PROBLEMA D'AVALUACIÓ CONTINUADA
ÀLGEBRA LINEAL

9.5

1.)

Si desenvolupem el càlcul del producte de la matriu A per un vector columna (S(m), L(m), I(m)), observem que:

$$S(m+1)=1.03\,S(m)-0.3\,I(m)$$

$$L(m+1)=0.1\,S(m)+0.5\,L(m)+0.3\,I(m)$$

$$I(m+1)=0.5\,L(m)+0.1\,I(m)$$

És a dir, que, fixant-nos en la segona columna, el terme a_{12} val 0, indicant que la població latent no passa a ser població sana en cap cas; els termes a_{22} i a_{32} valen 0.5, el que significa que, en una setmana, la meitat de la població latent continua latent i l'altra meitat passa a ser simptomàtica.

En la tercera columna, el terme a_{13} val -0.3 i el terme a_{23}, +0.3, i això és que la població sana disminueix a raó del 30% dels infectats en una setmana, i aquests passen a ser nous individus latents, el que es pot escriure com a:

$$\textit{ritme d'aparició de nous latents}=0.3\cdot\frac{\textit{infectats totals}}{\textit{setmana}}$$

Aquest 0.3 que apareix és el que anomenem taxa d'infecció.

Finalment, el coeficient a_{33} val 0.1, el que significa que, quan ha passat una setmana, el 10% dels malalts infecciosos continuen en aquest estat.

NOTA: com que aquest model no té cap variable que tinga en compte la població que ha estat infecciosa i ha superat la malaltia, sinó que simplement considera que, després d'una setmana, el 10% dels infecciosos encara ho estan i els altres moren, suposarem que la taxa de supervivència és de 0.1 i és acumulativa setmana a setmana.

A més a més, el càlcul que es fa respecte de la població latent, considerant que en una setmana la meitat passa a ser infecciosa i l'altra meitat roman latent, és una aproximació, ja que en realitat el model no calcula com que quan passen 15 dies tots els latents són infecciosos, sinó que la població latent (si suposem que només hi ha individus latents) pateix un descens exponencial de semivida 7 dies.

2.)

Primerament, calculem el polinomi característic:

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1.03-x & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5-x & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1-x \end{vmatrix}$$

$$P(x)=-x^3+1.63\,x^2-0.518\,x-0.118$$

El factoritzem i calculem les tres arrels, que són reals i diferents, el que ens assegra que la matriu serà diagonalitzable sobre els reals:

$$P(x)=-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

$$a_1=163/300+11029/(300((90i)\sqrt{(26440943)}-1061783)^{(1/3)})+1/300((90i)\sqrt{(26440943)}-1061783)^{(1/3)}$$

$$a_2=163/300+(11029(-1)^{(2/3)})/(300((90i)\sqrt{(26440943)}-1061783)^{(1/3)})-1/300(-1)^{(1/3)}((90i)\sqrt{(26440943)}-1061783)^{(1/3)}$$

$$a_3=163/300-(11029(-1)^{(1/3)})/(300((90i)\sqrt{(26440943)}-1061783)^{(1/3)})+1/300(-1)^{(2/3)}((90i)\sqrt{(26440943)}-1061783)^{(1/3)}$$

Com que aquests valors són complicats, utilitzarem aproximacions per a interpretar els resultats. No obstant, per a realitzar els càlculs computacionals és més adequat emprar les arrels exactes per evitar errors de precisió.

$$a_1\approx 0.972929$$

$$a_2\approx 0.807302$$

$$a_3\approx -0.150232$$

La forma diagonal de la matriu A, és una matriu que té els tres valors propis a la diagonal principal i 0 a la resta d'entrades:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

On els valors de les a_i els tenim calculats dalt.
Sabem que, com que la matriu D és diagonal,

$$D^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{pmatrix}$$

Quan fem tendir n a infinit, $\lim_{n\to\infty} D^n$ és la matriu formada pels límits de les seves entrades, que són:

$$\lim_{n\to\infty} a_i^n = 0$$

perquè les a_i tenen un valor absolut menor que 1.
Per tant $\lim_{n\to\infty} D^n = O$ (la matriu de zeros de tres files per tres columnes).

3.)

