Càlcul Integral   Examen parcial, 11 de noviembre de 2014

Primera parte: Teoría (2,5 puntos sobre 10) (50 minutos)

1. **(2 puntos)** Enunciar y demostrar el criterio de convergencia de la raíz para series de términos no negativos (*Basta con demostrar uno de los casos*).
2. **(1,5 puntos)** Enunciar los criterios de comparación directa y por cociente para integrales impropias.
3. **(1,5 puntos)** ¿Qué es una región elemental en $\mathbb{R}^n$?

   Enunciar el teorema de Fubini para regiones elementales en $\mathbb{R}^n$. Particularizarlo al caso de $\mathbb{R}^3$.
4. **(2,5 puntos)** Definir los siguientes conceptos:

   4.1 Oscilación de una función en un punto. ¿Cuál es su significado?

   4.2 Medida y contenido cero. ¿Qué relación hay entre ambos conceptos? Poner algunos ejemplos. (*Justificar las respuestas*).
5. **(2,5 puntos)** Definir el concepto de parametrizaciones regularmente equivalentes (para curvas).

   Enunciar y demostrar el teorema de invariancia respecto a la parametrización de las integrales de línea de funciones vectoriales.

Càlcul Integral   Examen parcial, 11 de noviembre de 2014

Primera parte: Teoría (2,5 puntos sobre 10) (50 minutos)

1. **(2 puntos)** Enunciar y demostrar el criterio de convergencia de la raíz para series de términos no negativos (*Basta con demostrar uno de los casos*).
2. **(1,5 puntos)** Enunciar los criterios de comparación directa y por cociente para integrales impropias.
3. **(1,5 puntos)** ¿Qué es una región elemental en $\mathbb{R}^n$?

   Enunciar el teorema de Fubini para regiones elementales en $\mathbb{R}^n$. Particularizarlo al caso de $\mathbb{R}^3$.
4. **(2,5 puntos)** Definir los siguientes conceptos:

   4.1 Oscilación de una función en un punto. ¿Cuál es su significado?

   4.2 Medida y contenido cero. ¿Qué relación hay entre ambos conceptos? Poner algunos ejemplos. (*Justificar las respuestas*).
5. **(2,5 puntos)** Definir el concepto de parametrizaciones regularmente equivalentes (para curvas).

   Enunciar y demostrar el teorema de invariancia respecto a la parametrización de las integrales de línea de funciones vectoriales.

Càlcul Integral   Examen parcial, 11 de novembre de 2014

Segona part: Problemes (7,5 punts sobre 10) (2h 30min)

1. **(1,5 punts)** Sigui $(a_i)_{i\geq 0}$ una successió numèrica. A partir d'una successió estrictament creixent de nombres naturals $(i_k)_{k\geq 0}$, definim la successió (p_k) de sumes agrupades: $p_k = \displaystyle\sum_{i_{k-1} < i \leq i_k} a_i$.

   1.1 (*Teorema d'associativitat*) Si els a_i són positius, proveu que $\displaystyle\sum_{i\geq 0} a_i = \sum_{k\geq 0} p_k$, tant si es tracta de sèries convergents com divergents.

   1.2 Doneu un exemple que mostri que el resultat anterior pot ser fals si no se suposa que la sèrie és de termes positius.

2. **(3,5 punts)**

   2.1 Estudieu la convergència de la integral següent en funció del valor dels paràmetres $p, q \in \mathbb{R}$:
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p\,(\ln x)^q}\,.$$

   2.2 Calculeu l'àrea limitada per la corba $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$, la recta $x = 1$ i l'eix OX.

3. **(2,5 punts)** Sigui la regió de $\mathbb{R}^3$ definida per $T = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

   3.1 Calculeu la integral de la funció $f(x, y, z) = x$ sobre la regió T.
   Sense fer més càlculs, raoneu quin és el valor de les integrals $\int_T y$ i $\int_T z$.

   3.2 Calculeu la integral de la funció $f(x, y, z) = x$ sobre la regió $\Phi(T)$, on Φ és la transformació lineal de $\mathbb{R}^3$ donada per la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **(2,5 punts)** Considerem la regió del pla definida per $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 4x^2, x^4 \leq y \leq 9x^4, x \geq 0\}$.

   4.1 Escriviu una expressió per a l'àrea de Ω en termes d'integrals iterades.

   4.2 Fent un canvi de variable adient, escriviu l'àrea de Ω com una integral sobre un rectangle de $\mathbb{R}^2$, i calculeu el seu valor.

Resolució

1. Sigui $(a_i)_{i\geq 0}$ una successió numèrica. A partir d'una successió estrictament creixent de nombres naturals $(i_k)_{k\geq 0}$, definim la successió (p_k) de sumes agrupades: $p_k = \displaystyle\sum_{i_{k-1}<i\leq i_k} a_i$.
[1'5 pt]

   (a) [8 pt] (*Teorema d'associativitat*) Si els a_i són positius, proveu que $\displaystyle\sum_{i\geq 0} a_i = \sum_{k\geq 0} p_k$, tant si es tracta de sèries convergents com divergents.

