Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full 1 de

QUALIFICACIÓ 8,9

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a:

Data:

Teoria

① Criterio de la raíz

Sea $\{a_n\}$ cualquiera $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, distinguimos los siguientes casos:

i) $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

ii) $l = 1 \Rightarrow$ el criterio no decide

iii) $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

1

dem: caso $l<1$:

Por la definición de límite: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$;

Cogemos ε tq $(\varepsilon + l) < 1$, entonces:

$(l-\varepsilon)^n < \underline{a_n < (l+\varepsilon)^n}$, como $l + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sum (l+\varepsilon)^n$ converge,

y por el criterio de comparación directa: $\sum a_n$ converge.

1

② Criterio comparación directa (integral)

Sean $f(x), g(x)$ funciones tq $f(x), g(x) \geq 0$, $f(x) \leq g(x)$, entonces:

i) $\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge

ii) $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge

0,7

Criterio comparación por cociente (integral)

Sean $f(x), g(x)$ funciones tq $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, entonces

sea $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$, distinguimos los siguientes casos:

i) $l \neq 0, \infty$, $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ tienen el mismo carácter de convergencia.

0,8

ii) $\ell = 0$, entonces:

- si $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge
- si $\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)$ diverge

OBS: En el enunciado de ambos criterios del punto 2: tenemos $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ como integrales impropias.

③ Una región elemental en $\mathbb{R}^n$ es aquella que cumple lo siguiente:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ región elemental, $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \gamma_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \gamma_2(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ con $\gamma_1, \gamma_2 \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tq D es una región elemental de $\mathbb{R}^{n-1}$.

0,3

conts

Si además D es un rectángulo, se trata de una región simple.

Teorema de Fubini (en $\mathbb{R}^n$):

Sea f integrable en $A \subset \mathbb{R}^n$, si $\exists\, \Pi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{\gamma_1(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\gamma_2(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n$,

Π es integrable en $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de manera que:

0,5

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) = \int_D \Pi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_D \int_{\gamma_1(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\gamma_2(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n$$

Veamos el caso de $\mathbb{R}^3$: Sea f int. en $A \subset \mathbb{R}^3$, si $\exists\, \Pi(x,y) = \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, entonces Π es integrable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y $\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_D dxdy \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

0,5

Si existe también $\Phi(x,z) = \int_{\phi_1(x,z)}^{\phi_2(x,z)} f(x,y,z)\, dy$ y $\Psi(y,z) = \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx$, entonces $\int_A f(x,y,z)$ tiene el mismo valor indistintamente de qué orden de integración tomemos.

existe y

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full ...... de ......

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a:

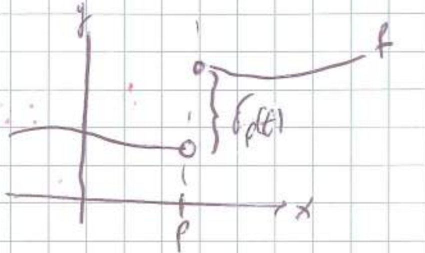
Data:

Teoria

(4) 4.1: La oscilación de f en un punto p es ¿$\delta_p(f)$?

Este término nos indica si hay alguna discontinuidad en f en el punto p, ya que se trata de la distancia que se encuentra entre los elementos de f en un entorno de p.

0,5



Por lo tanto, si el valor de la oscilación es cero, f es continua en p, sino, encontramos un punto de discontinuidad.

4.2: Un recubrimiento es un conjunto de conjuntos $\{B_j\}$ tq $A = \bigcup_j B_j$.

Entonces, decimos que A tiene medida cero si $\exists$ un recubrimiento por rectángulos $\{N_j\}$ tq $\sum_j v(N_j) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Por otro lado, A tendrá contenido cero si $\exists$ un recubrimiento $\boxed{\text{finito}}$ por rectángulos $\{N_j\}$ tq $\sum_j v(N_j) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $j = \{1 \dots n\}$.

Entre ambos conceptos existen las siguientes relaciones:

1,4

i) A tiene contenido cero $\Rightarrow$ A tiene medida cero (ya que si podemos recubrir A por un número finito de rectángulos, también podemos hacerlo por un número infinito)

ii) A ~~acotado~~ compacto y de medida cero $\Rightarrow$ A tiene contenido cero (ya que si A es finito y se puede recubrir por rectángulos tq $\sum_j v(N_j) < \varepsilon$, entonces podemos encontrar un número finito de $\{N_j\}$ que también lo recubran y mantengan que $\sum_j v(N_j) < \varepsilon$.

Fabricat Ecològicament

NO

ejemplos: Sea ~~A=B(p)~~ ¿A = N rectángulo cerrado. A tiene contenido. ~~medida~~ cero,? pero si $A = \{(x,y) \mid tq\ 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0\}$, al ser un conjunto infinito, A tiene medida cero.

⑤ parametrizaciones reg. equiv:

sean C_1, C_2 dos parametrizaciones tq:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ C_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$$ C_1, C_2 son regularmente equivalentes si $\exists g$ difeomorfismo tq $g : I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow I_2 \subset \mathbb{R}$ y $C_1 = (C_2 \circ g)$ clase C^1

$$\begin{tikzcd} I_1 \subset \mathbb{R} \arrow[d, "g"'] \arrow[r, "C_1"] & \mathbb{R}^n \\ I_2 \subset \mathbb{R} \arrow[ur, "C_2"'] & \end{tikzcd}$$

0,7

Teorema invariancia:

las integrales de línea de funciones vectoriales son:

$$\int_a^b (f \circ c)(t) c'(t)\, dt \quad , tq \quad c\, I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad I = [a,b]$$

1,5

Entonces, sean C_1, C_2 dos parametrizaciones regularmente equivalentes,

$$\left.\begin{array}{l} C_1 : I_1 = [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ C_2 : I_2 = [c,d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$$ tq $C_1 = (C_2 \circ g)$, g difeomorfismo, se cumple que

$$\int_c^d (f \circ c_2)(s)\, c_2'(s)\, ds = \pm \int_a^b (f \circ c_1)(t)\, c_1'(t)\, dt.$$ Teorema cambio variable

dem: (caso $g'(t) > 0$)
$$\int_c^d (f \circ c_2)(s)\, c_2'(s)\, ds = \int_a^b (f \circ c_2)(g(t))\, c_2'(g(t)) |g'(t)|\, dt =$$ regla cadena

$$= \int_a^b (f \circ c_2 \circ g)(t) \cdot (c_2 \circ g)'(t)\, g'(t)\, dt = \int_a^b (f \circ c_1)(t) \cdot c_1'(t)\, dt \quad \#.$$

OBS: para el caso con el ⊖, el resultado de la demostración es análogo pero sacando un signo negativo al quitar el valor absoluto de $|g'(t)|$, ya que $g'(t) < 0$.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ
3

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a:

Data:

Problema 1 $p_k = \sum_{i_{k-1} < i \leq i_k} a_i$ $p_0 = a_{i_0}$, $p_1 = a_{i_0} + a_{i_1}$
$p_2 = a_{i_1} + a_{i_2}$

3

1.1. $a_i \geq 0$ Supongamos a_i converge

$$\sum_{i \geq 0} a_i = \sum_{k \geq 0} p_k \Rightarrow \sum a_i = \sum_{i_{k-1} \leq i \leq i_k}$$

$$\sum_{i \geq 0} a_i = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_{k-1} \leq i \leq i_k} a_i$$

como $(i_k)_{k \geq 0}$ es una sucesión creciente (estricta) de naturales

$\sum_{k \geq 0} \sum_{i_{k-1} \leq i \leq i_k} a_i$ recorre a_{i_k}, $a_{i_k} \geq 0$

Sabemos que
~~ahora~~ p_k es una serie abs. convergente, ya que,
$\sum |p_k|$ converge, ya que $\sum a_i$ converge i $a_i \geq 0$

entonces podemos reordenar p_k de manera que queden al inicio de la serie los elementos sobrantes del $\sum p_k$ para que $\sum p_k$ se convierta en $b_n + a_i$, donde b_n son los elementos repetidos de a_i, sin que esto haga cambiar la convergencia ni la suma de p_k.