Com que A és la matriu de l'aplicació lineal f:

f(S(m), L(m), I(m)) = (S(m + 1), L(m + 1), I(m + 1))

Quan apliquem n vegades f, el que tenim és:

f(...(f(S(m), L(m), I(m)))...) = (S(m + n), L(m + n), I(m + n))

I fent m = 0, obtenim (S(n), L(n), I(n)) en funció de (S(0), L(0), I(0)) amb l'aplicació donada per la matriu A^n .

Per a calcular aquesta matriu, com que A diagonalitza, l'escriurem com a $A=P^{-1}DP$. Aleshores per a calcular fem $A^n=(P^{-1}DP)^n=P^{-1}D^nP$.

P és la matriu del canvi de base de la base canònica a la base de veps. El primer que farem serà trobar aquesta base:

$$v_1 \in ker(A-a_1 \cdot I) \approx \lambda(-0.93393,-0.310178,-0.177665)$$

$$v_2 \in ker(A-a_2 \cdot I) \approx \lambda(-0.613861,-0.644613,-0.455684)$$

$$v_3 \in ker(A-a_3 \cdot I) \approx \lambda(0.221655,-0.436414,0.872016)$$

I agafant aquesta base de veps, la matriu del canvi de base queda:

$$P=\begin{pmatrix} -0.93393 & -0.613861 & 0.221655 \\ -0.310178 & -0.644613 & -0.436414 \\ -0.177665 & -0.455684 & 0.872016 \end{pmatrix}$$

Calculem la seva inversa:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1.51284 & 0.863381 & 0.816638 \\ 0.691862 & -1.54076 & -0.946959 \\ 0.0533147 & -0.629239 & 0.818304 \end{pmatrix}$$

I recordant quan valia D^n , calculem A^n :

$$\begin{pmatrix} 0.619542 & -0.35243 & -0.333859 \\ 0.205267 & -0.115945 & -0.110203 \\ 0.117477 & -0.066195 & -0.0629893 \end{pmatrix}$$

Amb això, obtenim que (S(30), L(30), I(30)) = (2074230, 687237, 393313).

Si fem que el model es perpetue durant un temps indefinit, el càlcul és el límit del vector (S(n) , L(n), I(n)) quan n tendeix a infinit, i com hem vist abans això es calcularia:

$$\lim_{n\to\infty}(S(n),L(n),I(n))=\lim_{n\to\infty}(A^n*(S(0),L(0),I(0)))=\lim_{n\to\infty}A^n*(S(0),L(0),I(0))$$

I hem de recordar que com $A^n=(P^{-1}D\,P)^n=P^{-1}D^n P$ i $\lim_{n\to\infty}D^n=O$, $\lim_{n\to\infty}A^n=O$, que és la matriu de l'aplicació nula, i per això en aplicarla a qualsevol condició inicial, el límit del vector és el (0, 0, 0), és a dir, que la població s'extingeix en el límit.

4.)

Siguen $\lambda_{1,}\lambda_{2,}\lambda_3$ els valors propis de la matriu A i $v_{1,}v_{2,}v_3$ els vectors propis associats. Ara, escrivim $x(m)=a(m)v_1+b(m)v_2+c(m)v_3$, que es pot fer de forma única perquè els vectors propis formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Com que multiplicar per una matriu és lineal, podem descomposar:

$$a(m+1)v_1+b(m+1)v_2+c(m+1)v_3=x(m+1)=A\,x(m)=A(a(m)v_1+b(m)v_2+c(m)v_3)$$

I ara, aplicant la propietat distributiva i recordant la definició de vector propi:

$$A\,x(m)=\lambda_1 a(m)v_1+\lambda_2 b(m)v_2+\lambda_3 c(m)v_3$$

Finalment, com que els v_i són independents, les descomposicions són úniques i:

$$a(m+1)=\lambda_1 a(m)$$

$$b(m+1)=\lambda_2 b(m)$$

$$c(m+1)=\lambda_3 c(m)$$

I aplicant n vegades aquestes igualtats, arribem a,

$$a(n)=\lambda_1 a(n-1)=...=\lambda_1^n a(0)$$

$$b(n)=\lambda_2 b(n-1)=...=\lambda_2^n b(0)$$

$$c(n)=\lambda_1 c(n-1)=...=\lambda_1^n c(0)$$

Per tant, si $x(0)=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, aleshores $x(n)=\lambda_1^n x_1v_1+\lambda_2^n x_2v_2+\lambda_3^n x_3v_3$, escrit en la base de veps, $x(0)=(x_{1,}x_{2,}x_3)$, aleshores $x(n)=(\lambda_1^n x_{1,}\lambda_2^n x_{2,}\lambda_3^n x_3)$.