   (b) [2 pt] Doneu un exemple que mostri que el resultat anterior pot ser fals si no se suposa que la sèrie és de termes positius.

Estudiar la convergència d'una sèrie és estudiar la convergència de la successió de sumes parcials. Representem per

$$s_i = \sum_{j=0}^{i} a_j\,, \quad \bar{s}_k = \sum_{\ell=0}^{k} p_\ell\,,$$

les respectives sumes parcials. Observem que

$$\bar{s}_k = p_0 + \ldots + p_k = a_0 + \ldots + a_{i_0} + a_{i_0+1} + \ldots + a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k-1}+1} + \ldots + a_{i_k} = a_0 + \ldots + a_{i_k} = s_{i_k}\,,$$

de manera que $(\bar{s}_k)$ és una successió parcial (s_{i_k}) de (s_i). Per tant si $\sum a_j = \lim s_i$ existeix, llavors $\sum p_\ell = \lim \bar{s}_k$ existeix i val el mateix.

Ara bé, si els $a_i \geq 0$ aleshores la successió (s_i) de les seves sumes parcials és creixent i el seu límit, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, sempre existeix, sigui finit (convergent) o infinit (divergent). Per tant, d'acord amb el paràgraf anterior, coincideix amb $\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell$.

Si no es compleix la positivitat aleshores no hi ha garantia que l'existència de $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ impliqui la de $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.
Un exemple senzill ve donat per la successió $a_i = (-1)^i$: la sèrie $1-1+1-1+1-1+\ldots$ oscil·la sense límit, mentre que si associem els termes de dos en dos obtenim $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0$, o fins i tot $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$.
Si es prefereix, aquest exemple es pot retocar de forma que el terme general tendeixi a zero, descomponent els 1's en fraccions de la unitat, com per exemple: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots$.

(1)

① $\underline{p \leq 0}$, $\alpha = -p \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ Intégrale Diverge

② $\underline{p > 0}$

(2.1) $q \leq 0 \Longrightarrow \mathcal{I}$ de $1^{ère}$ esp

(2.2) $q > 0 \Longrightarrow \mathcal{I} = \int_1^a + \int_a^{+\infty} = \mathcal{I}_{II} + \mathcal{I}_{I}$

$\mathcal{I}_I$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^p (\ln x)^q} \in C\left(\begin{cases} \forall x \geq 1 \text{ si } q < 0 \\ \forall x > 0, \text{ si } q > 0 \end{cases}\right)$

$> 0 \quad - \cdot \quad - \cdot \quad -$

$f'(x) = -\dfrac{(p \ln x + q)}{x^{p+1} (\ln x)^{q+1}}$

$p \ln x + q > 0 \Longleftrightarrow x > e^{-q/p}$

$e^{-q/p} \quad 1 \quad a$ $\qquad p > 0, q > 0 \longrightarrow f' < 0, \forall x > a$

$1 \quad e^{-q/p}$ $\qquad p > 0, q < 0 \longrightarrow f' < 0 \; \forall x > e^{-q/p}$

$1 = e^{-q/p}$ $\qquad p > 0, q = 0 \longrightarrow f' < 0, \forall x > 0$

$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f \; C \Longleftrightarrow \sum_1^{\infty} \dfrac{1}{n^p (\ln n)^q} \; C$ si $q \geq 0$

$\int_1^{+\infty} f \; C \Longleftrightarrow \sum_{[e^{-q/p}]+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p (\ln n)^q} \; C$, si $q < 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$ C $(p>0, \forall q)$ 2

$n_0 = \max(1, [e^{-p/q}]+1)$

Serie de Bertrand $\begin{cases} C, \text{ si } p>1 \text{ ó } p=1, q>1 \\ D, \text{ si } p<1 \text{ ó } p=1, q\leq 1 \end{cases}$

2.1 Si $q=0 \Longrightarrow \mathcal{I}_1$ Conv. $\Longleftrightarrow p>1 \Longrightarrow \boxed{\mathcal{I}\, C, p>1}$

2.2 Si $q>0 \Longrightarrow \mathcal{I}_I$ Conv. $\Longleftrightarrow p>1$ ó $p=1, q>1$

Falta estudiar

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I}} = \int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{x^p(\ln(1+(x-1)))^q} \Big/ g(x) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^p(x-1)^q} \Big/ \frac{1}{(x-1)^q} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^p} = 1$$

$$\int_1^a f\ C \Longleftrightarrow \int_1^a \frac{dx}{(x-1)^q}\ C \begin{cases} C, q<1 \\ D, q\geq 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathcal{I}_{\mathrm{I}} \begin{cases} C, \text{ si } q<1 \\ D, \text{ si } q\geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{I} \begin{cases} C, \text{ si } 0<q<1 \\ D, \text{ si } q\geq 1 \end{cases}$

Resumen: $\mathcal{I}$ / C $\boxed{\text{si } p>1 \text{ y } q<1}$

Problema 3

Sigui T la regió de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$T = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

1. Calculeu la integral de la funció $f(x, y, z) = x$ sobre la regió T.

   Sense fer més càlculs, raoneu quin és el valor de les integrals $\int_T y$ i $\int_T z$.

