu.

De la función conocemos su expresión analítica, así que la podemos evaluar pongamos por caso en $m+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a,b]$. En vez de gastar los $m+1$ grados de libertad fijando los puntos, lo que podemos hacer es considerar que queremos encontrar el mejor aproximante del tipo $\sum_{i=0}^{m} c_i \phi_i(x)$, donde $\{\phi_i\}_{0\le i\le m}$ es una base del spline natural. Por tanto, para minimizar $\|f(x) - \sum_{i=0}^{m} c_i \phi_i(x)\|$ lo que hacemos es plantear las ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_0,\phi_0\rangle & \langle \phi_0,\phi_1\rangle & \cdots & \langle \phi_0,\phi_m\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle \phi_m,\phi_0\rangle & \langle \phi_m,\phi_1\rangle & \cdots & \langle \phi_m,\phi_m\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f,\phi_0\rangle \\ \vdots \\ \langle f,\phi_m\rangle \end{pmatrix}$$

, donde $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

Nótese que para las $\phi$ no hay una expresión cerrada en todo el intervalo, sino que en cada uno de los $m$ tramos es una cúbica, con lo que habrá que descomponer la integral en $m$ integrales.

Tener en cuenta que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (en los puntos base), es $C^2$ y tiene curvatura 0 en los extremos. Así hallaríamos las $\phi_i$ y luego los $c_i$ se encuentran resolviendo el sistema de antes.

**3.** [2 punts] L'evolució en el temps de la concentració amb que un dispositiu subministra un medicament per via intravenosa a un pacient es pot aproximar per una funció de la forma

$$c(t) = Cte^{-\alpha t}$$

amb $C$ i $\alpha$ constants positives. Per al calibrat dels paràmetres $C$ i $\alpha$ es disposa de mesures experimentals $\{t_k, c_k\}_{k=0}^{n}$.

*a)* Plantejar el problema de mínims quadrats no lineal per al calibrat dels paràmetres $C$ i $\alpha$ i deduir el sistema d'equacions no lineal a resoldre.

*b)* Reduir el problema a la resolució d'una equació escalar amb una incògnita.

*c)* Proposar raonadament un mètode numèric per a la resolució del sistema d'equacions no lineals plantejat a *a)* i per a la resolució del problema de zeros de funcions plantejat a *b)*. Quina de les dues estratègies per a resoldre el problema no lineal aconsellaries? Per què?

2

1 a) Como no tenemos una fórmula cerrada de la expresión a aproximar, hemos de usar un producto escalar discreto, y queremos minimizar entonces $\| Cte^{-\alpha t} - f \|^2$, donde la norma depende de dos incógnitas, $C$ y $\alpha$. [Como estamos en $\mathbb{R}$, la $\|\cdot\|^2$ no es más que elevar al cuadrado y] la norma es la subordinada a un producto escalar discreto (f se conoce únicamente en (n+1) puntos)

$$\min \sum_{k=0}^{n} (Ct_k e^{-\alpha t_k} - c_k)(Ct_k e^{-\alpha t_k} - c_k) = \min \sum_{k=0}^{n} (Ct_k e^{-\alpha t_k} - c_k)^2$$

Hacemos la parcial respecto de $C$ y $\alpha$ y las igualamos a 0.

$$\sum_{k=0}^{n} \cancel{2}(Ct_k e^{-\alpha t_k} - c_k) t_k e^{-\alpha t_k} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cancel{2}(Ct_k e^{-\alpha t_k} - c_k) C t_k e^{-\alpha t_k}(-t_k) = 0 \quad (2)$$

sistema no lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

(ver NOTA al final)

0,5 b) De (1) podemos despejar $C \Rightarrow C = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} c_k t_k e^{-\alpha t_k}}{\sum_{k=0}^{n} t_k^2 e^{-2\alpha t_k}}$ (el

(es pot continuar darrera)

denominador es 0 con que una de las $t_k$ sea distinta de 0, hay que asumir que tenemos al menos 2 puntos)

Ahora sustituimos $C$ en (2)

$$\sum_{k=0}^{n} \left[ \left( \frac{\sum_{i=0}^{n} c_i t_i e^{-\alpha t_i}}{\sum_{i=0}^{n} t_i^2 e^{-2\alpha t_i}} t_k e^{-\alpha t_k} - c_k \right) \frac{\sum_{i=0}^{n} c_i t_i e^{-\alpha t_i}}{\sum_{i=0}^{n} c_i^2 e^{-2\alpha t_i}} t_k e^{-\alpha t_k}(-t_k) \right] = 0$$

c) Como conocemos una expresión analítica para las dos funciones que componen mi sistema, estoy en una 0,5 situación en la que me interesa $\begin{pmatrix} f_1(C,\alpha) \\ f_2(C,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puedo hallar simplemente derivando $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial C} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial C} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$ y usar por tanto el método de Newton-Raphson con derivación analítica que en principio tendrá convergencia cuadrática. Partiendo de una aproximación inicial que escogeremos para que sea más o menos buena en vista de los datos, iteramos

```
x⁰ = aprox. inicial
error = inf
while (error > tol) {
    x^(k+1) = x^k - J^(-1)(x_k) f(x_k)
    error = ||x^(k+1) - x^k|| / ||x^(k+1)||
}
```

Para la resolución del problema de ceros planteado en b), tenemos una ecuación con una incógnita así que lo razonable es pensar en usar el método de Newton. Calcularíamos la derivada $f'$ e iteramos como antes;

```
x⁰ = aprox. inicial
error = inf
while (error > tol) {
    x^(k+1) = x^k - f(x^k) / f'(x^k)
    error = ||x^(k+1) - x^k|| / ||x^(k+1)||
}
```

De entrada ambas estrategias serían bastante buenas pues se trata de problemas en 2 y 1 variables, respectivamente, donde tenemos expresiones cerradas tanto para la función como para las derivadas. Yo me inclinaría por resolver la ecuación, pues siempre es más sencillo y más "barato" computacionalmente tener una sola ecuación que un sistema; así y todo, la diferencia en este caso habría de ser despreciable.

**NOTA**: En vigor habría que hacer la derivada segunda para cerciorarse de que el extremo hallado es un ~~[illegible]~~ mínimo del sistema (ver la def + de la matriz). En todo caso, lo esperable es que sea mínimo pues está claro que superiormente no está acotada. En todo caso, para los $(\alpha, C)$ obtenidos podríamos hacer la comprobación rutinaria.