~~Además, si dividimos~~

De esta manera, en el término $p_k \equiv a_i$ i por lo tanto $\sum a_i = \sum p_k$. $\rightarrow$ p_k reordenamiento de a_n $\rightarrow$ mantiene su suma

$\rightarrow$ Si a_i diverge significa que a_i no está acotada (ya que es una sucesión monótona creciente), entonces p_k tampoco está acotada y $\sum a_i = \sum p_k = \infty$.

1.2: si $a_i \not> 0$ se puede encontrar una sucesión (i_k) tq p_k tenga un valor siempre ~~de cero~~ ≤ 0.

Entonces, podría ser que $\sum a_i = L$, $L > 0$ pero $\sum p_k = Q$, $Q < 0$;

por ejemplo → sea $a_i = \frac{1}{k}$ serie

$a_n = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, sabemos que $\sum a_n = \ln(2) > 0$,

pero podemos encontrar p_k un reordenamiento de a_n tq la suma no es la misma o que incluso diverja, ya que a_n no es una serie absolutamente convergente, sino condicionalmente convergente.

UPC Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ 3

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a:

Data:

problema 2

2.1: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^p(\ln x)^q}$ $f: [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [1,+\infty)$

$f \in C^1([1,+\infty))$ por ser la inversa de una función polinómica por una logarítmica (sin discontinuidades en el intervalo $[1,+\infty)$).

¡$\ln 1 = 0$!

f decreciente $\forall x$? $\forall p, q$?

$f(k) = a_k \ \forall k \geq M$;

Vemos que se cumplen las hipótesis del criterio de la integral, entonces $\Rightarrow \sum_{k=M}^{\infty} a_k \ C \iff \int_M^{+\infty} f(x)dx \ C$

0

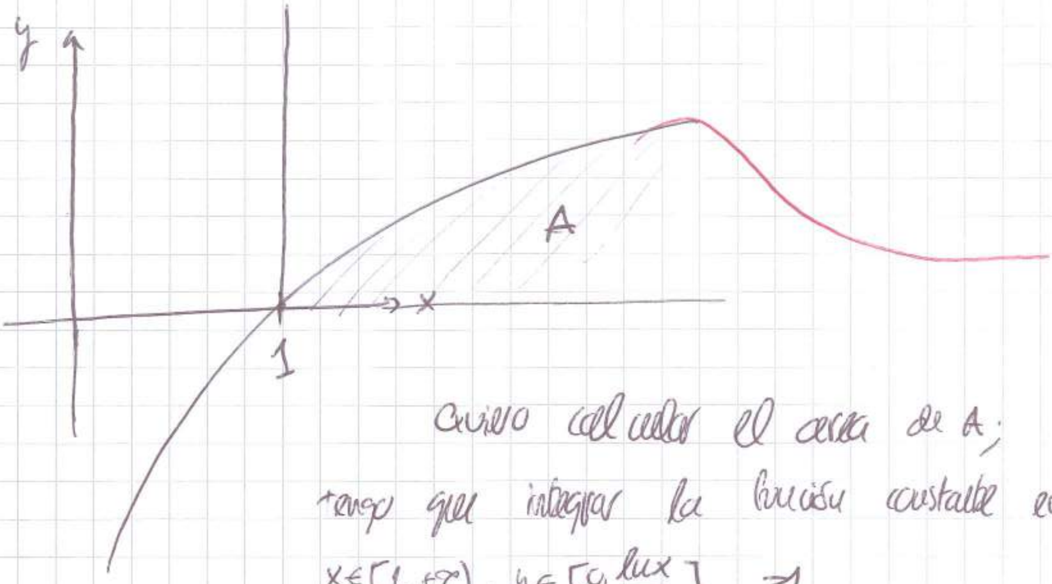
Estudiamos, pues, la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$ $\Rightarrow$ serie de Bertrand.

Sabemos que esta serie $\left.\begin{array}{l} \text{converge si: } p>1 \text{ ó } p=1 \text{ y } q>1 \\ \text{diverge si: } p<1 \text{ ó } p=1 \text{ y } q\leq 1 \end{array}\right\}$

por lo tanto, por el criterio de la integral $\Rightarrow$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$ $\left.\begin{array}{l} \text{converge si } p>1 \text{ ó } p=1 \text{ y } q>1 \\ \text{diverge si } p\leq 1 \text{ ó } p=1 \text{ y } q\leq 1 \end{array}\right\}$ #.

2.2- $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $x=1$, OX



Quiero calcular el área de A;

tengo que integrar la función constante en:

$x \in [1, +\infty)$, $y \in [0, \frac{\ln x}{x^2}]$ $\rightarrow$

$$A = \int_1^{\infty} dx \int_0^{\frac{\ln x}{x^2}} dy = \int_1^{\infty} dx \cdot y \Big|_0^{\frac{\ln x}{x^2}} = \boxed{\int_1^{\infty} dx \cdot \frac{\ln x}{x^2}}$$

es la serie de Bertrand con $p=2$, $q=-1$ $\rightarrow$ la serie converge

$\rightarrow$ por el criterio de la integral y el apartado anterior $\rightarrow \int_1^{\infty} dx \, \frac{\ln x}{x^2}$ C

acotada.

Calculo integral en A_u $\rightarrow$

$A_u = [1, u]$. Calculem $\lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{\ln x \, dx}{x^2}$

3

$$\rightarrow \int_1^u \frac{\ln x \, dx}{x^2} = \lim_{x \to u} -\frac{\ln x}{x} + \int_1^u \frac{1}{x^2} =$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{array}\right\} = -\frac{\ln u}{u} + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^u = \boxed{-\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u} + 1}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \int_1^u \frac{\ln x \, dx}{x^2} = \lim_{u \to +\infty} \left(-\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u} + 1 \right) = \boxed{1}$$

Por lo tanto, el área de la región A es 1.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

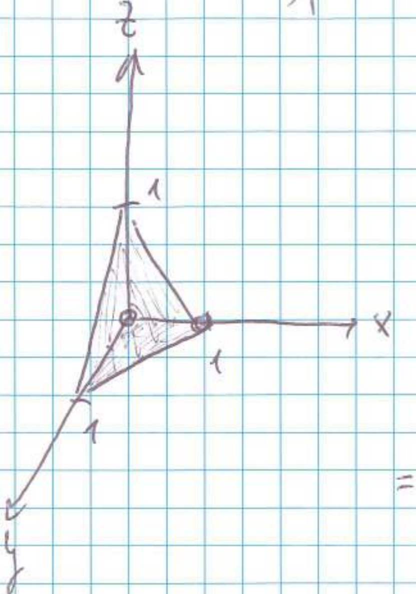
5

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a: _

Data: ______

Problema 3: $T = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$



3.1: $\int_T x\,dx$?

