Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ
1,3

Assignatura: Calcul integral

Estudiant/a:

Data:

1) La convergència absoluta de una integral impròpia és la convergència de la integral del valor absolut (és a dir, $\int |f(x)| dx$)

0,6

~~Convergencia ⟹ c. absoluta.~~

Dem:

$\int f(x)\,dx$ convergent $\iff \left|\int f(x)\,dx\right|$ convergent ($\neq +\infty$)

i $\left|\int f(x)\,dx\right| \cancel{\geq} \int |f(x)|\,dx$

Per tant si $\int f(x)\,dx$ convergent $\Rightarrow \left|\int f(x)\,dx\right| = K \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \int |f(x)|\,dx \leq K \Rightarrow \int |f(x)|\,dx$ convergent. □

2) - És el producte vectorial de dos vectors ~~directors~~ tangentes del pla tangent a la parametrització en el punt donat.

0,3 precisar

- És una superfície S de $\mathbb{R}^3$ tal que $\exists \sigma: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injectiva i $\sigma(D) = S$?

Faltan cosas

- utilitzant la norma de la mà dreta obtenim la orientació en el "borde" de la superfície. ??

¿qué son f y g?

3) f un camp solenoidal → dominios?

- $\exists g$ tq $f = \nabla g$
- la integral de f ~~sobre una~~ corba tancada és 0

NO

0,4

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

8

Assignatura: Calcul

Estudiant/a:

Data:

1) Calc. utilitzant el criteri d'alembert:

succ parc.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n+3}} < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}} =$$

a_n creixent estricta

$\leq$

les desigualtats estrictes no passen al límit

$$= \frac{1}{\varphi} < 1. \Rightarrow \sum \frac{1}{b_n} \text{ convergeix.}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

6

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a:

Data:

3) ① La longitud és:

$$c'(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\|c'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = \sqrt{1-2\cos t+1} = \sqrt{2-2\cos t} = \sqrt{2(1-\cos t)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos t}$$

$$\int_0^{2\pi} \|c'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos t}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0+4\cos 0 = \boxed{4}$$

8

3

② $$\int_\gamma -y\,dx+x\,dy = \int_0^{2\pi} (\cos t-1,\ t-\sin t)\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -(1-\cos t)^2 + (t-\sin t)\sin t\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -1+2\cos t-\cos^2 t + t\sin t-\sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} -2+2\cos t+t\sin t\, dt =$$

$$= -4\pi + 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos t\, dt}_{1)} + \underbrace{\int_0^{2\pi} t\sin t\, dt}_{2)} = -4\pi-2\pi = \boxed{-6\pi}$$

3

1) $$\left[\sin t\right]_0^{2\pi} = 0$$

2) $$\int t\sin t\, dt = -t\cos t + \int \cos t\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} t\sin t\, dt = \left[-t\cos t + \int \cos t\, dt\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left[-t\cos t + \sin t\right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

(3) Calculant el valor de la funció f constant = 1 obtenim l'àrea.

$\int_0^{2\pi}$ $x \in [0, 2\pi]$

~~$x = t - \sin t$; $0 = t - \sin t - x$~~
~~$y = 1 - \cos t$; $0 = 1 - \cos t - y$~~
~~$y = -(t - \sin t - x - 1 + \cos t) =$~~
~~$= -t + \sin t + 1 - \cos t + x$~~
~~$\Rightarrow y \in [0,$~~

~~Segons la parametrització,~~
~~$x = t - \sin t$~~
~~$y = 1 - \cos t$~~
~~prenem la param. de la superfície:~~
~~llavors, integrant $\varphi(s, \alpha) = (s(t - \sin t), \alpha(1 - \cos t), 0)$~~

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

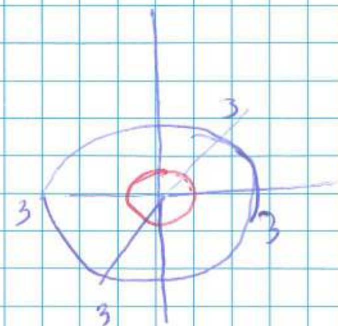
0

Assignatura: Calcul integral

Estudiant/a:

Data:

4)



2) Per Stokes,

$\int_D d\alpha \cancel{=} \int_{\partial D} \alpha$?