3.1

# CÀLCUL NUMÈRIC (GM)

**Examen parcial (2a PART)**

**(Durada: 1h)**

**10 de novembre de 2014**

**Cogn**

**4.** [3.5 punts] Es vol fer servir el mètode de Newton

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

per trobar les arrels de la funció $f(x) = 3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 32x^2 + 12x - 32$.

*a)* Feu servir el mètode de Newton prenent com a aproximació inicial $x^0 = 3$. Té la convergència esperada? Per què? Quantes iteracions es necessiten per tenir la solució amb, com a mínim, 5 xifres significatives correctes? Justifiqueu la resposta.
Escriviu els resultats obtinguts en les dues primeres i les dues darreres iteracions que heu calculat.

*b)* Repetiu l'apartat anterior, prenent com a aproximació inicial $x^0 = 1$. S'observa alguna diferència en el comportament del mètode? A què és deguda?

Per millorar el comportament del mètode, es proposa emprar la següent modificació:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{2f(x^k)}{f'(x^k)}$$

*c)* Feu servir aquest mètode, prenent com a aproximació inicial $x^0 = 1$ i mostreu els resultats obtinguts en una taula. Com és la convergència en aquest cas?

*d)* Feu una anàlisi de la convergència asimptòtica de l'esquema iteratiu proposat, que permeti explicar el seu comportament.

*e)* Es pot fer servir aquest mètode per determinar l'arrel trobada en l'apartat *a*)? Per què?

$r^k = \frac{\|r^k - r^{k-1}\|}{\|r^k\|}$ $k \geq 1$

Notemos que $f(x) = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(3x-8)$

¿Cómo lo ves?

a) El método de Newton ~~ha de tener~~ tiene convergencia cuadrática hacia la raíz $\frac{8}{3}$, pues es una raíz simple y vimos en teoría que Newton converge cuadráticamente hacia raíces simples.
Para tener 5 cifras significativas hacen falta 4 iteraciones:
$x^0 = 3$; $x^1 = 2{,}78788$; $x^2 = 2{,}68967$; $x^3 = 2{,}66770$; $x^4 = \underline{2{,}66667}$
$x^5 = x^4$ (hasta la 5ª cifra) — sólo 3 decimales OK. — ya tiene 5 decimales OK.
En rigor, haré 5 iteraciones puestas la 4ª, $r^4 = \frac{\|x^4 - x^3\|}{\|x^4\|} = 0{,}00038 > 10^{-5}$, aunque en realidad comparando con la sol. exacta ya estoy.
$r_1 \approx 10^{-1}$, $r_2 \approx 10^{-2}$, $r_3 \approx 10^{-3}$

b) En este caso convergemos hacia la solución $\sqrt{2}$, que como se observa de nuestra factorización del polinomio es una raíz doble, con lo que la convergencia será lineal y no cuadrática

Aquí observamos que la convergencia es mucho más lenta:
$r_1 = 0{,}2$, $r_2 = 0{,}1$ $r_3 = 0{,}04$, $r_4 = 0{,}02 \ldots$ como se corresponde con una conv. lineal.

$\sqrt{2} = 1{,}41421 \ldots$

Tras 16 iteraciones tengo correcto el 5° decimal:

$x^{16} = 1{,}41421$ 5 cifras correctas : $r \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$ ($\rightarrow$ Nota final)

Para tener correcto el 4° decimal necesito p. ej. 13 iteraciones

$x^{13} = 1{,}41417$

$x^{14} = 1{,}41419$

$x^{15} = 1{,}41420$

$x^{16} = 1{,}41421$

$x^1 = 1{,}21739$, $x^2 = 1{,}31648 \ldots$

c) En este caso la convergencia es mucho más rápida y en 3 iteraciones ya tengo 5 cifras significativas correctas. $x_0 = 1$

$x_1 = 1{,}43478\ldots$ $r_1 = 0{,}30303$

$x_2 = 1{,}41419\ldots$ $r_2 = 0{,}0456$

$x_3 = 1{,}41421\ldots$ $r_3 = 0{,}000016$ (no es menor que $10^{-5}$ pero ya estoy, en realidad haría otra iteración)

$(x_4 = 1{,}41421\ldots$ $r_4 = 0$ $)$

consistencia ?

d) $\phi(x) = x - \dfrac{2f(x)}{f'(x)}$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{2f'(x)^2 - 2f''(x)f(x)}{f'(x)^2} = \frac{2f''(x)f(x)}{f'(x)^2} - 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 32x^3 - 36x^2 + 64x + 12 = (x^2-2)(15x^2 - 32x - 6)$$
$$f''(x) = 60x^3 - 96x^2 - 72x + 64$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{2f''(x)\cancel{(x-\sqrt{2})^2}(x+\sqrt{2})^2(3x-8)}{\cancel{(x-\sqrt{2})^2}(x+\sqrt{2})^2(15x^2-32x-6)^2} = 1 \rightarrow \underline{\phi'(\sqrt{2}) = 0}$$

evalué con Matlab en $\sqrt{2}$

$$\phi''(x) = \frac{2f'(x)^2[f'''(x)f(x) + f''(x)f'(x)] - 4f''(x)f(x)f'(x)f''(x)}{f'(x)^4} =$$

He evaluado con Matlab y no da 0.

$$= \frac{2f'(x)f(x)f'''(x) + 2f'(x)^2 f''(x) - 4f''(x)^2 f(x)}{f'(x)^3}$$

Convergencia de orden 2 o mayor.

(Me dijo Sonia que no habría que mirar si era 2 o 3 haciendo L'Hôpital en esa clase)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a: ÓSCAR RIVERO SALGADO

Data:

e) No podemos usar este método pues no converge en este caso.