5.)

Com que la proporció entre les coordenades de $x(k)$ és constant, podem fer $x(n)=\xi(n)x(0)$, on $(\xi(n))_{n\geq 0}$ és una successió d'escalars:

Anomenem $\mu=\frac{x(k)_1}{x(k)_2}$, $\chi=\frac{x(k)_2}{x(k)_3}$, $\xi(k)=\frac{x(k)_3}{x(0)_3}$. Podem fer aquesta última definició perquè la definició de χ ens assegura que $x(0)_3$ no pot ser nul.

Ara, hem de comprovar que $x(n)_1=\xi(n)x(0)_1$, $x(n)_2=\xi(n)x(0)_2$:

$$x(n)_2=\chi\cdot x(n)_3=\chi\cdot\xi(n)\cdot x(0)_3=\xi(n)\cdot\chi\cdot x(0)_3=\xi(n)\cdot x(0)_2$$

$$x(n)_1=\mu\cdot x(n)_2=\mu\cdot\xi(n)\cdot x(0)_2=\xi(n)\cdot\mu\cdot x(0)_2=\xi(n)\cdot x(0)_1$$

En particular, $x(1)=\xi(1)x(0)$. Però $x(1)=A\,x(0)$, i precisament aquesta és la definició de vector propi. Per tant, $x(0)$ és un vector propi.

6.)

Considerem la matriu del nou endomorfisme g, B:

$$B=\begin{pmatrix}1.03 & 0 & -0.1\\ 0.1 & 0.5 & 0.1\\ 0 & 0.5 & 0.1\end{pmatrix}$$

Calculem el polinomi característic i el factoritzem:

$$Q(x)=\begin{vmatrix}1.03-x & 0 & -0.1\\ 0.1 & 0.5-x & 0.1\\ 0 & 0.5 & 0.1-x\end{vmatrix}$$

$$Q(x)=-x^3+1.63x^2-0.618x-0.005$$

$$Q(x)\approx-(x+0.00792419)(x-0.619664)(x-1.01826)$$

Primerament observem que la matriu diagonalitza perquè els tres valors propis són diferents. Aleshores existeix una base de vectors propis u_1, u_2, u_3, els assignem els valors propis en l'ordre que estan escrits a la factorització.

$$u_1\in ker(B-b_1\cdot I)\approx\lambda(0.971163, 0.209388, 0.114014)$$

$$u_2\in ker(B-b_2\cdot I)\approx\lambda(0.166608, 0.710538, 0.683651)$$

$$u_3\in ker(B-b_3\cdot I)\approx\lambda(0.0937624, -0.21006, 0.973182)$$

La clau és que el polinomi característic té una arrel més gran que la unitat, i que el vector propi u_1 que correspon a una distribució poblacional té sentit perquè les tres components són positives, aleshores, si expressem $x(0)=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$. Per tant, si la població té una proporció que correspon al vector propi u_1, quan passe una setmana haurà augmentat, perquè el valor propi que li correspon és més gran que la unitat, per tant, la població no s'extingirà.

9.5

PROBLEMA D'AVALUACIÓ CONTINUADA

ALGEBRA LINEAL 2014-2015

La propagació del virus de l'ebola a Libèria ha seguit durant aquest estiu aproximadament el model següent:

$$\begin{pmatrix} S(m+1) \\ L(m+1) \\ I(m+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S(m) \\ L(m) \\ I(m) \end{pmatrix}, \quad \text{on } A = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix},$$

i S_m, L_m, I_m indica la quantitat de població "sana", "latent" (primers 15 dies d'infecció, no tenen símptomes i no contagien), i "infecciosos" (manifesten símptomes i contagien), respectivament, en la setmana m, vegeu [1].

1. Interpreteu els coeficients de la segona i tercera columna de la matriu A en termes de taxa d'infecció, índex de supervivència dels infecciosos i durada del període de latència.
2. Trobeu la forma diagonal D de la matriu A i calculeu $\lim_{m\to\infty} D^m$.
3. Si la població en la primera setmana de juny era de $(S(0), L(0), I(0)) = (3350000, 2100, 1500)$, calculeu la població que hi haurà a finals d'any, $(S(30), L(30), I(30))$, i proveu que, si la propagació de la malaltia segueix aquest model per temps indefinit, la població de Liberia s'acabarà extingint.