~~Ve~~ ∂D es la circumferència de radi 3 centrada en l'origen.

$$\int_{\partial D} (x^2+y^2-z^2)\,dx + (x^2+y^2+z^2)\,dy + e^{x+y+z}\,dz =$$

$$= \int_D \left(e^{x+y+z} - 2z,\ -2z + e^{x+y+z},\ 2x+2y\right) dS =$$ 0

~~Sigui $\Gamma(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$ $r\in[0,3]$, $\alpha\in[0,2\pi]$ Param de D.~~

~~$= \int e^{r(\cos\alpha+\sin\alpha)}$~~

$\Gamma(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$ $r\in[0,3]$, $\alpha\in[0,2\pi]$ Param de D.

$$\int \left(e^{r(\cos\alpha+\sin\alpha)},\ e^{r(\cos\alpha+\sin\alpha)},\ 2r(\cos\alpha+\sin\alpha)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^3 dr\, 2r^2(\cos\alpha+\sin\alpha) = \int_0^{2\pi} d\alpha \left[\frac{2}{3} r^3 (\cos\alpha+\sin\alpha)\right]_0^3 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha\, 18(\cos\alpha+\sin\alpha) = 18\left[-\sin\alpha+\cos\alpha\right]_0^{2\pi} = \boxed{36}$$

① Sea $\int_a^b f(x)dx$ una integral impropia, donde ~~$f: \mathbb{R}^n \to$~~ $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, esta converge absolutamente si la integral $\int_a^b |f(x)|dx$ es convergente.

1,6

Si una $\int_a^b f(x)dx$ es absolutamente convergente entonces es convergente → Demostración: $\infty \underset{\text{es abs convergente}}{>} \int_a^b |f(x)|dx \geq$

$\geq \left| \int_a^b f(x)dx \right| \geq \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty \Rightarrow$ es convergente

impreciso

Cabe destacar que al tratarse de integrales impropias su convergencia se mira haciendo límites. Por ejemplo, si se trata de una de 1a especie de la forma $\int_a^\infty f(x)dx$, estudio su convergencia haciendo $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$

Y si es de 2a especie de la forma $\int_a^b f(x)dx$ donde f no es integrable en b calculo $\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx$.

② Dada una superficie parametrizada diferenciable en $\mathbb{R}^3$, donde su parametrización es $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,v) \longmapsto T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

~~se definen T_u y~~ en un punto de D (u_0,v_0) se definen

$T_u(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$

y $T_v(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$.

Entonces el producto vectorial fundamental de $(u_0,v_0) \in D$ es

~~$T_u \times T_v$~~ $T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)$ ~~y resulta ser un el vector normal a la superficie en (u_0,v_0) con la orientación inducida por T~~

~~Ya he definido superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$~~

Una superficie parametrizada regular en $\mathbb{R}^3$ es $S \subset \mathbb{R}^3$ ~~parametrizada~~ con donde $T: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$
$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

donde $T(D) = S$, T es inyectiva y de clase C^1 y tal que ~~$T_u \times T_v$~~ $(T_u \times T_v)(u_0, v_0) \neq (0,0,0)$ $\forall (u_0, v_0) \in D$. ($T_u \times T_v$ ha sido definido anteriormente).

3

En este caso, el producto vectorial fundamental en (u_0, v_0) es el vector normal a S en $T(u_0, v_0)$ con la orientación inducida por T (se puede ver con la regla de la mano derecha).

2

¿por qué?

(3) Dada $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, A acotado, ~~estrellado~~ y arcoconexo.

1) F es solenoidal, es decir, ~~$\exists \varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$~~
$\exists \varphi: B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \varphi = F$ (en B)

2.) Sean S_1, S_2 ~~$S \subseteq \mathbb{R}^3$ una~~ superficies parametrizadas regulares con borde ~~..~~ tales que $\partial S_1 = \partial S_2 = C$ curva de Jordan regular, entonces ~~$\int_{S_1} F = \int_{S_2} F = \int_C \varphi$~~

$$\int_{S_1} F \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} F \cdot d\vec{S} = \int_{C} \varphi \cdot d\vec{\ell}$$

2

3) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular cerrada entonces $\int_S F \cdot d\vec{S} = 0$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ

6

(3)

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

$c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$

1) longitud $= \int_0^{2\pi} \|c'(t)\| dt \underset{(*)}{=} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{1/2} \, dt \,(=)$

(*) $c'(t) = (1-\cos t, \sin t) \Rightarrow \|c'(t)\| = \sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$

$\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} = \sin^2 \varphi$

$t = 2\varphi \quad 1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$

$(=) \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \sin(t/2) \cdot dt = 2 \cdot 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \sin(t/2) \, dt =$