Eso es porque $\phi'(x)\Big|_{x=8/3} = \frac{2f''(x)\cancel{f(x)}}{f'(x)^2} - 1$, y para garantizar la convergencia habríamos necesitado que $|\phi'(\alpha)| < 1$, y no es el caso. De hecho, podemos comprobar que efectivamente no llegamos a la solución (no converge). Para raíz simple este nuevo método no garantiza convergencia

RECAPITULAMOS

a) El método de Newton converge en unas 4 iteraciones (serán 5 si aplicamos que $\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} < 10^{-5}$ y 4 si $\frac{\|x^k - 8/3\|}{\|x^k\|} < 10^{-5}$. Es una raíz simple luego la conv. es la esperada. En la solución hemos escrito las iteraciones.

b) Ahora la raíz es ~~simple~~ doble, con lo que la conv. es lineal siendo el FAC 1/2. Para tener 5 decimales correctos hemos necesitado de 16 iteraciones.

c) La convergencia en este caso es más rápida

De hecho $x_0 = 1$
$x_1 = 1,43478$
$x_2 = 1,41419$
$x_3 = 1,41421$

(más rápida de hecho que en a) ya vista de los errores

$r^1 = 0,303$
$r^2 = 0,0456$
$r^3 = 0,000016$

bien parecería cúbica)

d) Haciendo análisis que $\phi(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x)}$ vemos que la conv. cuadrática es al menos de orden 2. (si evalué bien con Matlab exactamente orden 2)

e) No es válido pues $|\phi'(x)|\Big|_{x=8/3} \geq 1$, y de hecho no hay convergencia

<u>NOTA</u>: Hemos asumido que tenemos 5 cifras sign. correctas cuando $\|x^k - sol\| < 10^{-5}/2$, aunque generalmente tendríamos que tomar $\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|}$ pues no sabemos la solución.

De todos modos, en rigor para responder a la pregunta "5 cifras sign. correctas" puede pasar que teniendo el error mayor que $\frac{10^{-5}}{2}$ y menor que $10^{-5}$ ya ~~no~~ coinciden, ej. 0,7 -1,3.

Es por ello que quizás 4 iteraciones en a) bastasen, pero mejor hacer 5

2.5 | 1.5 | 1 | 1 | 0.6 (1)

**CÀLCUL NUMÈRIC (GM)** — **Examen final (part I)**

(Durada: 2h 30min) — **12 de gener de 2015**

2.5

1. [2.5 punts] Un procés estacionari de difusió-convecció-reacció es pot modelitzar amb l'equació diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) + u(x) = f(x) \quad , \quad a < x < b \tag{1}$$

amb les condicions de contorn

$$u(a) = \alpha \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) = \beta \tag{2}$$

A les equacions (1) i (2), són dades els valors de $a$, $b$, $\alpha$ i $\beta$ i la funció $f(x)$ (terme font), i és incògnita la funció $u(x)$. Estem interessats en resoldre aquest problema amb el mètode dels elements finits (MEF).

1 *a)* Dedueix la forma feble del problema. Discretitza la forma feble obtinguda utilitzant l'aproximació

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j N_j(x)$$

Indica clarament l'expressió de la matriu $\mathbf{A}$ i del vector $\mathbf{f}$ del sistema d'equacions $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ resultant.

NOTACIÓN $\frac{d^2u}{dx^2} = u''$ $\quad \frac{du}{dx} = u'$

Para la forma débil impongo que $\begin{cases} \int_a^b (u'' - u' - u + f)\, v\,dx = 0 \\ u(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases}$ para toda función $v$ tq $v(a) = 0$.

Ahora bien $\int_a^b u'' \cdot v = \overbrace{u'(b)}^{\beta} v(b) - u'(a) \underbrace{\cancel{v(a)}}_{0} - \int_a^b u' \cdot v'$

Por tanto, nos quedará que: $\begin{cases} \beta v(b) - \int_a^b u' v' - \int_a^b u' v - \int_a^b u v + \int_a^b f v = 0 \\ u(a) = \alpha \end{cases}$

$u'(b) = \beta$ (ya la he impuesto) ✓

con $v$ tq $v(a) = 0$.

Suponemos ahora que la solución $u$ es de la forma

$u(x) \simeq u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j N_j(x) = \underbrace{u_0 N_0(x)}_{\psi(x)} + \sum_{j=1}^{n} u_j N_j(x)$

$\psi(x) = u_0 N_0 = \alpha N_0(x)$

Por tanto, si ahora sustituimos

$\beta v(b) - \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} u_j N_j'(x)\right) v' - \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} u_j N_j'(x)\right) v - \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} u_j N_j\right) v$

$+ \int_a^b f v = 0$

$$\beta v(b) - \int_a^b \psi'(x) v' - \int_a^b \psi'(x) v - \int_a^b \psi(x) v = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n u_j N_j'(x)\right) v'$$
$$+ \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n u_j N_j'(x)\right) v + \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n u_j N_j(x)\right) v$$

Ahora imponemos que esto se cumpla para todos los elementos de la base de splines tq $v(a)=0$, es decir, para todos menos el primero, con lo que obtendremos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas (las $u_j$)

Sea $v = N_i(x) \quad i = 1, \dots, n$.

Entonces quedará

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n u_j N_j'(x)\right) N_i'(x) + \int_a^b \left(\sum u_j N_j'(x)\right) N_i(x) + \int_a^b \left(\sum u_j N_j(x)\right) N_i(x) =$$
$$= \beta N_i(b) - \int_a^b \psi'(x) N_i'(x) - \int_a^b \psi'(x) N_i(x) - \int_a^b \psi(x) N_i(x) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{Entonces} \quad \sum_{j=1}^n u_j \cdot \overbrace{\int_a^b \left(N_i'(x) N_j'(x) + N_j'(x) N_i(x) + N_i(x) N_j(x)\right)}^{A_{ij}} =$$
$$= \underbrace{\beta N_i(b) - \int_a^b \psi'(x) N_i'(x) - \int_a^b \psi'(x) N_i(x) - \int_a^b \psi(x) N_i(x)}_{f_i}$$

De esta manera $Au = f$, donde las integrales no serán "difíciles" por la localidad del spline, que hará que por ejemplo $N_i'(x) N_j'(x)$ solo sea no nulo en 1 o 2 secciones. En general, A será tridiagonal.

El problema de contorn correspon, de fet, a una EDO de segon ordre. Es proposa ara resoldre el problema amb un mètode numèric per a EDOs de la forma $dy/dx = f(x,y)$

$$Y_{i+1} = Y_i + h(b_1k_1 + b_2k_2) \text{ amb } \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_i, Y_i) \\ k_2 = f(x_i + ch, Y_i + hak_1) \end{array} \right.$$

on $k_1$, $k_2$, $a$, $b_1$, $b_2$ i $c$ són paràmetres del mètode.

1 *b)* A quina família de mètodes pertany aquest esquema? Quin ordre pot arribar a tenir el mètode? Detalla com aplicaries el mètode a la EDO (1) i com tractaries les condicions de contorn del problema.