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy \cdot z\Big|_0^{1-x-y} =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} = \int_0^1 x\,dx \left(1-x-x+x^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right) =$$

$$= \int_0^1 dx\, x\left(1 \underbrace{-x-x}_{-2x} + x^2 - \frac{(1-2x+x^2)}{2}\right) = \int_0^1 dx \left(x - 2x^2 + x^3 - \frac{x-2x^2+x^3}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

5

Com que T només abarca una regió amb tots els elements positius. $\int_T y$ i $\int_T z$ tenen el mateix valor de $\frac{1}{24}$, ja que es tracta d'una regió invariant encara que moguem els eixos.

Fabricat Ecològicament

<u>3.2:</u> $f(x,y,z) = x$.

$\phi \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x+y-3z \\ -2x+2y+z \end{pmatrix}$$

per tant: $\phi(T) = \{(x,y,z)$ tq $-y \geq 0,\ 2x+y-3z \geq 0,\ -2x+2y+z \geq 0,$

$\underbrace{-\cancel{y} + \cancel{2x} + \cancel{y} - 3z - \cancel{2x} + 2y + z \leq 1}_{2y - 2z \leq 1} \}$

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full 1 de 1

QUALIFICACIÓ 9

Assignatura: Càlcul integral

Estudiant/a:

Data:

$\boxed{\text{Problema 4}}$ $\Omega = \{(x,y) \,/\, x^2 \le y \le 4x^2,\ x^4 \le y \le 9x^4,\ x \ge 0\}$

4.1: Calculem punts tall entre les funcions que formen la regió.

$y = x^2;\ y = 4x^2;\ y = x^4;\ y = 9x^4$

$\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = 9x^4 \end{matrix}\right\}$ $x^2 = 9x^4,\ x^2 - 9x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - 9x^2) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ 9x^2 = 1,\ \boxed{x = \frac{1}{3}} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = x^4 \end{matrix}\right\}$ $x^2 = x^4 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1;\ \boxed{x = 1} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} y = 4x^2 \\ y = 9x^4 \end{matrix}\right\}$ $4x^2 = 9x^4 \Rightarrow 4x^2 - 9x^4 = 0 \Rightarrow x^2(4 - 9x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 9x^2 = 4,\ \boxed{x = \frac{2}{3}} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} y = 4x^2 \\ y = x^4 \end{matrix}\right\}$ $4x^2 = x^4 \Rightarrow 4x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(4 - x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4,\ \boxed{x = 2} \end{cases}$

(en todos los casos cogemos sólo los x positivos ya que en la región se define $x \ge 0$)

Llavors $\displaystyle\int_\Omega f = \int_{1/3}^{2/3} dx \int_{x^2}^{9x^4} dy + \int_{2/3}^{1} dx \int_{x^2}^{4x^{2}} dy + \int_{1}^{2} dx \int_{x^4}^{4x^{2}} dy = \text{Area}(\Omega)$

$f = 1$

5

4.2: Cal que en quedi Ω com si fos un rectangle:

$\Omega = \{(x,y) \,/\, 1 \le \frac{y}{x^2} \le 4,\ 1 \le \frac{y}{x^4} \le 9,\ x > 0\}$

$\frac{y}{x^2} = u$, $\frac{y}{x^4} = v$

$u = \frac{y}{x^2};\ v = \frac{y}{x^4}$, $G^{-1} = (x,y) \longrightarrow (u,v)$
$(x,y) \longmapsto \left(\frac{y}{x^2}, \frac{y}{x^4}\right)$

~~G^{-1} inj $\Rightarrow$ $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \Leftrightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$~~

~~$\left(\frac{y_1}{x_1^2}, \frac{y_1}{x_1^4}\right) = \left(\frac{y_2}{x_2^2}, \frac{y_2}{x_2^4}\right) \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1^2} = \frac{y_2}{x_2^2}$ i $\frac{y_1}{x_2^2} = \frac{y_2}{x_2^4}$~~

~~i por lo tanto es inyectiva. Llavors G^{-1} inyectiva $\Rightarrow G$ inyectiva.~~

G^{-1} es de clase C^1 por ser polinómica $\Rightarrow G \in C^1$ $(x>0)$

$$|\det JG^{-1}| = \left|\begin{vmatrix} y\left(\frac{-2x}{x^4}\right) & \frac{1}{x^2} \\ y\left(\frac{-4x^3}{x^8}\right) & \frac{1}{x^4} \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{-4y}{x^5} & \frac{1}{x^4} \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left| \frac{-2y}{x^{12}} + \frac{4y}{x^{10}} \right| = \left| \frac{-2y}{x^{12}} + \frac{4yx^2}{x^{12}} \right| = \left| \frac{-2y+4yx^2}{x^{12}} \right| \neq 0 \text{ en } (0,0) \text{ y } \forall y \neq 0.$$

G^{-1} difeomorfismo

$\Downarrow$ Entonces podemos aplicar el teorema del cambio de variable para G difeomorfismo $x \neq 0$, $y \neq 0$ y resulta: Sabemos $|\det JG| = (|\det JG^{-1}|)^{-1}$

$$f=1 \qquad \int_{\Omega} f = \int_{G(\Omega)} (f \circ G)|\det JG| \, du\, dv = \int_{G(\Omega)} \frac{x^{12}}{-2y+4yx^2}$$

$$u = \frac{y}{x^2} \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$
$$v = \frac{y}{x^4} \Rightarrow \quad y = \frac{u^2}{v}$$

$G(u,v) \longrightarrow (x,y)$

G inyectiva $\Rightarrow (u_1,v_1)=(u_2,v_2) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_1}}, \frac{u_1^2}{v_1}\right) = \left(\frac{\sqrt{u_2}}{\sqrt{v_2}}, \frac{u_2^2}{v_2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_1}} = \frac{\sqrt{u_2}}{\sqrt{v_2}}$ i $\frac{u_1^2}{v_1} = \frac{u_2^2}{v_2}$

$\Leftrightarrow \boxed{v_1 = v_2 \Rightarrow u_1 = u_2}$

Entonces G inyectiva, $G \in$ clase C^1 por ser polinómica;

$$\det JG = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} & \frac{-\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{2u}{v} & \frac{-u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{-u^2}{2v^2\sqrt{uv}} + \frac{2u\sqrt{u}}{2v^2\sqrt{v}} \neq 0 \Leftrightarrow (u,v) \neq 0.$$

Aplicamos el T. de cambio de la variable:

$$\int_A f = \int_U \left| \frac{-u^2}{2v^2\sqrt{uv}} + \frac{2u\sqrt{u}}{2v^2\sqrt{v}} \right| du\, dv =$$

$$= \int_1^4 du \int_1^9 dv \left| \frac{-u^2}{2v^2\sqrt{uv}} + \frac{2u\sqrt{u}}{2v^2\sqrt{v}} \right| \quad \#.$$

4

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ 8,5

(1) Enunciado: Sea (a_n) sucesión tq $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Entonces: $\begin{cases} l<1 \to \sum a_n \text{ converge} \\ l>1 \to \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$

1

Dem: Supongamos $l<1$

$l = \lim \sqrt[n]{a_n} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \iff l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$ porque términos positivos.