$= 4 \left[-\cos(t/2) \right]_0^{2\pi} = 4(1+1) = 8 \; u$

3

2) $\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = -\int_\gamma y\,dx + \int_\gamma x\,dy$

ja tenim la parametrització $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
$t \in [0, 2\pi]$

~~$(f \circ c)(t) =$ sigui $f_1(x,y) = y$, $f_2(x,y) =$~~

Prenc $f(x,y) = (-y, x)$

$(f \circ c)(t) = (-1 + \cos t, t - \sin t)$, $c'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

~~$\|c'(t)\| = 2\sin(t/2)$~~

$\Rightarrow \int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} (\underbrace{-1+\cos t}_{-(1-\cos t)}, t - \sin t) \cdot (1 - \cos t, \sin t) \, dt =$

$= \int_0^{2\pi} \left(-(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + t\sin t - \sin^2 t \right) dt =$

$= \int_0^{2\pi} (-1 + 2\cos t - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t) \cdot dt =$

$= \int_0^{2\pi} (-2 + 2\cos t + t\sin t) \, dt = -4\pi + 2\cancel{[\sin t]_0^{2\pi}} + \cancel{[t\sin t]_0^{2\pi}}$

$f = t \to f' = 1$ $+ [-t\cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, dt =$
$g' = \sin t \to g = -\cos t$

$= -4\pi - 2\pi + \cancel{[\sin t]_0^{2\pi}} = -6\pi$ 3/

3) $A(\Omega) = \int_0 \int_0 \int_0 dx$ ~~$x = 0 \rightarrow$ cicloide~~

$x = t - \sin t$ la x s'ha de moure entre 0

$y = 1 - \cos t$ i la x corresponent a la corba.

$x(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

$\int_0^{t - \sin t}$

~~$T(x,t) = (x, 1 - \cos t)$~~

~~on $x \in [0, t - \sin t]$~~

~~$t \in [0, 2\pi]$~~

~~$T_x = (1, 0)$~~ ~~$|T_x \times T_t| =$~~

~~$T_t = (0, \sin t)$~~

$\int_0^1$

(4) Sea $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ~~[illegible]~~ y $F: \cancel{\mathbb{R}}\ A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{V} \subset A$, F es de clase C^1 y ¿A ~~arcoconexo~~ estrellado? ~~entonces~~ Sea $\partial V = S$ una superficie parametrizada regular. Entonces $\int_V F \cdot dV = \int_S \operatorname{div} F \, dS$ (S ~~tiene la orientación inducida por V~~ con la orientación inducida)

¿cuál es?

Si V está constituido por $S_1, \ldots, S_m$ superficies cerradas regulares (a trozos) entonces $\int_V F \cdot dV = \cancel{\sum_{i=1}^{m}} \int_{S_i} \operatorname{div} F \, dS$.

NO

0,8 / 1

(5) Sea S una subvariedad regular m-dimensional, y sea φ ~~una~~ entonces $\forall p \in S$ $\exists \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $p \in \mathcal{U}$ i $\exists \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \varphi(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$ difeomorfismo tal que ~~a)~~ $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(S \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0, x_m > 0\}$.

Entonces, la orientación de la subvariedad en este punto viene dada por $\langle (D_p\varphi)^{-1}(e_1), \ldots, (D_p\varphi)^{-1}(e_m) \rangle$ ~~si se trata~~ $\langle (D_p\varphi)^{-1}(e_{m+1}), \ldots, (D_p\varphi)^{-1}(e_n) \rangle$, $\{e_i\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$

Si $m = 2$, $n = 3$, entonces es $\langle (D_p\varphi)^{-1}(e_3) \rangle$.

y también se puede relacionar con el producto ~~[illegible]~~ vectorial fundamental, de hecho resulta ser lo mismo, el vector normal a la superficie en el punto p.

¿cómo?

1,1 / 1

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de

QUALIFICACIÓ
4

(1)

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$b_n = a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}$

Utilitzo el criteri del quocient: $\lim \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n} =$

$= \lim \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim \frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{a_{2n+2}+a_{2n+1}} = \cancel{\lim \frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{}}$

$= \lim \frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{\underbrace{a_{2n+1}+a_{2n}}_{>0}+a_{2n}+a_{2n-1}} \underset{\text{si és } \neq \infty}{\overset{\uparrow}{<}} \lim \frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{a_{2n}+a_{2n-1}} = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ és convergent.

on $\frac{1}{b_n} > 0$ ~~b~~ [illegible] perquè $a_n > 0$

no això és cert
les desigualtats estrictes
poden no mantenir-se en el pas al límit
fins i tot encara que el límit existeixi