• Familia de métodos Runge-Kutta

• En este caso, Runge Kutta de segundo orden explícito para el cual tenemos la siguiente tabla de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c & a & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} b_1 + b_2 = 1 \\ c = a \end{pmatrix}$$

2° orden cuando $cb_1 = 1/2$

Como tengo de entrada una EDO de segundo orden, tengo que empezar pasando a un sistema de EDOs de primer orden haciendo lo habitual de

$z_1 = u$ con lo que $z_1' = z_2$ y $-z_2' + z_2 + z_1 = f$.

$z_2 = u'$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}.$$

Sé además $z_1(a) = \alpha$ y $z_2(b) = \beta$. Lo que hago entonces es aplicar el método del tret (disparo), es decir, empiezo $z_2(a) = A$ y resuelvo con esta metodología para tener $z_2(b)$. Como no será $\beta$, fijo ahora $z_2(b) = B$ y obtengo otro valor. Ahora puedo usar el método de la secante, ya que para cada valor inicial de $z_2(a)$ tengo uno de $z_2(b)$, e itero hasta tener la precisión deseada.

El problema es resol per $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 0$ i $f(x) = 1$ amb el mètode de segon ordre i s'obtenen les solucions numèriques

$$u(1) \simeq U_{10}^{h=0.1} = 0.279513, \quad u(1) \simeq U_{20}^{h=0.05} = 0.284332$$

on $U_i^{h=H}$ denota la solució al punt $x_i$ amb pas $h = H$.

0,5

c) Calcula una estimació de l'error en l'aproximació de $u(1)$ per al càlcul amb $h = 0.1$, i fes una previsió de quants intervals caldria fer servir per tenir una aproximació de $u(1)$ amb 3 xifres significatives correctes.

El error aquí lo podríamos calcular como

$$\frac{\| U_{20}^{h=0,05} - U_{10}^{h=0,1} \|}{\| U_{20}^{h=0,05} \|} = \frac{4,819 \cdot 10^{-3}}{0,284332} = 0,0169$$ ✓

· Al ser el método de orden 2, doblar el número de puntos nos conduce a dividir por 4 el error.

· Si queremos tres cifras significativas correctas, el error habría de ser menor que $0,5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4}$

$\frac{0,0169}{5 \cdot 10^{-4}} = 33,3$. Es decir, habrá que multiplicar el número de puntos por $\sqrt{33,3} \simeq 5,8 \simeq 6$. Es decir, cogiendo 60 puntos tendremos las 3 cifras significativas.

lo que hacemos es ver por qué factor se quiere mejorar el error, que es 33. Por ser cuadrático tengo que el error es del tipo $\frac{c}{m^2}$, con $m$ el número de intervalos. Así que grosso modo si $m \doteq \sqrt{33} \simeq 6$ ok. Con 10 intervalos el error lo sabemos luego aprox. 60

✓

1.5

2. [1.5 punts] Volem determinar les arrels de l'equació $2x - \exp(x-1) = 0$. A les taules següents es mostren els resultats obtinguts amb dos algoritmes iteratius, fent servir dues aproximacions inicials diferents.

**Algoritme 1**: $x^{k+1} = \dfrac{1}{2}\exp(x^k - 1)$

| $x^k$ | $r^k$ | $x^k$ | $r^k$ |
|---|---|---|---|
| 1.00000 | 1.00e + 00 | 3.0000e + 00 | 1.88e − 01 |
| 0.50000 | 6.49e − 01 | 3.6945e + 00 | 5.01e − 01 |
| 0.30327 | 2.17e − 01 | 7.3993e + 00 | 9.75e − 01 |
| 0.24910 | 5.57e − 02 | 3.0070e + 02 | 1.00e + 00 |
| 0.23597 | 1.32e − 02 | 7.2083e + 129 | NaN |
| 0.23289 | 3.08e − 03 | Inf | NaN |
| 0.23218 | 7.16e − 04 | Inf | NaN |
| 0.23201 | 1.66e − 04 | Inf | NaN |
| 0.23197 | 3.85e − 05 | Inf | NaN |
| 0.23196 | 8.94e − 06 | Inf | NaN |

**Algoritme 2**: $x^{k+1} = \ln(2x^k) + 1$

| $x^k$ | $r^k$ | $x^k$ | $r^k$ |
|---|---|---|---|
| 1.0000 | 4.09e − 01 | 3.0000 | 7.46e − 02 |
| 1.6931 | 2.37e − 01 | 2.7918 | 2.65e − 02 |
| 2.2197 | 1.09e − 01 | 2.7198 | 9.69e − 03 |
| 2.4905 | 4.42e − 02 | 2.6937 | 3.59e − 03 |
| 2.6056 | 1.70e − 02 | 2.6841 | 1.34e − 03 |
| 2.6508 | 6.44e − 03 | 2.6805 | 4.99e − 04 |
| 2.6680 | 2.42e − 03 | 2.6791 | 1.86e − 04 |
| 2.6745 | 9.04e − 04 | 2.6786 | 6.95e − 05 |
| 2.6769 | 3.38e − 04 | 2.6785 | 2.60e − 05 |
| 2.6778 | 1.26e − 04 | 2.6784 | 9.69e − 06 |

0.5

*a)* Per a cada un dels algoritmes i cada una de les aproximacions inicials, comenta el comportament del mètode: convergeixen els mètodes? En cas afirmatiu, quin és l'ordre de convergència? Explica com identifiques l'ordre de convergència.

- Para el algoritmo 1. con la aproximación inicial $x^0 = 1$ hay convergencia ya que el error tiende a 0. El orden de convergencia es 1, pues el error se va dividiendo por un factor constante a cada iteración (aproximadamente 4). ✓ Por su parte, con $x^0 = 3$ no hay convergencia ya que el error se va a infinito.
- Para el algoritmo 2. con $x^0 = 1$ tenemos nuevamente convergencia al tender a 0 el error, y es lineal pues el error se va dividiendo por un factor más o menos constante a cada iteración (es más lenta la conv., por lo que seguramente el FAC sea mayor). Con $x^0 = 3$ hay nuevamente convergencia que es lineal por el mismo motivo y el FAC está nuevamente entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ (el error se divide por un número entre 2 y 3).

*b)* Fes una anàlisi de la consistència i convergència dels mètodes. Comenta si concorden les conclusions de l'anàlisi amb el comportament de cada un dels mètodes.