Como $l<1$, tomo ε tq $K = l+\varepsilon < 1$. Se tiene $\sqrt[n]{a_n} < K \iff a_n < K^n$

La serie $\sum_{n\geq 0} K^n$ converge por ser serie geométrica de razón (K) menor que 1 en valor absoluto. Luego, por comparación directa $\sum (a_n)$ converge.

Análogo para $l>1$.

1

(2) Comp. directa: Sean f, g funciones integrables en ~~todo intervalo~~ el intervalo $[a,b]$ $\forall b>a$. $f(x), g(x) \geq 0$ $\forall x>a$ i tq $f(x) \leq g(x)$ $\forall x>a$

Entonces: $\int_a^\infty f$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g$ diverge

$\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty g$ diverge

0,7

Comp. por cociente: Sean f, g funciones integrables en $[a,b]$ $\forall b>a$. $f(x), g(x) \geq 0$ $\forall x>a$. Sea $l = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Entonces:

- $l=0$: $\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ converge
- $l=\infty$: $\int_a^\infty f$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g$ diverge
- $l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ tienen el mismo carácter de convergencia

0,8

(4) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~Definimos: M_δ~~ Sea $\delta > 0$. Sea $p \in D$

4.1 Se define: $M\delta(f,p) = \sup\{ f(x) \mid \|x-p\| < \delta \}$

$m\delta(f,p) = \inf\{ f(x) \mid \|x-p\| < \delta \}$ // 1

La oscilación de f en p se define como $\delta_p(f) := \lim_{\delta \to 0} M_\delta(f,p) - m_\delta(f,p)$. //

El significado es cuán grande es el salto que da la función en el punto p. ~~Si f es con~~ Se tiene el resultado f continua en p $\Leftrightarrow \delta_p(f) = 0$ //

4.2 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $U = \bigcup U_i$ un recubrimiento (no necesariamente finito) de C por rectángulos. Se dice que C tiene medida cero si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U_\varepsilon$ recubrimiento de C por rectángulos tq $\mu(U_\varepsilon) < \varepsilon$ siendo $\mu(U_\varepsilon)$ el volumen o medida del recubrimiento U_ε. //

Un conjunto C tiene contenido cero, si ~~los recubrimientos~~ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U_\varepsilon$ recubrimiento finito de C por rectángulos tq $\mu(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Claramente C contenido cero $\Rightarrow$ C medida cero.

El recíproco no es cierto //

En caso de C compacto, el recíproco sí es cierto, ya que para todo recubrimiento $\exists$ un ~~recu~~ subrecubrimiento finito. /

¿otro ej?.

1,2

(5) Sean $c_1 : I_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c_2 : I_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones regulares tq $\exists g : I_1 \to I_2$ difeomorfismo clase C^1 tq $c_1 = c_2 \circ g$. En tal caso, se dice que c_1 y c_2 son dos parametrizaciones regularmente equivalentes.

Se observa que $\operatorname{Im} c_1 = \operatorname{Im} c_2 = C$

1

Enunciado: Sean $c_1 : I_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c_2 : I_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tq $\exists g : I_1 \to I_2$ difeomorfismo C^1, $c_1 = c_2 \circ g$. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\int_{I_1} \vec{f} \cdot \vec{c_1'}(t)\, dt = \pm \int_{I_2} \vec{f} \cdot \vec{c_2'}(s)\, ds$$

0,3

Dem: Observamos ~~$c_2'(s$~~ $c_1'(t) = [c_2(g(t))]' = c_2'(g(t)) \cdot g'(t)$ (Regla de la cadena)

$$\int_{I_1} \vec{f} \cdot \vec{c_1'}\, dt = \int_{I_1} \vec{f} \cdot \left(\vec{c_2'}(g(t))\, g'(t) \right) dt \underset{\text{prod escalar lineal}}{=} \int_{I_1} \vec{f} \cdot \vec{c_2'}(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \underset{\text{Teorema cambio variable}}{=} \sigma \int_{I_2} \vec{f} \cdot \vec{c_2'}(s)\, ds$$

Donde σ es el signo de $g'(t)$, ya que para aplicar TCV, necesitamos el valor absoluto del det. del jacobiano.

Observamos que σ es constante, ya que si $g'(t)$ cambiase de signo en cierto $t \in I_1$, por ser continua (ya que $g \in C^1$) $\exists t_0 \in I_1$ tq $g'(t_0) = 0$, pero eso no puede ser, porque g es difeomorfismo.

1

3 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que D es <u>elemental</u> en $\mathbb{R}^n$ si:

$\exists\ \gamma_1 \gamma_2 : A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\gamma_1, \gamma_2 \in \cancel{C^1}$ conts y A es elemental en $\mathbb{R}^{n-1}$.

0,5 ↓ $(x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto \gamma_1(x_1, \dots, x_{n-1})$
$\gamma_2(x_1, \dots, x_{n-1})$

$$D = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A \ \text{ y } \ \gamma_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \gamma_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \}$$

<u>Enunciado</u>: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f integrable en D, D elemental en $\mathbb{R}^n$.

Entonces, $\cancel{\int_D f = \int_{\gamma_1(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\gamma_2(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n}$ Sea $\Gamma = \int_A$

??

Para $\mathbb{R}^3$:

(1) Siguin $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$ i $P_K = \sum_{k=0}^{K} p_i$ les ~~succ~~ sumes parcials.

1.1

~~Suposem $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ (ie, $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergeix).~~

~~$\forall G>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$ $A_n > G$~~

Com els termes són positius, (A_n) i (P_K) són successions creixents.

Observem que, donat $K\in\mathbb{N}$, podem trobar $n\in\mathbb{N}$ tq $P_K = A_n$ (1) i que, donat $n\in\mathbb{N}$ podem trobar ~~K, K~~ $K\in\mathbb{N}$ tq $P_{K-1}\leq A_n \leq P_K$ (2)

(això només és vàlid perquè els termes són ≥ 0) i per tant, (A_n) i (P_K) són creixents.

Volem veure que: $l = \lim_{n\to\infty} A_n \iff l = \lim_{K\to\infty} P_K$

~~$\Leftarrow$) $l = \lim P_K \iff \forall$ (Suposo $l\in\mathbb{R}$, per $l=\infty$ (ie, P_K divergent, és anàleg))~~

~~$\forall\varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq K$ $|P_K - l| < \varepsilon$~~ ~~Per (1),~~ ~~$\exists N\in\mathbb{N}$ tq $P_K = A_N$,~~

($\Leftarrow$) $l = \lim_{K\to\infty} P_K$, $l = \lim_{K\to\infty} P_{K-1}$. Per sandwitch, aplicant (2),

$\lim_{n\to\infty} A_n = l$ (Tant si $l\in\mathbb{R}$, com si $l=\infty$)

($\Rightarrow$) $l = \lim_{n\to\infty} A_n$ ~~Si $l\in\mathbb{R}$: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$ $|A_n - l| < \varepsilon$~~

Aplicant (1), (P_K) és una subsuccessió de (A_N). (A_N) té límit l si i totes subsuccessió seva té límit l, en particular, (P_K) té límit l

(tant si $l\in\mathbb{R}$, com $l=\infty$).