Donada una matriu 3×3, A, que diagonalitza amb VAPs reals, considerem el sistema dinàmic discret donat per l'equació

$$x(m+1) = Ax(m), \quad m \geq 0.$$

Una *solució* d'aquest sistema dinàmic amb condicions inicials $x_0 \in \mathbb{R}^3$ és una successió de vectors $(x(k))_{k\geq 0}$, $x(k) \in \mathbb{R}^3$ amb $x(0) = x_0$ i que compleixen l'equació.

4. Escriviu les solucions del sistema dinàmic en funció dels VEP's i VAP's d'A. Indicació: expresseu $x(0)$ en la base de VEPs.
5. Demostreu que si $(x(k))_{k\geq 0}$ és una solució del sistema que preserva la proporció entre les coordenades de $x(k)$ (és a dir $\frac{x(k)_1}{x(k)_2}$ i $\frac{x(k)_2}{x(k)_3}$ són constants que no depenen de k), aleshores aquesta solució té com a condició inicial un VEP d'A. Aquestes solucions s'anomenen *modes estacionaris*.
6. Verifiqueu que si s'aconsegueix reduir la taxa d'infecció de 0.3 a 0.1 , llavors la població no s'extingeix. Calculeu la distribució de sans, latents i infecciosos a la que es tendirà en aquest cas i relacioneu-la amb algun mode estacionari.

References

[1] J. A. Lewnard, M. L. Ndeffo Mbah, J. A. Alfaro-Murillo, F. L. Altice, L. Bawo, T. G Nyenswah, A. P. Galvani, *Dynamics and control of Ebola virus transmission in Montserrado, Liberia: a mathematical modelling analysis*, The Lancet Infectious Diseases (2014).

Tots els càlculs que no es mostren han estat fets emprant eines matemàtiques computacionals com la Calculadora Wiris o el Wolfram Alpha Online. Degut a la necessitat de càlcul decimal del problema en diversos apartats s'ha hagut d'utilitzar aquests instruments. De totes maneres les solucions numèriques d'algun apartat no són totalment exactes doncs resultaven nombres irracionals amb una part complexa pràcticament nul·la.

1)

En primer lloc plantegem la igualtat del producte de la matriu de transicions per el vector columna com tres igualtats:

$$\left.\begin{aligned} S(m+1) &= 1.03\,S(m) - 0.3\,I(m) \\ L(m+1) &= 0.1\,S(m) + 0.5\,L(m) + 0.3\,I(m) \\ I(m+1) &= 0.5\,L(m) + 0.1\,I(m) \end{aligned}\right\}$$

En la primera igualtat veiem que el nombre de persones sanes d'una setmana és 1.03 pel nombre de persones de la setmana anterior (és un factor més gran que 1 i per tant el creixement demogràfic de Libèria és positiu) menys 0.3 pel nombre d'infectats de la setmana anterior. Aquest coeficient (**0.3, 30%**) correspon a la **taxa d'infecció** (percentatge de població infectada que transmet la malaltia a la gent sana).

De la tercera igualtat s'observa que el nombre de persones infectades d'una setmana és 0.5 per les persones d'estat latent la setmana anterior i 0.1 per les infeccioses de la setmana anterior. El fet que el 10% de les infeccioses d'una setmana sigui sent infecciosa la següent (admetent que no hi ha cura total de la malaltia) fa que puguem parlar d'un **índex de supervivència dels infecciosos del 10% setmanal**.

En últim lloc, podem veure a partir de la segona i la tercera igualtat que el 50% de persones latents una setmana ho segueixen sent la següent però que l'altre 50% passen a ser infeccioses. Això s'ha d'interpretar com què de mitjana una persona està en estat latent dues setmanes i per tant **el període de latència és de 15 dies** tal i com ens especificava l'enunciat.

2)

El primer pas per diagonalitzar la matriu és trobar-ne els valors propis i vectors propis.