Algoritmo 1. $x^{k+1} = \frac{1}{2}\exp(x^k - 1)$

$\phi(x) = \frac{1}{2}e^{x-1}$

Consistencia: $\frac{1}{2}e^{x-1} = x \Leftrightarrow e^{x-1} = 2x \Leftrightarrow 2x - e^{x-1} = 0$ OK ✓

Convergencia: $\phi'(x) = \frac{1}{2}e^{x-1}$

Para que haya convergencia habría de ser $|\phi'(\alpha)| < 1$ o lo que es lo mismo $e^{\alpha} < 2e$, o $\alpha < \ln(2e) = 1 + \ln 2 \simeq 0{,}7 + 1 = 1{,}7$. Por tanto, esto explica que en un entorno de la solución $\alpha = 0{,}23$ haya convergencia, pero por otra parte como $2{,}67 > 1{,}7$ al empezar con la aprox. inicial $x^0 = 3$ no está garantizada la conv.
El orden es 1 (para $\alpha = 0{,}23$) porque $\phi'(\alpha) \neq 0$ y el FAC es aprox. $\frac{1}{2}e^{\alpha-1} \simeq \frac{1}{2}e^{-0{,}77}$ ~ algo mayor que $\frac{1}{5}$.

Algoritmo 2 $x^{k+1} = \ln(2x^k) + 1$

$\phi(x) = \ln(2x) + 1$

Consistencia: $\ln(2x) + 1 = x \Leftrightarrow \ln 2x = x - 1 \Leftrightarrow 2x = e^{x-1}$ OK

Convergencia $\phi'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. Por tanto hay convergencia cuando $\alpha$(raíz) $> 1$; en concreto, en estos 2 casos se tiende a la raíz $2{,}67$, con lo que $\frac{1}{\alpha} < 1$!
Nuevamente la convergencia es lineal al ser $\phi'(\alpha) \neq 1$ y el FAC es $\frac{1}{\alpha}$ que efectivamente está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

---

Por tanto, hay concordancia con lo comentado en ⓐ.

3. [1 punt] Es vol aproximar una funció $f$ amb un spline cúbic $S \in \mathcal{C}^1$ amb $n+1 = 11$ punts base equiespaiats a l'interval $[0,1]$.

   *a)* Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic) si es considera com a dada el valor de la funció $f$ en els 11 punts base?

El spline $C^1$ cúbico me permite fijar el valor de la función y de la derivada en los puntos base.
Como no conozco las derivadas he de aproximarlas:

- Aproximación endavant para el primer punto $f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
- Diferencias centradas para los 9 interiores $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$
- Aprox. enrera para $x_{10}$ $f'(x_{10}) = \frac{f(x_{10}) - f(x_9)}{x_{10} - x_9}$.

(esto de las dif. centradas me da mejor aprox. que hacia adelante o hacia atrás). Una vez hecho esto, uso la expresión en derivadas para cada tramo.

$$S_i(x) = [h_i(s_i' + s_{i+1}') - 2t_i]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^3 + [3t_i - h_i(2s_i' + s_{i+1}')]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2 + s_i'(x_i - x_i) + f_i$$

(puede haber algún error, pero en todo caso una vez tenemos los valores de la función y la derivada en los puntos base ya está determinado el spline).

   *b)* Com calcularies l'spline ($\mathcal{C}^1$ cúbic amb els 11 punts base esmentats) si es considera com a dada el valor de la funció $f$ en 101 punts equiespaiats a $[0,1]$?

En este caso lo más razonable sería usar un criterio de mínimos cuadrados. Además, por ser los puntos equiespaciados sabemos que en cada tramo habrá 10 puntos.
Una opción sería entonces escribir la expresión del spline en cada sección dejando como grados de libertad los valores de la función y la derivada, de forma que en total habría 22 grados de libertad. Ahora hacemos mínimos cuadrados discretos sabiendo la sección en la que está cada punto (y por tanto el valor de f que le correspondería en función de los valores que tomasen los grados de libertad.
Imponemos luego $\min \sum_{j=0}^{100} (f(x_j) - y_j)^2$, sabiendo que saldrá un sistema de 22 ecuaciones pero muy sparse, es decir

al hacer las derivadas respecto a cada uno de los grados de libertad solo influirán los puntos que caigan en esa sección (es decir, cada valor $f_i$, $s_i$ solo me influye en las 2 secciones colindantes). De hecho, $f_1$ y $s_1$ p.ej. solo salen en la 1ª sección.

+0 - serio + claro como base pero ok

**4.** [1 punt] Els polinomis de Txebixov es poden definir com

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

per $x \in [-1,1]$ i $n \geq 0$. Es a dir, $T_n(x) = \cos(n\theta)$ amb $x = \cos(\theta)$.

*a)* Demostra que $T_n(x)$ és un polinomi de grau $n$ en $x$. Indicació: per $n \geq 2$ es verifica la identitat $\cos(n\theta) = 2\cos\big((n-1)\theta\big)\cos\theta - \cos\big((n-2)\theta\big)$.

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$

$T_n(x) = \cos(n\arccos(x)) = 2\cos((n-1)\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \cos((n-2)\arccos(x)) =$
$= 2\,T_{n-1}(x)\cdot x - T_{n-2}(x)$. ✓

Ahora simplemente inducción. Para $n=0,1$ $T_n(x)$ es polinomio de grado $n$. Como $T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, $T_n(x)$ será un polinomio de grado $n$ $\longrightarrow$ $2x\,T_{n-1}(x)$ es de grado $1+(n-1)=n$; $T_{n-2}(x)$ es de grado $n-2$

Al sumarlos no se cancela el término ppal. pues son de dist. grado $\Rightarrow$ el grado de $T_n(x)$ es $n$.

*b)* Demostra que els polinomis de Txebixov són ortogonals amb el producte escalar

$$< u, v >= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)\, dx$$

Únicamente hay que verificar que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x) = 0$ para $n \neq m$. Para ello, hago el cambio de variable

$\arccos x = t$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \cdot \cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x) =$

$= -\int_{\pi}^{0} \cos(nt)\cos(mt) = \int_{0}^{\pi} \cos(nt)\cdot\cos(mt)$

Pero $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, con lo que

$\int_0^{\pi} \cos(nt)\cdot\cos(mt) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n+m)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n-m)t)\,dt =$ ($n \neq m$)

$\frac{1}{2(n+m)}(\sin((n+m)\pi) - \sin 0) + \frac{1}{2(n-m)}(\sin((n-m)\pi) - \sin(0)) = 0$.