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

(2)

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ

3,5

Assignatura:

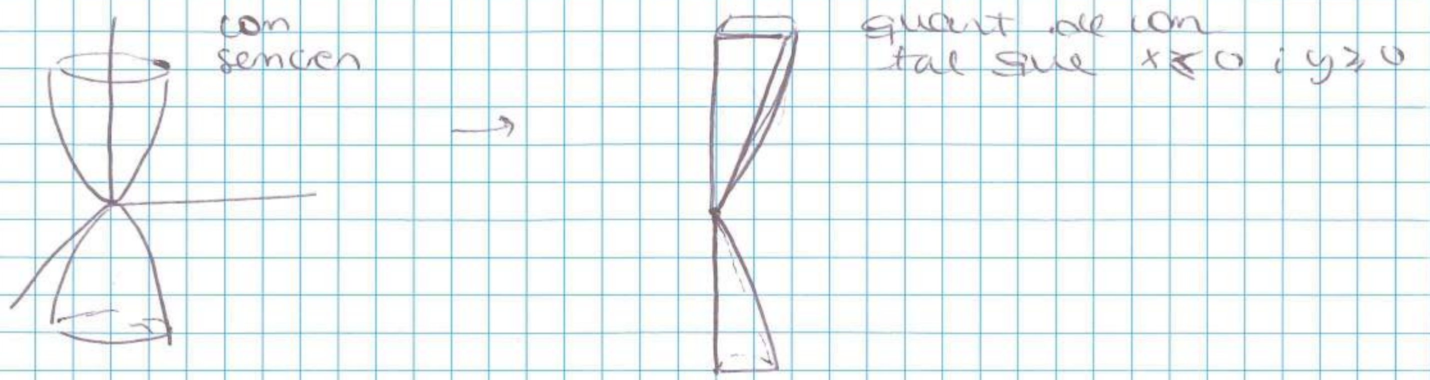
Estudiant/a:

Data:

~~$x \le 0, y \ge 0$~~

Els $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$

corresponen a un quart de con (on la $z \in (-\infty, +\infty)$)



Per obtenir A cal tallar-lo amb el pla $y+z=1$.

~~Això~~ ~~veiem~~ Així, tenim:

$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1-y \quad \forall x,y,z \in A$

$x \le 0$ i ~~$x^2 \le z^2 - y^2$~~ $z^2 \ge x^2+y^2$

~~$z=1-2y$ $x^2 \le 1-4y+4y^2-y^2$~~

$\longrightarrow 1-2y+y^2 \ge x^2+y^2 \rightarrow x^2 \le 1-2y \rightarrow$ $x \le \sqrt{1-2y}$, $x \ge -\sqrt{1-2y}$

$z = 1-y$

Per tant: $-\sqrt{1-2y} \le x \le 0$

i, finalment: $0 \le y \le 1$

$y+z \le 1$

$$\Rightarrow \int_A f = \int_0^{\cancel{1}} dy \int_{\cancel{-\sqrt{1-2y}}}^{0} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-y} dz \cdot \frac{z}{(1-x)^5} =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-2y}}^{0} dx \left\{ \frac{1}{(1-x)^5} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-y} \right. =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-2y}}^{0} dx \; \frac{1}{(1-x)^5} \cdot \left((1-y)^2 - x^2 - y^2 \right) =$$

?

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-2y}}^{0} dx \; \frac{1-2y-x^2}{(1-x)^5}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

(4)

Full 1 de 2

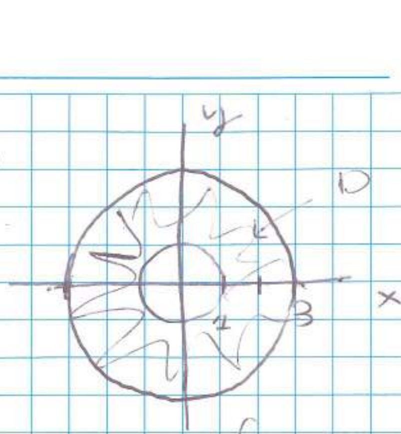
QUALIFICACIÓ 7

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

2) $z=0$



vector normal "capamunt" ~~$(z>0)$~~ $\uparrow \hat{z}$

Per calcular $\int_D d\alpha$ puc aplicar Stokes.

