Càlcul Integral   Examen final, 20 de enero de 2015

Primera parte: Teoría (2,5 puntos sobre 10) (50 minutos)
Notes provisionals: 27/1/2015.
Revisió: 28/1/2015 (11.00h a 12.00h. Sala de Consultes FME)

1. **(1 punto)** Definir el concepto de *integral impropia de primera especie*.

   ¿Qué relación hay entre estas integrales y las series numéricas?

2. **(2 puntos)** ¿Qué es la *función característica* de un conjunto de $\mathbb{R}^n$?

   ¿Cuál es la definición de *conjunto medible de Jordan*? Dar otra caracterización alternativa de este concepto y razonar la equivalencia entre ambas.

   ¿Qué es la *medida* de un conjunto de $\mathbb{R}^n$?

3. **(2 puntos)** Definir las nociones de:

   - *Poligonal* asociada a una curva en $\mathbb{R}^n$ y *longitud* de la poligonal.
   - *Longitud* de un arco de curva en $\mathbb{R}^n$.

4. **(2,5 puntos)** Enunciar el *teorema de Green*.

   Explicar brevemente las ideas fundamentales en las que se basa la demostración del teorema para regiones de tipo III (o XY-simples) en $\mathbb{R}^2$.

5. **(2,5 puntos)** Definir los siguientes conceptos:

   - *Subvariedad regular* m-dimensional de $\mathbb{R}^n$.
   - *Espacio tangente* a una subvariedad en un punto.
   - *Punto frontera regular* de una subvariedad y *subvariedad regular con borde* de $\mathbb{R}^n$.

Càlcul Integral Examen final, 20 de gener de 2015

Segona part: Problemes (7,5 punts sobre 10) (2h 30min)
Justifiqueu tots els passos i teoremes que utilitzeu.

1. **(2,5 punts)** Sigui $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ la suma parcial n-èsima de la sèrie harmònica alternada i sigui $q_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

   (a) Demostreu que $q_n = s_{2n}$.

   (b) Trobeu successions de nombres enters a_n, b_n, c_n i d_n tals que, si $I_n = \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x}$ i $J_n = \int_{c_n}^{d_n} \frac{dx}{x}$, es compleix: (i) $I_n \le q_n \le J_n$, per a tota $n \ge 1$; (ii) $\lim_{n\to\infty} (J_n - I_n) = 0$.

   (c) Calculeu $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.

2. **(2,5 punts)** Donats el camp $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,0)$ i la funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, sigui Ω la regió
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 - x^2 - y^2 \ge 0\,,\; 0 \le z \le 1\}\ ,$$
i les superfícies
$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 - x^2 - y^2 = 0\,,\; 0 \le z \le 1\}\,,\quad \Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 1\,,\; x^2 + y^2 \le 1\}\ .$$
Calculeu (prenent el vector normal a $\partial\Omega$ cap a l'exterior):

   (a) El flux de $\mathbf{F}$ a través de $\partial\Omega$.

   (b) El flux de $\mathbf{F}$ a través de Σ_2.

   (c) El flux de $\mathbf{F}$ a través de Σ_1.

   (d) La integral de f sobre Σ_1.

3. **(3 punts)** Siguin $\mathbf{F} = (2x + y - z, 2x - z, 2x - y - z)$ i C la corba obtinguda en intersecar les superfícies les equacions de les quals són
$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad , \quad 2x - z = 0 \quad .$$

   (a) Calculeu la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ de dues maneres diferents, indicant l'orientació triada.

   (b) Proveu que existeix un pla $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que, per a tota corba de Jordan $C \subset P$, la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C val zero.

4. **(2 punts)** Considereu en $\mathbb{R}^3$ les formes diferencials $\alpha = y\,\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot}{y}$, $\beta = f(x)\,\underset{\cdot}{z}$, on f és una funció de classe C^1.

   (a) Calculeu $\omega = \alpha \wedge \beta$. Calculeu $d\omega$.
   Existeix alguna f per a la qual $d\omega = 0$?

   (b) En el cas que $f(x) = x$, calculeu la integral de ω sobre l'esfera d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada amb la normal exterior.

Problema 1

1. Demostrem que $q_n = s_{2n}$ per inducció.

   Evidentment $q_1 = s_2 = 1/2$.

   Suposem que $q_n = s_{2n}$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ s_{2(n+1)} &= s_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

   d'on es dedueix immediatament $q_{n+1} = s_{2(n+1)}$.

2. Com que la funció $1/x$ és decreixent, es té

$$I_n = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq q_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x} = J_n$$

   (q_n és una suma inferior de Riemann de la integral J_n i una suma superior de la integral I_n amb subintervals de longitud 1).

   D'altra banda tenim

$$\int_n^{2n} - \int_{n+1}^{2n+1} = \int_n^{n+1} + \int_{n+1}^{2n} - \int_{n+1}^{2n} - \int_{2n}^{2n+1} = \int_n^{n+1} - \int_{2n}^{2n+1}$$

   i les dues integrals de la dreta tenem límit zero quan $n \to \infty$.

3. Conseqüència de l'anterior tenim

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n,$$

   i, de fet, les J_n no depenen de n. Per tant $\lim_{n\to\infty} q_n = \log 2$, on log és el logaritme natural.

Problema 2

1. $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 (sus funciones componentes son polinómicas) y $\partial\Omega$ es una superficie cerrada, regular a trozos (unión de un círculo Σ_2 y la superficie lateral de un tronco de cono Σ_1, con un punto frontera singular, el vértice, que tiene medida nula). Se puede aplicar el teorema de Gauss; con lo que, al ser $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2$, se tiene que:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F} = 2\int_{\Omega} dx\, dy\, dz = 2\,\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{2}{3}\pi \ ;$$

pues Ω es un tronco de cono de altura $h = 1$ y radio $R = 1$, luego su volumen es $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi$ (también se puede calcular evaluando la integral con un cambio a coordenadas cilíndricas).