$0 \qquad 0$

---

0,6

5. [1 punt] En els mètodes quasi-Newton *inversos* per a resoldre sistemes no lineals $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ s'actualitza la *inversa* de l'aproximació secant de la matriu jacobiana. Considereu un mètode quasi-Newton invers amb un esquema d'actualització de la forma

$$(\mathbf{S}^k)^{-1} = \left[\mathbf{I} - \frac{(\Delta\mathbf{x})\mathbf{v}^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right](\mathbf{S}^{k-1})^{-1}\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}}\right] + \frac{\Delta\mathbf{x}(\Delta\mathbf{x})^T}{(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{v}} \qquad (3)$$

$S^{k-1}(\Delta f)(\Delta x)^T \Delta f$

on $\Delta\mathbf{x} := \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ (diferència de les dues aproximacions més recents)

Nota $(AB)^T = B^T A^T$

0,5 *a)* Té l'esquema (3) la propietat de *simetria hereditària* (és a dir, $(\mathbf{S}^{k-1})^{-1}$ simètrica $\Rightarrow (\mathbf{S}^k)^{-1}$ simètrica)?

Supongamos $(S^{k-1})^{-1}$ es simétrica. Entonces,

$(S^{k-1})^T = \left[I - \frac{v(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right]^T (S^{k-1})^{-1^T} \left[I - \frac{(\Delta x) v^T}{(\Delta x)^T v}\right]^T + \frac{((\Delta x)^T)^T (\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v} =$ hipót. es un número

$= \left[I^T - \frac{((\Delta x)^T)^T v^T}{(\Delta x)^T v}\right](S^{k-1})^{-1}\left[I^T - \frac{v(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right] + \frac{\Delta x \cdot (\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v} =$

$= \left[I - \frac{\Delta x \cdot v^T}{(\Delta x)^T v}\right](S^{k-1})^{-1}\left[I - \frac{v(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}\right] + \frac{\Delta x(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T \cdot v}$ OK es simétrica

0,1 *b)* Proposa raonadament una expressió pel vector $\mathbf{v}$ de manera que $(\mathbf{S}^k)^{-1}$ verifiqui l'equació quasi-Newton (és a dir, la condició de matriu secant)

Tengo que imponer que $(S^k)^{-1}\Delta x = \Delta f$ NO

$(S^k)^{-1} = (S^{k-1})^{-1} - \frac{(\Delta x)v^T}{(\Delta x)^T v}(S^{k-1})^{-1} - (S^{k-1})^{-1}\frac{v(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v} + \cancel{\frac{\|v\|^2 \Delta x(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v (v)^T \Delta x}} \quad \frac{\Delta x v^T (S^{k-1})^{-1} v \Delta x}{\Delta x^T \|v\|^2 \Delta}$

$+ \frac{\Delta x(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T v}$

$(S^{k-1})^{-1}\Delta x - \frac{(\Delta x)v^T}{(\Delta x)^T v}(S^{k-1})^{-1}\Delta x - \frac{(S^{k-1})^{-1} v \|x\|^2}{(\Delta x)^T v} + \frac{\Delta x \cdot v^T (S^{k-1})^{-1} v}{\|v\|^2 \cancel{\Delta x^T \Delta x}} + \frac{\|x\|^2 \Delta x}{(\Delta x)^T v}$

Está claro que $v = S^{k-1}\omega$ y así se cancelarán cosas

$(S^{k-1})^{-1}\Delta x - \frac{(\Delta x)\omega^T \cancel{S} \Delta x}{(\Delta x)^T S^{k-1}\omega} - \frac{\|x\|^2 \omega}{(\Delta x)^T S^{k-1}\omega} + \frac{\Delta x\, \omega^T S^{k-1}\omega}{\|v\|^2 \|x\|^2}$

$(\Delta x)(\Delta x)^T \omega$

$+ \frac{\|x\|^2 \Delta x}{(\Delta x)^T S^{k-1}\omega} = \Delta f$

si $\lambda = 1/2$ esto se va

Si $\omega = \lambda \Delta x$, $(S^{k-1})^{-1}\Delta x - \frac{(\Delta x)(\Delta x)^T \Delta x}{(\Delta x)^T S^{k-1}\Delta x} - \frac{\|x\|^2 \Delta x}{(\Delta x)^T S^{k-1}\Delta x} + \frac{\|x\|^2 \Delta x}{(\Delta x)^T S^{k-1}\Delta x}$

Tiene que aparecer en algún sitio dependencia con $\Delta f$

A simétrica $A^{-1}$ tb

$A^T = A$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$

Vamos a coger $v = \frac{\Delta x^T \Delta x \, \Delta f}{\Delta x^T \Delta f}$ no va $\underline{\Delta f \quad S^{k-1}}$

~~Entonces quiero ver que~~

$$(S^{k-1})^{-1} \Delta x - \frac{\|x\|^2 (S^{k-1})^{-1} v}{(\Delta x)^T v} + \frac{\Delta x \, v^T (S^{k-1})^{-1} v}{\|v\|^2} - \frac{\Delta x \, \Delta x^T (S^{k-1})^{-1} v}{(\Delta x)^T v}$$

$$+ \frac{\|x\|^2 \Delta x}{(\Delta x)^T v} = \Delta f$$

$\wedge$

$\Delta f^T \cancel{\Delta x} \Delta x$

$\Delta x \quad \Delta f^T \Delta x$

$v = S^{k-1} \Delta f$

$$(S^{k-1})^{-1} \Delta x - \frac{\|x\|^2 \Delta f}{(\Delta x)^T S^{k-1} \Delta f} + \frac{\Delta x \, \Delta f^T (S^{k-1})^{-1} \Delta f}{\|v\|^2} - \frac{\Delta x \, \Delta x^T \, \cancel{\Delta f}}{(\Delta x)^T v} +$$

$(S^{k-1})^{-1} \Delta x$

De aquí puedo despejar v quizás

1.4 | 1.5

**CÀLCUL NUMÈRIC (GM)** — **Examen final (part II)**

(Durada: 1h) — **12 de gener de 2015**

C

**6.** [1.5 punts] L'evolució temporal de la població es pot modelitzar mitjançant una llei

$$p(t) = \frac{L}{1 + c\exp(r(t - t_0))} \tag{4}$$

que depèn de tres paràmetres $L$, $r$ i $c$ ($t_0$ és un instant inicial fixat).