Llavors $\partial D = C_1 \cup C_2$ on $C_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9, z=0\}$

$C_2 = \{ \quad " \quad : x^2+y^2=1, z=0\}$

Parametritzo les corbes: $x = r\cos$

$c_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0) \quad t\in[0,2\pi]$

$c_2(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t\in[0,2\pi]$

$c_1'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0)$

$c_2'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

3

$c_1^{*}\alpha = (9\cos^2 t + 9\sin^2 t)\,3\cdot(-\sin t)\,dt + 9\cdot 3\cdot \cos t\,dt +$

$+ e^{3\cos t + 3\sin t}\cdot 0 = -\overset{27}{\cancel{18}}\sin t\,dt + \overset{27}{\cancel{18}}\cos t\,dt$

Anàlogament: $c_2^{*}\alpha = -\sin t\,dt + \cos t\,dt$

Per tant, $\int_D d\alpha = \int_0^{2\pi} \cancel{18}(-\sin t + \cos t)\,dt - \int_0^{2\pi}(-\sin t + \cos t)\,dt =$

$= 18\left[\cos t + \sin t\right]_0^{2\pi} - \left[\cos t + \sin t\right]_0^{2\pi} = 0$

3) 1) $\int_T F\cdot dS \underset{\text{Gauss}}{=} \int_V (\nabla\cdot F)\,dV$ ⊖

~~$\nabla\cdot F(x,y,z) = 1 - \frac{2(x^2+y^2)^{1/2} + 2x\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x}{x^2+y^2} + 1 - \frac{2(x^2+y^2)^{1/2} + 2y\,(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2y}{x^2+y^2}$~~

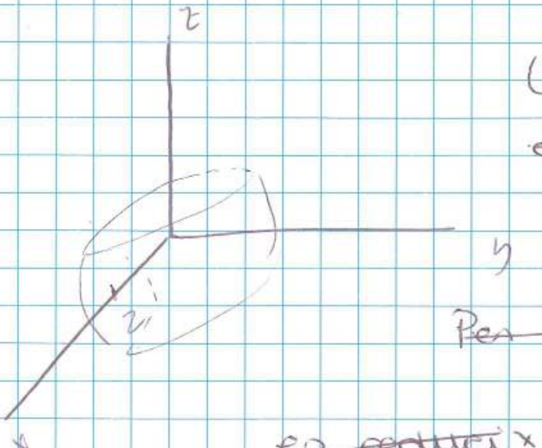
~~$+1-1-1 = 1 -$~~

Fabricat Ecològicament

$$D\cdot F(x,y,z) = 1 - 2\cdot\frac{(x^2+y^2)^{1/2} - x\,(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2+y^2} + 1 -$$

$$- 2\cdot\frac{(x^2+y^2)^{1/2} - y\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\,2y}{x^2+y^2} + 1 = 3 - 2\cdot\frac{2(x^2+y^2)^{1/2} - (x^2+y^2)^{-1/2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} =$$

$$= 3 - \frac{2-1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\cdot 2 = 3 - \frac{2}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$



~~$(x^2+y^2)^{1/2} = r$ = constant en el tor T.~~

~~De fet, $r = 2$.~~

~~Per tant, la integral a calcular es redueix~~

~~Parametritzo el tor~~ $\left\{\cancel{x = 2 + r\cos\varphi \quad r\in[0,1]},\ \cancel{y = 0},\ \cancel{z = r\sin\varphi \quad \varphi\in[0,2\pi]}\right.$

~~i el volum V que tanca:~~
Faig canvi de variable: $x = (2+r\cos\varphi)\cdot\cos\theta \quad \varphi,\theta\in[0,2\pi]$
$y = (2+r\cos\varphi)\sin\theta \quad r\in[0,1]$
$z = r\sin\varphi$

Sigui $G(\varphi,r,\theta) = (x(\,),y(\,),z(\,))$

Alehores $|JG| = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -(2+r\cos\varphi)\sin\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & (2+r\cos\varphi)\cos\theta \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$

$= +r\sin^2\varphi\sin^2\theta\,(2+r\cos\varphi) + r\cos^2\varphi\cos^2\theta\,(2+r\cos\varphi) + 0$
$+ (2+r\cos\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot r + \cos\varphi\cos\theta\, r\sin^2\varphi\cos^2\theta\sin\varphi(2+r\cos\varphi) =$
$= r(2+r\cos\varphi)(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\theta) =$
$= r(2+r\cos\varphi)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = r(2+r\cos\varphi)$

$$(D\cdot F\circ G) = 3 - \frac{2}{2+r\cos\varphi}$$

Per tant, $\int_V F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta\,\big(3r(2+r\cos\varphi) - 2r\big) =$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr\,(6r + 3r^2\cos\varphi - 2r) = $$