1.2 Sigui $(a_n) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1}$, $\nexists \lim_{n\to\infty}(a_n)$ $\cdot P_K = \begin{cases} 1 & K=1 \\ -1+1 & K>1 \end{cases}$

$\lim_{K\to\infty} P_K = \lim_{n\to\infty} 1 + (-1+1) + (-1+1) + \underbrace{\dots}_{n \text{ cops}} + (-1+1) = 1$,

~~$\lim_{n\to\infty} (1-1) + (1-1) + \underbrace{\dots}_{n \text{ cops}} + (1-1) = 0$~~

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Assignatura: _

Estudiant/a: _

Data: 11. 11. 14

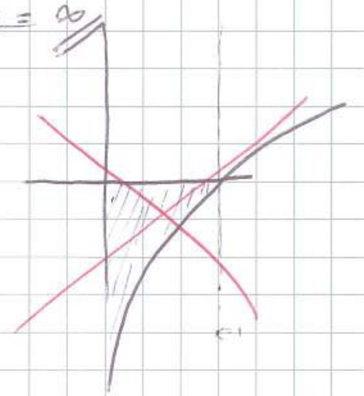
Full ...... de ......

QUALIFICACIÓ

5

(2)

2.2 $A = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\frac{1+\ln x}{x}\right]_0^1 = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{1+\ln x}{x} \underset{(1)}{=} 1-(-\infty) = \infty$



$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x^2}dx \to v = \frac{-1}{x}$

(1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$?

(Ver atrás)

2.1 Sea $f_{p,q} = \frac{1}{x^p(\ln x)^q}$ Observamos $f_{p,q} > 0 \quad \forall x \in (1,\infty)$

¿siempre? $\forall p,q$

$\int_1^\infty f$ es de 1ª y 2ª especie, por tanto $\int_1^\infty f$ C $\Longleftrightarrow$ $\int_1^2 f$ C y $\int_2^\infty f$ C

$f'_{pq} = \frac{-q(\ln(x))^{-q-1}\cdot\frac{1}{x}x^p - px^{p-1}(\ln x)^{-q}}{x^{2p}} = \frac{x^{p-1}}{x^{2p}}[\ln(x)]^{-q}\left[-q(\ln x)^{-1} - p\right] =$

$= -\frac{x^{p-1}}{x^{2p}}[\ln(x)]\underbrace{\left[q(\ln x)^{-1} + p\right]}_{¿\geq 0?} < 0 \quad \forall x \in (1,\infty) \Rightarrow f_{pq}$ decreciente $\cancel{\forall q}$.

¿donde?

Como $f_{p,q}$ es continua? de términos? no negativos y decreciente,

$\int_2^\infty f_{pq}$ C $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$ C !! que es la serie de Bertrand, que converge si:

$\begin{cases} C & p>1 \text{ ó } p=1 \text{ y } q>1 \\ D & \text{en otros casos} \end{cases}$

Si $\int_2^\infty f_{pq}$ es D $\Rightarrow \int_1^\infty f_{pq}$ D.

A partir de ahora, $p > 1$ ó $p = 1$ y $q > 1$

Estudiamos la convergencia de $\int_1^2 f_{pq}$

$\boxed{p=1}$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^q}\,dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^y (y-0)^q} e^y\,dy = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{y^q}\,dy$ D porque $q > 1$

Cambio var: $y = \ln x$

$dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = x\,dy = e^y\,dy$

$\boxed{p>1}$ Haciendo el mismo cambio de variable que antes:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^p(\ln x)^q}\,dx = \int_0^{\ln 2} e^{(1-p)y} \frac{1}{y^q}\,dy$$

Comparando con $\frac{1}{y^q}$: $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\frac{e^{(1-p)y}}{y^q}}{\frac{1}{y^q}} = \lim_{y\to 0} e^{(1-p)y} = e^0 = 1$

Por tanto, $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{(1-p)y}\frac{1}{y^q}\,dy$ $C \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{1}{y^q}\,dy$ $C \Leftrightarrow q < 1$

$$\boxed{\text{En conclusión, } \int_1^\infty f_{p,q}\ C \Leftrightarrow p>1 \text{ y } q<1}$$

$\boxed{3.1.}$

$A = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\left[\left[\frac{1+\ln x}{x}\right]_2^\infty + \left[\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^2\right] = 0 - \frac{1+\ln 2}{2} + \frac{1+\ln 2}{2} - 1 = \boxed{-1}$

¿? ¿?! ¿?

¡¡ <0 !!

O

¡Qué bien!

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full .... de ....

QUALIFICACIÓ 7

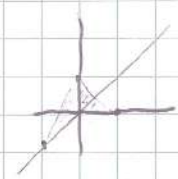
Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 11. 11. 14

(3)

3.1 ~~$\int_T f = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\,dy\,dz = \boxed{\frac{1}{2}}$~~



$\int_T y = \int_T z = \frac{1}{3}$ perquè ~~la regió és~~ el paper que fan les 3 variables en la definició de la regió és simètric, per tant la integral d'una d'aquestes variables ha de donar el mateix valor per a les 3. OK

3.2 $\int_{\Phi(T)} f \overset{TCV}{=} \int_T (f\circ\Phi)\,|\det A| = \int_T -4y = -4\int_T y = -4\cdot\frac{1}{3} = \cancel{2}\quad \boxed{-\frac{4}{3}}$

$|\det A| = \left|\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = |-6+2| = |-4| = 4$

5

$(f\circ\Phi)(x,y,z) = -y$

$\int_T f = \int_0^1 dz \int_0^{1\ (1-z)} dy \int_0^{1-y-z} x\,dx = \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{(1-y-z)^2}{2}\,dy = \int_0^1 dz\left(-\frac{1}{3}\right)\left[(1-y-z)^3\right]_{y=0}^{y=1} =$

2

$= \int_0^1 -\frac{1}{3}\left[(-z)^3 - (1-z)^3\right] dz = \left[\frac{1}{12}z^4\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}(1-z)^4\right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 11. 11. 14

Full

QUALIFICACIÓ

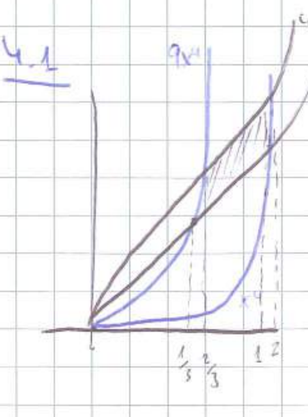
10 ← 2.5

(4)

Observem que $\Omega = \left\{(x,y) \mid 1 \le \frac{y}{x^2} \le 4,\ 1 \le \frac{y}{x^4} \le 9,\ x>0\right\} \sqcup \left\{(x,y) \mid \begin{smallmatrix} y=0 \\ x=0 \end{smallmatrix}\right\}$ (unió disjunta)

Com $\left\{(x,y) \mid \begin{smallmatrix} y=0 \\ x=0 \end{smallmatrix}\right\}$ és de mesura nul·la, $\int_\Omega f = \int_{\Omega \setminus \{(x,y) \mid y=0, x=0\}} f$ per qualsevol f

4.1



Els punt de tall són: $4x^2 = 9x^4 \Rightarrow 4 = 9x^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

(Dibuix esquemàtic, no a escala)