Es vol emprar la llei (4) per aproximar les dades de la taula

| $t_i$ | 1910 | 1930 | 1950 | 1970 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 19.99 | 23.68 | 28.12 | 33.96 | 39.43 |

que corresponen a la població d'Espanya (en milions d'habitants) en diferents anys.

0.6 *a)* En una primera anàlisi, se suposa que el paràmetre $L$ és conegut. Transforma la llei (4) per poder realitzar un ajust lineal de mínims quadrats. Detalla el procediment que cal seguir per realitzar l'ajust.

0.5 *b)* Fes servir les dades de la taula per aproximar la població, suposant $L = 60$ i fent servir com a instant inicial $t_0 = 1900$. Escriu el sistema d'equacions que has resolt per trobar els coeficients i la solució obtinguda. Estima la població en l'any 2100 utilitzant el resultat de l'apartat anterior.

0.3 *c)* Si $L$ no fos conegut, es pot fer un ajust per mínims quadrats? En què canvia l'anàlisi?

**7.** [1.5 punts] Volem construir una quadratura per aproximar integrals en l'interval $[0, 1]$ que tingui el màxim ordre possible.

Si només coneixem el valor de la funció en un punt $x_0$,

0.3 *a)* Quin pes s'hauria d'emprar? Quin és l'ordre de la quadratura obtinguda?

Per a millorar l'aproximació, se'ns permet avaluar la funció en un altre punt $x_1$ que triarem nosaltres.

0.7 *b)* Determina la posició $x_1$ i els pesos $w_0$ i $w_1$ (en funció de $x_0$) que defineixen la millor quadratura possible. Quin és l'ordre de la quadratura que s'obté en aquest cas?

0.5 *c)* Particularitza la quadratura obtinguda en l'apartat anterior pel cas $x_0 = 0.2$ i fes-la servir per aproximar la integral $I = \int_0^1 \exp(x^2)\mathrm{d}x$.

$w_0$

$w_0 x_0 + w_1(1 - x_0) = 1/2$ $\quad w_1 = 1$

$w_0 x_0 + w_1 - w_1 x_0 = 1/2$ $\quad w_0 = 1$

$w_0 + w_1 = 1 \qquad w_0 = 1 - w_1$

$x_0 - w_1 x_0 + w_1 - w_1 x_0 = 1/2 \qquad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

$w_1(1 - 2x_0) = 1/2 - x_0 \qquad \frac{1}{2}x^2$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

(6) a) $p(t) = \dfrac{L}{1 + c\exp(r(t-t_0))}$

$p(t) + c\,p(t)\exp(r(t-t_0)) = L$

$\exp(r(t-t_0)) = \dfrac{L - p(t)}{c \cdot p(t)}$

$r(t-t_0) = \log(L - p(t)) - \log c - \log p(t) = \log\left(\dfrac{L-p(t)}{p(t)}\right) - \log c$

$\log\left(\dfrac{L-p(t)}{p(t)}\right) = \log c + r(t-t_0) = \log c + r(t-t_0)$

Tenemos que ajustar ahora el valor a una recta (no es más que una regresión)

Asumimos que $y = \log\left(\dfrac{L-p(t)}{p(t)}\right)$, $x = t - t_0$

entonces $y = ax + b$, donde $a = r$ $b = \log c$ $\rightarrow c = e^b \approx 2{,}4888$

Planteamos por tanto las ecuaciones normales

$\min \sum_{i=1}^{5} (a x(i) + b - y(i))^2$

$$\left.\begin{array}{l} \sum \cancel{2}(ax(i) + b - y(i)) = 0 \\ \sum \cancel{2}x(i)(ax(i) + b - y(i)) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a\sum x_i + 5b - \sum y(i) = 0 \\ a\sum x_i^2 + b\sum x - \sum x_i y_i = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i & 5 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & 5 \\ 16500 & 250 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3309 \\ -51{,}1049 \end{pmatrix}$$

c y r ?

$$\left.\begin{array}{l} a = -0{,}0169 \\ b = 0{,}9118 \end{array}\right\} \quad y = -0{,}0169 \cdot \underset{2010-1900}{110} + 0{,}9118 = -0{,}9472$$

$\log\left(\dfrac{60 - p(t)}{p(t)}\right) = -0{,}9472$

~~$p(t) = \dfrac{60}{1 + 0{,}9472}$~~

$\dfrac{60 - p(t)}{p(t)} = 0{,}3878 \Rightarrow p(t) = \dfrac{60}{1{,}3878} = 43{,}23$

c) Mínimos cuadrados no lineal ahora, con 3 parámetros $L$, $c$ y $v$, y tengo que Resolver $\min \sum_{i=1}^{5} \left( \frac{L}{1+c\exp(v(t-t_i))} - p(i) \right)^2$, y esto no lo puedo linealizar así que me quedará un sistema de 3 ec. y 3 inc. <u>no lineal</u>.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Croquis: → Apartado ⓐ Hoja 1
→ Apartado ⓑ Hoja 1 y 3
→ Apartado ⓒ Reverso hoja 2

Estudiant/a:

Data:

⑦ a) El peso habría de ser tal que se pudiesen integrar polinomios de grado 0, es decir

~~$w_0(ax_0+b) = \int_0^1 ax+b$~~ $w_0 f(x_0) = \int_0^1 f(x)dx$.