2. Calculeu la integral de la funció $f(x, y, z) = x$ sobre la regió $\Phi(T)$, on Φ és la transformació lineal donada per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Resolució
Sobre la regió donada, fent servir integrals iterades, la integral demanada és

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{24}.$$

Les integrals de $f(x, y, z) = y$ i $g(x, y, z) = z$ sobre aquesta regió es transformen en exactament la integral calculada amb els canvis $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ i $(x, y, z) \mapsto (z, y, x)$. En ambdós casos el Jacobià val 1 en valor absolut, i la regió és invariant, de manera que les integrals valen el mateix.

La transformació Φ defineix una parametrització de la regió $\Phi(T)$, de manera que

$$I = \int_{\Phi(T)} x \, dxdydz = \int_T -y \, |J_\Phi| \, dxdydz.$$

Com que $\det A = -6$, tenim que $|J_\Phi| = 6$ i, per l'apartat anterior, $I = -1/4$.

Problema 4

Considerem la regió Ω del pla definida per

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 4x^2, x^4 \leq y \leq 9x^4, x \geq 0\}.$$

1. Escriviu una expressió per a l'àrea de Ω en termes d'integrals iterades.
2. Fent un canvi de variable adient, escriviu l'àrea com una integral sobre un rectangle de $\mathbb{R}^2$ i calculeu el seu valor.

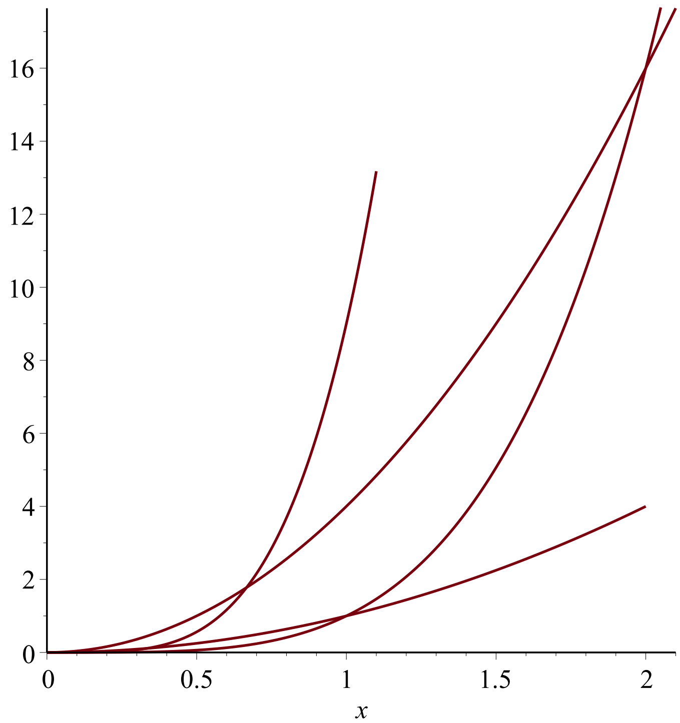

Figure 1: Gràfiques

Resolució

Les gràfiques de les funcions donades tenen l'aspecte de la Figura 1.
Cal observar que prop de l'origen es té $x^4 < 9x^4 < x^2 < 4x^2$. Els punts d'intersecció són

1. $x_1 = 1/3$, (de $y = 9x^4$ amb $y = x^2$)
2. $x_2 = 2/3$, (de $y = 9x^4$ amb $y = 4x^2$)
3. $x_3 = 1$, (de $y = x^4$ amb $y = x^2$)
4. $x_4 = 2$, (de $y = x^4$ amb $y = 4x^2$)

L'àrea de la regió en termes d'integrals iterades (primer respecte y i després respecte x) és

$$\int_{1/3}^{2/3} \int_{x^2}^{9x^4} dy\, dx + \int_{2/3}^{1} \int_{x^2}^{4x^2} dy\, dx + \int_{1}^{2} \int_{x^4}^{4x^2} dy\, dx.$$

La regió donada es pot descriure amb les desigualtats

$$1 \leq y/x^2 \leq 4,\ \ 1 \leq y/x^4 \leq 9,$$

que suggereix el canvi de variables $u = y/x^2$, $v = y/x^4$. Si posem x i y en funció de u i v (evidentment aquesta transformació és bijectiva i C^∞ per a $u > 0$, $v > 0$) tenim una parametrització de la regió donada per

$$\begin{aligned} \Psi : [1,4] \times [1,9] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\mapsto (u^{1/2}v^{-1/2}, u^2v^{-1}) \end{aligned}$$

El Jacobià de Ψ és $J_\Psi = \frac{1}{2}u^{3/3}v^{-5/2}$ i la integral demanada es transforma en

$$\int_1^9 \int_1^4 \frac{1}{2}u^{3/3}v^{-5/2}du\, dv = \frac{1612}{405}.$$