$4x^2 = x^4 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = 2$

$x^2 = 9x^4 \Rightarrow 1 = 9x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$x^2 = x^4 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = 1$

$$A = \int_{1/3}^{2/3}\int_{x^2}^{9x^4} dy\,dx + \int_{2/3}^{1}\int_{x^2}^{4x^2} dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{x^4}^{4x^2} dy\,dx$$

1.25

4.2 Sigui $\Omega' = \Omega \setminus \left\{(x,y) \mid \begin{smallmatrix} y=0 \\ x=0 \end{smallmatrix}\right\}$. Fent el canvi de variable $\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{y}{x^2} \\ v = \frac{y}{x^4} \end{array} \right.$

Treballant en Ω', $x, y \neq 0$, $x, y > 0$

$\frac{u}{v} = x^2 \Rightarrow x = \left(\frac{u}{v}\right)^{1/2}$, $y = u x^2 = u \cdot \frac{u}{v} = \frac{u^2}{v}$. El canvi és bijectiu perquè es pot aïllar x, y en funció de u, v.

$$|\det J| = \left|\,\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{uv}\right)^{1/2} & -\frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{v^{3/2}} \\ \frac{2u}{v} & -\left(\frac{u}{v}\right)^2 \end{vmatrix}\,\right| = \left| -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{v^{5/2}}\right) + \frac{u^{3/2}}{v^{5/2}} \right| = \left| \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{v^{5/2}} \right| = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{v^{5/2}}$$

$$\boxed{A} = \int_1^4\int_1^9 \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{v^{5/2}}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_1^4 -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{v^{3/2}}\right]_1^9 u^{3/2}\,du = \frac{-1}{3}\int_1^4 \left(\frac{1}{9^{3/2}} - 1\right) u^{3/2}\,du = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{27}\right)\frac{2}{5}\left[u^{5/2}\right]_1^4 =$$

$$= \boxed{\frac{2}{15}\left(1 - \frac{1}{27}\right)\left(2^5 - 1\right)}$$

1.25

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full ...... de ......

QUALIFICACIÓ

6,5

Assignatura:

Estudiant/a:

Data: 11-11-14

1- Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie de términos no negativos ($a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Entonces si $\exists \lim_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a_n}\} = l \in \mathbb{R}$ entonces:

- Si $l > 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge

1

- Si $l < 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge

- Si $l = 1 \Rightarrow$ No podemos decir nada

Demostración

Por la definición de límite $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (l-\varepsilon)^n < a_n < (l+\varepsilon)^n$$

Si $l > 1$, tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $(l-\varepsilon) > 1$. Entonces:

$$1 = 1^n < (l-\varepsilon)^n < a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_n > 1$$

1

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ No se verifica la condición necesaria de convergencia.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es divergente

2- Sean $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

integrales impropias. Supongamos que son integrales con impropiedad en b.

Definimos $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ y $G(t) = \int_a^t g(x)\,dx$ para $t \in (a,b)$

y recordemos que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} F(t)$ (análogo para $g(x)$)

Criterio de comparación directa

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a,b)$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \text{, es decir } \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx \leq \lim_{t \to b} \int_a^t g(x)dx$$

Por lo tanto

0,7

- Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ converge
- Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Longrightarrow$ $\int_a^b g(t)\,dx$ diverge

Criterio de comparación por cociente

Supongamos $g(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces si $\exists \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$

$<\infty$

- Si $l \neq 0$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ tienen el mismo carácter de convergencia

faltan casos

0,3

3- Una región elemental ~~A~~ A en $\mathbb{R}^n$ es $A = \{(x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\exists\, \Psi_1, \Psi_2$ aplicaciones $\Psi_1, \Psi_2 : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$

funcs. conts

$$\tilde{p} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \longmapsto x_i$$

0,4

tal que $\forall\, \underbrace{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}_{\tilde{p}} \in B$, $\Psi_1(\tilde{p}) < x_i < \Psi_2(\tilde{p})$, $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A$ y B es región elemental en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema de Fubini

Sea A región elemental en $\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en A

y $\exists\, \cancel{\int_B f}$ NO

(siendo $\Psi_1, \Psi_2, B, \dots$ las definidas anteriormente)

$$\Longrightarrow \int_A f = \int_B \left(\int_{\Psi_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}^{\Psi_2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)} f \, dx_i \right) \cancel{f}$$

ha de existir

La $\int_A f$ existe y tiene este valor

(confuso)

Para $\mathbb{R}^3$, tenemos:

0,3

Sea A región elemental en $\mathbb{R}^3$, $A = \{(x, y, z)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Supongamos $\exists\, \Psi_1, \Psi_2$ tal que $\Psi_1(x, y) < z < \Psi_2(x, y)$ y $(x, y, z) \in A$.

Y sea f integrable en A y $B = \{(x, y)\}$ tal que $\exists z \in \mathbb{R};\ (x, y, z) \in A$

Entonces:

$$\int_A f = \int_B \left(\int_{\Psi_1(x, y)}^{\Psi_2(x, y)} f \, dz \right) f$$

??

confuso (y falta precisar)

Fabricat Ecologicament

4-

4.1.- Tomemos B una bola de centro x y radio $\varepsilon>0$. Y consideremos los puntos y de B.

Entonces la oscilación de una función f en un punto p se define como

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\max_{y\in B}\|f(x)-f(y)\|\right)$$

NO

y suf

Vemos que una condición necesaria y para que f sea continua es que el valor de la oscilación en cualquier punto de su dominio sea cero.

0,3

1

4.2.-

Un conjunto A es de medida cero si $\forall\varepsilon>0,\ \varepsilon\in\mathbb{R}$ existe $\{N_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ rectángulos tal que

$A\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}N_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}}v(N_j)<\varepsilon$. Es decir $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ recubrimiento por rectángulos tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}}v(N_j)<\varepsilon$.

Un conjunto A es de contenido cero si $\forall\varepsilon>0,\ \varepsilon\in\mathbb{R}$ existe $\{N_j\}_{1\le j\le n}$ finito tal que $A\subset\bigcup_{j=1}^{n}N_j$ y $\sum_{j=1}^{n}v(N_j)<\varepsilon$ (existe un recubrimiento finito y $\sum_{j=1}^{n}v(N_j)<\varepsilon$.

Por definición A ~~con~~ tiene contenido cero $\Longrightarrow$ A tiene medida cero

Y si A es compacto y tiene medida cero $\Longrightarrow$ A tiene contenido cero

1,2

¿ejs?

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

QUALIFICACIÓ

Full ... de ...

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

5 – Sean $C_1 :$ [redacted] $: I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones
$C_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$t \longmapsto (x_1(t), \dots x_n(t))$

~~regularmente equivalentes~~

C_1 y C_2 son parametrizaciones regularmente equivalentes si $\operatorname{Im} C_1 = \operatorname{Im} C_2 = C$ (son parametrizaciones de la misma curva) y $\exists g$ difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$; $g : \operatorname{Dom} C_1 = I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \underset{\operatorname{Dom} C_2}{I_2} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{C_1 = C_2 \circ g}$$

1

Entonces se verifica

$$\int_C f = \int_{I_1} (f \circ C_1) \cdot C_1' = \pm \int_{I_2} (f \circ C_2) \cdot C_2'$$

0,3

Veamoslo

$$\int_{I_1} (f \circ C_1) \cdot C_1'(t)\, dt =$$

?

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Full ... de ...