Per fer-ho calculem el polinomi característic de la matriu i a continuació les seves arrels:

$$A = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix};$$

$$Char\,(A, X) = \begin{vmatrix} 1.03 - x & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 - x & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 - x \end{vmatrix} = -x^3 + 1.63x^2 - 0.518x - 0.253 =$$

$$= -(x - 0.97293)(x - 0.807303)(x + 0.150233)\,.$$

Podem observar que el polinomi característic té tres arrels diferents i cadascuna d'aquestes arrels és un valor propi. La matriu diagonalitzarà ja que la multiplicitat algebraica i la geomètrica de cada arrel seran iguals i valdran 1.

Per trobar el subespai generat pels vectors propis d'un valor propi determinat cal trobar el nucli de la matriu menys el valor propi per la identitat. Si ho passem en forma d'equacions cal resoldre el següent sistema:

$$(1.03 - v)x - 0.3z = 0.1x + (0.5 - v)y + 0.3z = 0.5y + (0.1 - v)z = 0$$

On v és el valor propi corresponent.

Les solucions per a cada valor propi són les següents:

Valor Propi	**Subespai dels vectors Propis**
0.97293	$<(-0.93393, -0.310178, -0.177665)>$
0.807303	$<(-0.613861, -0.644613, -0.455684)>$
-0.150233	$<(0.221655, -0.436414, 0.872016)>$

Posant un vector propi de cada subespai en una matriu per columnes, obtenim una matriu P que satisfarà que $P^{-1}AP = D$ on D és la matriu diagonal que té a cada entrada de la diagonal principal un valor propi.

$$P = \begin{pmatrix} -0.93393 & -0.613861 & 0.221655 \\ -0.310178 & -0.644613 & -0.436414 \\ -0.177665 & -0.455684 & 0.872016 \end{pmatrix};$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0.97293 & 0 & 0 \\ 0 & 0.807303 & 0 \\ 0 & 0 & -0.150233 \end{pmatrix};$$

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{D^m}$$

Per calcular el límit següent apliquem que al elevar una matriu diagonal a una potència "n" queden els elements de la diagonal elevats a "n".

Aleshores: $\lim_{m\to\infty} D^m = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} 0.97293^m & 0 & 0 \\ 0 & 0.807303^m & 0 \\ 0 & 0 & -0.150233^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3)

Com que per calcular la població de cada tipus d'una setmana agafem la de la setmana anterior i la multipliquem per la esquerra per la matriu A, per resoldre l'apartat utilitzarem la fórmula de la progressió geomètrica fent que A sigui la raó i les condicions inicials el primer terme. Aleshores:

$$\begin{pmatrix} S(30) \\ L(30) \\ I(30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}^{30} \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2074200 \\ 687240 \\ 393310 \end{pmatrix}$$

Observem que la població total la primera setmana era de 3353600 habitants i al cap de 30 setmanes és de 3154800. Per tant en aquestes 30 setmanes no només el nombre d'habitants infecciosos ha augmentat molt (s'ha multiplicat per 260 aproximadament) sinó que la població total del país ha disminuït.

Si aquesta evolució continués per temps indefinit , la població de Libèria acabaria extingida. Vegem-ho:

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} S(t) \\ L(t) \\ I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} S(0) \\ L30) \\ I(0) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left((PDP^{-1})^t \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(PD^tP^{-1} \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4)

En primer lloc construïm la matriu de canvi de base que va de la base canònica (e) a la dels vectors propis (la notarem com base v d'ara en endavant):

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1.5128 & 0.86338 & 0.81664 \\ 0.69186 & -1.5408 & -0.94696 \\ 0.053315 & -0.62924 & 0.8183 \end{pmatrix};$$

La matriu P utilitzada anteriorment és exactament aquesta matriu ja que du en columnes els vectors propis en base estàndard.

Aleshores,

$$\begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 3350000 \\ 2100 \\ 1500 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} -1.5128 & 0.86338 & 0.81664 \\ 0.69186 & -1.5408 & -0.94696 \\ 0.053315 & -0.62924 & 0.8183 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3350000 \\ 2100 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.0648 \cdot 10^6 \\ 2.3131 \cdot 10^6 \\ 1.7851 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

A partir de l'expressió de l'enunciat i de la forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} S(m+1) \\ L(m+1) \\ I(m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(m) \\ L(m) \\ I(m) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S(m) \\ L(m) \\ I(m) \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0.97293^m & 0 & 0 \\ 0 & 0.807303^m & 0 \\ 0 & 0 & -0.150233^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix}_v$$

5)