4

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3r^2 + r^3\cos\varphi - \frac{2r^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} d\varphi\,(3 + \cos\varphi - 1) = 2\pi\left[2\varphi + \sin\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 8\pi^2$$

3) $\int_T \omega$ Prenc la parametrització del tor:

~~$T(r,\varphi) = (2 + r\cos\varphi, 0, r\sin\varphi)$ $r\in(0,1]$ $\varphi\in[0,2\pi]$~~

~~$T_r = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$~~

~~$T_\varphi = (-r\sin\varphi, 0, r\cos\varphi)$~~ ~~$T_r \times T_\varphi = (0, r, 0)$~~

~~↑ està ben orientat cap a (cap a l'exterior) fer~~

~~$T^*\omega = 0$ perquè en tots els sumands~~

0

$T(\varphi,\theta) = ((2+\cos\varphi)\cos\theta, (2+\cos\varphi)\cdot\sin\theta, \sin\varphi)$

$T_\varphi = (-\sin\varphi\cos\theta, -\sin\varphi\sin\theta, 0)$

$T_\theta = (-\cos\varphi\sin\theta, \cos\varphi\cos\theta, \cos\theta)$

$T_\varphi \times T_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta\cos\theta, \sin\varphi\cos^2\theta, -\sin\varphi\cos\varphi)$

$T^*\omega = (2+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\theta$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 2

QUALIFICACIÓ
6,4

Assignatura: Càlcul Integral

Estudiant/a: [redacted]

Data: 6/7/17

Pregunta 1

Sea $F: [a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,c)$ $\forall c \in (a,b)$ y no integrable en $[a,b)$.

$\int_a^b F(t)dt$ converge absolutamente si $\int_a^b |F(t)| dt$ converge.

Además tenemos que: $\int_a^b F(t)\,dt$ converge absolutamente $\Rightarrow \int_a^b F(t)dt$ converge.

Demostración:

$\int_a^b F(t)dt$ converge absolutamente $\Leftrightarrow \int_a^b |F(t)|dt$ converge $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists t_0 \in (a,b): \left| \int_{t_1}^{t_2} |F(t)| dt \right| < \varepsilon$ si $t_0 < t_1 < t_2 < b$.

Cauchy

1

$\varepsilon > \left| \int_{t_1}^{t_2} |F(t)| dt \right| \geq \left\| \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \right\| = \left| \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt \right| \Rightarrow \int_a^b F(t)dt$ converge

Pregunta 2

Dada una superficie parametrizada: $\sigma: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(u,v) \longmapsto \sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

definimos las aplicaciones:

$$T_u \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial u} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \right)$$

$$T_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

El producto vectorial fundamental en el punto (u_0, v_0) es el vector

$T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)$

1,9

Una superficie parametrizada regular es una aplicación $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que σ es inyectiva, $\sigma \in C^1$ y $T_u \times T_v \neq 0$ para todo punto del dominio de σ.

En este caso, el producto vectorial fundamental nos da un vector normal a la superficie en cada punto, dotando a la superficie de una orientación.

¿por qué?

Pregunta 3

Un campo F es solenoidal • si $\exists G: F = \text{rot}\, G$. ¿dominios?

1,7 • si $\int_{S_1} F = \int_{S_2} F_2$ para S_1, S_2 superficie parametrizadas regulares en el dominio de F. t.q. $\partial S_1 = \partial S_2$

• si $\int_S F = 0$ para S superficie cerrada, es decir, que define un volumen en su interior.

Pregunta 4

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, D abierto, $f \in C^1(\bar{D})$ y D región cuyo borde es una superficie parametrizada regular cerrada. Entonces compacto

$$\int_{\partial D} f = \int_D \text{div}(f)$$

¿orientación?

Assignatura: Càlcul Integral

Estudiant/a:

Data: 6/11/12

Si el borde está constituido por un número finito de superficies cerradas regulares, se aplica el teorema a cada superficie y la integral sobre los bordes comunes se calcula dos veces pero con las orientaciones opuestas (se anulan) y sólo queda la integral sobre el borde de la región. ?? ¿expresión? ¿orientaciones?

1,6

Pregunta 5

Dada $\sigma: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma \in C^1(\bar{D})$, σ inyectiva, rang $J\sigma(p) = m$ $\forall p \in D$, la orientación de la subvariedad en el punto p_0 es la que asigna el vector

$$\begin{vmatrix} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(p_0) - \\ \vdots \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial x_n}(p_0) - \end{vmatrix}$$

??