QUALIFICACIÓ 2

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p (\ln x)^q}$

Veiem que per a $p<0$ no es verifica la condició necessària de convergència:

• Si $p<0$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p(\ln x)^q} \underset{x^p >> (\ln x)^q}{=} \infty$ (ordre d'infinits) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Si } p<0 \text{ la integral divergeix}}$

En els altres casos sí que es verifica aquesta condició (No ho he comprovat aquí, perquè és una condició necessària però no suficient; ara veurem condicions suficients)

$\boxed{p>0}$

Tenim $f(x) = \frac{1}{x^p \cdot (\ln x)^q}$ $\quad f(x) > 0 \quad \forall x >> x_0$ ~~, f(x) és monòtona decreixent~~

Si q és senar, $\underbrace{\text{els primers termes}}$ són negatius ?

~~(per exemple $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$)~~ ! 1 !

$f \in C$?

També $\exists\, x_0$ tq $f(x)$ és monòtona decreixent a partir d'aquest x_0 ? OK

Veiem-ho:

$x^p \cdot (\ln x)^q$ és ~~una~~ el producte de 2 funcions. x^p és una funció creixent per a $p>0$

el logaritme de x també és creixent $\Rightarrow$ El logaritme de x elevat a la q tb és creixent, si $q>0$

$\Downarrow$

$x^p \cdot (\ln x)^q$ és creixent si $q>0$ $\Rightarrow \frac{1}{x^p (\ln x)^q}$ és decreixent si $q>0$, $p>0$.

Si $q<0$ Tenim $f(x) = \frac{(\ln x)^{-q}}{x^p}$ I com $\ln x << x$ a l'infinit $\not\Rightarrow$ ¿ $\exists x_0$? tal que

$f(x)$ és monòtona decreixent a partir d'aquell punt.

Fabricat Ecològicament

Seguint el criteri de la integral tenim una successió $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^q \cdot n^p}$ que verifica

$a_{n_0} > a_{n_0+1} > \dots > a_n > \dots > 0$ i una funció g decreixent a partir de n_0

tal que $\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = a_n$

depende de q. Si $q > 0 \Rightarrow \int_1^\infty = \int_1^q + \int_q^\infty$

Aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i la integral $\int_1^\infty g(x)\,dx$ ~~tenen el ~~mateix~~ caràcter.~~

$\ln 1 = 0$!

Observem que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p (\log n)^q} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és la sèrie de Bertran. Per tant

$\Rightarrow \int_a^\infty C$

$\boxed{\text{• Si } p > 1 \quad \text{o} \quad p = 1 \text{ i } q > 1} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergeix ~~$\Rightarrow$ La integral convergeix~~

(#)

$\boxed{\text{• Si } 0 < p < 1 \quad \text{o} \quad p = 1 \text{ i } q \leq 1} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergeix ~~$\Rightarrow$ La integral divergeix~~

2

$\Rightarrow \int_a^\infty D$

Ens falten els casos $p = 0$ i $p = 1$?

$\boxed{p = 0}$

$g(x) = \dfrac{1}{(\ln n)^q}$

• $\boxed{\text{Si } q < 0} \rightarrow$ No es verifica la condició necessària de convergència:

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^q} = \underset{q<0}{\uparrow}\infty \Longrightarrow$?

I

~~Bàsicament~~ $\boxed{\text{Si } 0 \leq q \leq 1}$ $\Rightarrow$ Pel criteri de comparació directe veiem que com

$\dfrac{1}{(\ln n)^q} \geq \dfrac{1}{n^q}$ $\quad \sum \dfrac{1}{n^q}$ divergeix per a $q \in [0, 1] \Rightarrow \sum \dfrac{1}{(\ln n)^q}$ divergeix

$\Updownarrow$?

• Si $\boxed{q > 1}$

$\dfrac{1}{(\ln n)^q} \underset{x = \ln n}{\downarrow}= \dfrac{1}{x^q}$ $\Rightarrow$ ~~Sèrie harmònica~~ $\|$ convergeix per a $q > 1$!

~~$\Downarrow$ La integral convergeix~~

si $x \in N$

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Finalment si $p = 1$ Mire (#).

Tenim $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^q}$

Usem el criteri de comparació en el límit amb $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(\ln n)^q}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^q}.$$

Si $q < 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, $\sum b_n$ divergeix (sèrie harmònica, $\alpha = 1$) $\Rightarrow \sum a_n$ divergeix $\Rightarrow$ la integral divergeix

Si $q = 0$: $\cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}} =$ $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum a_n$ divergeix $\Rightarrow$ la integral divergeix.

Si $q > 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^q} = 0 \Rightarrow$ No podem dir res ? Mire (#).

$q > 0$

0

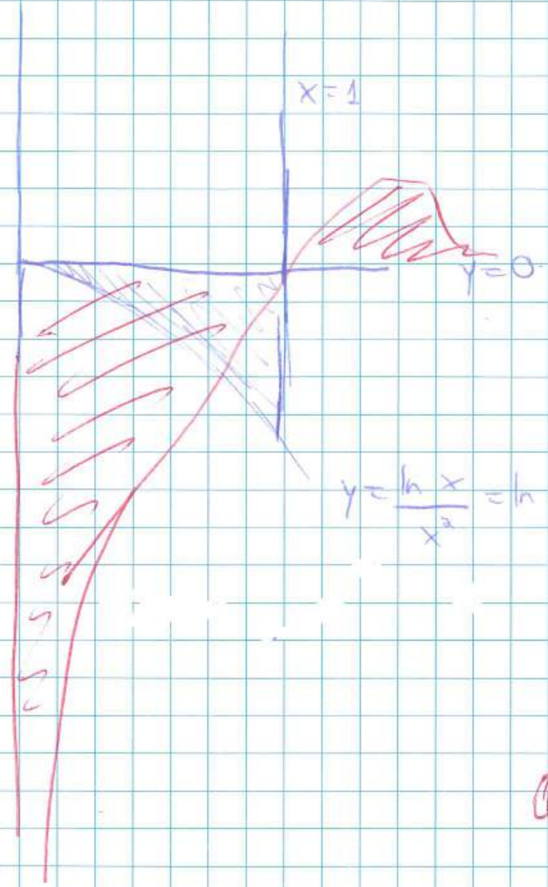
2.2.- Àrea limitada per corba $y = \frac{\ln x}{x^2}$, recta $x = 1$ i eix OX

~~$0 \le x \le 1 \longrightarrow \ln x \le 0$, $x \in [0,1]$, $x^2 > 0$ $\Big\}$ $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $0 \ge y \ge \frac{\ln x}{x^2}$~~

Tenim $0 < x \le 1$

ln x no està definit per $x \le 0$

$$\frac{\ln x}{x^2} \le y \le 0$$



$y = \frac{\ln x}{x^2} = \ln x \cdot \frac{1}{x^2}$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\frac{\ln x}{x^2}} dy = \text{Àrea} =$$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

0

Cal fer un canvi de variable

~~Fem un canvi de variable $z = \frac{\ln x}{x^2}$.~~ ~~Així $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} < z <$~~

~~Així: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} = \infty$~~

↓

1 són infinitèssims equivalents

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full .... de ....