En concreto, si $f(x) = 1$ $\quad w_0 = 1$

Veamos si integra polinomios de grado 1. El x

$x_0 = f(x_0) = \int_0^1 x = \frac{1}{2}$. Es decir, si $x_0$ es $1/2$ tiene orden 1 (se ve que no integra a $x^2$) y en caso contrario es orden 0

b) $w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = \int_0^1 f(x)\,dx$ Para que integre $f(x) = 1$

Supongo $x_0 \neq 1/2$

$w_0 + w_1 = 1$

Para que integre a $x$

$w_0 x_0 + w_1 x_1 = 1/2$

Tengo 3 grados de libertad $w_0, w_1, x_1$, así que puedo imponer tb. que integre a $x^2$

$w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = 1/3$

c) $w_0 + w_1 = 1$ $\qquad w_1 = 1 - w_0$

$0{,}2 w_0 + w_1 x_1 = 1/2$ $\qquad 0{,}2 w_0 + x_1 - x_1 w_0 = 1/2$ $\qquad w_0(0{,}2 - x_1) = 1/2 - x_1$

$w_0 = \frac{1/2 - x_1}{0{,}2 - x_1}$

$0{,}04 w_0 + w_1 x_1^2 = 1/3$

$\frac{0{,}02 - 0{,}04 x_1}{0{,}2 - x_1} + 0$

$$w_1 = 1 - w_0$$

$$0{,}2\,w_0 + x_1(1-w_0) = \tfrac{1}{2} \quad \to \quad w_0(0{,}2 - x_1) = \tfrac{1}{2} - x_1, \qquad w_0 = \frac{0{,}5 - x_1}{0{,}2 - x_1}$$

$$0{,}04\,w_0 + x_1^2(1 - w_0) = \tfrac{1}{3}$$

$$0{,}04 \cdot \frac{0{,}5 - x_1}{0{,}2 - x_1} + x_1^2\left(\frac{0{,}2 - \cancel{x_1} - 0{,}5 + \cancel{x_1}}{0{,}2 - x_1}\right) = \tfrac{1}{3}$$

$$0{,}04(0{,}5 - x_1) - 0{,}3\,x_1^2 = \frac{0{,}2}{3} - \frac{x_1}{3}$$

?

$$0{,}3\,x_1^2 + \left(0{,}04 - \tfrac{1}{3}\right)x_1 + \frac{0{,}2}{3} - 0{,}02 = 0$$

$$0{,}3\,x_1^2 - 0{,}2933\,x_1 + 0{,}0667 = 0$$

$$x_1 = \frac{0{,}2933 \pm \sqrt{0{,}2933 - 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}0667}}{0{,}6}$$

1,

$\omega_0 + \omega_1 = 1 \longrightarrow \omega_1 = 1 - \omega_0$

$\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow \omega_0 x_0 + (1-\omega_0) x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \omega_0 = \frac{0{,}5 - x_1}{x_0 - x_1}$

$\omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{0{,}5 - x_1}{x_0 - x_1}\right) x_0^2 + \left(1 - \frac{0{,}5 - x_1}{x_0 - x_1}\right) x_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$0{,}5 x_0^2 - x_0^2 x_1 + (x_0 - 0{,}5) x_1^2 = \frac{1}{3}(x_0 - x_1)$$

$$x_1^2 (x_0 - 0{,}5) + x_1\left(-x_0^2 + \frac{1}{3}\right) + 0{,}5 x_0^2 - \frac{1}{3} x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 - \frac{1}{3} \pm \sqrt{(x_0^2 - \frac{1}{3})^2 - 4(x_0 - 0{,}5)(0{,}5x_0^2 - \frac{1}{3}x_0)}}{2x_0 - 1}$$ ok. $\quad$ si $x_0 \neq 0{,}5$

$$\omega_0 = \frac{0{,}5 - x_1}{x_0 - x_1} \qquad x_0 \neq x_1$$

$$\omega_1 = 1 - \omega_0$$

3) En el caso concreto $x_0 = 0{,}2$

$$x_1 = \frac{0{,}04 - \frac{1}{3} \pm \sqrt{(0{,}04 - \frac{1}{3})^2 - 4\cdot(-0{,}3)(0{,}5\cdot 0{,}04 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}2)}}{2(0{,}2) - 1} =$$

$$= \frac{0{,}04 - \frac{1}{3} \pm 0{,}1733}{-0{,}6} \begin{array}{l} \nearrow 0{,}2 \\ \searrow 0{,}7777 \end{array}$$

$\omega_0 = 0{,}4807$
$\omega_1 = 0{,}5193$

$$I = 0{,}4807\, e^{0{,}04} + 0{,}5193 \cdot e^{0{,}7777^2} = 1{,}4512$$

$$\frac{25}{52} e^{0{,}04} + \frac{27}{52} e^{(7/9)^2} =$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: HOJA IMPORTANTE

Estudiant/a:

Data:

$$x_1 = \frac{x_0^2 - 1/3 \pm \sqrt{x_0^4 - \frac{2}{3}x_0^2 + \frac{1}{9} - 2x_0^3 + x_0^2 + \frac{4}{3}x_0^2 - \frac{2}{3}x_0}}{2x_0 - 1} =$$

$$= \frac{x_0^2 - 1/3 \pm \sqrt{x_0^4 - 2x_0^3 + \frac{5}{3}x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{9}}}{2x_0 - 1} =$$

$$(x_0^2 - x_0 + 1/3)^2$$

$$= \frac{x_0^2 - 1/3 \pm (x_0^2 - x_0 + 1/3)}{2x_0 - 1}$$

$$\frac{2x_0^2 - x_0}{2x_0 - 1} = x_0$$ no vale $x_0 \neq x_1$

$$\frac{x_0 - 2/3}{2x_0 - 1} = \frac{3x_0 - 2}{6x_0 - 3}$$

$$\omega_0 = \frac{0{,}5 - \frac{3x_0 - 2}{6x_0 - 3}}{x_0 - \frac{3x_0 - 2}{6x_0 - 3}} = \frac{3x_0 - 1{,}5 - 3x_0 + 2}{6x_0^2 - 6x_0 + 2} = \frac{1}{4(1 - 3x_0 + 3x_0^2)}$$

$$\omega_1 = 1 - \frac{1}{4(1 - 3x_0 + 3x_0^2)} = \frac{3 - 12x_0 + 12x_0^2}{4(1 - 3x_0 + 3x_0^2)}$$

Fabricat Ecològicament

Para el caso $x_0 = 0,5$ es distinto

pues al despejar ya sale $\left(w_0 = \frac{0,5 - x_1}{0,5 - x_1} = 1\right)$ $w_1 =$

$w_0 x_0^2 = 1/3$ X

Sistema incompatible
no tendré orden 2.

$w_0$

Nótese que así tengo orden 2, porque a los polinomios de grado 3 ya no los integro. Nótese que en el caso anterior:

$0,2^3 \cdot w_0 + \left(\frac{7}{9}\right)^3 \cdot w_1 = 0,2^3 \cdot \frac{25}{4 \cdot 13} + \left(\frac{7}{9}\right)^3 \cdot \frac{27}{52} \neq \frac{1}{4}$

Si $x_0$ coincide con un punto de Gauss, sí tenemos orden 3.

¿Por qué?