En el caso de una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, la orientación viene dado por ~~el producto vectorial~~ vector: $T_u(p_0) \times T_v(p_0)$, donde

$T_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$T_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

definidas en la cuestión 2.

¿relación?

0,2

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ
9

Assignatura: Càlcul Integral

Estudiant/a: _

Data: 6/11/19

Problema 1

suc. parcial

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2n+2} + a_{2n+1}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi + 1 \geq 1 \text{ i finit}$$

Per tant, $\frac{b_{n+1}}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\varphi+1} < 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quocient}}}{\Longrightarrow} \sum b_n$ convergeix.

Assignatura: Càlcul Integral

Estudiant/a:

Data: 6/7/15

Problema 2

$$\left.\begin{array}{l} z^2=x^2+y^2 \\ z=1-y \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1-x^2}{2}$$ punts de tall entre les dues superfícies

Parametritzem el conjunt A: $\sigma(x,y,z)=(x,y,z)$ $\quad x\in(-1,0)$, $y\in(0,\frac{1-x^2}{2})$, $z\in(\sqrt{x^2+y^2},1-y)$

$$\int_{-1}^{0} dx \cdot \int_{0}^{\frac{1-x^2}{2}} dy \cdot \int_{(x^2+y^2)^{1/2}}^{1-y} dz \cdot \frac{z}{(1-x)^{5/2}} = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\frac{1-x^2}{2}} dy \frac{1}{2(1-x)^{5/2}}\left[1+y^2-2y-x^2-y^2\right] =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\frac{1-x^2}{2}} dy \frac{-2y+(1-x^2)}{2(1-x)^{5/2}} = \int_{-1}^{0} dx \frac{1}{2(1-x)^{5/2}}\left[(1-x^2)\frac{(1-x^2)}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2\right] =$$

$$\int_{-1}^{0} dx \frac{3(1-x^2)^2}{8(1-x)^{5/2}} = \int_{-1}^{0} \frac{3}{8}\frac{(1+x)^2}{(1-x)^{1/2}}dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}dx = -2(1-x)^{1/2}\Big|_{-1}^{0} = -2+2\sqrt{2}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(1-x)^{1/2}}dx \underset{\text{parts}}{=} -2(1-x)^{1/2}x^2\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -2(1+x)^{1/2}2x\,dx = 2\sqrt{2}+4\int_{-1}^{0} x(1-x)^{1/2}dx \overset{\text{parts}}{=}$$

$$= 2\sqrt{2}+4\left[\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}dx\right] = 2\sqrt{2}+4\left[-\frac{2}{3}2^{3/2}+\frac{2}{3}\left(\frac{-2}{5}\right)(1-x)^{5/2}\Big|_{-1}^{0}\right]$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ

10

Assignatura: Càlcul Integral

Estudiant/a:

Data: 6/11/10

Problema 3

1) $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|c'(t)\| dt$

$\|c'(t)\|^2 = 1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t = 2(1-\cos t) = 2 \cdot 2 \cdot \sin^2(\frac{t}{2}) = 4\sin^2(\frac{t}{2})$

$c'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ $\qquad \frac{1-\cos t}{2} = \sin^2(\frac{t}{2})$

3

$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2 \cdot |\sin(\frac{t}{2})| dt = 4\int_0^{\pi} |\sin(u)| du = 4 \int_0^{\pi} \sin u \, du = 4 \cdot (-\cos u)\Big|_0^{\pi} = 4 \cdot 2 = 8$

$\frac{t}{2} = u$

$\frac{1}{2} dt = du$

2) $F = (-y, x)$

$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} (F\circ c) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ t - \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 2\cos t - 1 - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t \, dt =$

$= \int_0^{2\pi} -1 - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t \, dt = -2\pi - \pi - \pi + \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt =$

sin x, cos x periòdiques amb període 2π $\qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2 x$

$= -4\pi + \int_0^{2\pi} t\sin t \, dt \overset{\text{parts}}{=} -4\pi + (-\cos t)\, t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos t) dt =$

$= -4\pi + 2\pi = \boxed{\cancel{-2\pi} = \int_\gamma F}$

-6π

3

3) Volem aplicar el teorema de Green a la funció F de l'apartat anterior.

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy \overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial\Omega} F\,dl = \int_{T} F\,dl + \int_{\gamma^-} F\,dl$$

$$\parallel$$

$$2\int_{\Omega} dxdy = 2\text{ àrea}(\Omega)$$

on T és ~~...~~ el segment $T=\{(x,y) : x\in(0,2\pi) ; y=0\}$.