QUALIFICACIÓ

10

Assignatura:

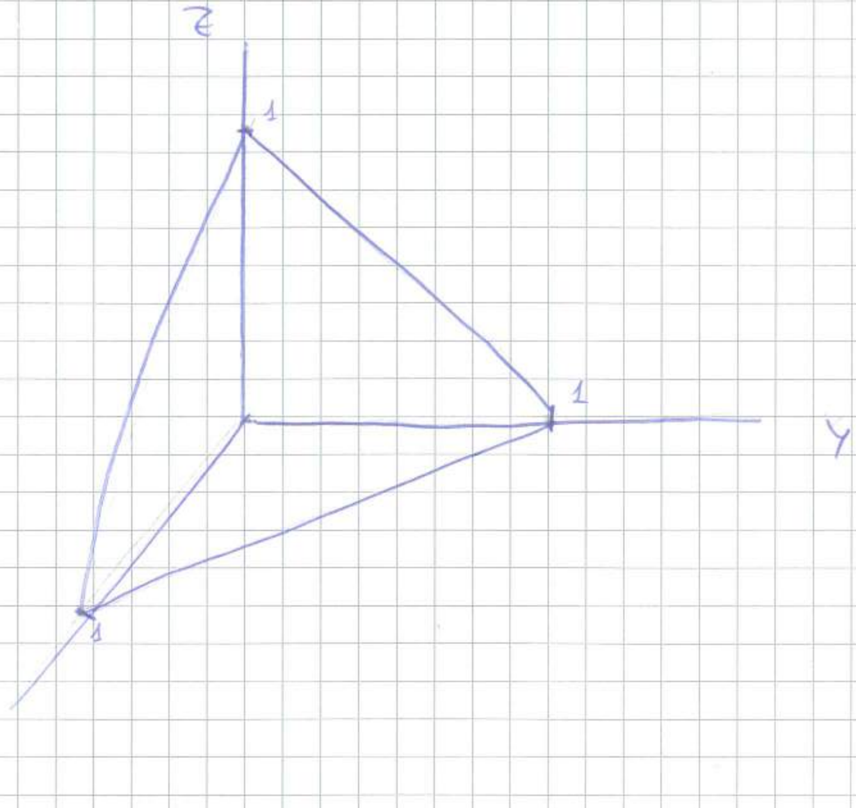
Estudiant/a:

Data:

3- $T=\{(x,y,z) \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}$

3.1.- $f(x,y,z)=x$ $\quad \int_T f$

Tenim:



Així: $\quad 0\leq x\leq 1$

$x+y+z\leq 1 \rightarrow 0\leq z\leq 1-x-y$

I $\quad y\geq 0$

$y\leq 1-z-x \underset{z\geq 0}{\leq} 1-x$

Així

$$\int_T f=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}x\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x\cdot(1-x-y)\,dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)\,dy=\int_0^1\left[xy-x^2y-\frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$= \int_0^1 \left(x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1+x^2-2x)}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 - \frac{x + x^3 - 2x^2}{2} \, dx = \int_0^1 \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 - x - x^3 + 2x^2}{2} \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x - 2x^2 + x^3 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6 - 8 + 3}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

5/

El valor de $\int_T y$ i $\int_T z$ és $\int_T x$, és a dir $\frac{1}{24}$ ja que la regió ~~és si~~ és simètrica respecte x, y, z (respecte totes les variables) i la funció que estem integrant ~~com és la~~ és la mateixa (únicament es canvia la variable).

3.2.-

$$\int_{\Phi(T)} f \overset{\text{Teorema del canvi de variable}}{=} \int_T (f \circ \Phi) \cdot |\det J\Phi|$$

I Φ ve definida per A. Tenim $\Phi(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-y, 2x+y-3z, -2x+2y+z)$.

~~$\Phi(1,0,0) = 0$~~

Per tant $\Phi(x,y,z) = (u,v,t) = (-y, 2x+y-3z, -2x+2y+z)$.

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Full .... de ....

QUALIFICACIÓ

La matriu $J\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ i el seu determinant és $\det J\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -6 + 2 = -4$

5

Per tant

$$\int_{\Phi(T)} f(u,v,t)\, du\, dv\, dt = \int_T (f \circ \Phi)(x,y,z) \cdot |\det J\Phi|\, dx\, dy\, dz =$$

$\hookrightarrow f(\Phi(x,y,z)) = u = -y$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (-y)\cdot 4\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-4y)\cdot(1-x-y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-4y + 4xy + 4y^2)\, dy = \int_0^1 dx \left[-2y^2 + 2xy^2 + \frac{4y^3}{3}\right]_0^{1-x} =$$

$$\cancel{= \int_0^1 \left(-2 + 2x + \frac{4}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{2}{3}\right) dx = x^2 - \frac{2}{3}x \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} =}$$

$$\cancel{= \boxed{\frac{1}{3}}}$$

$$= \int_0^1 \left(-2(1-x)^2 + 2x(1-x)^2 + \frac{4}{3}(1-x)^3\right) dx = \int_0^1 -2(1+x^2-2x) + 2x(1+x^2-2x) +$$

$$+ \frac{4}{3}\cdot(1-x)\cdot(1+x^2-2x)\, dx = \int_0^1 \cancel{(2x-2)(1+x^2-2x)} - 2 - 2x^2 + 4x + 2x + 2x^3 - 4x^2$$

$$+ \frac{4}{3}(1 + x^2 - 2x - x - x^3 + 2x^2)\, dx = \int_0^1 -\frac{2}{3} + 6x - 4x - 6x^2 + 4x^2 + 2x^3 - \frac{4}{3}x^3\, dx =$$

$$= \int_0^1 -\frac{2}{3} + 2x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 \, dx = -\frac{2}{3}x + x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full ...... de ......

QUALIFICACIÓ 0

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

4-

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 \le y \le 4x^2,\ x^4 \le y \le 9x^4,\ x \ge 0\}$$

Com $x \ge 0 \Rightarrow 0 \le x^2 \le y$; Ω està definida en el 1r quadrant.

Veiem quines fronteres té Ω i els punts d'intersecció:

Fr 1: $x^2 = y$ — Fr 3: $y = x^4$

Fr 2: $y = 4x^2$ — Fr 4: $y = 9x^4$

Fr 1 ∩ Fr 3: $x^2 = x^4 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm x^2 ;\ x = 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Fr 1 ∩ Fr 4: $x^2 = 9x^4 \begin{cases} x = 0 \\ 1 = 9x^2 ;\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

Fr 2 ∩ Fr 3: $4x^2 = x^4 \begin{cases} x = 0 \\ 4 = x^2 ;\ x = 2 \end{cases}$

Fr 2 ∩ Fr 4: $4x^2 = 9x^4 \begin{cases} x = 0 \\ 4 = 9x^2 ;\ x = \underbrace{\sqrt{\frac{4}{9}}}_{x \ge 0} = \frac{2}{3} \end{cases}$

0

Veiem que x pren valors $x \in [0,2]$ i $x^2 \le x^4 \le y \le 4x^2 \le 9x^4$

ja que $x^2 \le x^4$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i $4x^2 \le 9x^4$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Així: $\left[\text{Àrea}(\Omega) = \int_0^2 dx \int_{x^4}^{4x^2} dy \right] = \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 \Rightarrow$

Per definició d'integral

$$\Rightarrow \text{Àrea}\ (\Omega) = \frac{4\cdot 8}{3} - \frac{32}{5} = \frac{5\cdot 32 - 3\cdot 32}{15} = \frac{2\cdot 32}{15} = \frac{64}{15}$$

4.2.-