



Segona part: Problemes (7,5 punts sobre 10) (2h 30min)

Notes provisionals: 14/7/2015.

Justifiqueu tots els passos i teoremes que utilitzeu.

1. Sigui (a_n) la successió de Fibonacci, definida per $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Sabem que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Sigui $b_n = a_{2n+1}$. Estudieu la convergència de la sèrie $\sum \frac{1}{b_n}$.
2. Sigui el conjunt $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y \geq 0, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, y + z \leq 1\}$. Calculeu la integral de la funció $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{(1-x)^5}}$ sobre A .
3. Considereu un arc de cicloide γ parametritzat per $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 - 3.1 Calculeu la longitud d'aquest arc de cicloide.
 - 3.2 Calculeu la integral $\int_{\gamma} -ydx + xdy$.
 - 3.3 Calculeu l'àrea de la regió Ω compresa entre la cicloide i l'eix de les x .
4. Sigui $T \subset \mathbb{R}^3$ la superfície tancada (tor) obtinguda fent girar la circumferència d'equació $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, al voltant de l'eix OZ , i sigui $V \subset \mathbb{R}^3$ el volum que tanca.

- 4.1 Calculeu el flux a través de T , cap a l'exterior de la regió V del camp vectorial

$$\mathbf{F} = \left(x - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, y - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

- 4.2 Sigui la superfície $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, z = 0\}$ orientada amb el vector normal $(0, 0, 1)$ en tot punt. Si

$$\alpha = (x^2 + y^2 - z^2)dx + (x^2 + y^2 + z^2)dy + e^{x+y+z}dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),$$

calculeu la integral $\int_D d\alpha$.

- 4.3 Calculeu la integral $\int_T \omega$, on T està orientada amb la normal cap a l'exterior i

$$\omega = xzdy \wedge dz + yzdx \wedge dz + 2zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

(Indicació: recordeu que el volum d'un tor de generatriu $(x-R)^2 + z^2 = r^2$ és $2\pi^2 Rr^2$).