Parametritzem T: $\sigma(x) = (x,0) \quad x\in(0,2\pi)$

$$\int_T F\,dl = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dx = 0$$

$$\int_{\gamma^-} F\,dl = -\int_{\gamma} F\,dl \underset{\substack{\uparrow\\ \text{apartat}\\ \text{anterior}}}{=} 2\pi.$$

$$\boxed{\text{àrea}(\Omega) = \pi}$$

4

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ

6

Assignatura: Càlcul Integral

Estudiant/a:

Data: 6/7/19

Problema 4

1) Parametritzem el tor: $\sigma(\theta, \varphi) = ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta)$ $\theta \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$

~~Observem que $\nabla \cdot G = F$, on $G = \left(\frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y^2}{2} - 2\sqrt{x^2+y^2}, \frac{z^2}{2}\right)$~~

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -2y\left(\frac{-1}{2}\right)2x\cdot(x^2+y^2)^{-3/2} - \left[(-2x)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot 2y\cdot(x^2+y^2)^{-3/2}\right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NO $\left[\int_{T=\partial V} F\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \int_V \nabla \times F\,dV = 0\right]$

$$\nabla F = 1 - \left[\frac{2(x^2+y^2)^{1/2} - 2x\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x}{x^2+y^2}\right] + 1 - \left[\frac{2(x^2+y^2)^{1/2} - 2y\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2y}{x^2+y^2}\right]$$

$$+ 1 = 3 - \left[\frac{2(x^2+y^2)^{1/2} - 2x^2(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2}\right] - \left[\frac{2(x^2+y^2)^{1/2} - 2y^2(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2}\right] =$$

$$= 3 - \frac{4(x^2+y^2)^{1/2} - 2(x^2+y^2)^{-1/2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 3 - \frac{(x^2+y^2)^{1/2}(-4-2)}{x^2+y^2} =$$

$+ \quad +$

$$= 3 + \frac{\cancel{6}\ 2}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Fabricat Ecològicament

!

Parametritzem V: $\gamma(r,\theta,\varphi) = ((2+r\cos\theta)\cos\varphi,\ (2+r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta)$ $\quad \theta\in(0,2\pi)$, $\varphi\in(0,2\pi)$, $r\in(0,1)$

~~Direcció de n?~~ OK

$$\int_{\partial V = T} F\cdot ds \overset{\text{Gauss}}{=} \int_V \nabla F\, dV = \int_V 3 + \frac{\cancel{6}\ 2}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx\,dy\,dz =$$

4 ~~3~~

$$= 3\cdot \text{volum}(V) + \cancel{6}\ 2 \int_V \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx\,dy\,dz =$$

OK ~~Direcció de n~~?

$$= 3\cdot\text{volum}(V) + \cancel{6}\ 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \cdot \frac{1}{((2+r\cos\theta)^2)^{1/2}} \underbrace{(+r(2+r\cos\theta))}_{\text{"jacobià del canvi"}} = 3\cdot 2\pi^2\cdot 2 + \cancel{6}\ 2\cdot 2\pi\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 12\pi^2 + \cancel{12\pi^2} = \cancel{24}\pi^2$$

2/ Apliquem Stokes: $\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha$

$\partial D = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^-$

$\gamma_1 = \{x^2+y^2=9;\ z=0\}$ Parametritzem: $\sigma_1(\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$ $\quad\theta\in(0,2\pi)$

$$\int_{\gamma_1^+}\alpha = \int_0^{2\pi} \{9\cdot 3\cdot(-\sin\theta)\,d\theta + 9\cdot 3\cdot\cos\theta\, d\theta\}? = 0$$

2

$\gamma_2 = \{x^2+y^2=1;\ z=0\}$ Parametritzem: $\sigma_2(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ $\quad\theta\in(0,2\pi)$

$$\int_{\gamma_2^+}\alpha = \int_0^{2\pi} \{\cancel{\cos\theta}\ 0\ (-\sin\theta)\,d\theta + \cos\theta\, d\theta\}? = 0 = \int_{\gamma_2^-}\alpha$$

$$\int_{\partial D}\alpha = \int_{\gamma_1^+}\alpha - \int_{\gamma_2^+}\alpha = 0$$

!? $\Rightarrow \forall\omega$!!

3/ $\int_T \omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial T = \emptyset} d\beta = 0$, on $d\beta = \omega$ $\quad \exists\beta?: d\beta = \omega$

0