Veiem que $(x(k))_{k>0}$ preserva les proporcions entre les seves coordenades. Aleshores podem definir el quocient $\frac{(x(k))_2}{(x(k))_1} = a$ i $\frac{(x(k))_3}{(x(k))_2} = b$. El vector k-èssim resulta:

$$x(k) = \begin{pmatrix} (x(k))_1 \\ (x(k))_2 \\ (x(k))_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x(k))_1 \cdot \frac{(x(k))_2}{(x(k))_1} \cdot \frac{(x(k))_3}{(x(k))_2} \\ (x(k))_2 \cdot \frac{(x(k))_3}{(x(k))_2} \\ (x(k))_3 \end{pmatrix} = (x(k))_3 \begin{pmatrix} a \cdot b \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'objectiu és demostrar que la condició inicial és un vector propi de la matriu.

$$x(0) = (x(0))_3 \begin{pmatrix} a \cdot b \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per definició, un vector propi és aquell que al ser multiplicat per la matriu dóna un múltiple seu. Si multipliquem $x(0)$ per la dreta de la matriu, no estem fent altra cosa que calcular $x(1)$. Com que :

$$A \cdot x(0) = x(1) = (x(1))_3 \begin{pmatrix} a \cdot b \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(x(1))_3}{(x(0))_3} (x(0))_3 \begin{pmatrix} a \cdot b \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(x(1))_3}{(x(0))_3} \, x(0)$$

Així doncs, $x(0)$ és vector propi de valor propi $\frac{(x(1))_3}{(x(0))_3}$ de la matriu A.

6)

Si reduïm la taxa d'infecció del 30 al 10 % la matriu de transicions resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix};$$

Utilitzant el mateix procediment que en el segon i tercer apartats del problema, busquem els valors propis, diagonalitzem i vegem que passa amb la població quan suposem que la matriu de transicions es manté constant per temps indefinit.

$$Char\ (A,X) = \begin{vmatrix} 1.03-x & 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.5-x & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 1.63x^2 - 0.618x - 0.005 =$$

$$= -(x-1.01826)(x-0.619664)(x+0.00792419)\ .$$

Plantegem el sistema per a trobar els generadors de vectors propis:

$$(1.03-v)x - 0.1z = 0.1x + (0.5-v)y + 0.1z = 0.5y\ + (0.1-v)z\ = 0$$

On v és cadascun dels vectors propis.

Resolent el sistema, les solucions per a cada valor propi són les següents:

Valor Propi	**Subespai dels vectors Propis**
1.01826	$< (0.971163, 0.209388, 0.114014) >$
0.619664	$< (0.166608, 0.710538, 0.683651) >$
-0.00792419	$< (0.0937624, -0.21006, 0.973182) >$

Calculem la matriu de canvi de base a una matriu diagonal:

$$P = \begin{pmatrix} 0.971163 & 0.166608 & 0.0937624 \\ 0.209388 & 0.710538 & -0.21006 \\ 0.114014 & 0.683651 & 0.973182 \end{pmatrix};$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1.01826 & 0 & 0 \\ 0 & 0.619664 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00792419 \end{pmatrix};$$

Mirem que passa si aquesta evolució continués per temps indefinit:

Per veure si la població acaba extingida o no, fem el límit quan el temps tendeix a infinit:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1.01826 & 0 & 0 \\ 0 & 0.619664 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00792419 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} \infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I per tant la població no s'extingeix.

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} S(t) \\ L(t) \\ I(t) \end{pmatrix}_e = P \begin{pmatrix} 1.01826 & 0 & 0 \\ 0 & 0.619664 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00792419 \end{pmatrix}^t P^{-1} \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix}_e =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} 1.0412 \cdot 1.0183^t & -0.12224 \cdot 1.0183^t & -0.1267 \cdot 1.0183^t \\ 0.22449 \cdot 1.0183^t & -0.026356 \cdot 1.0183^t & -0.0237618 \cdot 1.0183^t \\ 0.12224 \cdot 1.0183^t & -0.014351 \cdot 1.0183^t & -0.014875 \cdot 1.0183^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ L(0) \\ I(0) \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$ tot seguint el mode estacionari donat per la matriu.

La distribución de población a la que tiende es la misma que la del VEP v_1 (modo estacionario dominante)

$\shortparallel$

(0.971163, 0.209388, 0.114014)