2. Sea $\psi_2(x, y)$ la parametrización regular siguiente de la superficie Σ_2

$$x = x \ , \ y = y \ , \ z = 1$$

con $x^2 + y^2 \leq 1$. Un vector normal a la superficie es, por tanto, $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ (orientado hacia el exterior de Ω); luego

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_2} (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy = 0 \ .$$

3. Como $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, se tiene que

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} - \int_{\Sigma_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \frac{2}{3}\pi - 0 = \frac{2}{3}\pi \ .$$

4. Sea $\psi_1(r, \theta)$ la parametrización regular siguiente de la superficie Σ_1

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ z = r$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 < r \leq 1$. Un vector normal a la superficie es, por tanto,

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \times \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r) \ ,$$

con lo que

$$\int_{\Sigma_1} f = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\|\mathbf{v}\| dr\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Solución del Problema - 3.

3.1.

Primera manera.

La curva de intersección C es una elipse
Parametrizamos C del modo siguiente:

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \sin t, \sqrt{2}\cos t\right), \quad t \in (0, 2\pi). \qquad (\#)$$

Entonces

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \cos t, -\sqrt{2}\sin t\right)$$

y en particular $\gamma(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \sqrt{2}\right)$, $\gamma'(0) = (0, 1, 0)$.
Es decir, en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \sqrt{2}\right)$ el vector tangente a la curva C es $(0, 1, 0)$.
Por lo tanto, la orientación de $(\#)$ corresponde al movimiento contra las agujas del reloj mirando desde la parte positiva del eje OZ.
Calculamos

$$\int_C F \cdot dl = \int_0^{2\pi} (F \circ \gamma) \cdot \gamma' \, dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, -\sin t)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \cos t, -\sqrt{2}\sin t\right) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Segunda manera

Sea S la parte del plano $2x - z = 0$ limitada por C,
su parametrización es

$$r(r, t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\cos t, r\sin t, \sqrt{2}\, r\cos t\right), \quad t \in (0, 2\pi), \ r \in (0, 1) \qquad (\#\#)$$

y el vector normal es

$$n = T_r \times T_t = \dots = \left(-\sqrt{2}\, r, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} r\right).$$

En particular, $\sigma(1,0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\sqrt{2}\right)$ y $n(1,0)=\left(-\sqrt{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Es decir, en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\sqrt{2}\right)$ el vector normal a S es $\left(-\sqrt{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Por lo tanto, la orientación de S inducida por ~~(A)~~ parametrización de S (respetando la regla de mano izquierda) corresponde al movimiento contra las agujas del reloj mirando desde la parte positiva del eje OZ.
Como $\operatorname{rot} F = \ldots = (0,-3,1)$ aplicando el teorema de Stokes tenemos que

$$\int_C F\cdot dl = \int_S \operatorname{rot} F\cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\operatorname{rot} F\circ\sigma)\cdot n \, dt\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0,-3,1)\cdot\left(-\sqrt{2}r,0,\frac{\sqrt{2}}{2}r\right) dt\, dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

3.2.

Notemos que $\operatorname{rot} F = (0,-3,1) = \text{const}, \ \forall (x,y,z)\in R^3$.

$\Rightarrow \exists P: \operatorname{rot} F \parallel P \Rightarrow \operatorname{rot} F \perp n$, donde n es un vector unitario normal a $P \Rightarrow (\operatorname{rot} F)_n = \operatorname{rot} F\cdot n = 0$

$\Rightarrow \int_S \operatorname{rot} F\cdot dS = 0$, donde $S\in P$ una región limitada por C,

$\Rightarrow \int_C F\cdot dl = \int_S \operatorname{rot} F\cdot dS = 0.$

Por consiguiente, la circulación de F a lo largo de toda curva de Jordan $C\subset P$ vale cero.

UPC / FME / GM / Cal Int 2014 tardor

Examen final, problema 4

Considerem en $\mathbb{R}^3$ les formes diferencials

$$\alpha = y\,dx + dy \qquad \beta = f(x)\,dz$$

1. Calculeu $\omega = \alpha \wedge \beta$.
Calculeu $d\omega$.
Existeix alguna f t.q. $d\omega = 0$?

$$\omega = (y\,dx + dy) \wedge (f(x)\,dz) = y f(x)\, dx\wedge dz + f(x)\, dy \wedge dz$$

$$d\omega = f(x)\, dy\wedge dx \wedge dz + f'(x)\, dx \wedge dy \wedge dz = \left(f'(x) - f(x)\right) dx\wedge dy \wedge dz$$

[També es pot calcular usant $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge d\beta$]

$d\omega = 0 \iff f'(x) - f(x) = 0 \iff f' = f$; això ocorre si $f(x) = e^x$

(en general: $f(x) = C e^x$)

2. En el cas de $f(x) = x$
Calculeu $\int_S \omega$ on $S: x^2+y^2+z^2 = a^2$ orientada vers l'exterior

Observem que $S = \partial B$, amb $B: x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

Podem intentar aplicar el teorema de Stokes:

$$\int_{S=\partial B} \omega = \int_B d\omega$$

Per $f(x) = x$, $d\omega = (1-x)\, dx\wedge dy \wedge dz$. Així,

$$\int_B d\omega = \int_B (1-x)\, dx\,dy\,dz = \int_B dx\,dy\,dz - \int_B x\, dx\,dy\,dz$$
$$= \mathrm{vol}(B) - \underbrace{0}_{\text{x és imparell, B és x-simètric}} = \frac{4}{3}\pi a^3$$